A HOMBROS
DE GIGANTES
HAWKING
CRÍTICA

A HOMBROS DE GIGANTES

Las Grandes Obras de la Física y la Astronomía

Edición comentada de

STEPHEN HAWKING

CRÍTICA

A HOMBROS DE GIGANTES

EDICIÓN COMENTADA DE

STEPHEN HAWKING

¿Qué leyes naturales gobiernan los cielos? ¿Puede decirse que el Universo tiene un centro? ¿Dónde se sitúa la tierra en relación con ese centro? ¿Cómo se mueven los planetas? ¿Qué los mantiene en órbita? Miles de años llevan los seres humanos tratando de responder a estas preguntas.

En *A hombros de gigantes*, el gran físico teórico Stephen Hawking nos explica cómo los grandes hombres de ciencia como Copérnico, Galileo, Kepler, Newton y Einstein construyeron sus teorías a partir de las geniales contribuciones de sus predecesores y cómo nos han legado, en conjunto, un tesoro de conocimientos científicos que nadie puede ignorar.

En este libro impar se reúnen por primera vez en la historia de la edición las cinco mayores obras de la Física y la Astronomía precedidas por breves ensayos de Stephen Hawking en los que explica quiénes fueron los genios que las escribieron, los grandes retos que tuvieron que afrontar (el compromiso de Copérnico con la verdad pese a su condición de sacerdote; el proceso inquisitorial que sufrió Galileo; las desgracias familiares y financieras de Kepler, las apasionadas trifulcas de Newton, los humildes orígenes de Einstein...) y su perenne contribución a la cultura universal. Hallamos en él, en efecto, escritos originales de Albert Einstein publicados por primera vez en *El principio de relatividad* y los libros siguientes: *Sobre las revoluciones de las esferas celestiales*, de Nicolás Copérnico; *Diálogos sobre las dos ciencias*, de Galileo Galilei; el libro quinto de *Armonías del mundo*, de Johannes Kepler y los *Principia* de Isaac Newton.

A HOMBROS DE GIGANTES

A HOMBROS DE GIGANTES

LAS GRANDES OBRAS DE LA FÍSICA Y LA ASTRONOMÍA

Edición comentada de
STEPHEN HAWKING

CRÍTICA
BARCELONA

Primera edición: mayo de 2003
Primera edición en rústica: mayo de 2010
Cuarta impresión: mayo de 2013

No se permite la reproducción total o parcial de este libro, ni su incorporación a un sistema informático, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio, sea éste electrónico, mecánico, por fotocopia, por grabación u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito del editor. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (Art. 270 y siguientes del Código Penal)

Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos) si necesita reproducir algún fragmento de esta obra. Puede contactar con CEDRO a través de la web www.conlicencia.com o por teléfono en el 91 702 19 70 / 93 272 04 47

Título original:
ON THE SHOULDERS OF GIANTS
THE GREAT WORKS OF PHYSICS AND ASTRONOMY

Diseño de la cubierta: Jaime Fernández
Fotos de los autores: cortesía de Book Laboratory
Fotocomposición: Pacmer, S. A.
© 2002 by Stephen Hawking
© 2010 de la presente edición para España y América:
CRÍTICA, S. L., Diagonal, 662-664, 08034 Barcelona
e-mail: editorial@ed-critica.es
http://www.ed-critica.es

ISBN: 978-84-9892-094-9
Depósito legal: B. 939-2012
Impreso y encuadernado en España por EGEDSA

NOTA A ESTA EDICIÓN

David Jou ha traducido la Introducción a esta obra, así como los Agradecimientos y las presentaciones a la «Vida y obra» de Copérnico, Galileo, Newton y Einstein. Suya es también la versión española que actualiza la anotación de la obra de Copérnico, Galileo y Newton.

Respecto a los textos de los científicos aquí reunidos, nuestra edición parte de traducciones directas de sus respectivos originales, según se detalla a continuación:

Sobre las revoluciones de los orbes celestes, de Nicolás Copérnico, se editó por vez primera en 1543 bajo el título *De revolutionibus orbium coelestium*. La versión castellana que reproducimos se debe a Carlos Mínguez y Mercedes Testal y fue publicada con anterioridad por Editora Nacional en Madrid, 1982.

La primera impresión del *Diálogo sobre dos nuevas ciencias*, de Galileo Galilei, a cargo de Louis Elzevier apareció en Leiden en 1638 bajo el título *Discorsi e Dimostrazione Mathematiche intorno a due nuove scienze*. Nuestra edición sigue la que, elaborada por Carlos Solís y Javier Sádaba, fue publicada por Editora Nacional (*Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, Madrid, 1976).

De *Las armonías del mundo*, de Johannes Kepler, se ha seleccionado aquí el Libro V. La obra fue impresa en 1619 bajo el título *Harmonices Mundi*. La traducción castellana del original latino ha sido llevada a cabo por vez primera por José Luis Arántegui Tamayo.

Los *Principios matemáticos de la filosofía natural*, de Isaac Newton, fueron publicados en 1687 bajo el título *Philosophicae naturalis principia mathematica*. La traducción castellana reproduce aquí la elaborada por Eloy Rada García y publicada por Alianza (Madrid, 1987).

De la obra de Albert Einstein se han seleccionado siete ensayos de la colección de artículos publicada en alemán bajo el título *Das Relativitätsprinzip* y recogida en *The Principles of Relativity: A Collection of Original Papers on the Special Theory of Relativity*, obra que reúne los trabajos de H.A. Lorenz, A. Einstein, H. Minkowski y H. Weyl (Teubner, Leipzig, 1922). La traducción castellana ha sido llevada a cabo por Javier García Sanz. Los dos primeros artículos reproducen la publicada previamente por Crítica en 2001. Los cinco restantes eran inéditos en castellano hasta hoy. Sus respectivos títulos originales, así como sus datos editoriales, pueden hallarse en nota a pie de página al inicio de cada uno de ellos.

AGRADECIMIENTOS

Este libro no habría sido posible sin la ayuda de mucha gente de talento que prestó su colaboración en diversas etapas del desarrollo de la obra. Entre los que merecen una gratitud especial se encuentran Michael Rosin, consultor de Running Press, Gil King, y la señora Karen Sime, ayudante del profesor Stephen Hawking.

También debemos expresar nuestra gratitud a diversos miembros pasados y presentes del equipo de Running Press: Carlo de Vito, Kathleen Greczylo, Kelly Pennick, Bill Jones y Deborah Grandinetti.

INTRODUCCIÓN

«Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes», escribió Isaac Newton a Robert Hooke en 1676. Aunque se refería a sus descubrimientos en óptica más que a sus trabajos, más importantes, sobre la gravitación y las leyes del movimiento, el comentario de Newton refleja adecuadamente cómo la ciencia, y de hecho el conjunto de la civilización, consiste en una serie de pequeños progresos, cada uno de los cuales se alza sobre los alcanzados anteriormente. Éste es el tema de este volumen fascinante, que utiliza textos originales para trazar la evolución de nuestra imagen del firmamento desde la revolucionaria propuesta de Nicolás Copérnico de que la Tierra gira alrededor del Sol a la no menos revolucionaria de Albert Einstein de que el espacio y el tiempo son curvados y deformados por la masa y la energía. Es una historia impresionante, porque tanto Copérnico como Einstein han contribuido a cambiar profundamente la manera de ver nuestro lugar en el orden cósmico. Pasó nuestro lugar de privilegio en el centro del Universo, pasaron la eternidad y la certidumbre, y pasaron el espacio y el tiempo absolutos, sustituidos por láminas elásticas.

No sorprende que ambas teorías chocaran con una encarnizada oposición: la Inquisición en el caso de la teoría copernicana y el nazismo en el caso de la relatividad. Actualmente, tendemos a menospreciar como ingenua la antigua visión del universo de Aristóteles y Ptolomeo, en la cual la Tierra estaba en el centro del universo y el Sol giraba a su alrededor. Sin embargo, no deberíamos desdeñar demasiado su modelo, que no era en absoluto estúpido. Incorporaba la idea aristotélica de que la Tierra es una esfera y no una placa plana, y resultaba razonablemente preciso en su función principal, la de predecir las posiciones aparentes de los cuerpos celestes en el firmamento, con finalidades astrológicas. De hecho, resultaba casi tan preciso como la herética sugerencia formulada por Copérnico en 1543 de que la Tierra y los planetas giran en órbitas circulares alrededor del Sol.

Galileo encontró convincente la propuesta de Copérnico, no porque concordara mejor con las observaciones de las posiciones planetarias, sino por su simplicidad y elegancia, que contrastaban con los complicados epiciclos del modelo ptolemaico. En los *Diálogos sobre dos nuevas ciencias* los personajes de Galileo, Salviati y Sagredo presentaban argumentos persuasivos a favor de la teoría de Copérnico. Pese a ello, su tercer personaje, Simplicio, aún podía defender a Aristóteles y Ptolomeo y sostener que en realidad la Tierra estaba en reposo y el Sol giraba a su alrededor.

De hecho, hasta que los trabajos de Kepler no dieron mayor precisión al modelo heliocéntrico y Newton no formuló las leyes del movimiento, el modelo geocéntrico no perdió toda su credibilidad. Ello supuso un gran cambio en nuestra visión del Universo: si no nos hallamos en el centro, ¿tiene nuestra existencia alguna importancia? ¿Por qué Dios o las leyes de la naturaleza deben preocuparse por lo que ocurre en la tercera roca que gira alrededor del Sol, que es donde nos dejó Copérnico? Los científicos modernos han ido mucho más allá que Copérnico en su búsqueda de una descripción del universo en que el hombre (en el antiguo sentido anterior a lo políticamente correcto) no jugara ningún papel. Aunque esta manera de abordar el problema ha conseguido descubrir leyes objetivas impersonales que rigen el universo, no ha explicado, al menos por ahora, por qué el universo es como es en lugar de ser uno de los muchos otros posibles universos que también serían consistentes con estas leyes.

Algunos científicos pretenden que esta limitación es tan sólo provisional, y que cuando descubramos la teoría unificada definitiva, ésta prescribirá de forma única el estado del universo, la intensidad de la gravitación, la masa y la carga del electrón, y muchas otras constantes por el estilo. Sin embargo, muchas características del universo (como por ejemplo el hecho de que estemos en el tercer planeta, en vez de en el segundo o en el cuarto) parecen arbitrarias y accidentales más que ser predicciones de una ecuación maestra. Mucha gente (incluido yo mismo) cree que la aparición de un universo tan complejo y estructurado requiere invocar el llamado principio antrópico, que nos vuelve a situar en la posición central que hemos tenido la modestia de rechazar desde la época de Copérnico. El principio antrópico se basa en el hecho evidente de que no estaríamos preguntándonos por la naturaleza del Universo si éste no hubiera contenido estrellas, planetas y compuestos químicos estables, entre otros prerrequisitos de vida (¿inteligente?) tal como la que conocemos. Si la teoría definitiva hiciera una predicción única para el estado y el contenido del Universo, sería una coincidencia muy notable que este estado se hallara en el diminuto subconjunto de estados compatibles con la vida.

Sin embargo, la obra del último pensador de este volumen, Albert Einstein, abre una nueva posibilidad. Einstein desempeñó un papel muy importante en el desarrollo de la teoría cuántica, según la cual un sistema no tiene una sola historia, como acostumbramos a pensar, sino muchas historias posibles, cada una con una cierta probabilidad. Einstein, además, fue casi el único responsable de la teoría general de la relatividad, en la que el espacio y el tiempo se curvan y se convierten en entidades dinámicas. Esto significa que están sujetos a la teoría cuántica, y que el mismo Universo tiene todas las formas y todas las historias posibles. La mayoría de ellas sería completamente inadecuada para el desarrollo de la vida, pero unas pocas reúnen todas las condiciones necesarias para ello. No importa que estos pocos universos tengan una probabilidad muy baja respecto a los demás: los universos sin vida no tendrían a nadie que los observara. Es suficiente que haya al menos una historia en que se desarrolle la vida, de la cual nosotros somos una evidencia, aunque no lo seamos de inteligencia. Newton dijo que había subido a hombros de gigantes. Pero tal como este volumen ilustra muy bien, nuestra comprensión no avanza tan sólo edificando lenta y continuamente a partir de los trabajos anteriores. Algunas veces, como ocurrió con Copérnico o con Einstein, tenemos que hacer un salto intelectual a una nueva visión del mundo. Quizá Newton debería haber dicho «usé hombros de gigantes como trampolín».

Nicolás Copérnico

(1473-1543)

VIDA Y OBRA

Nicolás Copérnico, clérigo y matemático polaco, es considerado generalmente como el fundador de la astronomía moderna. Este honor le es atribuido porque fue el primero en llegar a la conclusión de que los planetas y el Sol no giraban alrededor de la Tierra. Ciertamente, especulaciones referentes a un universo heliocéntrico (centrado en el Sol) existían ya desde la época de Aristarco (fallecido hacia el 230 a.C.), pero la idea no fue examinada seriamente antes de Copérnico. Aun así, para comprender las contribuciones de Copérnico es importante tener presentes las implicaciones religiosas y culturales de este descubrimiento científico en su época.

Hacia el siglo IV a.C., el pensador y filósofo griego Aristóteles (382-322 a.C.) ideó un sistema planetario en su libro *Sobre los cielos* (*De caelo*), y concluyó que como la sombra de la Tierra sobre la Luna durante los eclipses siempre es redonda, el mundo es esférico en vez de plano. También dedujo esta forma redonda de la Tierra a partir de la observación de que, cuando miramos alejarse un velero en el mar, antes desaparece por el horizonte el casco que las velas.

En la visión geocéntrica de Aristóteles, la Tierra estaba en reposo y los planetas Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno, además de la Luna y el Sol, describían órbitas circulares a su alrededor. Aristóteles creía también que las estrellas estaban fijadas a la esfera celestial, y su idea del tamaño del universo atribuía a estas estrellas fijas una distancia no mucho mayor que la órbita de Saturno. Creía en movimientos perfectamente circulares, y tenía buenos motivos para creer que la Tierra estaba en reposo. Una piedra que cae desde una torre lo hace verticalmente, en vez de desviarse hacia el oeste, como hubiera sido de esperar si la Tierra girara de oeste a este (Aristóteles no consideró que la piedra pudiera participar de la rotación de la Tierra). En un intento de combinar la física con la metafísica, Aristóteles propuso su teoría del «primer motor», que suponía que una fuerza mística más allá de las estrellas fijas producía los movimientos circulares que observamos. Este modelo de universo fue aceptado y abrazado por los teólogos, que interpretaron a menudo los primeros motores como ángeles, y la visión

de Aristóteles duró muchos siglos. Muchos estudiosos modernos creen que la aceptación universal de esta teoría por parte de las autoridades religiosas dificultó el progreso de la ciencia, ya que poner en duda las teorías aristotélicas era poner en entredicho la autoridad de la propia iglesia.

Cinco siglos tras la muerte de Aristóteles, un egipcio llamado Claudio Ptolomeo (87-150 d.C.) propuso un modelo de universo que predecía con mayor precisión los movimientos y las acciones de las esferas en el firmamento. Tal como Aristóteles, Ptolomeo creía que la Tierra estaba en reposo, y razonó que los objetos caen hacia el centro de la Tierra porque ésta debe estar inmóvil en el centro del universo. Ptolomeo llegó a elaborar un sistema en que los cuerpos celestes se movían alrededor de la circunferencia de sus epiciclos (un círculo en que el planeta se mueve y cuyo centro se desplaza simultáneamente a lo largo de un círculo de radio mayor). Para lograrlo, supuso la Tierra ligeramente separada del centro del universo y llamó «equante» a este nuevo centro (un punto imaginario que le ayudaba a tener en cuenta los movimientos planetarios observables). Ajustando convenientemente los tamaños de los círculos, Ptolomeo logró predecir los movimientos de los cuerpos celestes. La cristiandad tuvo pocos problemas con el modelo geocéntrico ptolemaico, que dejaba espacio en el universo, más allá de las estrellas fijas, para acomodar un cielo y un infierno, de manera que la Iglesia adoptó este modelo del universo como una verdad establecida.

La imagen aristotélica y ptolemaica del cosmos reinó, con pocas modificaciones significativas, durante más de mil años. No fue hasta 1514 que el sacerdote polaco Nicolás Copérnico revivió el modelo heliocéntrico del universo. Copérnico lo propuso meramente como un modelo para calcular las posiciones de los planetas porque temía que la Iglesia le tachara de hereje si lo proponía como una auténtica descripción de la realidad. A través de sus estudios de los movimientos planetarios, Copérnico llegó a convencerse de que la Tierra era un planeta más y que el Sol estaba en el centro del universo, hipótesis que se conoce como modelo heliocéntrico. La ruptura de Copérnico marcó uno de los mayores cambios de paradigma que ha habido en la historia, abrió el camino a la astronomía moderna y afectó ampliamente a la ciencia, la filosofía y la religión. El anciano clérigo dudaba si divulgar su teoría, ya que no quería irritar a las autoridades eclesiásticas, por lo cual sólo mostró su libro a unos pocos astrónomos. La obra cumbre de Copérnico, *De revolutionibus*, fue publicada cuando se hallaba en su lecho de muerte, en 1543. No vivió lo suficiente para ser testigo del caos que provocaría su teoría heliocéntrica.

Copérnico nació el 19 de febrero de 1473 en Torun, Polonia, en una familia de mercaderes y oficiales municipales que otorgaban una elevada prioridad a la educación. Su tío, Lucas Watzenrode, príncipe-obispo de Ermland, se aseguró de que su sobrino recibiera la mejor formación académica disponible en Polonia. En 1491, Copérnico ingresó en la Universidad de Cracovia, donde siguió una carrera de estudios generales durante cuatro años, antes de viajar a Italia para estudiar derecho y medicina, tal como era habitual en las élites polacas en aquel tiempo. Durante sus estudios en la Universidad de Bolonia (donde llegó a ser profesor de astronomía) Copérnico se alojaba en la casa de Domenico Maria de Novara, el famoso matemático de quien llegó a ser discípulo. Novara era crítico con Ptolomeo, cuya astronomía del siglo segundo contemplaba con escepticismo. En noviembre de 1500, Copérnico observó un eclipse de luna en Roma. Aunque pasó en Italia algunos años más estudiando medicina, nunca perdió su pasión por la astronomía.

Tras recibir el grado de doctor en derecho canónico, Copérnico ejerció la medicina en la corte episcopal de Heilsberg, donde vivía su tío. La realeza y los altos clérigos requerían sus servicios médicos, pero Copérnico dedicó la mayor parte de su tiempo al servicio de los pobres. En 1503 regresó a Polonia y se trasladó al palacio episcopal de su tío en Lidzbark Warmisnki. Allí, se ocupó de los asuntos administrativos de la diócesis y de hacer de asesor de su tío. Tras el fallecimiento de éste en 1512, Copérnico se desplazó definitivamente a Frauenburg y hubiera dedicado el resto de su vida al servicio eclesiástico, pero el estudioso en matemáticas, medicina y teología que había en él estaba tan sólo al inicio del trabajo que le haría famoso.

En marzo de 1513, Copérnico adquirió ochocientos bloques de piedra y un barril de cal para construir una torre de observación, en la cual utilizó instrumentos astronómicos como cuadrantes, paralácticos y astrolabios para observar el Sol, la Luna y las estrellas. El año siguiente, escribió un breve *Comentario sobre las teorías de los movimientos de los objetos celestes a partir de sus disposiciones* (*De hypothesibus motuum coelestium a se constitutis commentariolus*), pero rehusó publicar el manuscrito y sólo lo hizo circular discretamente entre unos pocos amigos de confianza. El *Comentario* fue un primer intento de proponer una teoría astronómica en que la Tierra se mueve y el Sol permanece en reposo. Copérnico no estaba satisfecho con el sistema astronómico aristotélico-ptolemaico que había dominado Occidente durante siglos. Opinaba que el centro de la Tierra no era el centro del universo, sino tan sólo el centro de la órbita de la Luna. Copérnico había llegado a la conclusión de que las perturbaciones aparentes en los movimientos observables de los planetas resultaban de la propia rotación de la Tierra alrededor de su eje y de su desplazamiento a lo largo de su órbita. «Giramos alrededor del Sol», concluyó en su *Comentario*, «como todos los demás planetas.»

A pesar de las especulaciones de Aristarco sobre un universo heliocéntrico, ya en el siglo III a.C., los teólogos y los intelectuales se sentían más a gusto con una teoría geocéntrica, premisa que nunca fue puesta seriamente en tela de juicio. Prudentemente, Copérnico se abstuvo de desvelar sus opiniones en público y prefirió ir desarrollando en silencio sus ideas, efectuando cálculos minuciosos y trazando sofisticados diagramas, y evitó que sus teorías circularan fuera de un selecto círculo de amistades. Cuando, en 1514, el papa León X requirió al obispo Paolo de Fossombrone que pidiera a Copérnico su opinión sobre la reforma del calendario eclesiástico, el astrónomo polaco replicó que el conocimiento de los movimientos del Sol y de la Tierra con respecto a la longitud del año era insuficiente para poder ser tenido en cuenta en una reforma. El reto debió preocupar a Copérnico, sin embargo, ya que posteriormente escribió al papa Paulo III, el que encargó a Miguel Ángel que pintara la capilla Sixtina, algunas observaciones relevantes que sirvieron para establecer los fundamentos del calendario gregoriano setenta años después.

Aun así, Copérnico temía exponerse a las iras del público y de la Iglesia, y pasó varios años trabajando en privado para corregir y ampliar el *Comentario*. El resultado fue *Sobre las revoluciones de los orbes celestes* (*De revolutionibus orbium coelestium*) que completó en 1530, pero cuya publicación retrasó durante trece años. El riesgo de una condena eclesiástica no era, sin embargo, la única razón de sus dudas respecto de la publicación, sino que era un perfeccionista y consideraba que sus observaciones debían ser verificadas y revisadas una y otra vez. Continuó enseñando los principios de su teoría planetaria, incluso en presencia del papa Clemente VII, que aprobó sus trabajos. En 1536, Clemente le pidió formalmente que publicara sus teorías, pero fue necesario

que un antiguo alumno de veinticinco años, el alemán Georg Joachim Rheticus, que dejó su cátedra de matemáticas en Wittemberg para poder estudiar con Copérnico, persuadiera a su maestro a que publicara *De revolutionibus*. En 1540, Rheticus colaboró en la edición de la obra y entregó el manuscrito a un impresor luterano de Nuremberg, dando así comienzo a la revolución copernicana.

Cuando *De revolutionibus* apareció en 1543, fue atacado por teólogos protestantes que mantenían que un universo heliocéntrico iba contra la Biblia. Argüían que las teorías de Copérnico podrían hacer que la gente creyera que eran una simple pieza de un orden natural y no los dueños de la naturaleza, ni el centro alrededor del cual se ordena toda ella. Debido a esta oposición clerical, y quizá también por la incredulidad general que suscitaba un universo que no fuera geocéntrico, entre 1543 y 1600 menos de una decena de científicos aceptaron la teoría copernicana. Además, Copérnico no hizo nada por resolver el mayor problema con que se enfrentaba cualquier sistema en que la Tierra girara alrededor de su eje (y orbitara alrededor del Sol), a saber, por qué los cuerpos terrestres permanecen sobre la Tierra que gira. La respuesta fue propuesta por Giordano Bruno, un científico italiano, copernicano declarado, que sugirió que el espacio podría no tener límites y que el sistema solar podría ser uno entre muchos otros sistemas en el universo. Bruno también desarrolló algunas ideas puramente especulativas de astronomía que Copérnico no había explorado en *De revolutionibus*. En sus escritos y conferencias, el científico italiano sostenía que en el universo había infinitos mundos habitados por vida inteligente, algunos de los cuales, quizá, con seres superiores a los humanos. Esta audacia puso a Bruno en el punto de mira de la Inquisición, que lo juzgó y condenó por sus creencias heréticas. Fue quemado en la hoguera en 1600.

En conjunto, sin embargo, el libro de Copérnico no tuvo un impacto inmediato sobre los estudios astronómicos modernos. En *De revolutionibus*, Copérnico no propuso en realidad un sistema heliocéntrico, sino más bien un sistema heliostático. Consideró que el Sol no estaba exactamente en el centro del universo, sino tan sólo próximo al centro, para poder dar razón de las variaciones observadas en la retrogresión y el brillo. Sostenía que la Tierra describía cada día un giro completo alrededor de su eje y que daba una vuelta al Sol cada año. En la primera de las seis secciones del libro, se opuso al modelo ptolemaico, que situaba todos los cuerpos celestes en órbita alrededor de la tierra, y estableció el orden heliocéntrico correcto: Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter y Saturno (los seis planetas conocidos en aquel tiempo). En la segunda sección, utilizó las matemáticas (es decir, epiciclos y equantes) para explicar los movimientos de las estrellas y los planetas, y razonó que el movimiento del sol coincidía con el de la tierra. La tercera sección proporciona una explicación matemática de la precesión de los equinoccios, que Copérnico atribuye a la rotación de la Tierra alrededor de su eje. Las secciones restantes de *De revolutionibus* están dedicadas a los movimientos de los planetas y de la luna.

Copérnico fue el primero que situó correctamente Venus y Mercurio, y estableció con notable precisión el orden y la distancia de los planetas conocidos. Consideró estos dos planetas (Venus y Mercurio) como los más próximos al Sol, y observó que giran más rápidamente, y en el interior de la órbita de la Tierra.

Antes de Copérnico, se creía que el Sol era otro planeta. Situar el Sol en el centro virtual del sistema planetario fue el punto de partida de la revolución copernicana. Al apartar la Tierra del centro del universo, donde se suponía que anclaba todos los cuerpos celestes, Copérnico se vio obligado a preguntarse por las teorías de la gravedad.

Las explicaciones precopernicanas de la gravitación habían imaginado un único centro de gravedad (la Tierra), pero Copérnico arguyó que cada cuerpo celeste podría tener sus propias cualidades gravitacionales y sostuvo que, en cada uno de ellos, los objetos pesados tendían hacia su centro. Esta visión condujo finalmente a la teoría de la gravitación universal, pero su impacto no fue inmediato.

En 1543, Copérnico sufrió una parálisis del lado derecho y se fue debilitando física y mentalmente. El declarado perfeccionista que era no tuvo otra opción que abandonar el control de su manuscrito, *De revolutionibus*, en las últimas etapas de impresión. Confió el manuscrito a su alumno, Georg Rheticus, pero cuando éste se vio obligado a dejar Nuremberg, el manuscrito cayó en manos del teólogo luterano Andreas Osiander. Éste, esperando apaciguar a los partidarios de la teoría geocéntrica, introdujo algunas alteraciones sin el conocimiento y consentimiento de Copérnico: introdujo la palabra «hipótesis» en la portada, borró párrafos importantes y añadió frases que diluían el impacto y la certeza de la obra. Se dice que Copérnico recibió un ejemplar de su libro impreso en Frauenburg, en su lecho de muerte, sin darse cuenta de las revisiones de Osiander. Sus ideas permanecieron en una relativa oscuridad durante casi cien años, pero el siglo XVII vio como gente de la talla de Galileo Galilei, Johannes Kepler e Isaac Newton construían teorías de universos heliocéntricos, aparcando definitivamente las ideas aristotélicas. Muchos han escrito sobre el modesto sacerdote polaco que cambió nuestra manera de ver el universo, pero puede que sea Johann Wolfgang von Goethe, el gran escritor y científico alemán, quien más elocuentemente ha escrito sobre las contribuciones de Copérnico:

> De todas las opiniones y descubrimientos, ninguna debe haber ejercido mayor efecto sobre el espíritu humano que la doctrina copernicana. Apenas el mundo había sido considerado como redondo y completo en sí mismo, cuando se le pidió que renunciara al tremendo privilegio de ser el centro del universo. Quizá nunca se haya hecho una petición tan exigente a la humanidad, ya que, al admitirla, tantas cosas se desvanecían en humo y niebla. ¿Qué se hizo del Edén, nuestro mundo de inocencia, piedad y poesía?; ¿qué se hizo del testimonio de los sentidos, de las convicciones de una fe poético-religiosa? No sorprende que sus contemporáneos rehusaran perder todo esto y presentaran toda la resistencia posible a una doctrina que autorizaba y exigía de sus conversos una libertad de miras y una grandeza de pensamiento desconocidas, ni tan siquiera soñadas, hasta entonces.
>
> JOHANN WOLFGANG VON GOETHE

SOBRE LAS REVOLUCIONES DE LOS ORBES CELESTES

INTRODUCCIÓN

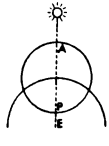
AL LECTOR SOBRE LAS HIPÓTESIS DE ESTA OBRA[1]

Divulgada ya la fama acerca de la novedad de las hipótesis de esta obra, que considera que la Tierra se mueve y que el Sol está inmóvil en el centro del universo, no me extraña que algunos eruditos se hayan ofendido vehementemente y consideren que no se deben modificar las disciplinas liberales constituidas correctamente ya hace tiempo. Pero si quieren ponderar la cuestión con exactitud, encontrarán que el autor de esta obra no ha cometido nada por lo que merezca ser reprendido. Pues es propio del astrónomo calcular la historia de los movimientos celestes con una labor diligente y diestra. Y además concebir y configurar las causas de estos movimientos, o sus hipótesis, cuando por medio de ningún proceso racional puede averiguar las verdaderas causas de ellos. Y con tales supuestos pueden calcularse correctamente dichos movimientos a partir de los principios de la geometría, tanto mirando hacia el futuro como hacia el pasado. Ambas cosas ha establecido este autor de modo muy notable. Y no es necesario que estas hipótesis sean verdaderas, ni siquiera que sean verosímiles, sino que se basta con que muestren un cálculo coincidente con las observaciones, a no ser que alguien sea tan ignorante de la geometría o de la óptica que tenga por verosímil el epiciclo de Venus, o crea que ésa es la causa por la que precede unas veces al Sol y otras le sigue en cuarenta grados o más. ¿Quién no advierte, supuesto esto, que necesariamente se sigue que el diámetro de la estrella en el perigeo es más de cuatro veces mayor, y su cuerpo más de dieciséis veces mayor de lo que aparece en el apogeo, a lo que, sin embargo, se opone la experiencia de cualquier edad?[2] También en esta disciplina hay cosas no menos absurdas o que en este momento no es necesario examinar. Está suficien-

1. Se cree que este prólogo, atribuido inicialmente a Copérnico, fue escrito en realidad por Andreas Osiander, un teólogo luterano y amigo de Copérnico, que vio *De revolutionibus* en la prensa.

2. Ptolomeo hace que Venus se mueva en un epiciclo la razón de cuyo radio al radio del círculo excéntrico que transporta al epiciclo es aproximadamente de tres a cuatro. Por consiguiente, sería de esperar que la magnitud aparente del planeta variara con la variación de su distancia a la Tierra, en las proporciones apuntadas por Osiander.

Además, se halló que, si el planeta estaba sobre el epiciclo, la posición media del Sol aparecía alineada con EPA. Por lo tanto, dadas las razones del epiciclo y de la excéntrica, Venus nunca debería aparecer desde la Tierra a una distancia angular demasiado superior a 40 grados del centro de su epiciclo, es decir, de la posición media del Sol, tal como se observa.



temente claro que este arte no conoce completa y absolutamente las causas de los movimientos aparentes desiguales. Y si al suponer algunas, y ciertamente piensa muchísimas, en modo alguno suponga que puede persuadir a alguien [en que son verdad], sino tan sólo para establecer correctamente el cálculo. Pero ofreciéndose varias hipótesis sobre uno solo y el mismo movimiento (como la excentricidad y el epiciclo en el caso del movimiento del Sol) el astrónomo tomará la que con mucho sea más fácil de comprender. Quizá el filósofo busque más la verosimilitud, pero ninguno de los dos comprenderá o transmitirá nada cierto, a no ser que le haya sido revelado por la divinidad. Por lo tanto, permitamos que también estas nuevas hipótesis se den a conocer entre las antiguas, no como más verosímiles, sino porque son al mismo tiempo admirables y fáciles y porque aportan un gran tesoro de sapientísimas observaciones. Y no espere nadie, en lo que respecta a las hipótesis, algo cierto de la astronomía, pues no puede proporcionarlo; para que no salga de esta disciplina más estúpido de lo que entró, si toma como verdad lo imaginado para otro uso. Adiós.

PREFACIO Y DEDICATORIA AL PAPA PAULO III

Santísimo Padre, puedo estimar suficientemente lo que sucederá en cuanto algunos aprecien, en estos libros míos, que he escrito acerca de las revoluciones de las esferas del mundo, que atribuyo al globo de la Tierra algunos movimientos y clamarán para desaprobarme por tal opinión. Pues no me satisfacen hasta tal punto mis opiniones, como para no apreciar lo que otros juzguen de ellas. Y aunque sé que los pensamientos del hombre filósofo están lejos del juicio del vulgo, sobre todo porque su afán es buscar la verdad en todas las cosas, en cuanto esto le ha sido permitido por Dios a la razón humana; sin embargo, considero que debe huirse de las opiniones extrañas que se apartan de lo justo. Y así, al pensar yo conmigo mismo, cuán absurdo estimarían el ἀκρόαμα [esta cantinela] aquellos que, por el juicio de muchos siglos, conocieran la opinión confirmada de que la Tierra inmóvil está colocada en medio del cielo como su centro, si yo, por el contrario, asegurara que la Tierra se mueve, entonces largo tiempo dudé en mi interior, si dar a la luz mis comentarios escritos sobre la demostración de ese movimiento o si, por el contrario, sería suficiente seguir el ejemplo de los pitagóricos y de algunos otros, que no por escrito, sino oralmente, solían trasmitir los misterios de su filosofía únicamente a amigos y próximos, como testifica Lysis en su carta a Hiparco. Pero a mí me parece que no hicieron esto, como juzgan algunos, por un cierto recelo a comunicar sus doctrinas, sino para que asuntos tan bellos, investigados con mucho estudio por los grandes hombres, no fueran despreciados por quienes les da pereza el dedicar algún trabajo a las letras, excepto a lo lucrativo, o si, siendo excitados por las exhortaciones y el ejemplo de otros hacia el estudio liberal de la filosofía, por la estupidez de su ingenio se movieran entre los filósofos como los zánganos entre las abejas. Considerando, pues, conmigo mismo estas cosas, el desprecio que yo debía temer a causa de la novedad y absurdo de mi opinión, casi me había empujado a interrumpir la obra ya organizada.

Pero los amigos me hicieron cambiar de opinión, a mí que durante tanto tiempo dudaba y me resistía. Entre ellos fue el primero Nicolás Schönberg, cardenal de Capua, célebre en todo género de saber. Próximo a él estuvo mi muy querido e insigne Tiedemann Giese, obispo de Culm, estudiosísimo de las letras sagradas, así como también de todo buen saber. Éste me exhortó muchas veces, y añadiendo con frecuencia los reproches,

insistió para que publicara este libro y le dejara salir a la luz, pues retenido por mí había estado en silencio, no sólo nueve años, sino ya cuatro veces nueve. A lo mismo me impulsaron otros muchos varones eminentes y doctos, exhortándome para que no me negara durante más tiempo, a causa del miedo concebido, a presentar mi obra para la común utilidad de los estudiosos de las matemáticas. Decían que, cuanto más absurda pareciera ahora a muchos esta doctrina mía sobre el movimiento de la Tierra, tanta más admiración y favor tendría después de que, por la edición de mis comentarios, vieran levantada la niebla del absurdo por las clarísimas demostraciones. En consecuencia, convencido por aquellas persuasiones y con esta esperanza, permití a mis amigos que hiciesen la edición de la obra que me habían pedido tanto tiempo.

Y quizá, Vuestra Santidad no admirará tanto el que me haya atrevido a sacar a la luz estas lucubraciones, después de tomarme tanto trabajo en elaborarlas, como el que no haya dudado en poner por escrito mis pensamientos sobre el movimiento de la Tierra. Pero lo que más esperará oír de mí es, qué me pudo haber venido a la mente para que, contra la opinión recibida de los matemáticos e incluso contra el sentido común, me haya atrevido a imaginar algún movimiento de la Tierra. Y así, no quiero ocultar a Vuestra Santidad, que ninguna otra cosa me ha movido a meditar sobre otra relación [estructura] para deducir los movimientos de las esferas del mundo, sino el hecho de comprender que los matemáticos no están de acuerdo con aquellas investigaciones. Primero, porque estaban tan inseguros sobre el movimiento del Sol y de la Luna que no podía demostrar ni observar la magnitud constante de la revolución anual. Después, porque al establecer los movimientos, no sólo de aquéllos, sino también de las otras cinco estrellas errantes, no utilizan los mismos principios y supuestos, ni las mismas demostraciones en las revoluciones y movimientos aparentes. Pues unos utilizan sólo círculos homocéntricos, otros, excéntricos y epiciclos, con los que no consiguen plenamente lo buscado. Pues los que confían en los homocéntricos, aunque hayan demostrado algunos movimientos diversos de los que pueden componerse, no pudieron deducir de ello nada tan seguro que respondiera sin duda a los fenómenos. Mas los que pensaron en los excéntricos, aunque en gran parte parecían haber resuelto los movimientos aparentes por medio de cálculos congruentes con ellos, sin embargo admitieron entre tanto muchas cosas que parecen contravenir los primeros principios acerca de la regularidad del movimiento. Tampoco pudieron hallar o calcular partiendo de ellos lo más importante, esto es, la forma del mundo y la simetría exacta de sus partes, sino que les sucedió como si alguien tomase de diversos lugares manos, pies, cabeza y otros miembros auténticamente óptimos, pero no representativos en relación a un solo cuerpo, no correspondiéndose entre sí, de modo que con ellos se compondría más un monstruo que un hombre. Y así, en el proceso de demostración que llaman «método» olvidaron algo de lo necesario, o admitieron algo ajeno, o que no pertenece en modo alguno al tema. Y esto no les hubiese sucedido en modo alguno, si hubieran seguido principios seguros. Pues si las hipótesis supuestas por ellos no fueron falsas, todo lo que de ellas se deduce se podría verificar sin lugar a dudas. Y aunque lo que ahora digo es oscuro, en su lugar se hará claro.

En consecuencia, reflexionando largo tiempo conmigo mismo sobre esta incertidumbre de las matemáticas transmitidas para calcular los movimientos de las esferas del mundo, comenzó a enojarme que a los filósofos, que en otras cuestiones han estudiado tan cuidadosamente las cosas más minuciosas de ese orbe, no les constara ningún cálculo seguro sobre los movimientos de la máquina del mundo, construida para nosotros

por el mejor y más regular artífice de todos. Por lo cual, me esforcé en releer los libros de todos los filósofos que pudiera tener, para indagar si alguno había opinado que los movimientos de las esferas eran distintos a los que suponen quienes enseñan matemáticas en las escuelas. Y encontré en Cicerón que Niceto fue el primero en opinar que la Tierra se movía. Después, también en Plutarco encontré que había algunos otros de esa opinión, cuyas palabras, para que todos las tengan claras, me pareció bien transcribir:

> Algunos piensan que la Tierra permanece quieta, en cambio Filolao el Pitagórico dice que se mueve en un círculo oblicuo alrededor del fuego, de la misma manera que el Sol y la Luna. Heráclides el del Ponto y Ecfanto el Pitagórico piensan que la Tierra se mueve pero no con traslación, sino como una rueda, alrededor de su propio centro, desde el ocaso hasta el orto.[1]

En consecuencia, aprovechando esa ocasión empecé yo también a pensar sobre la movilidad de la Tierra. Y aunque la opinión parecía absurda, sin embargo, puesto que sabía que a otros se les había concedido tal libertad antes que a mí, de modo que representaban algunos círculos para demostrar los fenómenos de los astros, estimé que fácilmente se me permitiría experimentar, si, supuesto algún movimiento de la Tierra, podrían encontrarse en la revolución de las órbitas celestes demostraciones más firmes que lo eran las de aquéllos.

Y yo, supuestos así los movimientos que más abajo en la obra atribuyo a la Tierra, encontré con una larga y abundante observación que, si se relacionan los movimientos de los demás astros errantes con el movimiento circular de la Tierra, y si los movimientos se calculan con respecto a la revolución de cada astro, no sólo de ahí se siguen los fenómenos de aquéllos, sino que también el orden y magnitud de los astros y de todas las órbitas, e incluso el cielo mismo, se ponen en conexión; de tal modo que en ninguna parte puede cambiarse nada, sin la confusión de las otras partes y de todo el universo. De ahí también, que haya seguido en el transcurso de la obra este orden, de modo que en el libro primero describiré todas las posiciones de las órbitas con los movimientos que le atribuyo a la Tierra, de modo que ese libro contenga como la constitución común del universo. Después, en los restantes libros, relaciono los movimientos de los demás astros y de todas las órbitas con la movilidad de la Tierra, para que de ahí pueda deducirse en qué medida los movimientos y apariencias de los demás astros y órbitas pueden salvarse, si se relacionan con el movimiento de la Tierra. No dudo que los ingeniosos y doctos matemáticos concordarán conmigo, si, como la filosofía exige en primer lugar, quisieran conocer y explicar, no superficialmente sino con profundidad, aquello que para la demostración de estas cosas ha sido realizado por mí en esta obra. Pero, para que tanto los doctos como los ignorantes por igual vieran que yo no evitaba el juicio de nadie, preferí dedicar estas lucubraciones a Vuestra Santidad antes que a cualquier otro, puesto que también en este remotísimo rincón de la Tierra, donde yo vivo, sois considerado como eminentísimo por la dignidad de vuestra orden y también por vuestro amor a todas las letras y a las matemáticas, de modo que fácilmente con vuestra autoridad y juicio podéis reprimir las mordeduras de los calumniadores, aunque está en el proverbio que no hay remedio contra la mordedura de un sicofante.

Si por casualidad hay ματαιολόγοι [charlatanes] que, aun siendo ignorantes de todas las matemáticas, presumen de un juicio sobre ellas por algún pasaje de las Escritu-

1. *De placitis philosophorum*, III, 13.

ras, malignamente distorsionado de su sentido, se atrevieran a rechazar y atacar esta estructuración mía, no hago en absoluto caso de ellos, hasta el punto de que condenaré su juicio como temerario. Pues no es desconocido que Lactancio, por otra parte célebre escritor, aunque matemático mediocre, habló puerilmente de la forma de la Tierra, al reírse de los que transmitieron que la Tierra tiene forma de globo. Y así, no debe parecernos sorprendente a los estudiosos, si ahora otros de esa clase se ríen de nosotros. Las matemáticas se escriben para los matemáticos, a los que estos trabajos nuestros, si mi opinión no me engaña, les parecerán que aportan algo a la república eclesiástica, cuyo principado tiene ahora Vuestra Santidad. Pues así, no hace mucho, bajo León X, en el concilio de Letrán, cuando se trataba de cambiar el calendario eclesiástico, todo quedó indeciso únicamente a causa de que las magnitudes de los años y de los meses y los movimientos del Sol y de la Luna aún no se consideraban suficientemente medidos. Desde ese momento dediqué mi ánimo a observar estas cosas con más cuidado, estimulado por el muy preclaro varón Pablo, obispo de Fossombrone, que entonces estaba presente en estas deliberaciones. Pero lo que he proporcionado en esta materia, lo dejo al juicio principalmente de Vuestra Santidad y de todos los demás sabios matemáticos: y para que no parezca a Vuestra Santidad que prometo más utilidad en la obra de la que puedo presentar, paso ahora a lo construido.

LIBRO PRIMERO[1]

Entre los muchos y variados estudios sobre las letras y las artes, con los que se vivifican las inteligencias de los hombres, pienso que principalmente han de abarcarse y seguirse con el mayor afán las que versan sobre las cosas más bellas y más dignas del saber. Tales son las que tratan de las maravillosas revoluciones del mundo y del curso de los astros, de las magnitudes, de las distancias, del orto y del ocaso, y de las causas de todo lo que aparece en el cielo y que finalmente explican la forma total. Pues ¿qué hay más hermoso que el cielo, que contiene toda la belleza? Incluso los propios nombres lo declaran: Cielo y Mundo; éste, con denominación de pureza y ornamento, aquél con apelación a lo adornado. Al mismo, por su extraordinaria excelencia, muchísimos filósofos le llamaron dios visible. De ahí, que si la dignidad de las artes se estima por la materia que tratan, será sin duda importantísima, esta que unos llaman astronomía, otros astrología, y muchos entre los antiguos la consumación de las matemáticas. Ella es la cabeza de las demás artes nobles, la más digna del hombre libre, y se apoya en casi todas las ramas de las matemáticas. Aritmética, geometría, óptica, geodesia, mecánica, y si hay alguna otra más, todas se dirigen a ella. Y, siendo propio de todas las buenas artes el apartar de los vicios y dirigir la mente de los hombres hacia lo mejor, ella puede proporcionar esto más abundantemente y con increíble placer del espíritu. Pues ¿quién, adhiriéndose a lo que ve constituido en óptimo orden, dirigido por la providencia divina, mediante la asidua contemplación y cierto hábito hacia estas cosas, no es llamado hacia lo mejor y admira al artífice de todo, en el que está la felicidad y el bien completo? Pues no en vano aquel salmista divino se confesaría: delectado por el trabajo de dios y arrebatado por las obras de sus manos; si no es porque, por medio de estas cosas como por una especie de vehículo, fuéramos llevados a la contemplación del sumo bien.

Platón advirtió con mucho acierto, cuánta utilidad y adorno comporta a la República (pasando por alto las innumerables ventajas para los particulares). Éste, en el séptimo libro de las *Leyes*, considera que debe extenderse [su estudio], para que con su ayuda se mantenga viva y vigilante la ciudad, respecto del orden en los días, los tiempos divididos en meses y años con vista a las solemnidades y también a los sacrificios; y si (dice) alguien niega su necesidad para el hombre que desee aprender cualquiera de las

1. Los tres párrafos introductorios se hallan en la edición de Thorn del centenario y en la edición de Varsovia.

más altas doctrinas, pensará con gran estupidez; y estima que falta mucho, para que cualquiera pueda llegar a ser o ser llamado divino, si no tiene el conocimiento necesario del Sol, ni de la Luna, ni de los demás astros.

Pero esta ciencia, más divina que humana, que investiga temas de grandísima altura, no carece de dificultades, sobre todo respecto a sus principios y supuestos, a los que los griegos llaman «hipótesis», y vemos que muchos de los que intentaron tratarlos estuvieron en desacuerdo y ni siquiera utilizaron los mismos cálculos. Además, el curso de los astros y la revolución de las estrellas no ha podido definirse con un número exacto, ni reducirse a un conocimiento perfecto, si no es con mucho tiempo y con muchas observaciones realizadas de antemano, con las que, como ya diré, se transmite a la posterioridad de mano en mano. Pues, aunque C. Ptolomeo el Alejandrino, que destaca ampliamente sobre los demás por su admirable ingenio y escrupulosidad, llevó toda esta ciencia a su más alto grado mediante observaciones, durante más de cuatrocientos años, de manera que parecía no faltar nada que él no hubiera abordado. Sin embargo, vemos que muchas cosas no coinciden con aquellos movimientos que debían seguirse de su enseñanza, ni con algunos otros movimientos, descubiertos más tarde, aún no conocidos para él. De ahí que, incluso Plutarco, cuando habla del giro anual del Sol, dice: «Hasta ahora, el movimiento de los astros ha vencido la pericia de los matemáticos». En efecto, tomando como ejemplo el año mismo, considero bien claro que han sido tan diversas las opiniones, hasta tal punto que muchos han desesperado de poder encontrar un cálculo seguro sobre él. Así, favoreciéndome Dios, sin el que nada podemos, voy a intentar investigar con más amplitud sobre estas cosas respecto a las otras estrellas, poseyendo más detalles que apoyarán nuestra doctrina, a causa del intervalo más amplio de tiempo entre nosotros y los autores de este arte que nos precedieron, con cuyos hallazgos tendremos que comparar los que han sido también descubiertos de nuevo por nosotros. Confieso que voy a exponer muchas cosas de diferente manera que mis predecesores, aunque conviene apoyarse en ellos, puesto que por primera vez abrieron la puerta en la investigación de estas cosas.

1. EL MUNDO ES ESFÉRICO

En primer lugar, hemos de señalar que el mundo es esférico, sea porque es la forma más perfecta de todas, sin comparación alguna, totalmente indivisa, sea porque es la más capaz de todas las figuras, la que más conviene para comprender todas las cosas y conservarlas, sea también porque las demás partes separadas del mundo (me refiero al Sol, a la Luna y a las estrellas) aparecen con tal forma, sea porque con esta forma todas las cosas tienden a perfeccionarse, como aparece en las gotas de agua y en los demás cuerpos líquidos, ya que tienden a limitarse por sí mismos, para que nadie ponga en duda la atribución de tal forma a los cuerpos divinos.

2. LA TIERRA TAMBIÉN ES ESFÉRICA

También la Tierra es esférica, puesto que por cualquier parte se apoya en su centro. Sin embargo, la esfericidad no aparece inmediatamente como perfecta por la gran eleva-

ción de los montes y el descenso de los valles, a pesar de lo cual modifican muy poco la redondez total de la Tierra. Lo cual se clarifica de la siguiente manera. Pues hacia el norte, marchando desde cualquier parte, el vértice de la revolución diurna se eleva poco a poco, descendiendo el otro por el contrario otro tanto, y muchas estrellas alrededor del septentrión parecen no ponerse y algunas hacia el punto austral parecen no salir más. Así, en Italia no se ve Canopus, visible desde Egipto. Y en Italia se ve la última estrella de Fluvius, que no conoce nuestra región de clima más frío. Por el contrario, para los que marchan hacia el sur se elevan aquéllas, mientras que descienden las que para nosotros están elevadas. Además, las inclinaciones de los polos con relación a espacios medidos de la Tierra están en cualquier parte en la misma razón, lo que en ninguna otra figura sucede, nada más que en la esférica. De donde es evidente que la Tierra también está incluida entre vértices y, por tanto, es esférica. Hay que añadir también, que los habitantes de oriente no perciben los eclipses vespertinos del Sol y de la Luna, ni los que habitan hacia el ocaso los matutinos; con respecto a los eclipses medios, aquéllos los ven más tarde y éstos más pronto. También se deduce porque las aguas surcadas por los navegantes tienen esta misma figura: puesto que quienes no distinguen la tierra desde la nave, la contemplan desde la parte alta del mástil, desde la tierra, a los que permanecen en la orilla, les parece que desciende poco a poco al avanzar la nave, hasta que finalmente se oculta, como poniéndose. Consta también que las aguas, fluidas por naturaleza, se dirigen siempre hacia abajo, lo mismo que la tierra, y no se elevan desde el litoral hacia posiciones anteriores, más de lo que su convexidad permite. Por lo cual es aceptado, que la tierra es tanto más alta, cuanto emerge sobre el océano.

3. DE CÓMO LA TIERRA JUNTO CON EL AGUA FORMA UN GLOBO

Así pues, el océano que rodea a ésta [la tierra] extendiendo sus mares por todas partes, llena sus abismos más profundos. Por tanto convenía que hubiera menos agua que tierra, para que el agua no absorbiera toda la tierra (dirigiéndose ambas por su gravedad hacia el mismo centro) y con el fin de que quedaran algunas partes de tierra e islas perceptibles aquí y allá para salvación de los seres vivos. Pues ¿qué es el propio continente y la superficie de la Tierra sino una isla mayor que las demás? Y no es necesario escuchar a algunos de los peripatéticos, quienes consideraron que toda el agua es diez veces mayor que toda la tierra, aceptando la conjetura de que en la transmutación de los elementos de una parte de tierra resultan diez de agua; y dicen que la tierra sobresale un poco, porque, siendo cavernosa, no se equilibra por todas partes según su gravedad, y que uno es el centro de gravedad y otro el de magnitud. Pero se equivocan por su ignorancia del arte de la geometría, al no saber que el agua no puede ser mayor ni siete veces, para que alguna parte de la tierra estuviera seca, a no ser que la Tierra abandonara el centro de gravedad y dejara el lugar a las aguas como más pesadas que ella. Puesto que las esferas se relacionan entre sí como los cubos de sus diámetros. En consecuencia, si para siete partes de agua hubiera una octava parte de tierra, su diámetro no podría ser mayor que la distancia desde el centro [el radio] a la circunferencia de las aguas. Tanto menos, que el agua sea diez veces mayor.

Que no exista diferencia alguna entre el centro de gravedad de la Tierra y el de su magnitud, puede aceptarse, porque la convexidad de la tierra que emerge del océano no aumenta siempre de una manera continua, en caso contrario rechazaría lo más posible las aguas marinas y no permitiría en modo alguno que irrumpieran los mares internos y los golfos tan extensos. Además, a partir del litoral del océano no cesaría de aumentar la profundidad del abismo, de modo que ni isla alguna, ni escollo, ni ningún terreno, serviría de obstáculo a los que navegando avanzan alejándose. Y ahora consta, que entre el mar de los egipcios y el golfo Arábigo hay apenas más de quince estadios, en medio casi de la superficie de la Tierra. Y, por otra parte, Ptolomeo, en su *Cosmografía*, extiende la tierra habitable hasta el círculo medio, dejando lo restante de la tierra como desconocido, donde los más modernos añadieron Catay y otras regiones amplísimas hasta los LX grados de longitud, de modo que la tierra es habitada ya en una longitud mayor, que la ocupada por el resto del océano. Si además se añaden a estas tierras las islas encontradas en nuestro tiempo por los príncipes de España y Portugal, y sobre todo América, llamada así por su descubridor, el jefe de las naves, a la que por su magnitud aún desconocida la consideran otra superficie de la Tierra [«orbis terrarum»], además de las muchas islas desconocidas antes, por la que tampoco sorprendería que hubiera antípodas o antíctonas. Pues el cálculo geométrico obliga a pensar que la propia América es diametralmente opuesta a la India del Ganges por su situación.

Por todas estas cosas, juzgo suficientemente claro que la tierra y el agua conjuntamente se apoyan en un solo centro de gravedad, y que éste no es otro que el centro de magnitud de la Tierra, la cual siendo más pesada, llena con agua sus partes deprimidas; y, por tanto, que hay menor cantidad de agua en comparación con la de tierra, aunque en la superficie aparezca más cubierta de agua. Sin duda, es necesario que la tierra con las aguas que la rodean tenga la figura que muestra su sombra: pues produce que la Luna se eclipse proyectando círculos perfectos. En consecuencia, no es plana como opinaron Empédocles y Anaxímenes, ni semejante a un tambor, como opinó Leucipo, ni escafoide como Heráclito, ni cóncava de otro modo, como Demócrito, ni cilíndrica, como Anaximandro, ni es infinita en su parte inferior teniendo debajo una gran cantidad de raíces, como Jenófanes, sino perfectamente redonda, como opinan los filósofos.

4. EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS CELESTES ES REGULAR Y CIRCULAR, PERPETUO O COMPUESTO POR MOVIMIENTOS CIRCULARES

Después de esto, recordaremos que el movimiento de los cuerpos celestes es circular. Pues la movilidad de la esfera es girar en un círculo, expresando mediante el mismo acto su forma, en un cuerpo simplicísimo, donde no se puede encontrar ni principio ni fin, ni distinguir uno de otro, mientras [la esfera] pasa hacia los mismos puntos volviendo hacia los mismos. Sin embargo, hay varios movimientos a causa de la multitud de órbitas.[1]

1. El «círculo orbital» (*orbis*) es el círculo máximo sobre el cual el planeta se mueve en su esfera (*sphaera*). Copérnico utiliza la palabra orbis, que designa originariamente un círculo más que una esfera porque, si la esfera puede ser necesaria para la explicación mecánica del movimiento, sólo el círculo es necesario para la explicación matemática.

La más conocida de todas es la revolución diaria, a la que los griegos llaman νυχθήμερον, esto es, un espacio de tiempo de un día y una noche. Por eso se piensa que todo el mundo se desliza desde el orto hacia el ocaso, excepto la Tierra. Esta revolución se entiende como la medida común de todos los movimientos, puesto que medimos el tiempo sobre todo por el número de días.

Después vemos otras revoluciones como en sentido contrario, esto es, del ocaso al orto, me refiero a la del Sol, la de la Luna y de las cinco estrellas errantes. Así, el Sol nos proporciona el año, la Luna los meses, los períodos de tiempo más divulgados; así, los otros cinco planetas realizan cada uno su propio ciclo. Sin embargo, las diferencias son múltiples: primero, porque no giran alrededor de los mismos polos a través de los que se desenvuelve aquel primer movimiento, avanzando por la oblicuidad de la eclíptica; después, porque en su propio ciclo no parecen moverse con regularidad. Pues el Sol y la Luna se observan a lo largo de su curso unas veces lentos, otras veces más rápidos. Pero percibimos también que las otras cinco estrellas errantes retroceden a veces y después se detienen.

Y mientras el Sol avanza constante y directamente por su camino, aquéllos andan errantes de diversos modos, vagando unas veces hacia el sur, otras hacia el norte: por ello son llamados «planetas». Añádase también el que unas veces se presentan más cercanos a la Tierra y se llaman perigeos [que están en su perigeo], otras más alejados y se les dice apogeos [que están en su apogeo]. Y no menos conviene confesar que los movimientos son circulares, o compuestos por muchos círculos, porque mantienen las irregularidades según una ley fija y con renovaciones constantes: lo que no podría suceder si no fueran circulares. Pues el círculo es el único que puede volver a recorrer el camino recorrido. Como, por ejemplo, el Sol, con su movimiento compuesto de círculos, nos trae de nuevo, una vez y otra, la irregularidad de los días y las noches y las cuatro estaciones del año, en lo cual se reconocen varios movimientos: puesto que no puede suceder que un cuerpo celeste simple se mueva desigualmente en una sola órbita. Pues esto podría acontecer, o por la inconstancia de la fuerza motriz, bien por una causa exterior o por su propia naturaleza, o por las modificaciones del cuerpo que gira. Pero como repugnan a la inteligencia una y otras, y es indigno pensar que tal cosa se produce en los cuerpos que están constituidos por una ordenación óptima, es consecuente admitir que sus movimientos regulares nos aparecen como irregulares, bien por los diferentes polos de sus círculos, o también porque la Tierra no está en el centro de los círculos, a través de los cuales ellos se mueven, y para nosotros que contemplamos desde la Tierra el tránsito de estos astros, nos sucede que, por sus irregulares distancias, nos parecen los más cercanos mayores que los que están más alejados (según ha sido mostrado en la óptica); así, en arcos iguales de una órbita (al ser visto a una distancia diferente) aparecerán movimientos desiguales en tiempos iguales. Por esta causa ante todo, juzgo necesario que con todo cuidado señalemos cuál sea el comportamiento de la Tierra con respecto al cielo, para que mientras queremos estudiar lo más alto, no ignoremos lo que nos es más próximo, y por el mismo error atribuyamos a los cuerpos celestes lo que es propio de la Tierra.

5. ACERCA DE SI EL MOVIMIENTO DE LA TIERRA ES CIRCULAR Y DE SU POSICIÓN

Ya se ha demostrado que también la Tierra tiene forma de globo. Pienso que se debe ver si el movimiento es consecuencia de su forma y qué posición ocupa en el universo: sin estos datos no es posible hallar una razón fija de los movimientos aparentes en el cielo. Aunque entre los autores, una mayoría conviene en que la Tierra descansa en medio del mundo, de manera que juzgan esto como inopinable y hasta ridículo pensar lo contrario; sin embargo, si lo consideramos con más atención, esta cuestión aparecerá no ya sólo como no resuelta, sino también como nada despreciable. Pues todo cambio según la posición que aparece, o es por el movimiento de lo mirado, o del que mira, o evidentemente por un cambio dispar de uno y otro. Pues no se percibe movimiento entre movimientos iguales entre sí, me refiero a entre lo visto y el que ve. Y es desde la Tierra, a partir de donde se contempla aquel ciclo celeste y se representa a nuestra visión. En consecuencia, si se le atribuye algún movimiento a la Tierra, el mismo aparecerá igual en el universo que le es exterior, pero como si pasaran por encima en sentido opuesto, tal es en primer lugar la revolución diaria. Pues este movimiento parece arrastrar a todo el mundo, excepto a la Tierra y lo que está a su alrededor. Y si concedieras que el cielo no tiene nada que ver con este movimiento, y que la Tierra gira del ocaso hacia el orto, si alguien con seriedad estudia cuanto se refiere al orto y ocaso aparente del Sol, de la Luna y de las estrellas, encontrará que estas cosas suceden así. Y siendo el cielo el que contiene y abarca todo, el lugar común de todas las cosas, no aparece claro inmediatamente, por qué no se atribuye el movimiento más al contenido que al continente, a lo colocado más que a lo que proporciona la localización [«locato quam locanti»]. Con razón eran de esta opinión los pitagóricos Heráclides, Ecfanto y Nicetus de Siracusa, según Cicerón, que suponían a la Tierra dando vueltas en el centro del mundo. Opinaban que las estrellas se ponían a causa de la interposición de la Tierra y que salían al cesar de interponerse.

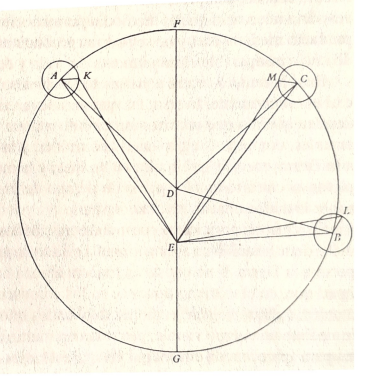
Supuesto esto, sigue también otra duda, y no menor, sobre la posición de la Tierra, aunque ahora se acepta y se cree por casi todos que la Tierra está en el centro del mundo. Puesto que, si alguien niega que la Tierra conserva el medio o centro del mundo, no admitiendo, sin embargo, que la distancia [entre el centro de la Tierra y el centro del mundo] es tan grande que fuera comparable [a la distancia] con la esfera de las estrellas fijas, aunque sea importante y se pone de manifiesto en relación con las órbitas del Sol y de las demás estrellas, y por ello estime que el movimiento de éstos aparece diversificado, como si fueran regulados por otro centro distinto del de la Tierra, quizá pudiera aportar una razón no inadecuada sobre el movimiento de apariencia irregular. Pues el que los astros errantes se perciban más cercanos a la Tierra, y los mismos más alejados, necesariamente prueba que el centro de la Tierra no es centro de aquellos círculos. Lo que consta es si la Tierra se acerca o se aleja de aquéllos o aquéllos de la Tierra, y no sería asombroso, si alguien opinase que además de aquella revolución diaria existe algún otro movimiento de la Tierra. Y se cuenta que Filolao el Pitagórico, matemático no vulgar, hasta el punto de que para verle Platón no dudó en dirigirse a Italia, según transmiten los que escribieron la vida de Platón, opinó que la Tierra giraba, e incluso que se movía con varios movimientos, y que era uno más entre los astros.

Pero muchos pensaron que podía demostrarse con cálculo geométrico que la Tierra está en el medio del mundo, y que es como un punto central con respecto a la inmensidad

del cielo, y que por esta causa es inmóvil, de modo que al moverse el universo el centro permanece sin movimiento, y lo que está próximo al centro se mueve muy lentamente.

6. DE LA INMENSIDAD DEL CIELO CON RESPECTO A LA MAGNITUD DE LA TIERRA

El hecho de que esta tan gran masa de la Tierra no sea comparable con la magnitud del cielo puede entenderse por lo siguiente: porque los círculos limitantes (pues así se traducen los ὁρίζ ονταζ de los griegos) cortan en dos toda la esfera del cielo, esto no podría suceder si la magnitud de la Tierra comparada con el cielo, o su distancia desde el centro del mundo, fuera muy importante. Pues el círculo que corta la esfera en dos pasa por el centro de la esfera y es el máximo de los circunscribibles. Así pues, el horizonte sea el círculo ABCD, y sea E la Tierra, donde está nuestro punto de vista y el centro del horizonte, desde el cual se separan las [estrellas] visibles de las no visibles. Por medio de una dioptra o de un horoscopio o un corobate, colocado en E, se ve el principio de Cáncer naciente en el punto C, y en el mismo momento aparece el principio de Capricornio poniente en el punto A. En consecuencia, estando AEC en línea recta según la dioptra, consta que es un diámetro de la eclíptica, porque los seis signos [del zodíaco] visibles delimitan un semicírculo, y el centro E es el mismo que el del horizonte. Pero terminada la revolución, cuando el principio de Capricornio surja en B, entonces se verá también el ocaso, de Cáncer en D y la línea BED será recta y un diámetro del mismo círculo: y es patente que su centro está en la sección común. En consecuencia, el círculo del horizonte cortará siempre en dos a la eclíptica, que es el círculo máximo de la esfera. Y como en la esfera, si un círculo corta por la mitad a alguno de los círculos máximos, también el que corta es máximo. Por tanto, uno de los círculos máximo es el horizonte, y su centro, según parece, es el mismo que el de la eclíptica, siendo, sin embargo, necesario que sea distinta la línea que parte de la superficie de la Tierra, y la que parte del centro. Pero a causa de la inmensidad con respecto a la Tierra se asemejan a paralelas, que parecen como una sola línea por la excesiva distancia del límite final, cuando el espacio mutuo que comprenden en relación con su longitud resulta de este modo incomparable para la percepción, como se demuestra en óptica.



Por este argumento aparece suficientemente claro que el cielo es inmenso en comparación con la Tierra y que ofrece un aspecto de infinita magnitud, pero ante todo,

para la estimación de los sentidos. En magnitud, la Tierra es con respecto al cielo como un punto con respecto al cuerpo y como lo finito con respecto a lo infinito. Y no parece haberse demostrado otra cosa; pues de ahí no se sigue que la Tierra deba estar quieta en el medio del mundo. Y aún nos admiramos más de que tan vasto mundo de la vuelta en un espacio de XXIIII horas, más que una mínima parte de éste que es la Tierra.

Pues los que dicen que el centro es inmóvil y también que las cosas próximas al centro se mueven menos, esto no prueba que la Tierra esté quieta en medio del mundo, y no es diferente que si dijeras que el cielo gira, pero los polos están fijos, y que las cosas próximas a los polos se mueven muy poco. De este modo se manifiesta que Cynosura [la estrella polar] se mueve con mucha mayor lentitud que Aquila o Canícula, porque describe un círculo menor por la proximidad del polo. Como todas ellas forman parte de una misma esfera, cuya movilidad, desapareciendo junto a su eje, no admite un movimiento igual entre sí de todas sus partes; sin embargo, la revolución total las conduce en una igualdad de tiempo, pero no en una igualdad de espacio.

En esta razón se apoya el argumento según el cual la Tierra constituye una parte de la esfera celeste, de la misma especie y del mismo movimiento, de modo que por estar próxima al centro se mueve poco. Luego, ella misma se moverá, en cuanto cuerpo existente, no en cuanto centro, en el mismo tiempo con respecto a arcos semejantes del círculo celeste, aunque menores. Que esto es falso, es más claro que la luz: pues entonces sería necesario que el mediodía permaneciera siempre en un lugar, y en otro siempre fuera medianoche, y no se podrían producir ni los ortos ni los ocasos cotidianos, siendo uno e inseparable el movimiento del todo y de la parte.

Pero la relación entre aquellas cosas que están separadas por una diferencia sustancial es enteramente diversa: las que se mueven en una órbita más pequeña avanzan más deprisa que las que recorren un círculo mayor. Así, el astro Saturno, el mayor de los errantes, completa su giro en el año treinta, y la Luna, que sin duda es el más próximo a la Tierra, recorre su circuito en un mes; y la misma Tierra, finalmente, parecerá completar su circuito en el espacio de tiempo de un día y una noche. Por consiguiente resurge la duda sobre la revolución diaria.

E incluso su posición se cuestiona como menos segura por lo anteriormente dicho. Pues dicha demostración no aporta ninguna otra cosa que la inmensa magnitud del cielo con respecto a la Tierra. Y no consta en manera alguna hasta dónde se extiende esta inmensidad. Igual que, en el extremo opuesto, en los corpúsculos mínimos e indivisibles, que llaman átomos, aunque no son sensibles, duplicados o tomados múltiplemente no componen de inmediato un cuerpo visible, pero pueden multiplicarse hasta tal punto que sean suficientes para aparecer con una magnitud aparente; así ocurre también con respecto a la posición de la Tierra, aun no estando en el centro del mundo, sin embargo, su distancia [al centro] es incomparable sobre todo en relación con la esfera de las estrellas fijas.

7. POR QUÉ LOS ANTIGUOS PENSARON QUE LA TIERRA ESTABA INMÓVIL EN MEDIO DEL MUNDO COMO SI FUERA SU CENTRO

Los filósofos antiguos, con algunas otras razones, intentaron demostrar en esta cuestión que la Tierra estaba en el medio del mundo. Así, alegan como causa más poderosa la de

la gravedad y la ligereza. Pues la Tierra es el elemento más pesado y todas las cosas pesadas son conducidas hacia ella, y tienden hacia su auténtico punto medio. En efecto, siendo la Tierra esférica, hacia ella son arrastradas las cosas más graves por su propia naturaleza, formando ángulos rectos con su superficie, y si no fueran retenidas en dicha superficie, caerían hacia su centro: puesto que una línea recta, que cae perpendicular a una superficie plana, tangente a la esfera, pasa por el centro. Pero parece seguirse que las cosas son conducidas al punto medio para quedar inmóviles en el centro. En consecuencia, tanto más descansará toda la Tierra en el centro, y ella, que recibe en sí todo lo que cae, permanecerá inmóvil por su peso.

De igual modo, también se intenta probarlo en razón del movimiento y de su naturaleza. Dice Aristóteles que el movimiento de un cuerpo simple es simple. Pero hay un movimiento simple recto y otro circular; de los rectos hay uno hacia arriba y otro hacia abajo. Por lo que todo movimiento simple o se dirige hacia el centro, que es hacia abajo, o parte del centro, que es hacia arriba, o alrededor del centro, que es el circular. De este modo, conviene que las tierras y las aguas, consideradas elementos más pesados, sean arrastradas hacia dentro, esto es, que se dirijan al centro, pero los aires y los fuegos, que se destacan por su ligereza, han de moverse desde el centro hacia arriba. Parece conveniente conceder un movimiento rectilíneo a estos cuatro elementos, y en cambio a los cuerpos celestes el que se muevan en una órbita alrededor del centro. Esto dice Aristóteles.

Consecuentemente, dice Ptolomeo de Alejandría, si la Tierra diese vueltas, al menos una revolución diaria, tendría que suceder lo opuesto a lo antes señalado. Pues su movimiento tendría que ser muy violento y su rapidez insuperable, ya que en XXIIII horas recorrería todo el ámbito de la Tierra. Pero este movimiento vertiginoso lanzaría de repente todas las cosas y parecerían incapaces de unirse, y más bien se dispersaría lo unido, a no ser que alguna fuerza de coherencia las mantuviera en su unidad. Y ya hace tiempo, dijo, la Tierra dispersada se habría elevado al mismo cielo (lo que es totalmente ridículo), y con mayor motivo, los seres animados y todas las demás cosas sueltas en manera alguna permanecerían estables. Pero tampoco las cosas que caen se dirigirían en línea recta al lugar destinado para ellas, ni en la perpendicular, desplazada entre tanto [la posición] por tanta rapidez. Y también veríamos que las nubes y cualquier otra cosa pendiente en el aire siempre eran arrastradas hacia el ocaso [occidente].

8. SOLUCIÓN DE DICHAS RAZONES Y SU INSUFICIENCIA

Por estas y semejantes razones dicen que la Tierra está inmóvil en el medio del mundo y que no hay duda sobre ello. Pero si alguien opinara que la Tierra da vueltas, diría que tal movimiento es natural y no violento. Y lo que acontece de acuerdo con la naturaleza produce resultados opuestos a lo que acontece de acuerdo con la violencia. Pues es necesario que se destruyan aquellas cosas sobre las que actúa la fuerza y el ímpetu, y que no puedan subsistir mucho tiempo. Pero lo que surge de la naturaleza se mantiene correctamente y se conserva en su composición óptima. Luego, en vano teme Ptolomeo que la Tierra y todo lo terrestre se disperse a causa de una revolución realizada por la eficacia de la naturaleza, que está bien lejos de la del arte o de lo que puede conseguirse mediante el ingenio humano.

Pero ¿por qué no sospecha eso mismo, con mayor razón del mundo, cuyo movimiento debe ser tanto más veloz cuanto es mayor el cielo que la Tierra? ¿O se ha

hecho el cielo tan inmenso, porque un movimiento de inefable vehemencia lo aleja del centro, y de no ser así caería si estuviera quieto? Con seguridad, si este razonamiento tuviera razón de ser, la magnitud del cielo también se dirigiría hacia lo infinito. Pues un movimiento cuanto más es llevado hacia lo alto por su ímpetu, tanto más veloz será a causa de la siempre creciente circunferencia, que necesariamente ha de recorrer en el espacio de XXIIII horas: y a la vez, al crecer el movimiento, crece la inmensidad del cielo. Así la velocidad hará avanzar hasta el infinito a la magnitud y la magnitud a la velocidad. Y según aquel axioma físico: lo que es infinito no puede ser atravesado ni movido bajo razón alguna. Luego necesariamente el cielo estará quieto.

Pero dicen que fuera del cielo no hay ningún cuerpo, ni lugar, ni vacío, ni en absoluto nada, y no existe nada por donde pueda extenderse el cielo. Entonces es realmente admirable, si algo puede ser contenido por nada. Pero si el cielo fuera infinito y sólo fuera finito en su concavidad interior, quizá con más fuerza se confirmará que fuera del cielo no hay nada, puesto que cualquier cosa estaría en él, sea cual sea la magnitud que ocupara, pero el cielo mismo permanecería inmóvil. Pues el argumento más fuerte para intentar demostrar que el mundo es finito es el movimiento.

Pero dejemos a la discusión de los fisiólogos [filósofos de la naturaleza] si el mundo es finito o infinito, teniendo nosotros como seguro esto, que la Tierra está limitada por sus polos y terminada por una superficie esférica. Luego, por qué dudamos aún en concederle una movilidad por naturaleza congruente con su forma, en vez de deslizarse todo el mundo, cuyos límites se ignoran y no se pueden conocer, y no confesamos sobre la revolución diaria que es apariencia en el cielo y verdad en la Tierra, y que estas cosas son como lo que dijera el Eneas de Virgilio, cuando afirma: «Salimos del puerto y las tierras y las ciudades retroceden». Puesto que al flotar una nave sobre la tranquilidad de las aguas, todo lo que está fuera de ellos es considerado por los navegantes moviéndose, de acuerdo con la imagen de su movimiento, y al mismo tiempo juzgan que están quietos, con todo lo que está con ellos. Así, en lo concerniente al movimiento de la Tierra, puede estimarse que todo el mundo da vueltas.

Por consiguiente, ¿qué podríamos decir de las nubes y de todas las demás cosas que flotan en el aire, bajan, se detienen, o suben de nuevo a las alturas, si no es que la Tierra, con el elemento acuoso unido a ella, se mueve de esta forma, y también que una parte no pequeña de aire y todo lo que tiene del mismo modo relación con la Tierra, sea porque el aire próximo a la Tierra, mezclado con materia acuosa o térrea, sigue la misma naturaleza que la Tierra, o sea porque el movimiento del aire es adquirido, que participa en la perpetua revolución y sin resistencia a causa de la contigüidad de la Tierra? Por el contrario, con una admiración igual, dicen que la región superior del aire sigue el movimiento celeste, lo que revelan aquellas estrellas repentinas, me refiero a los cometas, también llamadas pogonías [barbadas] por los griegos, para cuya generación designan tal lugar; las cuales también, como los otros astros, nacen y se ponen. Nosotros podemos decir que, por su gran distancia desde la Tierra, esa parte del aire está privada de aquel movimiento terrestre. Por eso aparecerá tranquilo el aire que está próximo a la Tierra, y también lo que está suspendido en él, a no ser que, como puede suceder, sean agitados por el viento o cualquier otro ímpetu. ¿Pues es el viento en el aire otra cosa distinta que las olas en el mar?

Pero tenemos que confesar que el movimiento de lo que cae y de lo que se eleva es doble, en comparación con el del mundo, y compuesto de un movimiento recto y uno circular. Y en cuanto a las cosas que caen por su propio peso, siendo sobre todo de tierra, no es dudoso que las partes conserven la misma naturaleza que el todo. Y no se pre-

senta ninguna otra razón en las que por una fuerza ígnea son lanzadas hacia las alturas. Pues también este fuego terrestre se alimenta sobre todo de una materia térrea, y definen la llama no de otra manera que como humo ardiente. Pues es propiedad del fuego extenderse a todo lo que invade: y esto lo hace con tanta fuerza que con ningún procedimiento, ni con ninguna máquina puede impedirse que, rota la cárcel, complete su obra. También el movimiento se extiende desde el centro hasta la circunferencia. De ahí que, si alguna de las partes terrestres se encendiera, sería llevada del centro a lo alto.

En consecuencia, lo que dicen de que un movimiento simple es propio de un cuerpo simple, se verifica en primer lugar del circular, si el cuerpo simple permanece en su lugar natural y en su propia unidad. En esa posición el movimiento no es otro que el circular, que permanece totalmente en sí, semejante a lo que está en reposo. Sin embargo, el movimiento rectilíneo sobreviene a aquellas cosas que son desplazadas de su lugar natural, o que son empujadas o que de algún modo están fuera de él. Y nada repugna tanto a la ordenación y forma de todo el mundo cuanto que algo esté fuera de su sitio. Luego el movimiento recto no sucede sino a aquellas cosas que no se mantienen correctamente y no son perfectas conforme a la naturaleza, cuando se separan de su todo y abandonan su unidad. Sobre todo las que se agitan arriba y abajo, y no tienen, excepto el circular, ningún movimiento simple, uniforme y regular, pues no pueden estar en equilibrio a causa de su ligereza o por el impulso de su peso. Y todo lo que cae, teniendo al principio un movimiento lento, aumenta su velocidad al caer. Por el contrario, vemos que este fuego terreno (y no vemos ningún otro) impulsado hacia lo alto, inmediatamente languidece, reconociendo como causa la de la violencia de la materia terrestre. El circular siempre gira regularmente, pues tiene una causa constante, sin embargo aquél [el rectilíneo] deja de acelerarse; porque al conseguir su lugar dejan de ser pesados o ligeros y cesa aquel movimiento. Siendo, pues, el movimiento circular el del todo, en cambio el rectilíneo el de las partes, podemos comparar el movimiento circular con el rectilíneo, como un ser vivo con uno enfermo. Y el hecho de que Aristóteles divida el movimiento simple en tres clases: el que parte del centro, el que se dirige al centro y el que gira alrededor del centro, se juzgará como un único acto de razonamiento, del mismo modo que distinguimos la línea, el punto y la superficie, aunque no pueden subsistir el uno sin el otro, o sin el cuerpo.

A esto se añade también que la condición de inmovilidad se considera más noble y divina que la de mutación o inestabilidad, que convienen por ello más a la Tierra que al mundo. Añado también que parecería bastante absurdo adjudicar un movimiento al continente o localizante y no más bien al contenido o localizado, que es la Tierra. Finalmente, siendo manifiesto que las estrellas errantes se aproximan o se alejan de la Tierra, entonces será el movimiento de un solo cuerpo que se desarrolla alrededor del punto medio (ellos quieren que sea el centro de la Tierra), desde el punto medio y también hacia el mismo. En consecuencia, conviene que el movimiento, que se realiza alrededor del punto medio, sea tomado como el más general y suficiente, de modo que el movimiento de cada uno se apoye sobre su propio centro.

A partir de todas estas cosas adviertes que es más probable la movilidad de la Tierra que la quietud, sobre todo con respecto a la revolución diaria, mucho más propia de la Tierra. Y pienso que esto es suficiente para la primera parte de la cuestión.

9. SI PUEDEN ATRIBUIRSE A LA TIERRA VARIOS MOVIMIENTOS Y ACERCA DEL CENTRO DEL MUNDO

En consecuencia, como nada impide la movilidad de la Tierra, pienso que ahora hay que ver si le convienen varios movimientos, de modo que pueda considerarse uno de los astros errantes. Pues que no es el centro de todas las revoluciones lo manifiestan el aparente movimiento irregular de las errantes y sus distancias variables a la Tierra, que no pueden entenderse mediante un círculo homocéntrico sobre la Tierra. Luego, si existen varios centros, cualquiera podrá dudar, no temerariamente, del centro del mundo, sobre si realmente lo es el centro de gravedad terrestre u otro. Yo creo que la gravedad no es sino una cierta tendencia natural, ínsita en las partes por la divina providencia del hacedor del universo, para conferirles la unidad e integridad, juntándose en forma de globo. Este modo de ser es también atribuible al Sol, la Luna y las demás fulgurantes entre las errantes, para que, por su eficacia, permanezcan en la redondez con la que se presentan, las cuales, sin embargo, realizan sus circuitos de muchos modos diferentes.

En consecuencia, si la Tierra realiza otros movimientos, por ejemplo alrededor del centro, será necesario que éstos sean semejantes a los que aparecen exteriormente en muchos [astros], entre ellos encontramos el circuito anual. Puesto que si se cambiara [el movimiento] de solar en terrestre, concedida la inmovilidad del Sol, los ortos y los ocasos de los signos y de las estrellas fijas, por los cuales se convierten en estrellas matutinas y vespertinas, aparecerían del mismo modo, y también las detenciones, los retrocesos y avances de las errantes, no parecería como propio de ellas, sino como un movimiento de la Tierra, que cambian en virtud de sus apariencias. Finalmente, se pensará que el Sol ocupa el centro del mundo. Todo esto nos lo enseña la razón del orden, según la cual se suceden unas cosas a otras, y la armonía de todo el mundo, si, como dicen, con los dos ojos contemplamos esta cuestión.

10. SOBRE EL ORDEN DE LAS ÓRBITAS CELESTES

Observo que nadie duda que el cielo de las estrellas fijas es lo más alto de todo lo visible. Pero vemos que los antiguos filósofos querían tomar el orden de las estrellas errantes según la magnitud de sus revoluciones, aceptando como razón el que, a igual velocidad de los móviles, están más lejos los que parecen moverse más despacio, según se demuestra en la *Óptica* de Euclides. Por ello piensan que la Luna da la vuelta en un espacio brevísimo de tiempo, puesto que se mueve próxima a la Tierra en un círculo muy pequeño. En cambio, consideran a Saturno el más alto, porque recorre el circuito más grande en el tiempo mayor. Por debajo de él está Júpiter, después de éste, Marte. Sobre Venus y Mercurio se encuentran varias opiniones, porque no se alejan del Sol de la misma manera que los otros.[1] Por ello, unos los colocan por encima del Sol, como Timeo

1. La máxima elongación angular entre Venus y el Sol es aproximadamente 45 grados; la de Mercurio, aproximadamente 24 grados; mientras que Saturno, Júpiter y Marte tienen todo el dominio posible de elongaciones angulares, es decir, hasta 180 grados.

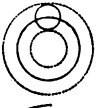
el de Platón, otros por debajo de él, como Ptolomeo y gran parte de los más modernos. Alpetragius coloca a Venus superior al Sol y a Mercurio inferior.

En consecuencia, los que siguen a Platón, consideran que todas las estrellas, cuerpos oscuros por otra parte, brillan con la luz recibida del Sol; si estuviesen por debajo del Sol, por la poca distancia desde éste, serían vistos faltándoles la mitad o parte de su redondez. Pues la luz recibida la reenvían hacia arriba, esto es, hacia el Sol, tal como vemos en la Luna nueva o menguante. También dicen que a veces el Sol es interceptado por el paso de ellos y le falta la luz a tenor de su magnitud; como esto no sucede nunca, piensan que de ningún modo están por debajo del Sol.[1]

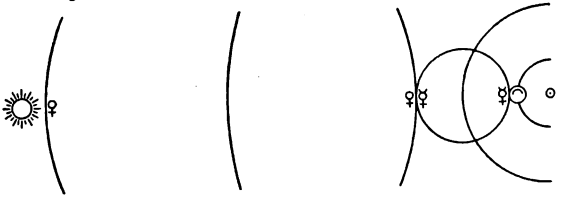
Por el contrario, quienes colocan por debajo del Sol a Venus y Mercurio reivindican como razón la amplitud de espacio que aprecian entre el Sol y la Luna. Pues encontraron que la distancia máxima de la Tierra a la Luna es de sesenta y cuatro y un sexto unidades, siendo una unidad la distancia desde el centro de [el radio] la Tierra, tal medida está contenida dieciocho veces en el intervalo mínimo del Sol [y la Tierra], que son 1.160 unidades, y entre el mismo y la Luna 1.096. Y para que no permanezca vacía tan gran extensión, a partir de los intervalos entre los ápsides, por medio de los cuales se calcula el espesor de aquellos orbes,[2] encuentran que estos números [distancias] son completados, de tal manera que al ápside más alto de la Luna sucede el más bajo de Mercurio, a cuyo punto más alto sigue la próxima Venus, la que desde su ápside más elevado casi toca al ínfimo del Sol. Y en efecto, entre los ápsides de Mercurio calculan unas cientosetenta y siete y media de las unidades antedichas, y el restante espacio se llena con el intervalo de Venus[3] de aproximadamente 910 unidades. Por tanto, no reconocen que en estas estrellas haya una cierta opacidad similar a la de la Luna, sino que brillan con luz propia o impregnados todos sus cuerpos por el Sol y por ello no ponen impedimento al Sol, lo cual en la realidad es una idea rarísima el que ellos se interpongan a nuestra visión del Sol, pues ordinariamente se retiran por la latitud. Además, porque son cuerpos pequeños en comparación con el Sol, ya que Venus, aun siendo mayor que Mercurio, apenas puede cubrir la centésima parte del Sol, como quiere Machometus Aratensis [Albategnius, al-Battani el Harranite], que estima el diámetro del Sol en diez veces mayor, y por ello no es fácil ver una mancha tan pequeña bajo una luz tan potentísima. Aunque Averroes, en su paráfrasis a Ptolomeo, recuerda que

1. El tránsito de Venus delante del Sol fue observado por primera vez —mediante un telescopio— en 1639.

2. Es decir, el espesor de la esfera vendría dado por la razón del diámetro del epiciclo al diámetro de la esfera o, en el diagrama adjunto, por la distancia entre el más interno y el más externo de los tres círculos concéntricos.



3. La sucesión de los círculos orbitales según sus perigeos y apogeos puede ser representada en el diagrama siguiente, que ha sido dibujado a escala.



había visto algo negruzco, cuando observó la conjunción del Sol y Mercurio que había calculado. Y por ello opinan que estas dos estrellas se mueven por debajo del círculo solar.

Pero cuán poco firme y cierto es este razonamiento se manifiesta en que siendo la distancia hasta el perigeo lunar, según Ptolomeo de 38 unidades, de las que una unidad es del centro de la Tierra a su superficie [el radio], pero según una estimación más veraz son más de 49 (como se mostrará más tarde), sin embargo sabemos que en tan gran espacio no hay contenida ninguna otra cosa nada más que aire y, si se quiere, incluso lo que llaman elemento ígneo. Además, el diámetro del círculo [del epiciclo] de Venus, por el que se separa [digresión angular] del Sol XLV grados más o menos a cada lado, debe ser seis veces mayor que la distancia desde el centro de la Tierra al ápside inferior de aquél, como se demostrará en su lugar.[1] ¿Qué dirán, pues, que hay contenido en un espacio tan grande como para que contenga la Tierra, el aire, el éter, la Luna y Mercurio? Y, además, ¿qué albergaría aquel ingente epiciclo de Venus, si girase alrededor de la Tierra inmóvil?

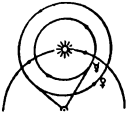
También se manifiesta poco convincente aquella argumentación de Ptolomeo, según la cual debería ocupar el Sol una posición media entre los planetas que se separan [elongación angular] en todos los sentidos y los que no se separan,[2] puesto que la Luna al separarse ella misma en todos los sentidos, muestra su falsedad. Pero ¿qué causa alegarán los que ponen bajo el Sol a Venus y después a Mercurio, o los separan en otro orden, puesto que no realizan circuitos separados y diferentes del Sol como las demás estrellas errantes, a no ser que la relación entre velocidad y lentitud no falsee el orden?

En consecuencia, será necesario o que la Tierra no sea el centro, al que se refiere el orden de los astros y de los orbes, o no habrá, ni aparecerá, una razón segura de orden, por la que la posición superior es debida más a Saturno que a Júpiter o a cualquier otro. Por ello creo que no debe despreciarse en absoluto lo que opinó Martianus Capella, que escribió una enciclopedia, y algunos otros latinos. Pues pensaron que Venus y Mercurio giran alrededor del Sol, que está en el centro, y juzgan que por esta causa no se apartan de él más de lo que les permite la convexidad de sus orbes: por lo que no rodean a la Tierra, como los demás, sino que sus ápsides giran en otros sentidos. Pues, ¿qué otra cosa quieren decir sino que el centro de aquellos orbes está alrededor del Sol? Así, la órbita de Mercurio conviene que esté encerrada dentro de la órbita de Venus, que es mayor en más del doble, y tendrá por esa misma amplitud un lugar suficiente para ella.[3]

1. Según Ptolomeo, la razón del radio del epiciclo de Venus al radio de su excéntrica se halla entre 2 a 3 y 3 a 4, o aproximadamente 43⅛ a 60. Como en el perigeo el epiciclo se resta de la distancia media, o radio del círculo excéntrico, y en el apogeo se suma a la distancia media, la razón de la distancia de Venus en el perigeo y en el apogeo es aproximadamente de 1 a 6. Es decir, en el paso del apogeo al perigeo, la razón del aumento en la magnitud aparente del planeta debería ser aproximadamente de 36 a 1, ya que la magnitud aparente varía inversamente a la razón del cuadrado de la distancia. Pero no se observa tal aumento en la magnitud del planeta. Esta oposición entre una apariencia y las consecuencias de una hipótesis hecha para salvar otra apariencia aún está presente en el propio esquema de Copérnico.

2. Ptolomeo hace que los centros de los epiciclos de Venus y de Mercurio viajen alrededor de la Tierra longitudinalmente con el mismo ritmo que el Sol medio, y de tal manera que éste se halle siempre sobre la recta que se extiende desde el centro de la Tierra a los centros de sus epiciclos, en tanto que los centros de los epiciclos de los planetas superiores podrían estar a cualquier distancia angular del Sol medio.

3. Tal como en el siguiente diagrama, que ha sido dibujado a escala.

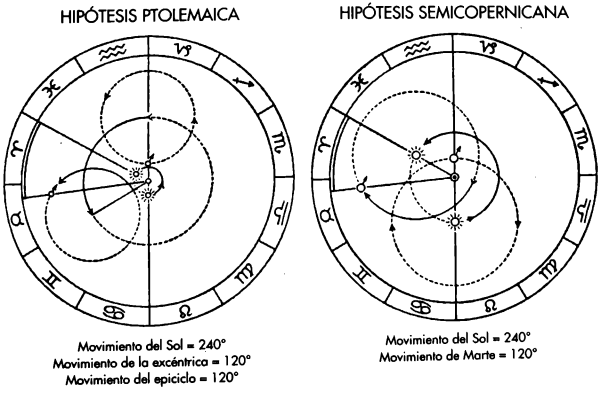


Si alguien, aprovechando esto como ocasión, relacionara también Saturno, Júpiter y Marte con aquel mismo centro, entendiendo su magnitud tan grande que puede contener lo que en ellos hay y rodear a la Tierra, no se equivocará. Esto lo demuestra la relación existente en la tabla de sus movimientos.[1] Pues consta que están siempre más cerca de la Tierra alrededor de su salida vespertina, esto es, cuando están en oposición al Sol, mediando la Tierra entre ellos y el Sol; en cambio, están más lejos de la Tierra en

1. Considérese el caso de Marte. Según Ptolomeo, la razón de su epiciclo a su excéntrica es 39½ a 60, o aproximadamente 2 a 3. Marte tiene 37 ciclos de anomalía, o movimiento sobre el epiciclo, y 42 ciclos de longitud, o movimiento del epiciclo sobre la excéntrica, en 79 años solares; o, para simplificar, digamos que la razón del movimiento del Sol al de los planetas es de 2 a 1. Copérnico sugiere aquí que si el centro del movimiento del planeta está situado alrededor del Sol en movimiento, entonces los ciclos ptolemaicos de anomalía representarían el número de veces que el Sol ha superado al planeta en longitud: así, los 37ciclos de anomalía más los 42 ciclos de longitud suman los de las 79 revoluciones solares. Es decir, el Sol estará viajando ahora alrededor de la Tierra en un círculo que tiene la misma magnitud relativa que el epiciclo de Marte según Ptolomeo y tiene un epiciclo que tiene la misma magnitud relativa que el círculo excéntrico de Marte según Ptolomeo, sobre el cual epiciclo Marte viaja en la dirección opuesta con una velocidad que es la mitad de la del Sol. Según ambas hipótesis, la apariencia desde la Tierra será la misma, tal como se ve en los diagramas siguientes.

En efecto, tal como en la hipótesis ptolemaica, supóngase que la Tierra está en el centro de los círculos aproximadamente concéntricos del Sol, Marte y la eclíptica. Sea el radio del epiciclo del planeta al radio de la excéntrica del planeta como 2 a 3. Ahora, en primer lugar, supongamos el Sol visto al principio de Leo, y supóngase que el planeta en el perigeo de su epiciclo se ve al comienzo de Acuario, en oposición al Sol. A continuación, supóngase que el Sol se desplaza 240 grados hacia el este, hasta el comienzo de Aries; y supóngase que durante el mismo intervalo el epiciclo se mueve 120 grados hacia el este, hasta el comienzo de Géminis, y el planeta 120 grados hacia el este sobre el epiciclo. Ahora, el planeta será visto en Tauro, a unos 36 grados al oeste del Sol.

Pero, si de conformidad con la hipótesis semicopernicana se hace que el Sol gire alrededor de la Tierra en un círculo que tiene la misma magnitud relativa que el epiciclo ptolemaico de Marte, en tanto que Marte se halla en un epiciclo que tiene la misma magnitud relativa que su excéntrica ptolemaica y tiene su centro en el Sol; y si la posición aparente de Marte y el Sol son al principio las mismas de antes y el Sol se desplaza 240 grados al este, a lo largo de la deferente de Marte, mientras Marte se mueve 120 grados al oeste en su epiciclo, entonces Marte volverá a ser hallado en Tauro, aproximadamente a 36 grados al oeste del Sol.



el ocaso vespertino, cuando se ocultan cerca del Sol, mientras tenemos al Sol entre ellos y la Tierra. Lo que indica suficientemente que su centro remite más al Sol y alrededor del cual realizan sus giros Venus y Mercurio.[1]

Pero al sustentarse todos en un solo centro, es necesario que el espacio que queda entre el orbe convexo de Venus y el cóncavo de Marte, sea considerado también como un orbe o una esfera, homocéntrica con aquéllos, con respecto a las dos superficies, y que contenga a la Tierra, a su acompañante la Luna, y todo lo que está contenido bajo el globo lunar. De ningún modo podemos separar de la Tierra a la Luna, que está, fuera de toda discusión, muy próxima a ella, sobre todo habiendo hallado en este espacio un lugar adecuado y suficientemente amplio para ella. Por ello no nos avergüenza confesar que este todo que abarca la Luna, incluido el centro de la Tierra, se traslada a través de aquella gran órbita entre las otras estrellas errantes, en una revolución anual alrededor del Sol, y alrededor del mismo está el centro del mundo: por lo que permaneciendo el Sol inmóvil, cualquier cosa que aparezca relacionada con el movimiento del Sol puede verificarse aún mejor con la movilidad de la Tierra; pero la magnitud del mundo es tan grande que, aunque la distancia de la Tierra al Sol tenga una dimensión bastante evidente con respecto a cualquier otra órbita de las estrellas errantes en razón de sus magnitudes, no aparece como perceptible con respecto a la esfera de las estrellas fijas. Creo que esto es más fácil de conceder, que distraer la inteligencia con aquélla casi infinita multitud de órbitas, como están obligados a realizar, quienes detuvieron a la Tierra en el centro del mundo. Más bien hay que seguir la sagacidad de la naturaleza, que así como evitó al máximo que se produjera algo superfluo e inútil, del mismo modo adornó a veces una misma cosa con muchos efectos.

Siendo todo esto muy difícil y casi inconcebible, y por supuesto contra la opinión de la mayoría, sin embargo, al avanzar, con la ayuda de dios, lo haremos más claro que el mismo Sol, sobre todo para los que no ignoran el arte de las matemáticas. Por lo que permaneciendo a salvo la primera razón (pues nadie alegará una mas conveniente que la de medir la magnitud de las órbitas por la cantidad de tiempo), el orden de las esferas se sigue de esta manera, empezando por la más alta.

La primera y más alta de todas es la esfera de las estrellas fijas, que se contiene a sí misma y a todas las cosas, y por ello es inmóvil: es, pues, el lugar del universo, con respecto a la cual se relaciona el movimiento y la posición de todos los demás astros. Pues, si algunos consideran que ella también se mueve de algún modo, nosotros atribuiremos [ese movimiento], aunque así lo parezca, a otra causa, en la deducción del movimiento terrestre. Sigue Saturno, el primero de los astros errantes, que completa su circuito en treinta años. Después de éste Júpiter, que se mueve en una revolución de doce años. Después Marte, que gira en dos años. En este orden, la revolución anual ocupa la cuarta posición, en dicha revolución dijimos que está contenida la Tierra jun-

Conjunción, Oposición, según Ptolomeo

1. Copérnico se pregunta por qué razón los planetas siempre se hallan en sus apogeos en el momento de conjunción con el Sol, y en sus perigeos en el momento de oposición, ya que de acuerdo con el esquema ptolemaico la situación inversa también es posible —tal como se muestra en el siguiente diagrama.

Pero si el Sol y no la Tierra es el centro de los movimientos del planeta, la razón es obvia.

Conjunción, Oposición, según Copérnico

to con la órbita de la Luna como epiciclo. En quinto lugar está Venus, que vuelve al punto de partida en el noveno mes. Finalmente, el sexto lugar lo tiene Mercurio, que se mueve en un espacio de ochenta días.[1]

1. Para ver cómo Copérnico dedujo la duración de sus períodos de revolución, considérense las siguientes razones ptolemaicas para los planetas inferiores:

	Ciclos de anomalía	*Ciclos de longitud*	*Años solares*
Mercurio	145	46 +	46 +
Venus	5	8 –	8 –

Resulta notable que el número de ciclos de longitud en un año sea igual al número de ciclos solares. Además, los dos planetas tienen una elongación angular limitada respecto al Sol. Para explicar estas dos peculiaridades, Copérnico hace que la Tierra se mueva en la circunferencia de un círculo que encierra las órbitas de Venus y de Mercurio, con el Sol en el centro de las tres órbitas. Entonces, los ciclos de anomalía del planeta en tantos años se convierten en el número de veces que el planeta avanza a la Tierra, a medida que ambos giran alrededor del Sol. Es decir, en tantos años solares el planeta habrá viajado alrededor del Sol un número de veces que es igual a la suma de sus ciclos de anomalía y de sus ciclos de longitud. Así, por ejemplo, Venus viaja alrededor del Sol aproximadamente 13 veces en 8 años solares; por lo tanto, su período de revolución es aproximadamente de 7½ meses; y, análogamente, el de Mercurio es aproximadamente 88 días; aunque por alguna oscura razón Copérnico escribe en realidad 9 meses para Venus («nono mense reducitur») y 80 días para Mercurio («octaginta dierum spatio circumcurrens»).

El lector puede intuir de los siguientes diagramas la equipolencia, con respecto a las apariencias, de las explicaciones ptolemaica y copernicana del movimiento de Venus.

Ahora, según la hipótesis de Ptolomeo, consideremos la Tierra situada en el centro de la eclíptica, el círculo solar y el círculo orbital de Venus, que lleva el epiciclo planetario. El radio del epiciclo es al del círculo orbital aproximadamente como 3 es a 4. Supongamos primero que el Sol está situado en el medio de Escorpio, y supongamos Venus en conjunción con el Sol y en el perigeo de su epiciclo. Supongamos a continuación que el Sol se desplaza 180 grados hacia el este hasta el medio de Tauro, y análogamente el centro del epiciclo; durante este mismo intervalo, el planeta se desplazará 112½ grados hacia el este sobre su epiciclo y aparecerá aproximadamente en medio de Aries, es decir, unos 30 grados al oeste del Sol.

Pero, según la hipótesis de Copérnico, coloquemos el Sol en el centro de los círculos orbitales de Venus y la Tierra, que conservan las magnitudes relativas del epiciclo ptolemaico y el círculo orbital de Venus, pero mantengamos la Tierra en el centro de la eclíptica, en lo que se refiere a las apariencias, ya que la distancia entre la Tierra y el Sol es imperceptible en comparación con la magnitud de la esfera de las estrellas fijas. Ahora, si la Tierra se coloca en el centro de Tauro, vista desde el Sol, y el planeta está en su perigeo entre la Tierra y el Sol, de tal manera que Venus y el Sol aparecerían en medio de Escorpión, mientras Venus se mueve 292½ grados hacia el este, entonces el Sol aparecerá en el centro de Tauro, y el mismo planeta en medio de Aries, es decir, a unos 30 grados al oeste del Sol.

Pero volvamos a los tres planetas superiores:

	Ciclos de anomalía	*Ciclos de longitud*	*Años solares*
Marte	37	42 +	79 –
Júpiter	65	6 –	71 –
Saturno	57	2 +	59 –

Aquí, resulta notable que según la hipótesis ptolemaica la suma de las revoluciones del círculo excéntrico y de las revoluciones en la anomalía es igual al número de ciclos solares; y también que las conjunciones con el Sol tiene lugar en el apogeo del planeta, y las oposiciones en su perigeo.

Pero según Copérnico, los ciclos ptolemaicos de anomalía representarán ahora el número de veces que la Tierra ha avanzado al planeta, y el período de revolución en longitud quedará solo. Así, por ejemplo, Saturno tendrá dos revoluciones en longitud en 59 años, o una revolución alrededor del Sol en unos 30 años. El planeta estará girando directamente sobre su círculo excéntrico en lugar de girar sobre su epiciclo ptolemaico, y la Tierra estará girando ahora en un círculo interior que tiene la misma magnitud relativa que el epiciclo anterior. Naturalmente, aquí las dos hipótesis también resultan equipolentes, en lo que respecta a las apariencias.

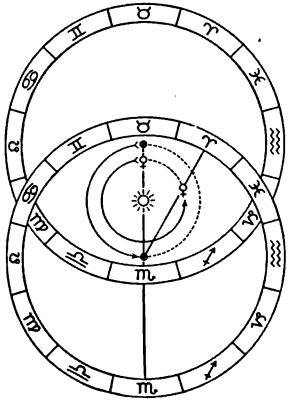
Y en medio de todo permanece el Sol. Pues ¿quién en este bellísimo templo pondría esta lámpara en otro lugar mejor, desde el que pudiera iluminar todo? Y no sin razón unos le llaman lámpara del mundo, otros mente, otros rector. Trimegisto le llamó «dios visible», Sófocles, en Electra, «el que todo lo ve». Así, en efecto, como sentado en un solio real, gobierna la familia de los astros que lo rodean. Tampoco la Tierra es privada en manera alguna de los servicios de la Luna, pero, como dice Aristóteles en *De Animalibus*, la Luna tiene con la Tierra un gran parentesco. A su vez la Tierra concibe del Sol y se embaraza en un parto anual.

Por consiguiente, encontramos bajo esta ordenación una admirable simetría del mundo y un nexo seguro de armonía entre el movimiento y la longitud de las órbitas, como no puede encontrarse de otro modo.[1] Aquí es posible advertir al observador

---

En otras palabras, al construir una teoría para dar razón de cuatro coincidencias que quedaban inexplicadas en Ptolomeo, a saber, 1) la igualdad entre el número de ciclos en longitud y los ciclos solares, en los dos planetas inferiores; 2) la igualdad entre los ciclos solares y la suma de los ciclos de anomalía y longitud, en los planetas superiores; 3) la separación angular limitada entre Mercurio y Venus y el Sol; y 4) las conjunciones en el apogeo y las oposiciones en el perigeo de Saturno, Júpiter y Marte, Copérnico ha proyectado los círculos excéntricos de Venus y Mercurio en el círculo orbital de la Tierra, y además ha colapsado los tres epiciclos de Saturno, Júpiter y Marte sobre este mismo círculo. Es decir, ahora un círculo desempaña el papel de cinco círculos anteriores.

HIPOTESIS COPERNICANA

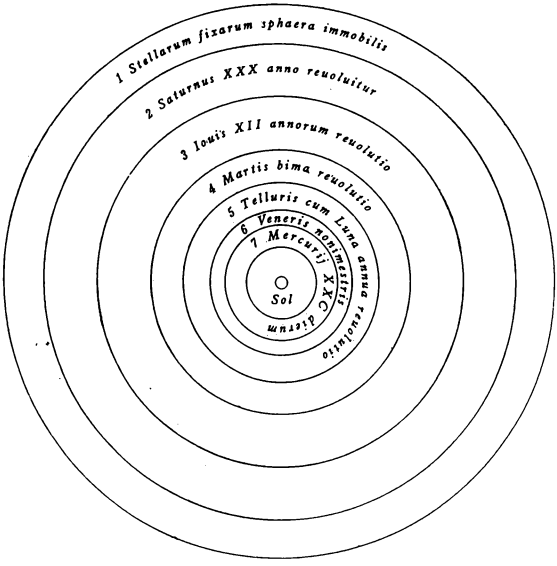


Movimiento de la Tierra = 180°
Movimiento de Venus = 292½°

1. Recordemos las razones ptolemaicas entre el radio del epiciclo y el del círculo excéntrico, y las excentricidades correspondientes.

	Epiciclo	*Excéntrico*	*Excentricidad*
Mercurio	22½	60	3
Venus	43⅙	60	1¼
Marte	39½	60	6
Júpiter	11½	60	2⅖
Saturno	6½	60	3¼

En el esquema ptolemaico es imposible calcular las magnitudes relativas de los círculos excéntricos, ya que no hay ninguna medida común a todos ellos. Pero ahora que los círculos excéntricos de Mercurio y de Venus y los epiciclos de Marte, Júpiter y Saturno han sido reducidos al círculo orbital de la Tierra, es fácil



atento por qué aparece mayor la progresión y la retrogradación en Júpiter que en Saturno y menor que en Marte, y a la vez mayor en Venus que en Mercurio.[1] Y por qué tal flujo y reflujo aparece más frecuentemente en Saturno que en Júpiter y más raramente en Marte y en Venus que en Mercurio.[2] Además, por qué Saturno, Júpiter y Marte

---

calcular las magnitudes relativas de los círculos orbitales —que ahora son los epiciclos de los planetas inferiores y los círculos excéntricos de los superiores—, ya que, por razón de la necesaria conmensurabilidad entre epiciclo y excéntrico, todos ellos son conmensurables con el círculo orbital de la Tierra. Así, por ejemplo, si tomamos la distancia de la Tierra al Sol como unidad, los planetas observarán las siguientes distancias aproximadas respecto al Sol.

Mercurio	1/3	Tierra	1	Júpiter	5
Venus	3/4	Marte	1 1/2	Saturno	9

1. En los tres planetas superiores, los ángulos que miden la progresión y la retrogradación aparentes tienen como vértice el centro del planeta y como lados las tangentes trazadas al círculo orbital del planeta. Es fácil ver que, de acuerdo con las magnitudes relativas de los círculos orbitales, los arcos de progresión y retrogradación parecerán menores en Saturno que en Júpiter, y mayores en Venus que en Mercurio.

2. Los intercambios de progresión y retrogradación son proporcionales al número de veces que la Tierra avanza a los planetas exteriores y que los planetas interiores avanzan a la Tierra. Ahora la Tierra avanza a

acrónicos están más cerca de la Tierra que en las proximidades de su ocultación y aparición. Pero sobre todo Marte, cuando dura toda la noche [en oposición al Sol], parece igualar en magnitud a Júpiter (distinguible sólo por su color rojizo), sin embargo, en otro sitio se le encuentra con dificultad entre las estrellas de segunda magnitud,[1] buscándole con una observación cuidadosa por medio de sextantes. Todo ello procede de la misma causa, que está en el movimiento de la Tierra.

Puesto que ninguna de estas cosas aparece en las fijas, demuestra su inmensa altitud, lo que también hace que se desvanezca ante nuestros ojos la órbita del movimiento anual y su imagen; porque todo lo visible tiene alguna longitud dentro de una distancia, más allá de la cual no se ve, como se demuestra en óptica. Pues, que desde el más alto de los astros errantes, Saturno, hasta la esfera de las estrellas fijas hay una gran distancia, lo demuestran sus destellantes luces. Por este indicio se distinguen sobre todo de los planetas, pues entre los que se mueven y los que no se mueven convenía que hubiera la máxima diferencia. Tan admirable es esta divina obra del Óptimo y Máximo [Hacedor].

11. DEMOSTRACIÓN DEL TRIPLE MOVIMIENTO DE LA TIERRA

En consecuencia, como tantos y tan grandes testimonios de las estrellas errantes concuerdan con la movilidad terrestre, expondremos ahora tal movimiento en resumen, demostrando al menos los fenómenos aparentes mediante el mismo como hipótesis. Es necesario admitir un triple movimiento. El primero, el que hemos dicho que era llamado νυχθημερινόν por los griegos, el circuito del día y de la noche, que se dirige del ocaso al orto alrededor del eje de la Tierra, en cuanto se considera que el mundo es llevado en la dirección opuesta, describiendo el círculo equinoccial, al que algunos llaman equidial, imitando la significación de los griegos, entre los que se llama ἰσημερινός. El segundo es el movimiento anual del centro, el cual describe el círculo de los signos alrededor del Sol, de modo semejante del ocaso al orto, esto es, del oeste al este, avanzando entre Venus y Marte (como se ha dicho) con los cuerpos que le acompañan. Esto hace que el mismo Sol, con un movimiento similar, parezca atravesar el zodíaco. Por ejemplo, de este modo, al pasar el centro de la Tierra por Capricornio, el Sol parece atravesar Cáncer, al pasar por Acuario, en Leo, y así sucesivamente (como decíamos). Es necesario entender que el círculo equinoccial y el eje de la Tierra tienen una inclinación variable con respecto a este círculo, que pasa por la mitad de los signos, y su plano [plano de la eclíptica]. Porque si permanecieran fijos y no siguiesen sino el movimiento del centro, no aparecería ninguna desigualdad entre los días y las noches, sino que sería o solsticio de verano o de invierno, o equinoccio, o verano, o invierno, o cualquier otra forma del tiempo permanece-

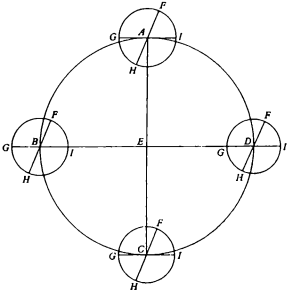
---

Saturno más a menudo que Júpiter, Júpiter más a menudo que Marte, a Marte más a menudo que es avanzada por Venus, y avanzada menos a menudo por Venus que por Mercurio. De aquí que la frecuencia de progresión y retrogradación estén en este orden.

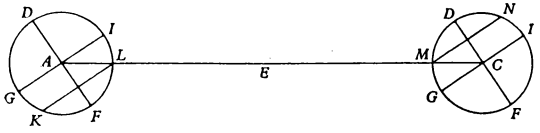
1. Según el esquema ptolemaico, sólo a partir de los cambios de magnitud del planeta Marte puede deducirse cuáles son sus distancias relativas a la Tierra en el perigeo y el apogeo. Pero según el esquema copernicano, se sigue de las distancias relativas del planeta en el perigeo y en el apogeo —que están en la proporción de 1 a 5— que el diámetro aparente del planeta debería variar inversamente a esta proporción, suponiendo que el planeta pudiera verse cuando está en conjunción con el Sol.

ría igual a sí misma. Luego, sigue el tercer movimiento, el de declinación, también una revolución anual, pero hacia el oeste, esto es, retrocediendo al contrario del movimiento del centro. Y así, a causa de estos dos movimientos casi iguales y contrarios entre sí, sucede que el eje de la Tierra y, en ella misma el mayor de los paralelos, el ecuador, miran siempre casi hacia la misma parte del mundo, y de ahí que permanezcan como inmóviles. Entretanto el Sol parece moverse por la oblicuidad de la eclíptica, con el mismo movimiento que el centro de la Tierra, y no de otra manera que si éste [el centro de la Tierra] fuera el centro del mundo, con tal de que recuerdes que la distancia entre el Sol y la Tierra en comparación con la esfera de las estrellas fijas excede ya a nuestra vista.

Como estas cosas son de tal manera, que más desean ser comprendidas por los ojos que dichas, tracemos el círculo ABCD, que representará el circuito anual del centro de la Tierra en el plano de la eclíptica, y sea E el Sol, el centro del mismo. Este círculo lo cortaré en cuatro partes con los diámetros AEC y BED. Ocupe el punto A el principio de Cáncer, B el de Libra, C el de Capricornio, D el de Aries. Y pongamos el centro de la Tierra primero en A, sobre el cual dibujaré el ecuador terrestre FGHI, pero no en el mismo plano, sino que el diámetro GAI sea la sección común de los círculos, me refiero al ecuador y a la eclíptica. Trazado también el diámetro FAH, formando ángulos rectos [perpendicular] con el GAI, sea F el límite de declinación máxima austral, y H boreal. Así dispuestas correctamente estas cosas, los terrestres verán el Sol, que está en el centro E, en el solsticio de invierno bajo Capricornio, que produce H, máxima declinación boreal vuelta hacia el Sol, porque la declinación del ecuador con respecto a la línea AE, por medio de la revolución diurna, describe el trópico de invierno paralelo al ecuador, según la distancia comprendida por el ángulo de inclinación EAH. Avance ahora el centro de la Tierra hacia el este, y al mismo tiempo F, límite de la declinación máxima, hacia el oeste, hasta que en B ambos hayan recorrido cuadrantes de círculo. Mientras tanto, el ángulo EAI permanecerá siempre igual al AEB, por la igualdad de las revoluciones, y los diámetros siempre permanecerán paralelos uno a otro, FAH a FBH, GAI a GBI y el ecuador al ecuador. Por la causa ya dicha varias veces, estas mismas cosas aparecen en la inmensidad del cielo. En consecuencia, desde B, principio de Libra, E aparecerá bajo Aries, y la sección común de los círculos coincidirá con la línea GBIE, con respecto a la cual la revolución diurna no admite ninguna declinación, sino que toda declinación estará en los lados [de dicha línea]. Y así el Sol aparecerá en el equinoccio de primavera. Prosiga el centro de la Tierra, bajo las condiciones aceptadas y una vez recorrido un semicírculo, hasta C, entonces aparecerá el Sol al entrar en Cáncer. Pero F, declinación austral del círculo equinoccial, vuelta hacia el Sol, hará que aquél se vea al norte, recorriendo el trópico de verano, en relación con el ángulo de inclinación ECF. Girando de nuevo F hacia el tercer cuadrante del círculo, la sección común GI caerá de nuevo en la línea ED, por lo que el Sol, visto en Libra, parecerá haber completado el equinoccio de otoño. Pero después, en este mismo proceso, volviéndose



H poco a poco hacia el Sol, regresará a la posición del principio, desde donde empezamos a avanzar.



Otro procedimiento. Sea, de nuevo, en el plano supuesto, AEC el diámetro y la sección común del círculo ABC perpendicular al mismo plano. En éste, alrededor de A y C, esto es, en Cáncer y Capricornio, trácese el círculo de la Tierra que pasa por los polos DGFI, y sea DF el eje de la Tierra, D el polo norte, F el sur, y GI el diámetro del ecuador. En consecuencia, cuando F gira hacia el Sol, que está en E, y la inclinación del círculo equinoccial es boreal según el ángulo IAE, entonces el movimiento alrededor del eje describirá el paralelo austral al ecuador, según el diámetro KL y la distancia LI, que aparecerá con respecto al Sol como el trópico de Capricornio. O sea, para decirlo más correctamente, este movimiento alrededor del eje en dirección a AC forma una superficie cónica, que tiene el vértice en el centro de la Tierra y como base un círculo paralelo al ecuador;[1] en el opuesto punto C también sucede todo de igual forma, pero al revés. En consecuencia, es patente de qué modo estos dos movimientos que se oponen entre sí, me refiero al del centro y al de la inclinación, obligan al eje de la Tierra a permanecer en el mismo balanceo y en una posición similar, y les dan a todos una apariencia de movimientos solares.

Pero decíamos que las revoluciones anuales, la del centro y la de declinación, eran casi iguales, pues si esto ocurriera con exactitud sería necesario que los puntos equinocciales y solsticiales y la oblicuidad total de la eclíptica con respecto a la esfera de las estrellas fijas no cambiaran nunca. Pero, siendo muy pequeña la diferencia, no se manifiesta, a no ser en un tiempo grande: desde Ptolomeo hasta nosotros hay casi XXI grados en los que aquéllos [equinoccios y solsticios] se anticipan [precesión]. Por esta causa, algunos creyeron que también se movía la esfera de las estrellas fijas, por lo que les pareció que había una novena esfera superior; y no bastando esto, ahora los más modernos añaden una décima, sin haber alcanzado el fin que nosotros esperamos conseguir por medio del movimiento de la Tierra, que como principio e hipótesis usaremos en las demostraciones de los otros movimientos.

1. O, en otras palabras, el eje del ecuador terrestre describe alrededor del eje de la eclíptica terrestre una doble superficie cónica que tiene sus vértices en el centro de la Tierra, en un período de revolución aproximadamente igual al del centro de la Tierra.

12. DE LAS LÍNEAS RECTAS QUE SE SUBTIENDEN EN UN CÍRCULO

Hemos resumido lo que de la filosofía natural nos parecía necesario para nuestro propósito, como principios e hipótesis, a saber, que el mundo es esférico, inmenso, semejante al infinito, también que la esfera de las estrellas fijas que contiene a todas las cosas es inmóvil, y en cambio que el movimiento de los demás cuerpos celestes es circular. Aceptamos también que la Tierra es móvil según ciertas revoluciones, con lo que intentamos estructurar toda la ciencia de los astros como sobre una primera piedra. Pero, puesto que las demostraciones que usamos en casi todo el trabajo, versan sobre líneas rectas y arcos, sobre triángulos planos y convexos, de los cuales, aunque muchas cosas están ya claras en los *Elementos* de Euclides, sin embargo no tienen lo que aquí sobre todo se investiga: de qué modo pueden deducirse los lados a partir de los ángulos y los ángulos a partir de los lados, puesto que un ángulo no mide a la cuerda, como tampoco la cuerda al ángulo, sino el arco. Por lo que se ha encontrado el procedimiento por el que se pueden conocer las cuerdas subtensas a cualquier arco, con la ayuda de las cuales es posible calcular el arco correspondiente a un ángulo y, al contrario, por el arco se puede calcular la cuerda que subtiende al ángulo. Por lo cual no parece fuera de lugar si en este libro tratamos de tales líneas, y también de los lados y los ángulos tanto de los triángulos planos como de los esféricos, que ya Ptolomeo enseñó esparcidamente y por medio de ejemplos, de modo que aquí se resuelva ya de una vez y después de que los hayamos tratado, queden más claros.

Dividimos el círculo, por consenso común entre los matemáticos, en CCCLX grados. Pero los antiguos tomaban un diámetro de 120 unidades. En cambio, los posteriores, para evitar la oscuridad de las porciones fraccionadas en las multiplicaciones y divisiones de números con respecto a esas líneas, que en general son inconmensurables en longitud, y a menudo se usa su potencia, unos establecieron un diámetro racional de 1.200.000 partes, otros de 2.000.000, otros con otra medida, desde el momento en que pasaron a usarse las figuras índicas de los números. Pues este número supera a cualquier otro, sea griego o latino, acomodándose con singular rapidez en los cálculos. También nosotros, por esta causa, tomamos como suficientes las $\overline{CC}$ [200.000] unidades del diámetro, que pueden excluir un error patente. Pues con ellas se puede conseguir una aproximación, en lo que no se tiene que seguir de número a número.

Explicaremos esto con seis teoremas y un problema, siguiendo aproximadamente a Ptolomeo.

TEOREMA PRIMERO

Dado el diámetro de un círculo, se dan también los lados del triángulo, cuadrado, hexágono, pentágono y decágono, a los que circunscribe dicho círculo.

Puesto que la distancia desde el centro [radio], la mitad del diámetro, es igual al lado del hexágono, el lado del triángulo al cuadrado es igual al triple del lado del hexágono al cuadrado, y el cuadrado del lado del tetrágono es igual al doble del lado del hexágono al cuadrado, según se demostró en los *Elementos* de Euclides. Luego se dan, el lado del hexágono en lon-

gitud de $\overline{\text{C}}$ [100.000] unidades, el del tetrágono de 141.422 unidades, y el del triángulo de 173.205 unidades.

Sea, ahora, AB el lado del hexágono, que por el problema I del libro II o por el X del libro VI de Euclides, en media y extrema proporción se corta en el punto C, y sea el segmento mayor CB, igual al cual se le añade BD. En consecuencia, ABD completa estará dividida en extrema y media proporción: y el segmento menor, el añadido BD, el lado del decágono inscrito en el círculo, AB el lado del hexágono; lo cual se clarificó a partir del V y IX preceptos del libro XIII de Euclides.

Pero BD se conocerá de este modo: córtese en dos partes AB en el punto E. Es patente por el III precepto del mismo libro de Euclides, que el cuadrado de EBD es igual al quíntuplo del cuadrado de EB. Pero EB se conoce con una longitud de $\overline{\text{L}}$ [50.000] unidades, a partir de ella se conoce el quíntuplo de su cuadrado, y EBD con una longitud de 111.803 unidades, de las cuales, si se restan 50.000 que tiene EB, queda BD de 61.803, lado del decágono buscado.

También se conoce el lado del pentágono, el cuadrado del cual es igual a la suma de los cuadrados del lado del hexágono y del decágono, de 117.557 unidades.

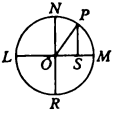
Luego, dado el diámetro del círculo, se conocen los lados del triángulo, tetrágono, pentágono, hexágono y decágono inscritos en el mismo círculo. Que es lo que había que demostrar.

PORISMA

Por lo tanto es claro que, habiendo sido dada la cuerda de cualquier arco, se conoce también la que subtiende al arco del semicírculo.

Puesto que el ángulo en un semicírculo es recto: y en los triángulos rectángulos, el cuadrado de la subtensa al ángulo recto, esto es, el cuadrado del diámetro, es igual a la suma de los cuadrados de los ángulos que comprenden dicho ángulo recto. En consecuencia, puesto que el lado del decágono, que subtiende XXXVI grados de la circunferencia, ha sido demostrado como de 61.803 unidades, de las que el diámetro tiene $\overline{\text{CC}}$, se conoce también la recta que subtiende a los restantes CXLIIII grados del semicírculo, de 190.211 de aquellas unidades. Y en el caso del lado del pentágono, que mide 117.557 unidades del diámetro y subtiende un arco de LXXII grados, se conoce la línea recta que subtiende los restantes CVIII grados del semicírculo, de 161.803 unidades.

TEOREMA SEGUNDO ΕΙΣΑΓΩΓΟΝ [INTRODUCTORIO (AL TEOREMA III)]



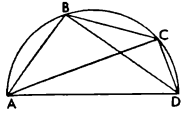
Si se inscribiera un cuadrilátero en un círculo, el rectángulo comprendido por las diagonales es igual a los rectángulos comprendido por los dos pares de lados opuestos.

Sea, pues, ABCD un cuadrilátero inscrito en el círculo. Afirmo que el rectángulo comprendido bajo las diagonales AC y DB, es igual a los rectángulos comprendidos bajo AB, DC y bajo AD, BC. Hagamos, pues, el ángulo ABE igual al CBD. Luego, todo el ángulo ABD será igual a todo el EBC, tomando EBD común a uno y a otro.

También el ACB y el BDA son iguales entre sí por estar en el mismo segmento de círculo, y puesto que dos triángulos semejantes tendrán lados semejantes, entonces BC es a BD, como EC es a AD, y, por lo tanto, el [rectángulo] que está bajo EC y BD es igual al que está bajo BC y AD. Pero también el triángulo ABE y el CBD son semejantes, porque los ángulos ABE y CBD han sido hechos iguales, y el BAC y BDC son iguales porque abarcan el mismo arco de círculo. Sea de nuevo, AB es a BD como AE es CD, y, por lo tanto, el [rectángulo] que está bajo AB y CD es igual al que está bajo AE y BD. Pero ya se declaró que el [rectángulo] AD, BC era igual que el BD, EC. En conjunto, pues, el BD, AC es igual al AD, BC y al AB, CD. Que era oportuno demostrar.

TEOREMA TERCERO

A partir de esto, si fueran dadas rectas subtendidas a arcos desiguales en un semicírculo, la subtensa [cuerda] de este semicírculo, por la que el arco mayor excede al menor, también es dada.

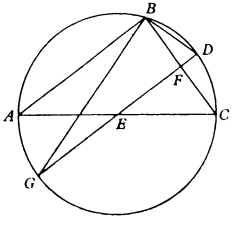


De modo que en el semicírculo ABCD, y con diámetro AD, sean conocidas AB y AC subtensas de arcos desiguales. Deseando nosotros averiguar la subtensa BC, se conocen, por lo antes dicho, las subtensas BD y CD de los arcos restantes del semicírculo, con los cuales se delimita en el semicírculo el cuadrilátero ABCD, cuyas diagonales AC y BD son conocidas, junto con los tres lados AB, AD y CD; en el cual, como ya se demostró [el rectángulo] que hay bajo AC y BD es igual a la suma del AB, CD y del AD, BC. Luego, si el [rectángulo] que está bajo AB, CD, se resta del AC, BD, quedará el AD, BC. Y así, dividiendo por AD, en cuanto es posible, se calcula la subtensa buscada BC.

De ahí que siendo conocidos, por los datos anteriores, por ejemplo los lados del pentágono y del hexágono, por esta relación se conoce la subtensa de XII grados, en los que ellos se diferencian, y que es de 20.905 de las unidades del diámetro.

TEOREMA CUARTO

Dada la recta que subtiende a un arco cualquiera, se da también la que subtiende a la mitad del arco.



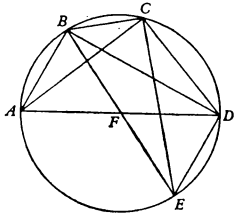
Describamos el círculo ABC, cuyo diámetro sea AC, y sea BC el arco conocido con su subtensa, y desde el centro E la línea EF corte formando ángulos rectos [perpendicularmente] a BC, que por el III precepto del libro III de Euclides cortará a BC en dos partes iguales en el punto F y, prolongándola, al arco en D, también constrúyanse las subtensas AB y BD. En consecuencia, puesto que los triángulos ABC y EFC son rectángulos y además también semejantes porque tienen un ángulo común el ECF, luego como

CF es la mitad de BFC, así EF es la mitad de AB; pero AB se conoce, porque subtiende el arco restante del semicírculo; luego, se da también EF, y DF el resto de la mitad del diámetro, el cual al completarse es DEG, y únase BG. En consecuencia, en el triángulo BDG por el ángulo recto B descienda la misma BF como perpendicular a la base. En consecuencia, el [rectángulo] que está bajo GDF [GD, DF], es igual al [cuadrado] BD; luego se da BD en longitud, que subtiende a la mitad del arco BDC.

Conociendo ya la que subtiende a XII grados, se conoce también la que subtiende a VI grados como de 10.467 unidades, y la de III grados de 5.235 unidades, y la de I grado y medio de 2.618 unidades, y la de tres cuartos de 1.309 unidades.

TEOREMA QUINTO

De nuevo, cuando se conocen las cuerdas que subtienden a dos arcos, se conoce también la que subtiende al arco completo compuesto por ellos.



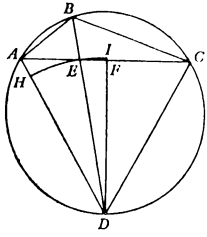
Sean AB y BC las subtensas conocidas en un círculo. Afirmo que se conoce también la que subtiende a todo el arco ABC. Dibujados los diámetros AFD y BFE, trácese también las subtensas BD y CE, que se conocen por los teoremas precedentes, a causa de que AB y BC son conocidos y DE es igual a AB. Uniendo CD ciérrese el cuadrilátero BCDE, cuyas diagonales BD y CE se conocen junto con tres lados el BC, DE y BE, y también se conocerá el restante CD por el segundo teorema, y por lo tanto se conoce la subtensa CA, que subtiende al resto del semicírculo y a todo el arco ABC: que es lo que se buscaba.

Además, como hace poco se han hallado las líneas rectas que subtienden arcos de tres, uno y medio, y tres cuartos de grado, con cuyos intervalos cualquiera puede confeccionar tablas con una relación muy exacta, aunque si quiere avanzar por medio de grados y unir un arco a otro, o por medios grados, o de cualquier otro modo, con razón dudará de las subtensas de tales grados, porque nos faltan los cálculos gráficos con los que se demuestren. Sin embargo, nada nos impide hallar el error perceptible a los sentidos y, establecido el cálculo, seguir el que menos disienta [con los admitidos]. Esto también lo investigó Ptolomeo con respecto a las subtensas de un grado y de medio, advirtiéndonos primero [de lo siguiente].

TEOREMA SEXTO

La razón entre dos arcos es mayor que la razón entre la mayor y la menor de las rectas subtendidas [cuerdas].

Sean en un círculo dos arcos desiguales unidos, AB y BC, y sea el mayor BC. Afirmo que la razón de BC a AB es mayor que la de las subtensas BC a AB. Abarquen éstas el ángulo B, que se corta en dos por la línea BD, y unáse AC, que corta a BD en el punto E, de modo semejante únanse también AD y CD que son iguales, porque con ellas se sub-



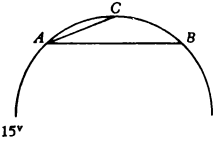
tiende arcos iguales. En consecuencia, puesto que en el triángulo ABC, la línea que corta al ángulo por la mitad, corta también a AC en el punto E, los segmentos de la base serán EC a AE como BC es a AB, y puesto que BC es mayor que AB, EC será también mayor que EA. Trácese DF perpendicular a AC, que cortará a la misma AC en el punto F, que necesariamente se encontrará en el segmento mayor EC.

Y puesto que en todo triángulo, al ángulo mayor se opone el lado mayor, en el triángulo DEF el lado DE es mayor que el DF, y además AD es mayor que DE; porque, descrito un arco, con centro en D y con un intervalo [radio] DE, cortará a AD y pasará más allá de DF. En consecuencia, córtese a AD en H y prolónguese en línea recta DFI. Entonces, puesto que el sector EDI es mayor que el triángulo EDF, y el triángulo DEA mayor que el sector DEH. Por tanto el triángulo DEF tiene con respecto al triángulo DEA una razón menor que el sector DEI con respecto al sector DEH. Pero los sectores son proporcionales a los arcos o a los ángulos en el centro, por otra parte los triángulos con el mismo vértice son proporcionales a sus bases. Por lo tanto es mayor la relación entre los ángulos EDF a ADE, que la de las bases EF a AE. En consecuencia, componiendo, el ángulo FDA es al ángulo ADE mayor que la base AF es a la base AE, y del mismo modo, CDA es a ADE mayor que AC es a AE. Pero, separando, CDE es a EDA mayor que CE a EA. Por otra parte, los ángulos CDE es a EDA, como el arco CB es al arco AB, y la base CE es a la AE como la subtensa BC es a la subtensa AB.

En consecuencia, es mayor la razón del arco CB al arco AB, que la de la subtensa BC a la subtensa AB. Que es lo que había que demostrar.

PROBLEMA

Pero puesto que el arco es siempre mayor que la subtensa a él trazada, siendo la recta la línea más corta de las que tienen los mismos extremos, con todo la desigualdad tiende a la igualdad al pasar las secciones del círculo de mayores a menores, de modo que, en el punto de contacto extremo (de tangencia) del círculo, coexisten la línea circular y la recta: en consecuencia, es necesario que, antes de que esto ocurra, difieran entre sí con una discrepancia poco manifiesta. Sea, pues, por ejemplo, AB un arco de III grados y AC uno de I grado y medio; se demostró que la subtensa AB tiene 5.235 unidades, de las que el diámetro propuesto tiene $\overline{cc}$ [200.000], y AC de 2.618 de las mismas unidades. Y siendo AB el doble del arco AC, sin embargo la subtensa AB es menor que el doble de la cuerda AC, que supera en una unidad a las 2.617. Pero si tomamos AB de un grado y medio y AC de tres cuartos de grado, tendremos la subtensa AB de 2.618 unidades y AC de 1.309 unidades, que, aunque debe ser mayor que la mitad de la subtensa AB, en nada parece diferenciarse de la mitad, sino que ahora surge la misma proporción entre los arcos y las líneas rectas.



Luego, como vemos hemos llegado a un punto, en el que la diferencia entre recta y la curva que la envuelve escapa a los sentidos, como convertidos en una sola línea, no dudamos en tomar 1.309 como subtensa de tres cuartos de grado, en igual proporción con respecto a un grado y con respecto a las partes restantes [del grado], de modo que añadiendo un cuarto a los tres cuartos establezcamos la subtensa de un grado en 1.745 unidades, la de medio grado en 872½ unidades, y la de un tercio en 582 unidades aproximadamente. Sin embargo, pienso que es suficiente, si sólo consignamos en la tabla las mitades de las líneas que subtienden a un arco doble. Con esta forma abreviada, comprendemos en un cuadrante, lo que era necesario extender hasta el semicírculo: y sobre todo porque resultan de uso más frecuente en la demostración y el cálculo las semicuerdas que las cuerdas. Presentamos ahora una tabla con incrementos de un sexto de grado, y que tiene tres columnas: en la primera están los grados o las unidades del arco y las sextas partes de un grado; la segunda contiene el número en longitud de la mitad de la línea que subtiende [cuerda] un arco doble; la tercera contiene la diferencia entre los mismos números en longitud que hay entre cada uno de los grados, y por medio de las cuales [las diferencias] podemos añadir proporcionalmente lo que convenga en cada una de las fracciones de los grados. Y ésta es la tabla.

Tabla de las cuerdas subtendidas en un círculo

Arcos		*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*	*Arcos*		*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*
°	′			°	′		
0	10	291	291	3	20	5814	
0	20	582		3	30	6105	
0	30	873		3	40	6395	
0	40	1163		3	50	6685	
0	50	1454		4	0	6975	
1	0	1745		4	10	7265	
1	10	2036		4	20	7555	
1	20	2327		4	30	7845	
1	30	2617		4	40	8135	
1	40	2908		4	50	8425	
1	50	3199		5	0	8715	
2	0	3490		5	10	9005	
2	10	3781		5	20	9295	
2	20	4071		5	30	9585	
2	30	4362		5	40	9874	
2	40	4653		5	50	10164	
2	50	4943	290	6	0	10453	
3	0	5234		6	10	10742	289
3	10	5524		6	20	11031	

(continuación)

Arcos °	'	*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*	*Arcos* °	'	*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*
6	30	11320		12	30	21644	
6	40	11609		12	40	21928	
6	50	11898		12	50	22212	
7	0	12187		13	0	22495	283
7	10	12476		13	10	22778	
7	20	12764	288	13	20	23062	
7	30	13053		13	30	23344	
7	40	13341		13	40	23627	
7	50	13629		13	50	23910	282
8	0	13917		14	0	24192	
8	10	14205		14	10	24474	
8	20	14493		14	20	24756	
8	30	14781		14	30	25038	281
8	40	15069		14	40	25319	
8	50	15356		14	50	25601	
9	0	15643		15	0	25882	
9	10	15931		15	10	26163	
9	20	16218		15	20	26443	280
9	30	16505		15	30	26724	
9	40	16792		15	40	27004	
9	50	17078		15	50	27284	
10	0	17365		16	0	27564	279
10	10	17651	286	16	10	27843	
10	20	17937		16	20	28122	
10	30	18223		16	30	28401	
10	40	18509		16	40	28680	
10	50	18795		16	50	28959	278
11	0	19081		17	0	29237	
11	10	19366	285	17	10	29515	
11	20	19652		17	20	29793	
11	30	19937		17	30	30071	277
11	40	20222		17	40	30348	
11	50	20507		17	50	30625	
12	0	20791		18	0	30902	
12	10	21076	284	18	10	31178	276
12	20	21360		18	20	31454	

(continuación)

Arcos °	'	*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*	*Arcos* °	'	*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*
18	30	31730		24	30	41469	
18	40	32006		24	40	41734	264
18	50	32282	275	24	50	41998	
19	0	32557		25	0	42262	
19	10	32832		25	10	42525	263
19	20	33106		25	20	42788	
19	30	33381	274	25	30	43051	
19	40	33655		25	40	43313	262
19	50	33929		25	50	43575	
20	0	34202		26	0	43837	
20	10	34475	273	26	10	44098	261
20	20	34748		26	20	44359	
20	30	35021		26	30	44620	260
20	40	35293	272	26	40	44880	
20	50	35565		26	50	45140	
21	0	35837		27	0	45399	259
21	10	36108	271	27	10	45658	
21	20	36379		27	20	45916	258
21	30	36650		27	30	46175	
21	40	36920	270	27	40	46433	
21	50	37190		27	50	46690	257
22	0	37460		28	0	46947	
22	10	37730	269	28	10	47204	256
22	20	37999		28	20	47460	
22	30	38268		28	30	47716	255
22	40	38537	268	28	40	47971	
22	50	38805		28	50	48226	
23	0	39073		29	0	48481	254
23	10	39341	267	29	10	48735	
23	20	39608		29	20	48989	253
23	30	39875		29	30	49242	
23	40	40141	266	29	40	49495	252
23	50	40408		29	50	49748	
24	0	40674		30	0	50000	
24	10	40939	265	30	10	50252	251
24	20	41204		30	20	50503	

(continuación)

Arcos °	'	*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*	*Arcos* °	'	*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*
30	30	50754	250	36	30	59482	
30	40	51004		36	40	59716	233
30	50	51254		36	50	59949	
31	0	51504	249	37	0	60181	232
31	10	51753		37	10	60413	
31	20	52002	248	37	20	60645	231
31	30	52250		37	30	60876	
31	40	52498	247	37	40	61107	230
31	50	52745		37	50	61337	
32	0	52992	246	38	0	61566	229
32	10	53238		38	10	61795	
32	20	53484		38	20	62024	
32	30	53730	245	38	30	62251	228
32	40	53975		38	40	62479	
32	50	54220	244	38	50	62706	227
33	0	54464		39	0	62932	
33	10	54708	243	39	10	63158	226
33	20	54951		39	20	63383	
33	30	55194	242	39	30	63608	225
33	40	55436		39	40	63832	
33	50	55678	241	39	50	64056	224
34	0	55919		40	0	64279	223
34	10	56160	240	40	10	64501	222
34	20	56400		40	20	64723	
34	30	56641	239	40	30	64945	221
34	40	56880		40	40	65166	220
34	50	57119	238	40	50	65386	
35	0	57358		41	0	65606	219
35	10	57596		41	10	65825	
35	20	57833	237	41	20	66044	218
35	30	58070		41	30	66262	
35	40	58307	236	41	40	66480	217
35	50	58543		41	50	66697	
36	0	58779	235	42	0	66913	216
36	10	59014	235	42	10	67129	215
36	20	59248	234	42	20	67344	

(continuación)

Arcos °	'	*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*	*Arcos* °	'	*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*
42	30	67559	214	48	30	74896	
42	40	67773		48	40	75088	192
42	50	67987	213	48	50	75280	191
43	0	68200	212	49	0	75471	190
43	10	68412		49	10	75661	
43	20	68624	211	49	20	75851	189
43	30	68835		49	30	76040	
43	40	69046	210	49	40	76229	188
43	50	69256		49	50	76417	187
44	0	69466	209	50	0	76604	
44	10	69675		50	10	76791	186
44	20	69883	208	50	20	76977	
44	30	70091	207	50	30	77162	185
44	40	70298		50	40	77347	184
44	50	70505	206	50	50	77531	
45	0	70711	205	51	0	77715	183
45	10	70916		51	10	77897	182
45	20	71121	204	51	20	78079	
45	30	71325		51	30	78261	181
45	40	71529	203	51	40	78442	180
45	50	71732	202	51	50	78622	
46	0	71934		52	0	78801	179
46	10	72136	201	52	10	78980	178
46	20	72337	200	52	20	79158	
46	30	72537		52	30	79335	177
46	40	72737	199	52	40	79512	176
46	50	72936		52	50	79688	
47	0	73135	198	53	0	79864	175
47	10	73333	197	53	10	80038	174
47	20	73531		53	20	80212	
47	30	73728	196	53	30	80386	173
47	40	73924	195	53	40	80558	172
47	50	74119		53	50	80730	
48	0	74314	194	54	0	80902	171
48	10	74508	194	54	10	81072	170
48	20	74702		54	20	81242	169

(continuación)

Arcos °	′	*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*	*Arcos* °	′	*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*
54	30	81411		60	30	87036	143
54	40	81580	168	60	40	87178	142
54	50	81748	167	60	50	87320	
55	0	81915		61	0	87462	141
55	10	82082	166	61	10	87603	140
55	20	82248	165	61	20	87743	139
55	30	82413	164	61	30	87882	
55	40	82577		61	40	88020	138
55	50	82741	163	61	50	88158	137
56	0	82904	162	62	0	88295	
56	10	83066		62	10	88431	136
56	20	83228	161	62	20	88566	135
56	30	83389	160	62	30	88701	134
56	40	83549	159	62	40	88835	
56	50	83708		62	50	88968	133
57	0	83867	158	63	0	89101	132
57	10	84025	157	63	10	89232	131
57	20	84182		63	20	89363	
57	30	84339	156	63	30	89493	130
57	40	84495	155	63	40	89622	129
57	50	84650		63	50	89751	128
58	0	84805	154	64	0	89879	
58	10	84959	153	64	10	90006	127
58	20	85112	152	64	20	90133	126
58	30	85264		64	30	90258	
58	40	85415	151	64	40	90383	125
58	50	85566	150	64	50	90507	124
59	0	85717		65	0	90631	123
59	10	85866	149	65	10	90753	122
59	20	86015	148	65	20	90875	121
59	30	86163	147	65	30	90996	
59	40	86310		65	40	91116	120
59	50	86457	146	65	50	91235	119
60	0	86602	145	66	0	91354	118
60	10	86747	144	66	10	91472	118
60	20	86892		66	20	91590	117

(continuación)

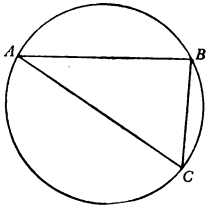
Arcos		*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*	*Arcos*		*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*
°	'			°	'		
66	30	91706	116	72	30	95372	87
66	40	91822	115	72	40	95459	86
66	50	91936	114	72	50	95545	85
67	0	92050	113	73	0	95630	
67	10	92164		73	10	95715	84
67	20	92276	112	73	20	95799	83
67	30	92388	111	73	30	95882	82
67	40	92449	110	73	40	95964	81
67	50	92609	109	73	50	96045	
68	0	92718		74	0	96126	80
68	10	92827	108	74	10	96206	79
68	20	92935	107	74	20	96285	78
68	30	93042	106	74	30	96363	77
68	40	93148	105	74	40	96440	
68	50	93253		74	50	96517	76
69	0	93358	104	75	0	96592	75
69	10	93462	103	75	10	96667	74
69	20	93565	102	75	20	96742	73
69	30	93667		75	30	96815	72
69	40	93769	101	75	40	96887	
69	50	93870	100	75	50	96959	71
70	0	93969	99	76	0	97030	70
70	10	94068	98	76	10	97099	69
70	20	94167		76	20	97169	68
70	30	94264	97	76	30	97237	
70	40	94361	96	76	40	97304	67
70	50	94457	95	76	50	97371	66
71	0	94552	94	77	0	97432	65
71	10	94646	93	77	10	97507	64
71	20	94739		77	20	97566	63
71	30	94832	92	77	30	97630	
71	40	94924	91	77	40	97692	62
71	50	95015	90	77	50	97754	61
72	0	95105		78	0	97815	60
72	10	95195	89	78	10	97875	59
72	20	95284	88	78	20	97934	58

(continuación)

Arcos °	'	*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*	*Arcos* °	'	*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*
78	30	97992		84	20	99511	28
78	40	98050	57	84	30	99539	27
78	50	98107	56	84	40	99567	
79	0	98163	55	84	50	99594	26
79	10	98218	54	85	0	99620	25
79	20	98272		85	10	99644	24
79	30	98325	53	85	20	99668	23
79	40	98378	52	85	30	99692	22
79	50	98430	51	85	40	99714	
80	0	98481	50	85	50	99736	21
80	10	98531	49	86	0	99756	20
80	20	98580		86	10	99776	19
80	30	98629	48	86	20	99795	18
80	40	98676	47	86	30	99813	
80	50	98723	46	86	40	99830	17
81	0	98769	45	86	50	99847	16
81	10	98814	44	87	0	99863	15
81	20	98858	43	87	10	99878	14
81	30	98902	42	87	20	99892	13
81	40	98944		87	30	99905	12
81	50	98986	41	87	40	99917	
82	0	99027	40	87	50	99928	11
82	10	99067	39	88	0	99939	10
82	20	99106	38	88	10	99949	9
82	30	99144		88	20	99958	8
82	40	99182	37	88	30	99966	7
82	50	99219	36	88	40	99973	6
83	0	99255	35	88	50	99979	
83	10	99290	34	89	0	99985	5
83	20	99324	33	89	10	99989	4
83	30	99357		89	20	99993	3
83	40	99389	32	89	30	99996	2
83	50	99421	31	89	40	99998	1
84	0	99452	30	89	50	99999	0
84	10	99482	29	90	0	100000	0

13. SOBRE LOS LADOS Y ÁNGULOS DE LOS TRIÁNGULOS PLANOS RECTILÍNEOS

I



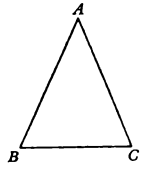
En un triángulo, conocidos los ángulos se conocen los lados.

Afirmo que sea el triángulo ABC, al que se le circunscribe un círculo de acuerdo con la quinta proposición del cuarto libro de Euclides. En consecuencia, también se conocerán los arcos AB, BC, CA, en los mismos grados que CCCLX son igual a dos rectos. Pero dados los arcos, se dan también los lados del triángulo inscrito en el círculo, como cuerdas, según la tabla expuesta, en las mismas unidades que el diámetro tomado tiene $\overline{\text{cc}}$ [200.000].

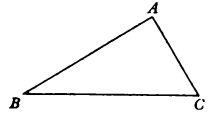
II

Pero si fueran dados dos lados del triángulo con alguno de los ángulos, se conocerán también el otro lado junto con los demás ángulos.

Pues, o bien los lados son iguales; y si son desiguales, el ángulo dado o es recto o es agudo u obtuso; y a la vez los lados dados pueden comprender o no comprender el ángulo dado.



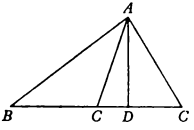
En primer lugar, en el triángulo ABC, sean los dos lados conocidos AB y AC iguales, que comprenden al ángulo dado A. En consecuencia, los otros ángulos, los de la base BC, como son iguales, se conocen también como la mitad del resto, después de substraer A de dos ángulos rectos. Pero si el ángulo dado en principio hubiera estado en la base, se conocería inmediatamente su compañero y el otro será el resultado de restarle éstos a dos rectos. Pero en un triángulo de ángulos conocidos, se conocen los lados; por la tabla se conoce la propia base BC en unidades, de las cuales AB o AC, como si fueran líneas trazadas desde el centro [radios], serían de $\overline{\text{c}}$ [unidades], o un diámetro de $\overline{\text{cc}}$ [200.000] unidades.



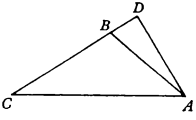
Si el ángulo BAC, comprendido por lados conocidos, fuera recto, resultará lo mismo. Pues es clarísimo que lo que suman los cuadrados de AB y AC es igual al cuadrado de la base BC; se conoce, por tanto, BC en longitud y los otros lados en su relación mutua. Pero el segmento de círculo que cubre un triángulo ortogonal es un semicírculo, cuya base BC sería el diámetro. En consecuencia, BC será de $\overline{\text{cc}}$ [200.000] unidades, se darán AB y AC como subtensas a los restantes ángulos B, C. Por ello la relación de la tabla los mostrará en unidades, de las cuales CLXXX son iguales a dos rectos.

Lo mismo resultará si se hubiera dado BC con otro de los lados que comprenden el ángulo recto: lo que pienso que consta ya muy claramente.

Sea ahora conocido el ángulo agudo ABC, comprendido por los lados también conocidos AB y BC, y desde el punto A descienda una perpendicular a BC, prolongando ésta, si fuera necesario, según caiga dentro o fuera del triángulo. Esta perpendicular sea AD, por la que se distinguen dos triángulos ortogonales ABD y ADC. Y puesto que en el triángulo ABD se dan los ángulos, pues D es recto y B es dado por hipótesis, luego se dan también AD y BD por la tabla, como subtensas a los ángulos A y B, en unidades de las que AB, el diámetro del círculo, tiene $\overline{cc}$ [200.000]. Y por la misma razón por la que se conocía AB en longitud, se conocerán igualmente AD y BD. Y también se da CD, en la que BC y BD se diferencian. En consecuencia, también en el triángulo rectángulo ADC, dados los lados AD y CD, se conoce el lado buscado AC y el ángulo ACD según la precedente demostración.



Y no sucederá de otro modo si el ángulo B fuera obtuso, puesto que desde el punto A trazada la perpendicular AD a la línea recta prolongada BC, se produce el triángulo ABD de ángulos dados. Pues el ángulo ABD, exterior al ABC, es conocido, y el D es recto, luego se conoce BD y AD, en las unidades de las que AB tiene $\overline{cc}$. Y puesto que BA y BC están entre sí en proporción conocida, se conoce también AB, en las mismas unidades en las que se mide BD y CBD completa. Por tanto, también en el triángulo rectángulo ADC, siendo dados dos lados, el AD y el CD, se conoce también el buscado AC y el ángulo BAC, junto con el que queda ACB: que es lo que se buscaba.



Sea, ahora, uno u otro de los lados dados el que subtiende al ángulo conocido B, esto es, puede ser AC, junto con AB. Luego, se conoce por la tabla el AC, en unidades de las que el diámetro del círculo que circunscribe al triángulo ABC tiene $\overline{cc}$ [200.000], y por la razón dada entre AC y AB, se conoce en unidades similares AB y por la tabla el ángulo ACB junto con el otro ángulo BAC, por el que se conoce también la subtensa CB: y con esta razón dada se conoce la longitud de los lados en cualquier magnitud.

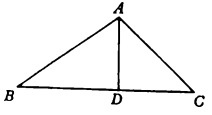
III

Dados todos los lados de un triángulo, se conocen los ángulos.

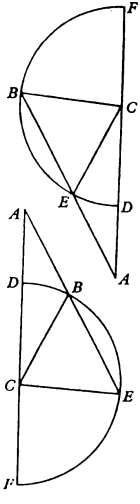
Es suficientemente conocido como para indicarlo que en un triángulo equilátero cada uno de los ángulos mide la tercera parte de dos rectos.

En el isósceles también está claro. Pues los lados iguales son al tercero como la mitad del diámetro a la subtensa del arco, por lo cual se conoce el ángulo comprendido por los lados iguales de acuerdo con la tabla, en aquellos grados en los que alrededor del centro CCCLX valen cuatro rectos; después, los otros ángulos, que están en la base, también se conocen, como la mitad de lo que queda de dos rectos [la mitad del suplementario].

Luego, queda ahora que se demuestre esto en los triángulos escalenos, que de modo semejante dividiremos en ortogonales. Sea ABC el triángulo escaleno de lados conocidos, y al lado que sea más largo, por ejemplo el BC, bájese la perpendicular AD. Y nos enseña la proposición XIII del libro II de Euclides, que AB, subtensa de un ángulo agudo, al cuadrado, se resta de la suma de los otros dos lados al cuadrado y resulta el doble del rectángulo BC, CD. Pues es necesario que el ángulo C sea agudo, de otra manera sucedería también, contra la hipótesis, que AB sería el lado más largo, lo que conviene señalar a partir del libro I de Euclides, proposición XVII y las dos siguientes. Luego, se dan BD y DC, y los triángulos ABD y ADC serán ortogonales, de lados y ángulos conocidos, como ya se ha repetido varias veces, a partir de los cuales constan los ángulos buscados del triángulo ABC.



De otro modo. Igualmente, la penúltima proposición del libro III de Euclides, nos mostrará quizá un método más cómodo, si por el lado más pequeño, que sea el BC, con centro en C y con un intervalo [radio] BC, describimos un círculo que cortará a los dos lados restantes o a uno de ellos. Corte ahora a los dos, a AB en el punto E y AC en el D, y extiéndase también la línea ADC hasta el punto F para completar el diámetro DCF.



Estructurado esto así, es claro por aquel precepto de Euclides, que el rectángulo FA, AD, es igual al que hay en BA, AE, siendo uno y otro igual al cuadrado de la línea que desde A toca [tangente] al círculo. Pero se conoce AF completa, al ser conocidos todos sus segmentos, o sea, CF, CD, iguales a BC, que son la distancia del centro a la circunferencia [radios], y AD, longitud en la que CA excede a CD [AD = CA - CD]. Por lo cual, como es conocido el rectángulo BA, AE y la recta AE en longitud, junto con el resto BE, que subtiende al arco BE. Uniendo EC tendremos el triángulo BCE de lados conocidos: luego se da también el ángulo EBC. De ahí que, por lo precedente, se conozcan también los restantes ángulos C y A, en el triángulo ABC.

Por otra parte, que el círculo no corte a AB, como en la siguiente figura, donde AB cae sobre la circunferencia cóncava: no menos será dada BE y, en el triángulo isósceles BCE, el ángulo CBE será dado y el exterior ABC. Y con el mismo argumento de demostración de antes se conocen los otros ángulos.

Y lo dicho sobre los triángulos rectilíneos, en los que se basa la mayor parte de la geodesia, es suficiente. Pasemos ahora a los esféricos.

14. SOBRE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

Llamamos aquí triángulo convexo [esférico], aquel que en una superficie esférica está contenido por tres arcos de círculos máximos. Pero tomemos la diferencia y magnitud

de los ángulos en un arco de círculo máximo, que es descrito con el punto de sección como polo, y este arco es interceptado por los cuadrantes de los círculos que comprenden el ángulo. Tal arco así interceptado es a toda la circunferencia, como el ángulo de la sección es a IIII rectos, los que dijimos que contenían CCCLX grados iguales.

I

Si hubiera tres arcos de círculos máximos de una esfera, de los que dos cualquiera, juntos, fueran mayores que el tercero, es evidente que con ellos puede construirse un triángulo esférico.

Pues lo que aquí se propone con respecto a los arcos lo demuestra la proposición XXIII del libro XI de Euclides respecto a los ángulos. Existiendo la misma razón entre ángulos y arcos y pasando los círculos máximos por el centro de la esfera, es patente que, aquellos tres sectores de los círculos a los que pertenecen los arcos, constituyen un ángulo sólido en el centro de la esfera. Luego, está claro lo que se propone.

II

Es necesario que cualquiera de los arcos del triángulo [esférico] sea menor que un semicírculo.

Pues el semicírculo no forma ningún ángulo en el centro, sino que descansa en una línea recta. Pero los otros dos ángulos, a los cuales pertenecen los arcos, no pueden cerrar un ángulo sólido en el centro y de ahí tampoco un triángulo esférico. Y pienso que ésta fue la causa por la que Ptolomeo, en la explicación de este tipo de triángulos, sobre todo con respecto a la figura del sector esférico, declara que no existen arcos considerados mayores que un semicírculo.

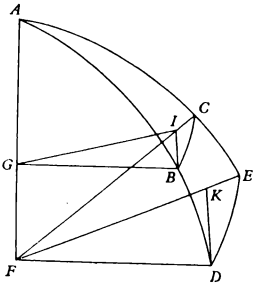
III

En los triángulos esféricos que tienen un ángulo recto, la línea recta [cuerda] que subtiende al doble del lado que se opone al ángulo recto, es a la subtensa [cuerda] de uno de los lados que comprenden el ángulo recto, como el diámetro de la esfera a la [cuerda] que subtiende el doble del ángulo comprendido en el círculo máximo de la esfera por el lado restante y el primero [hipotenusa].

Sea, pues, el triángulo esférico ABC, cuyo ángulo C sea recto. Digo que la subtensa al doble de AB es a la subtensa del doble de BC como el diámetro de la esfera es a la línea que subtiende en el círculo máximo al doble del ángulo BAC.

Tomando A como polo, descríbase DE arco de un círculo máximo, y complétense los cuadrantes de los círculos ABD y ACE. Y desde el centro de la esfera F, señálense las secciones comunes de los círculos: FA la de ABD y ACE, FE la de ACE y DE, y FD de ABD y DE. Y además FC de los círculos AC y BC. Después trácense formando ángulos rectos [perpendiculares] BG a FA, BI a FC y DK a FE, y únase GI.

En consecuencia, puesto que si un círculo corta a otro círculo trazado a través de sus polos, lo corta en ángulos rectos, será recto el ángulo comprendido por AED, y también



el ABC por hipótesis, y cada uno de los planos EDF y BCF perpendicular al AEF. Por lo cual, si desde el punto K en el segmento común FKE se levantara una línea recta perpendicular en el plano subyacente, comprenderá también, junto con KD, un ángulo recto, por la definición de los planos perpendiculares entre sí; también KD es perpendicular a AEF. Pero, mediante idénticas relaciones, se levanta BI con respecto al mismo plano, y por ello DK y BI son paralelas entre sí. Pero también lo es GB a FD, porque FGB y GFD son ángulos rectos. Y por la proposición X del libro XI de los *Elementos* de Euclides, el ángulo FDK será igual al GBI. Pero el FKD es recto y también el GIB, por definición de la línea perpendicular. En consecuencia, los lados de los triángulos semejantes son proporcionales, de modo que DF es a BG como DK es a BI. Pero BI es la mitad de la línea que subtiende [cuerda] al doble del arco CB, ya que forma un ángulo recto con la línea que parte del centro [radio] CF. Y por la misma razón, BG, mitad de la línea que subtiende al doble del lado BA, y DK mitad de la que subtiende al doble de DE, o sea, el ángulo del doble de A, y DF es la mitad del diámetro de la esfera.

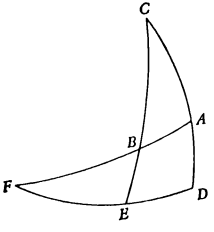
En consecuencia, es patente que la subtensa del doble de AB es a la subtensa del doble de BC, como el diámetro es a la línea que subtiende al doble del ángulo A, o sea, al doble del arco interceptado DE: lo cual se debía demostrar.

IV

En cualquier triángulo que tenga un ángulo recto, conociéndose además otro ángulo junto con cualquier lado, se puede conocer el restante ángulo y los demás lados.

Sea, pues, el triángulo ABC, que tiene el ángulo A recto y otro cualquiera, por ejemplo el B, dado. Respecto al lado dado suponemos una triple posibilidad: que sea adyacente a los ángulos dados, como AB, o sólo al recto, como AC, o que se oponga al recto, como BC.

En primer lugar, sea el lado dado AB y tomando a C como polo descríbase el arco del círculo máximo DE y, completados los cuadrantes CAD y CBE, prolónguese AB y DE hasta que se corten en el punto F. Luego, a la vez, estará en F el polo de CAD, porque A y D son ángulos rectos. Y puesto que, si en una esfera las órbitas máximas se cortan entre sí en ángulos rectos, recíprocamente se cortan en dos y recíprocamente se cortan por los polos, luego también serán ABF y DEF cuadrantes de los círculos. Siendo conocido AB, se conoce también BF, la parte restante del cuadrante, y el ángulo EBF es igual al conocido ABC, por opuesto por el vértice. Pero, por la demostración precedente, la subtensa del doble de BF



es a la subtensa del doble de EF, como el diámetro de la esfera es a la subtensa del doble del ángulo EBF. Pero tres de ellas se conocen: el diámetro de la esfera, la [cuerda] del doble de BF y del doble del ángulo EBF, o sus mitades. Luego, se da por la proposición XV del libro VI de Euclides, también la mitad de la línea que subtiende al doble de EF, y por la tabla el arco EF y el resto DE del cuadrante, o el ángulo buscado C. Del mismo modo, pero al contrario, la subtensa del doble de DE es a la del doble de AB, como la del doble de EBC es a la del doble de CB. Pero tres ya se conocen, DE, AB y CBE como cuadrante del círculo: luego se da también la cuarta, que subtiende al doble de CB, y el propio lado buscado CB. Y puesto que la subtensa del doble de CB es a la del doble de CA, como la del doble de BF es a la del doble de EF, puesto que están en la misma razón que el diámetro de la esfera a la subtensa al doble del ángulo CBA, y dos razones iguales a una son iguales entre sí: en consecuencia, dadas ahora tres BF, EF y CB, se da la cuarta CA y el tercer lado CA del triángulo ABC.

Sea ahora AC el lado considerado entre los datos, y nuestro propósito es encontrar los lados AB y BC, junto con el ángulo restante C. De nuevo, si se invierte el argumento se tendrá que la subtensa del doble de CA es a la subtensa del doble de CB en la misma proporción que la subtensa del doble del ángulo ABC es al diámetro, con lo que se conoce el lado CB; también AD y BE como la diferencia de los cuadrantes. Así de nuevo tendremos que la subtensa del doble de AD es a la subtensa del doble de BE como la subtensa del doble de ABF, que es el diámetro, es a la subtensa del doble de BF. Por tanto, se conoce el arco BF y la diferencia es el lado AB. Con un razonamiento similar a los precedentes, por medio de las subtensas del doble de BC, AB y FBE, se conoce la subtensa del doble de DE, o sea, el ángulo C restante.

De nuevo, supuesto el lado BC, se conocerá otra vez como antes AC y las restantes AD y BE. A partir de ellas, por medio de las líneas rectas subtendidas y el diámetro, como se ha dicho muchas veces, se conoce el arco BF y el lado restante AB. Entonces, por el teorema precedente, por medio de los conocidos BC, AB y CBE, se obtiene el arco ED, esto es, el otro ángulo C. El que buscábamos.

Y así, una vez más, en el triángulo ABC dados los ángulos A y B, de los cuales el A es recto, junto con alguno de los tres lados, se conoce el tercer ángulo con los otros dos lados. Lo que se quería demostrar.

V

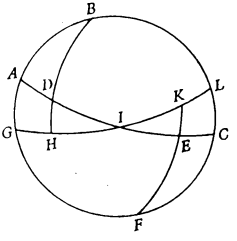
Dados los ángulos de un triángulo, uno de los cuales sea recto, se conocen los lados.

Manteniendo aún la figura precedente, donde por medio del ángulo conocido C, se conoce el arco DE, y el EF resto del cuadrante del círculo. Y puesto que BEF es un ángulo recto, porque BE desciende del polo de DEF, y el ángulo EBF es opuesto por el vértice a un ángulo conocido; en consecuencia, teniendo el triángulo BEF un ángulo E recto y además el ángulo B dado, junto con el lado EF, es un triángulo de lados y ángulos conocidos por el teorema precedente. Luego se da BF y el resto del cuadrante AB: y también en el triángulo ABC se demuestra que se conocen los restantes lados AC y BC por lo precedente.

VI

Si en la misma esfera, dos triángulos tuvieran un ángulo recto y además otro ángulo igual a otro del otro triángulo, y un lado de uno igual a otro lado, ya sea el adyacente a los ángulos iguales, ya sea el que se opone a cada uno de los ángulos iguales, se tendrán también los restantes lados de uno iguales a los restantes lados del otro, y el restante ángulo igual al ángulo restante.

Sea el hemisferio ABC, en el que se toman dos triángulos ABD y CEF, cuyos ángulos A y C son rectos, y además el ángulo ADB es igual al CEF, y un lado igual a un lado. Primeramente, este lado es adyacente a los ángulos iguales (esto es, AD igual a CE). Afirmo que también el lado AB es igual al lado CF, y BD al EF, y el ángulo restante ABD al restante CFE.



Pues tomados los polos en B y F, trácense los cuadrantes de círculos máximos GHI e IKL, y complétense ADI y CEI, los cuales es necesario que se corten entre sí en el polo del hemisferio, que está en el punto I, porque los ángulos en A y C son rectos, y porque GHI y CEI son círculos descritos por los polos del propio ABC.

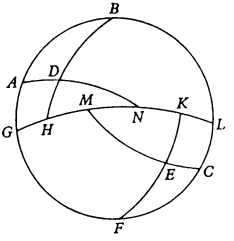
En consecuencia, puesto que AD y CE se suponen como lados iguales, serán también los arcos restantes DI e IE iguales, y los ángulos IDH e IEK, pues son opuestos por el vértice a los supuestos como iguales, y el H y el K son rectos. Y las cosas que están en la misma razón con respecto a una razón, entre sí están en la misma razón; será semejante la razón de la subtensa [cuerda] del doble de ID a la subtensa del doble de HI y la subtensa del doble de EI a la subtensa del doble de IK, siendo una y otra por el tercer teorema precedente, como el diámetro de la esfera es a la subtensa del doble del ángulo IDH, o igual a la subtensa del doble de IEK. Y por la XIIII proposición del libro V de los *Elementos* de Euclides, siendo la subtensa al doble del arco DI igual a la que subtiende al doble de IE, también serán iguales las subtensas del doble de IK y de HI. Y como en círculos iguales, líneas rectas iguales cortan arcos iguales, y del mismo modo las partes de los múltiplos están en la misma razón, serán iguales los arcos simples [planos] IH e IK y las partes restantes de los cuadrantes GH y KL, a partir de los cuales constan los ángulos B y F como iguales. Por esto también es la misma la razón entre la subtensa del doble de AD a la subtensa del doble de BD y la subtensa del doble de CE a la subtensa del doble de BD, que la subtensa del doble de EC a la subtensa al doble de EF. Y puesto que una y otra es como la subtensa al doble de HG, o su igual KL, es a la subtensa del doble de BDH, esto es, el diámetro, por el inverso del tercer teorema, también AD es igual a CE. Luego por la XIIII proposición del libro V de los *Elementos* de Euclides, BD es igual a EF, por las líneas rectas [cuerdas] subtendidas a los mismos arcos dobles.

Del mismo modo, para BD y EF iguales, demostraremos que los restantes lados y ángulos son iguales. Y a la vez, si AB y CF se toman como lados iguales, el mismo resultado se sigue por la identidad de las razones.

VII

También, aunque no hubiera ángulo recto, con tal de que el lado adyacente a los ángulos iguales fuera igual en ambos triángulos, se demostrará lo mismo.

De este modo, si en los dos triángulos ABD y CEF, los dos ángulos B y D fueran iguales a F y E del otro, también el lado BD, que es adyacente a ángulos iguales, será igual al lado EF. De nuevo afirmo que esos triángulos tienen iguales lados e iguales ángulos.



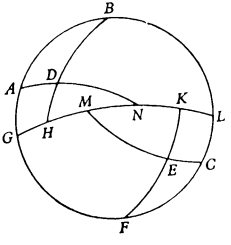
Pues tomados de nuevo los polos en B y F, descríbanse los arcos de círculos máximos GH y KL. Y prolongadas AD y GH córtense en N, y similarmente prolongadas EC y LK, en M. En consecuencia, puesto que los dos triángulos HDN y EKM tienen iguales los ángulos HDN y KEM, que son opuestos por el vértice a los tomados como iguales, y el H y el K son rectos, por ser secciones de arco descritas a través de los polos, también son iguales los lados DH y EK. Luego son equiángulos esos triángulos y equiláteros por la precedente demostración.

Y de nuevo, porque GH y KL son arcos iguales a causa de que B y F son ángulos supuestos iguales, luego toda GHN es igual a toda MKL, por el axioma de la suma de iguales. En consecuencia, aquí también son dos triángulos, AGN y MCL, que tienen un lado GN, igual a otro del otro, ML, y también un ángulo ANG igual a CML, y G y L rectos. Serán por ello también esos triángulos de lados y ángulos iguales. Por consiguiente, si se restan iguales de iguales, resultarán iguales AD a CE, AB a CF y el ángulo BAD al otro ángulo ECF. Que es lo que había que demostrar.

VIII

Pero también, si dos triángulos tuvieran dos lados de uno iguales a dos lados del otro, y un ángulo de uno igual a un ángulo de otro, ya sea el que comprenden los lados iguales, ya sea el que está en la base, también la base será igual a la base y los ángulos restantes a los ángulos restantes.

Como en la precedente figura, sea el lado AB igual al lado CF y el AD al CE, y, en primer lugar, el ángulo A, comprendido por los lados iguales, igual al ángulo C. Afirmo que también la base BD es igual a la base EF y el ángulo B al F, y el que queda BDA al restante CEF.



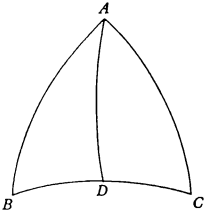
Tendremos, pues, dos triángulos AGN y CLM, cuyos ángulos G y L son rectos, y el GAN igual al MCL, que son lo que les falta [suplementarios] a los iguales BAD y ECF. En consecuencia, esos triángulos son entre sí equiángulos y equiláteros. Por lo cual, restándolos de los iguales AD y CE, queda como resto DN y ME también iguales. Pero ya se hizo patente que el ángulo DNH es igual al EMK, y que el H y el

K son rectos; también serán los dos triángulos DHN y EMK de iguales ángulos y lados entre sí, a partir de los cuales BD queda igual a EF y GH a KL, por lo que B y F son ángulos iguales y los restantes ADB y FEC iguales.

Si, en vez de los lados AD y EC, se toma como iguales las bases BD y EF, opuestas a ángulos iguales (permaneciendo lo demás), se demostrarán del mismo modo. Puesto que, por medio de los ángulos GAN y MCL exteriores iguales, y G, L rectos, y AG igual a CL, tendremos igualmente dos triángulos AGN y MCL, como antes, a su vez de lados y ángulos iguales entre sí. También, en cuanto partes de aquéllos, los [triángulos] DHN y MEK son iguales, porque H y K son ángulos rectos, y DNH, KME iguales, y los lados DH, EK, que son los restos de los cuadrantes, son iguales: de lo que se sigue lo mismo que dijimos.

IX

También en los triángulos isósceles esféricos, los ángulos que están en la base son iguales entre sí.



Sea el triángulo ABC, cuyos dos lados AB y AC sean iguales. Afirmo que también los ángulos que están junto a la base, el ABC y el ACB son iguales.

Desde el vértice A, descienda un círculo máximo, AD, que corte a la base formando ángulos rectos, esto es, trazado por los polos [de la base]. En consecuencia, en los dos triángulos ABD y ADC, el lado BA es igual al lado AC, y el AD común a ambos, y los ángulos en D rectos: es patente, por la demostración anterior, que los ángulos ABC y ACB son iguales. Que es lo que había que demostrar.

PORISMA

De aquí se sigue: el arco trazado por el vértice de un triángulo isósceles formando ángulos rectos en la base, cortará en dos a la base y al ángulo comprendido por los lados iguales, y viceversa: lo que consta por ésta y por la precedente demostración.

X

Dos triángulos cualesquiera, que tengan los lados de uno iguales a los lados del otro, tendrán también los ángulos iguales entre sí.

En efecto, puesto que, en cada triángulo, los tres segmentos de círculos máximos constituyen pirámides, que tienen las cúspides en el centro de la esfera, y como bases los triángulos planos, que están contenidos por las líneas rectas que subtienden [cuerdas] a los arcos de los triángulos convexos. Y aquellas pirámides son semejantes e iguales por la definición de figuras sólidas semejantes e iguales, y la razón de semejanza radica en que tienen los ángulos tomados en cualquier orden igual uno a otro de cada

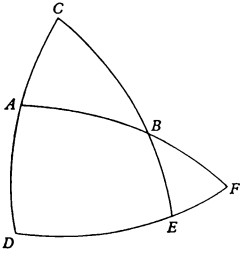
triángulo, luego tendrán esos triángulos los ángulos iguales entre sí. Y especialmente, los que definen más generalmente la similitud de figuras, quieren que ellas sean cualesquiera que tengan configuraciones semejantes, y a causa de las mismas configuraciones ángulos iguales entre una y otra. De lo cual juzgo que está claro que en una esfera, los triángulos que son equiláteros entre sí, son semejantes, del mismo modo que en los [triángulos] planos.

XI

Todo triángulo del que se conocen dos lados junto con un ángulo, se convierte en un triángulo de lados y ángulos conocidos.

Pues si los lados dados fueran iguales, serán iguales los ángulos que están en la base; y trazando un arco desde el vértice a la base, formando ángulos rectos [perpendicular], fácilmente se hará patente lo buscado por medio del corolario IX.

Pero si hubieran sido dados los lados desiguales, como en el triángulo ABC, cuyo ángulo A es dado junto con dos lados, los cuales pueden comprender el ángulo dado o no comprenderlo. Sean, pues, en primer lugar, los lados dados AB y AC los que comprenden el ángulo; y tomando a C como polo, descríbase el arco de círculo máximo DEF, y complétense los cuadrantes CAD y CBE, y prolongado AB, cortará a DE en el punto F. Así, también en el triángulo ADF se conoce el lado AD, lo que le falta [complementario] al cuadrante a partir del AC; y el ángulo BAD conocido por lo que le falta al CAB para valer dos rectos [suplementario] (pues la razón y la dimensión entre los ángulos es la misma que las que acontecen en la sección de líneas y planos rectos); y el ángulo D es recto. En consecuencia, por el IIII [teorema] de este capítulo, será el triángulo ADF de ángulos y lados conocidos. Y de nuevo, en el triángulo BEF se ha encontrado el ángulo F, y el E es recto por la sección a partir del polo, y también el lado BF, en el que todo ABF excede a AB. Luego, por el mismo teorema, también BEF será un triángulo de lados y ángulos dados. De ahí que partiendo de BE se conoce BC, resto del cuadrante, y a partir de EF se conoce el resto de DEF completo, que es DE, y es el ángulo C: y por medio del ángulo EBF, el ABC, que era el que se buscaba, por ser opuestos por el vértice.

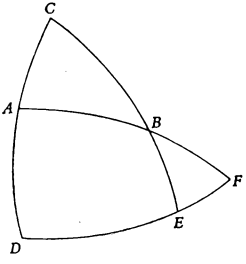


Si en lugar de AB se toma CB, que se opone al ángulo dado, sucederá lo mismo. Pues se dan los restos de los cuadrantes AD y BE, y, por la misma argumentación, dos triángulos ADF y BEF de ángulos y lados dados, como antes. Por lo cual, el triángulo propuesto ABC se convierte en de lados y ángulos dados: lo que se intentaba.

XII

Y además, si fueran dados dos ángulos cualquiera junto con un lado, sucederá lo mismo.

Permaneciendo la estructura de la figura anterior, se dan en el triángulo ABC dos ángulos, el ACB y el BAC, con el lado AC, que es adyacente a uno y otro ángulo. Además, si uno de los ángulos dados fuera recto, habría podido conseguirse todo lo demás, deduciéndolo según el cuarto teorema precedente. Pero queremos que éste sea distinto, que no sean rectos. En consecuencia, será AD el resto del cuadrante CAD [complementario], y el ángulo BAD lo que le falta al BAC para dos rectos [suplementario], y el D recto. En consecuencia, en el triángulo AFD, por el cuarto teorema de este capítulo, se conocen los ángulos con los lados. Pero, por el ángulo dado C se conoce el arco DE y el resto EF, y el BEF es recto, y el ángulo F es común a uno y otro triángulo. Se conocen, pues, por el cuarto teorema de este capítulo, BE y FB, por medio de los cuales constarán los otros lados AB y BC, los buscados.

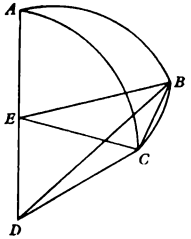


Además, si uno de los ángulos dados fuera opuesto al lado conocido, por ejemplo, si se da el ángulo ABC en lugar del ACB, permaneciendo igual lo demás, también constará lo mismo por la anterior demostración, todo el triángulo ADF con los ángulos y lados dados, y, en particular, el triángulo semejante BEF, ya que, a causa del ángulo F común a uno y otro, y el EBF que es opuesto por el vértice al dado, y el E que es recto, se demuestra, como en los precedentes, que se conocen también todos sus lados; de lo que se deduce lo mismo que dijimos. Están, pues, todas estas cosas ligadas por un nexo siempre mutuo y perpetuo, como corresponde a la forma del globo.

XIII

Finalmente, dados todos los lados de un triángulo, se conocen sus ángulos.

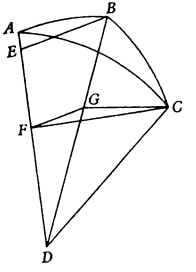
Sean dados los lados del triángulo ABC. Afirmo que también se encuentran todos los ángulos.



El triángulo puede tener lados iguales o no tenerlos. Sean, pues, en primer lugar, iguales AB y AC. Es claro que también serán iguales las mitades de las subtensas [cuerdas] al doble de ellos. Siendo éstas [las mitades de las cuerdas] BE y CE que, a causa de su igual distancia desde el centro de la esfera, se cortarán entre sí en el punto E, sobre DE, sección común de los círculos: lo que es patente por la IIII definición del libro III de Euclides y su conversa. Pero, por la III proposición del mismo libro, el ángulo DEB en el plano ABD es recto y del mismo modo el DEC en el plano ACD. En consecuencia, BEC es el ángulo de inclinación de los planos, por la definición IIII del libro XI de Euclides, al cual encontrare-

mos del siguiente modo. Pues, siendo una subtensa [cuerda] la línea recta BC, tendremos el triángulo rectilíneo BEC de lados conocidos, por estar dados sus arcos; también pasará a ser de ángulos conocidos y tendremos el ángulo BEC buscado, esto es, el esférico BAC, y los demás por lo precedente.

Si el triángulo fuera escaleno, como en la segunda figura, es claro que las mitades de las líneas rectas que están bajo sus arcos dobles no se tocan en absoluto. Puesto que, si el arco AC fuera mayor que el AB, siendo CF la mitad de la subtensa al doble del arco AC, caerá más abajo; pero si es menor, caerá más arriba, en cuanto acaece que tales líneas estén más cercanas o más alejadas del centro, por la proposición XV del libro III de Euclides. Entonces, hágase FG paralela a BE, que cortará a BD, sección común de los círculos, en el punto G, y únanse CG. En consecuencia, es claro que el ángulo EFG es recto, y lo mismo su igual AEB, y el EFC (siendo CF la mitad de la subtensa [cuerda] al doble de AC) también es recto. En consecuencia, CFG será el ángulo de la sección de los círculos AB, AC, que también encontraremos. Pues DF es a FG, como DE a EB, pues son semejantes los triángulos DFG y DEB. Pero la misma razón tiene también DG con respecto a DB, luego también se conocerá DG en las unidades de las que DC vale 100.000. Pero como el ángulo GDC es dado por el arco BC, luego, por el segundo teorema de los triángulos planos, se conoce también el lado GC en las mismas unidades que los restantes lados del triángulo plano GFC.

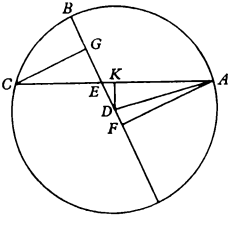


En consecuencia, por el último teorema de los triángulos planos, tendremos el ángulo GFC, esto es, el ángulo esférico BAC buscado, y de ahí obtendremos los demás por el undécimo teorema de los triángulos esféricos.

XIV

Si dado un arco de un círculo, se corta de tal manera que cada uno de los segmentos es menor que un semicírculo, y fuera dada la razón de la mitad de la subtensa [cuerda] al doble de un segmento con respecto a la mitad de la subtensa al doble del otro, se conocerán también los arcos de tales segmentos.

Dese, pues, el arco ABC alrededor del centro D, que se corta de tal modo en el punto B que sus segmentos sean menores que un semicírculo, y habiendo sido también dada de algún modo en longitud la razón de la mitad de la subtensa al doble de AB con respecto a la mitad de la subtensa al doble de BC. Y afirmo que los arcos AB y BC son dados.

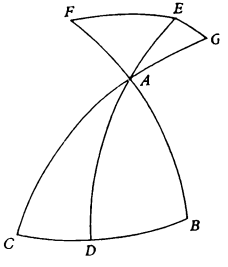


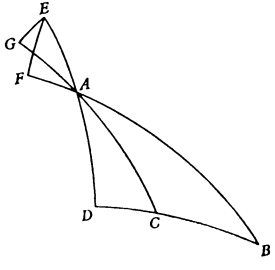
Subtiéndase, pues, la recta AC, que corte al diámetro en el punto E, y desde los extremos A, C, caigan perpendiculares a dicho diámetro, que sean AF y CG, las cuales tendrán que ser las mitades [de las cuerdas] al doble [de los arcos] AB y BC.

En consecuencia, en los triángulos rectángulos AEF y CEG los ángulos que tienen el vértice en E son iguales, y los mismos triángulos, por ser equiángulos y semejantes, tienen proporcionales los lados que se oponen a los ángulos iguales, como AF es a CG, así AE es EC. En consecuencia, habiendo sido dadas por estos cálculos AF o CG, por los mismos tendremos AE y EC; de donde se dará por los mismos cálculos toda la AEC. Pero se conoce la línea que subtiende al arco ABC, en las mismas unidades de la que parte del centro [radio] DEB, en las que también se conoce AK, la mitad de AC, y el resto EK. Únanse DA y DK, que también serán dadas en las mismas unidades que DB, como la mitad de la [cuerda] que subtiende al segmento restante [suplementario] de ABC en el semicírculo, comprendido bajo el ángulo DAK, y, en consecuencia, el ángulo ADK es dado, como comprendiendo la mitad del arco ABC. Pero dados también los lados del triángulo EDK y el ángulo recto EKD, se conocerá también EDK, y de ahí todo el ángulo EDA que comprende el arco AB, con lo que constará también el restante CB: de lo cual se esperaba la demostración.

XV

Dados todos los ángulos de un triángulo, sin ser ninguno recto, se conocen todos los lados.





Sea el triángulo ABC del que se conocen todos los ángulos, pero ninguno de ellos es recto. Afirmo que se dan también todos los lados.

En efecto, de uno de los ángulos, como A, descienda AD por los polos del arco BC, que cortará a BC formando ángulos rectos, y la misma AD caerá dentro del triángulo, a no ser que uno de los ángulos de la base, el B o el C, fuese obtuso y el otro agudo: si sucediera esto, habría que bajar el arco desde el propio ángulo obtuso hasta la base. En consecuencia, completados los cuadrantes BAF, CAG y DAE, y haciendo de polos B, C, trácense los arcos EF y EG. En consecuencia, serán rectos los ángulos F y G.

Por lo tanto, en los triángulos que tienen un ángulo recto, la proporción será: la mitad [de la cuerda] que subtiende a AE es a la mitad del doble de EF, como la mitad del diámetro de la esfera es a la mitad de la que subtiende al doble del ángulo EAF. Del mismo modo, en el triángulo AEG, que tiene en G un ángulo recto, la mitad de la que subtiende al doble de AE es a la mitad de la que subtiende al doble de EG, tendrá la misma razón que la mitad del diámetro de la esfera a la mitad de la que subtiende al doble de EAG. En consecuencia, por la misma razón, la mitad de la que subtiende al doble de

EF, estará en la misma razón con respecto a la mitad de la que subtiende al doble de EG, como la mitad de la que subtiende al doble del ángulo EAF con respecto a la mitad de la que subtiende al doble del ángulo EAG. Y puesto que los arcos FE y EG son dados, pues son el resto [complementarios] por el que los ángulos C y B difieren de un recto, luego a partir de ellos tendremos dada la razón entre los ángulos EAF y EAG, esto es, BAD es a CAD, que son opuestos por el vértice a aquéllos. Pero todo el ángulo BAC es dado; en consecuencia, por el precedente teorema se conocerán también los ángulos BAD y CAD. Y de ahí, por el quinto teorema, obtendremos los lados AB, BD, AC, CD y el BC completo.

Baste esto, que hemos tratado superficialmente, sobre los triángulos, necesario por lo demás para nuestra obra. Si hubiera que tratarlo más ampliamente, sería necesario un volumen especial para ello.

LIBRO SEGUNDO

Habiendo expuesto en síntesis los tres movimientos de la Tierra, por medio de los cuales prometimos demostrar todas las apariencias de los astros, haremos de nuevo esto mismo examinándolos por partes, uno a uno, e investigando según nuestras propias posibilidades. Empezaremos, pues, por el cambio más conocido de todos, el del tiempo diurno y nocturno, al cual dijimos que los griegos llamaban νυχθήμερον y que admitimos como apropiado al globo terrestre de manera total y directa, puesto que de él surgen los meses, los años y demás medidas del tiempo con numerosos nombres, como resultado de un cálculo a partir de la unidad. Diremos, pues, pocas cosas acerca de la desigualdad de los días y las noches, del nacimiento y la puesta del Sol, de las partes del zodíaco y de los signos, y de las consecuencias de este género de revolución. Sobre todo, porque muchos ya han escrito con suficiente profusión acerca de estos asuntos, respecto a los cuales tenemos la misma opinión y concordamos. Y no tiene importancia alguna el que si ellos lo demuestran por medio de la quietud de la Tierra y la rotación del universo, nosotros, partiendo de concepción opuesta, alcancemos el mismo fin, porque cosas recíprocas concuerdan inversamente entre sí. No omitiremos, sin embargo, nada que sea imprescindible.

Nadie se admire, pues, si hablamos del orto y ocaso del Sol y de las estrellas, y de otras cosas semejantes a éstas, sino sepa que nosotros hablamos con un lenguaje habitual, el cual puede ser comprendido por todos, teniendo siempre, sin embargo, en la mente que: «Para nosotros, transportados por la Tierra, transitan el Sol y la Luna, y vuelve el turno de las estrellas y de nuevo retroceden».

1. SOBRE LOS CÍRCULOS Y SUS NOMBRES

Llamamos círculo equinoccial al mayor de los paralelos del globo terráqueo, trazados alrededor de los polos de su revolución diaria, y círculo zodiacal al que pasa por el medio del círculo de los signos, bajo el que el centro de la Tierra se mueve en su revolución anual. Pero, puesto que el zodíaco es oblicuo al equinoccial, a causa de la inclinación del eje de la Tierra con respecto a aquél, durante la revolución diaria de la Tierra describe dos círculos tangentes entre sí a uno y otro lado, como límites extremos de su oblicuidad, círculos a los que se llama trópicos. Pues, en éstos, parece el Sol realizar giros, es decir, cambios, como el invernal y el estival. De ahí se acostumbró a llamar al

que está al norte trópico del solsticio de verano, y al otro, al que está al sur, brumal, según se expuso antes en la resumida descripción de los movimientos terrestres.

Después sigue el llamado horizonte, al que los latinos llamaron límite (pues nos separa la parte visible del mundo de la que nos está oculta), en el que parecen salir todos los astros que se ponen, que tiene su centro en la superficie de la Tierra y su polo junto a nuestro vértice. Pero puesto que la Tierra no se puede comparar con la inmensidad del cielo, y sobre todo porque ni siquiera la distancia entre el Sol y la Luna (según nuestra hipótesis) puede discernirse con respecto a la magnitud del cielo, el círculo horizonte parece cortar el cielo en dos partes como por el centro del mundo, según demostramos al principio. Pero, en cuanto el horizonte es oblicuo con respecto al círculo equinoccial, toca también a dos círculos paralelos a ambas partes de él, es decir, el que está al norte, el de las estrellas visibles, el que está al sur el de las ocultas, llamados por Proclo y los griegos, aquél ártico, éste antártico; y éstos, según la oblicuidad del horizonte, o sea, la elevación del polo equinoccial, se hacen mayores o menores.[1]

Queda el meridiano que pasa por los polos del horizonte y por los del ecuador, y que, por tanto, es perpendicular a ambos círculos; cuando el Sol lo alcanza señala el mediodía y la medianoche. Pero estos dos círculos que tienen el centro en la superficie de la Tierra (me refiero al horizonte y al meridiano) siguen el movimiento de la Tierra, según nuestro punto de mira. Pues el ojo toma siempre el papel de centro de la esfera de todo lo visible que le rodea. Además, todos los círculos tomados en la Tierra producen en el cielo sus imágenes y las de los círculos semejantes a ellos, como se demuestra en cosmografía y en lo relativo a las dimensiones de la Tierra. Y éstos son los círculos que tienen nombres propios, pudiendo designarse los demás de infinitas maneras.

2. ACERCA DE LA OBLICUIDAD DE LA ECLÍPTICA, DE LAS DISTANCIAS ENTRE LOS TRÓPICOS Y DE CÓMO SE DETERMINAN

Puesto que el círculo de la eclíptica, entre los trópicos, atraviesa oblicuamente al círculo ecuatorial, considero ya necesario que probemos la distancia entre los trópicos y por lo tanto cuánto mide el ángulo de sección entre el círculo ecuatorial y el de la eclíptica. Esto es necesario percibirlo por los sentidos y con el manejo de instrumentos, por medio de los cuales se domina mucho mejor. De manera que se prepara un cuadrado de madera, o mejor de una materia más sólida, de piedra o de metal, para que la madera, variable a causa de las alteraciones del aire, no pueda equivocar al que trabaja. Sea, además, la suya una superficie completamente plana y que tenga una anchura (suficiente para recibir secciones) como de tres o cuatro codos. Así pues, a partir de uno de los ángulos, tomado como centro, se señala [en la madera] la cuarta parte de un círculo, a tenor de su capacidad [tomando como radio un lado], y se divide en XC partes iguales, las cuales a su vez se subdividen en LX fracciones o las que pueda admitir. Entonces se aplica al centro [del cuadrante] una varita muy bien torneada cilíndricamente, perpendicular a la superficie y que sobresalga un poco, quizá la anchura de un dedo o menos.

1. Es decir, la magnitud del círculo de las estrellas siempre visibles varía inversamente con la oblicuidad del horizonte y directamente con la elevación de los polos del ecuador.

Preparado así este instrumento, conviene trazar la línea del meridiano en el pavimento, extendido en el plano del horizonte y debidamente igualado por medio de un hidroscopio o un corobante, para que no se incline hacia parte alguna. Así pues, descrito un círculo en éste, se erige un gnomon en su centro, y observando un poco antes del mediodía, señalaremos dónde toca la extremidad de la sombra a la circunferencia del círculo. Actuaremos de igual manera después del mediodía, y cortaremos en dos el arco del círculo que está entre las dos señales anotadas. De este modo, la línea recta trazada desde el centro a través del punto de la sección, nos mostrará infaliblemente la dirección meridional y la septentrional. Sobre ésta [línea] como base, se levanta el plano del instrumento y se fija en posición perpendicular, vuelto el centro [del cuadrante] hacia el sur, desde el cual una línea que descienda exactamente converge con la línea meridiana en ángulo recto. De este modo se consigue que la superficie del instrumento contenga el círculo meridiano.

A partir de aquí, en los días de verano y en el solsticio de invierno hay que observar las sombras del Sol, cayendo por el centro [del cuadrante] a través de aquel índice o cilindro (señalando en cualquier parte junto al arco del cuadrante, con lo que el lugar de la sombra se consigne con seguridad) y anotaremos lo más cuidadosamente posible el punto medio de la sombra en grados y minutos. Si hiciéramos esto, el arco que se encuentre entre dos sombras señaladas, la de invierno y la de verano, nos mostrará la distancia entre los trópicos y la oblicuidad total de la eclíptica.[1] Si tomamos la mitad de este arco, tendremos cuánto distan los trópicos del ecuador, y quedará claro cuán grande es el ángulo de inclinación del ecuador con respecto al círculo de la eclíptica.

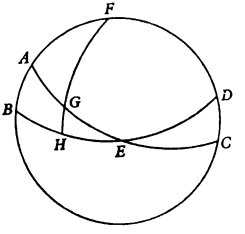
En consecuencia, Ptolomeo consideró este intervalo, que está entre los ya señalados límites, el boreal y el austral, de IIIL grados, XLII minutos, XL segundos, de los que el círculo tiene CCCLX, además de lo que ya aparece observado por Hiparco y Eratóstenes antes que él: XI partes de las que todo un círculo tendría XVIIC; y, por tanto, la mitad que es de XXIII grados, LI minutos, XX segundos, de los cuales el círculo tiene CCCLX grados, demuestra plenamente la distancia de los trópicos al círculo ecuatorial, y el ángulo de sección con la eclíptica. Pensó, pues, Ptolomeo que era así invariablemente y que así permanecería siempre. Pero desde aquel tiempo hasta nosotros se ha encontrado que éstos han decrecido continuamente. En efecto, se ha descubierto ahora por nosotros, y por algunos otros coetáneos nuestros, que la distancia entre los trópicos no es más de XLVI grados y aproximadamente LVIII minutos, y el ángulo de sección de XXIII grados, XXIX minutos, de modo que se pone de manifiesto ya suficientemente que la oblicuidad de la eclíptica es móvil; acerca de lo cual mostraremos más adelante la conjetura bastante probable de que nunca fue mayor de XXIII grados, LII minutos, y nunca será menor de XXIII grados, XXVIII minutos.

1. Como la distancia entre el Sol y la Tierra es imperceptible en comparación con el radio de la esfera de las estrellas fijas, el centro del cuadrante puede ser tomado como el centro de la esfera de las estrellas fijas.

3. ACERCA DE LOS ARCOS Y ÁNGULOS EN QUE SE CORTAN LOS CÍRCULOS DEL ECUADOR, DE LA ECLÍPTICA Y DEL MERIDIANO, A PARTIR DE LOS CUALES HAY UNA DECLINACIÓN Y ASCENSIÓN RECTA, Y ACERCA DE SU CÁLCULO

En consecuencia, a lo que decíamos con respecto al horizonte, que en él nacen y mueren las partes del mundo, añadimos que el cielo está dividido en dos por el círculo meridiano, el cual, en el espacio de XXIIII horas, atraviesa tanto a la eclíptica como al ecuador y divide las circunferencias cortándolas en la intersección de primavera o de otoño, y a la vez queda dividida su circunferencia, interceptada por aquéllos [círculos]. Siendo todos círculos máximos, constituyen un triángulo esférico rectángulo; porque constituye un ángulo recto aquel donde el meridiano corta al ecuador trazados por los polos, según se definió. Así pues, el arco del meridiano o de cualquier círculo que pasa por los polos, así interceptado, se denomina la declinación de un segmento del zodíaco. En cambio, el arco correspondiente a partir del círculo de ecuador se llama ascensión recta, que se establece conjuntamente con el arco similar del zodíaco.

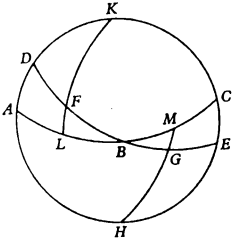
Todo esto se demuestra fácilmente mediante un triángulo convexo. Sea ABCD un círculo que pasa a la vez por los polos del ecuador y del zodíaco, al que muchos denominan coluro, sea AEC la mitad de la eclíptica, BED la mitad del ecuador, el equinoccio de primavera esté en el punto E, el solsticio de verano en el A, el solsticio de invierno en el C. Tómese F como polo del movimiento diario y sobre la eclíptica un arco EG de XXX grados por ejemplo, al que corta un cuadrante de círculo FGH. Entonces, es evidente que en el triángulo EGH se conoce un lado, EG, de XXX grados, con el ángulo GEH, que según la máxima declinación AB tendría un mínimo de XXIII grados, XXVIII minutos, siendo CCCLX igual a cuatro rectos, y el ángulo GHE es recto.



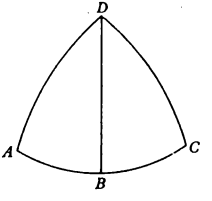
En consecuencia, por el cuarto teorema de los triángulos esféricos, el triángulo EGH será de ángulos y lados conocidos. Sin duda se demostró que la cuerda del doble de EG es a la cuerda del doble de GH, como el doble de la cuerda de AGE, o sea, del diámetro de la esfera, es a la cuerda del doble de AB; estando sus semicuerdas en la misma proporción. En consecuencia, la semicuerda del doble de AGE es la distancia desde el centro [radio] igual a $\bar{c}$ [100.000] unidades, y la semicuerda del doble de AB de 39.822 de las mismas unidades, y la del doble de EG de 50.000 unidades; y si cuatro números son proporcionales, el producto de los medios es igual al producto de los extremos, por tanto tendremos que la mitad de la cuerda del doble del arco GH será de 19.911 unidades, y el arco GH, según las tablas, será de XI grados, XXIX minutos, correspondiente a la declinación del segmento EG. Por lo tanto, también en el triángulo AFG se dan los lados: FG es igual a LXXVIII grados, XXXI minutos, y AG de LX de los mismos grados, como lo que queda de un cuadrante, y el ángulo FAG es recto; lo mismo ocurrirá con las cuerdas del doble de los arcos FG, AG, FGH y BH, o sea, serán

proporcionales a sus semicuerdas. Como de éstas, tres son conocidas, también se conocerá la cuarta BH, igual a LXII grados, VI minutos, que es la ascensión recta a partir del solsticio de verano, o HE igual a XXVII grados, LIIII minutos, ascensión recta desde el equinoccio de primavera. De igual modo, partiendo de los lados dados FG de LXXVIII grados, XXXI minutos, y AF de LXIIII grados, XXX minutos, y del cuadrante del círculo, tendremos el ángulo AGF, de LXIX grados, XXIII minutos y medio aproximadamente, igual a su opuesto por el vértice HGE. Procederemos en los demás casos como en este ejemplo.

No conviene ignorar que el círculo meridiano corta en ángulos rectos a la eclíptica, en los puntos en los que la eclíptica toca a los trópicos; pues entonces la corta pasando por los polos, como dijimos. Pero en los puntos equinocciales forma un ángulo menor que un recto, debido a la inclinación de la eclíptica desviándose del ángulo recto, siendo su valor de LXVI grados, XXXII minutos. Hay que advertir que a arcos iguales de la eclíptica, tomados a partir de los puntos del equinoccio o del solsticio, se siguen ángulos y lados iguales de los triángulos. De este modo, si describimos el arco equinoccial ABC y el de la eclíptica DBE, que se cortan en el punto B, donde está el equinoccio, y si tomamos los arcos FB y BG iguales, y si trazamos por el polo del movimiento diario, que es K, dos cuadrantes de círculo KFL y HGM, tendremos dos triángulos FLB y BMG, cuyos lados BF y BG son iguales y también son iguales los ángulos opuestos por el vértice B, y los ángulos en L y M son rectos: en consecuencia, por el sexto teorema de los triángulos esféricos, se demuestra que son de lados y ángulos iguales. Así, son iguales las declinaciones FL y MG, las ascensiones rectas LB y BM, y el ángulo restante F con el que queda G.



Del mismo modo quedará patente suponiendo arcos iguales a partir de un punto trópico [solsticio], tal como AB y BC, si fueran iguales sus distancias al punto de contacto B en el trópico. Pues, trazando desde D, polo del círculo ecuatorial, los cuadrantes DA, DB, serían semejantes los triángulos ABD y DBC, cuyas bases AB y BC son iguales, el lado BD común a ambos y los ángulos en B rectos: por el octavo teorema de los triángulos esféricos se demostrará que dichos triángulos son de lados y ángulos iguales.



Con lo que se pone de manifiesto que, en la eclíptica, lo expuesto sobre los ángulos y arcos de un cuadrante está de acuerdo con los restantes cuadrantes de todo el círculo. Presentaremos un ejemplo de estas cosas con la descripción de las tablas. En la primera columna se colocarán los grados de la eclíptica, en segundo lugar las declinaciones que corresponden a aquellos grados, en tercer lugar los minutos, en los que difieren, por defecto o por exceso, las declinaciones parciales, la mayor de tales diferencias es de XXIIII minutos, y cuyo límite se produce bajo la máxima oblicuidad de la eclíptica. Haremos lo mismo en la tablilla de los ángulos. Pues es necesario, con respecto al cam-

Tabla de declinaciones

Eclíptica	*Declinaciones*		*Diferencias*	*Eclíptica*	*Declinaciones*		*Diferencias*	*Eclíptica*	*Declinaciones*		*Diferencias*
°	°	'	'	°	°	'	'	°	°	'	'
1	0	24	0	31	11	50	11	61	20	23	20
2	0	48	1	32	12	11	12	62	20	35	21
3	1	12	1	33	12	32	12	63	20	47	21
4	1	36	2	34	12	52	13	64	20	58	21
5.	2	0	2	35	13	12	13	65	21	9	21
6	2	23	2	36	13	32	14	66	21	20	22
7	2	47	3	37	13	52	14	67	21	30	22
8	3	11	3	38	14	12	14	68	21	40	22
9	3	35	4	39	14	31	14	69	21	49	22
10	3	58	4	40	14	50	14	70	21	58	22
11	4	22	4	41	15	9	15	71	22	7	22
12	4	45	4	42	15	27	15	72	22	15	23
13	5	9	5	43	15	46	16	73	22	23	23
14	5	32	5	44	16	4	16	74	22	30	23
15	5	55	5	45	16	22	16	75	22	37	23
16	6	19	6	46	16	39	17	76	22	44	23
17	6	41	6	47	16	56	17	77	22	50	23
18	7	4	7	48	17	13	17	78	22	55	23
19	7	27	7	49	17	30	18	79	23	1	24
20	7	49	8	50	17	46	18	80	23	5	24
21	8	12	8	51	18	1	18	81	23	10	24
22	8	34	8	52	18	17	18	82	23	13	24
23	8	57	9	53	18	32	19	83	23	17	24
24	9	19	9	54	18	47	19	84	23	20	24
25	9	41	9	55	19	2	19	85	23	22	24
26	10	3	10	56	19	16	19	86	23	24	24
27	10	25	10	57	19	30	20	87	23	26	24
28	10	46	10	58	19	44	20	88	23	27	24
29	11	8	10	59	19	57	20	89	23	28	24
30	11	29	11	60	20	10	20	90	23	28	24

Tabla de ascensiones rectas

Eclíptica	*Tempora*		*Diferencias*	*Eclíptica*	*Tempora*		*Diferencias*	*Eclíptica*	*Tempora*		*Diferencias*
°	Unid.	Min.	'	°	Unid.	Min.	'	°	Unid.	Min.	'
1	0	55	0	31	28	54	4	61	52	51	4
2	1	50	0	32	29	51	4	2	59	54	4
3	2	45	0	33	30	50	4	63	60	57	4
4	3	40	0	34	31	46	4	64	62	0	4
5	4	35	0	35	32	45	4	65	63	3	4
6	5	30	0	36	33	43	5	66	64	6	3
7	6	25	1	37	34	41	5	67	65	9	3
8	7	20	1	38	35	40	5	68	66	13	3
9	8	15	1	39	36	38	5	69	67	17	3
10	9	11	1	40	37	37	5	70	68	21	3
11	10	6	1	41	38	36	5	71	69	25	3
12	11	0	2	42	39	35	5	72	70	29	3
13	11	57	2	43	40	34	5	73	71	33	3
14	12	52	2	44	41	33	6	74	72	38	2
15	13	48	2	45	42	31	6	75	73	43	2
16	14	43	2	46	43	31	6	76	74	47	2
17	15	39	2	47	44	32	5	77	75	52	2
18	16	34	3	48	45	32	5	78	76	57	2
19	17	31	3	49	46	32	5	79	78	2	2
20	18	27	3	50	47	33	5	80	79	7	2
21	19	23	3	51	48	34	5	81	80	12	1
22	20	19	3	52	49	35	5	82	81	17	1
23	21	15	3	53	50	36	5	83	82	22	1
24	22	10	4	54	51	37	5	84	83	27	1
25	23	9	4	55	52	38	4	85	84	33	1
26	24	6	4	56	53	41	4	86	85	38	0
27	25	3	4	57	54	43	4	87	86	43	0
28	26	0	4	58	55	45	4	88	87	48	0
29	26	57	4	59	56	46	4	89	88	54	0
30	27	54	4	60	57	48	4	90	90	0	0

Tabla de los ángulos meridianos

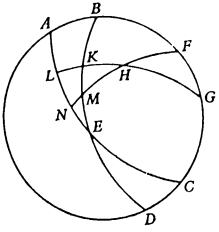
Eclíptica	*Ángulo*		*Diferencias*	*Eclíptica*	*Ángulo*		*Diferencias*	*Eclíptica*	*Ángulo*		*Diferencias*
°	°	'	'	°	°	'	'	°	°	'	'
1	66	32	24	31	69	35	21	61	78	7	12
2	66	33	24	32	69	48	21	62	78	29	12
3	66	34	24	33	70	0	20	63	78	51	11
4	66	35	24	34	70	13	20	64	79	14	11
5	66	37	24	35	40	26	20	65	79	36	11
6	66	39	24	36	70	39	20	66	79	59	10
7	66	42	24	37	70	53	20	67	80	22	10
8	66	44	24	38	71	7	19	68	80	45	10
9	66	47	24	39	71	22	19	69	81	9	9
10	66	51	24	40	71	36	19	70	81	33	9
11	66	55	24	41	71	52	19	71	81	58	8
12	66	59	24	42	72	8	18	72	82	22	8
13	67	4	23	43	72	24	18	73	82	46	7
14	67	10	23	44	72	39	18	74	83	11	7
15	67	15	23	45	72	55	17	75	83	35	6
16	67	21	23	46	73	11	17	76	84	0	6
17	67	27	23	47	73	28	17	77	84	25	6
18	67	34	23	48	73	47	17	78	84	50	5
19	67	41	23	49	74	6	16	79	85	15	5
20	67	49	23	50	74	24	16	80	85	40	4
21	67	56	23	51	74	42	16	81	86	5	4
22	68	4	22	52	75	1	15	82	86	30	3
23	68	13	22	53	75	21	15	83	86	55	3
24	68	22	22	54	75	40	15	84	87	3	3
25	68	32	22	55	76	1	14	85	87	53	2
26	68	41	22	56	76	21	14	86	88	17	2
27	68	51	22	57	76	42	14	87	88	41	1
28	69	2	21	58	77	3	13	88	89	6	1
29	69	13	21	59	77	24	13	89	89	33	0
30	169	24	21	60	77	45	13	90	90	0	0

bio de oblicuidad de la eclíptica, cambiar todo lo que sigue a esa misma oblicuidad. Además en la ascensión recta en gran medida se encuentra la misma diferencia, puesto que no excede una décima parte de un solo «tiempo»; y que en el espacio de una hora realiza sólo la centésima quincuagésima parte [1/150] de un «tiempo». Los antiguos llamaron, «tiempo» a las partes del ecuador, que se originan junto con las partes de la eclíptica, CCCLX partes de uno y otra constituyen un círculo, según hemos dicho varias veces; pero, para distinguirlas, la mayoría llamaron grados a las partes de la eclíptica y «tiempos» a las del ecuador, lo que nosotros imitaremos en el resto de la obra. Aunque estas diferencias son tan pequeñas, que con razón pueden menospreciarse, sin embargo no es molesto aplicarlas también en esta [tabla].

Se han expuesto los datos respecto a la oblicuidad mínima de la eclíptica, datos que aunque parezcan ser suficientes, a nosotros nos parecen muy escasos. A partir de aquí pueden aplicarse las tablas a cualquier otra oblicuidad de la eclíptica, si en razón de la diferencia entre la mínima y la máxima oblicuidad de la eclíptica se discierne entre las partes semejantes en cada caso. Por ejemplo, si con una oblicuidad de XXIII grados, XXXIIII minutos, quisiera conocer qué declinación debe tener una distancia de XXX grados de la eclíptica, tomados a partir del ecuador, encuentro en la tabla [de declinaciones] XI grados, XXIX minutos, y en [la columna de] diferencias XI minutos, que se añaden al total en el caso de la máxima oblicuidad de la eclíptica, que era, como hemos dicho, de XXIII grados, LII minutos. Pero ya se ha señalado que la oblicuidad es de XXIII grados, XXXIIII minutos, luego diré que es VI minutos mayor que la oblicuidad mínima, o sea, la cuarta parte de XXIV minutos en los que excede la máxima oblicuidad. Estando en una proporcionalidad semejante III minutos a XI, los cuales cuando los haya sumado a los XI grados, XXIX minutos, tendré XI grados, XXXII minutos, con los que se obtendrá entonces la declinación de los XXX grados de la eclíptica tomados desde el ecuador. Del mismo modo convendrá hacer con respecto a los ángulos y a las ascensiones rectas, excepto que siempre conviene añadir [la diferencia] a éstas, restarla siempre a aquéllos [ángulos meridianos], para que se proceda más correctamente con relación al tiempo.

4. CÓMO DETERMINAR LA DECLINACIÓN Y ASCENSIÓN RECTA DE CUALQUIER ASTRO EXTERIOR AL CÍRCULO QUE PASA POR LA MITAD DE LOS SIGNOS [ECLÍPTICA], PERO CUYA LATITUD JUNTO CON LA LONGITUD HA SIDO ESTABLECIDA, Y EN QUÉ GRADO DE LA ECLÍPTICA DIVIDE POR LA MITAD AL CIELO

Se ha expuesto lo referente a la eclíptica, al ecuador y a sus intersecciones. Pero, con respecto a la revolución diaria, no sólo interesa saber lo que se manifiesta a través de la eclíptica, por medio de lo cual se descubren las causas tan sólo de la apariencia solar, sino que también se demostrarán de la misma manera la declinación desde el círculo ecuatorial y la ascensión recta de las estrellas fijas y las errantes, que están fuera de la eclíptica, y cuya longitud y latitud han sido dadas. Trácese, pues, el círculo ABCD que pase por los polos del ecuador y de la eclíptica, sea AEC el semicírculo ecuatorial con



el polo en F, y el semicírculo BED de la eclíptica con el polo en G, su intersección con el ecuador en el punto E. Después, desde el polo G, a través de una estrella, se traza el arco GHKL, y sea el punto H el lugar correspondiente a la estrella, a través de la cual, desde el polo del movimiento diurno, desciende el cuadrante del círculo FHMN. Entonces se manifiesta que la estrella que está en H cae dentro del meridiano junto con los dos puntos M y N, y el arco HMN es la declinación de la estrella con respecto al círculo del ecuador y EN la ascensión recta en la esfera: lo que buscamos.

En consecuencia, puesto que en el triángulo KEL se da el lado KE y el ángulo KEL, y el EKL es recto, luego según el cuarto teorema de los triángulos esféricos se dan los lados KL y EL junto con el otro ángulo KLE; por tanto se da el arco completo HKL. Y ya que en el triángulo HLN se dan dos ángulos, el HLN y el recto LNH, con el lado HL: luego por el mismo cuarto teorema de los triángulos esféricos se dan los restantes lados, el HN, declinación de la estrella, el LN, y el que queda NE, ascensión recta, por la cual se mide el cambio de la esfera desde el equinoccio a la estrella.

O de otro modo. Si, a partir de lo que precede, tomas el arco KE de la eclíptica como ascensión recta de LE, la tabla de las ascensiones rectas proporcionará inversamente LE y también LK, como la declinación correspondiente a LE, y el ángulo KLE por la tabla de los ángulos meridianos, a partir de todo esto, se conocerán los demás [lados y ángulos] según ya se ha demostrado.

De donde los grados del arco de la eclíptica EM se dan a partir de la ascensión recta EN, por medio de los cuales la estrella, junto con el punto M, divide por la mitad el cielo.

5. DE LAS SECCIONES DEL HORIZONTE

El círculo del horizonte de la esfera recta es uno, y otro diferente es el de la esfera oblicua. En efecto, se llama horizonte de la esfera recta aquel con respecto al cual se levanta perpendicularmente el ecuador, o que pasa por los polos del círculo equinoccial. Por el contrario, llamamos horizonte de esfera oblicua aquel con respecto al cual se inclina el círculo del ecuador. Por lo tanto, en el horizonte recto todos los astros salen y se ponen y los días se producen siempre iguales a las noches. Pues el horizonte corta por la mitad todos los paralelos descritos en el movimiento diario, esto es, pasa por sus polos, y allí sucede lo que ya explicamos acerca de los meridianos. Pero aquí tomamos el día desde la salida del Sol hasta el ocaso, no desde la luz hasta las tinieblas como entiende el vulgo, esto es, desde el amanecer hasta la primera antorcha, acerca de lo cual daremos muchas explicaciones con respecto al orto y ocaso de los signos [del zodíaco].

Por el contrario, donde el eje de la Tierra es perpendicular al horizonte, nada sale ni se pone, sino que en su giro todos los astros que se mueven están siempre visibles o siempre ocultos, a no ser por el efecto de otro movimiento, como es el anual alrededor del Sol: de donde se sigue que el día dura allí continuamente durante seis meses, la no-

che el resto del año, y no ven otra separación que la del invierno y verano, puesto que el círculo ecuatorial coincide allí con el horizonte.

Por otra parte, en la esfera oblicua salen y se ponen ciertas estrellas, otras están siempre visibles o siempre ocultas: mientras tanto los días y las noches se hacen desiguales. Donde el horizonte que es oblicuo toca dos círculos paralelos según la medida de su inclinación, uno de ellos, el que está junto al polo visible, delimita el ámbito de los astros visibles, y por el contrario, el que está junto al polo que no se ve, delimita lo que siempre está oculto. Por lo tanto, al incidir el horizonte entre estos límites a lo largo de su latitud total, corta en dos partes a todos los paralelos en arcos desiguales, excepto al ecuador, que es el mayor de los paralelos, y los círculos máximos se cortan entre sí en dos partes. Así pues, el horizonte oblicuo divide, en el hemisferio superior junto al polo visible, arcos de paralelos mayores que los del lado del polo oculto, el austral, y lo inverso acontece en el hemisferio oculto. En los cuales, el Sol, visible a causa del movimiento diario, produce la disparidad de los días y las noches.

6. SOBRE CUÁLES PUEDEN SER LAS DIFERENCIAS DE LAS SOMBRAS DEL MEDIODÍA

Hay también diferencias entre las sombras del mediodía, por las que unas [gentes] se llaman periscios, otros anfiscios, otros heteroscios.

Periscios son aquellos a los que podemos llamar «circumumbrátiles», porque distribuyen la sombra del Sol en todo su alrededor. Y son aquellos cuyo vértice o polo del horizonte dista menos, o no más, del polo de la Tierra que el trópico del ecuador. Pues, allí, los paralelos a los que toca el horizonte, existiendo como límites entre las estrellas siempre visibles y las que están siempre ocultas, son mayores que los trópicos o iguales. Y por tanto, el Sol estival que brilla entre las estrellas siempre visibles proyecta en ese tiempo las sombras del gnomon en todas las direcciones. En cambio, cuando el horizonte toca los trópicos, ellos mismos se convierten en límites entre las estrellas siempre visibles y las que están siempre ocultas. Por lo cual, en vez de ser medianoche, el Sol en el solsticio aparece como rozando la Tierra, en este preciso momento todo el círculo de la eclíptica coincide con el horizonte y al instante seis signos surgen simultáneamente y otros tantos se ponen por el lado contrario, y el polo de la eclíptica coincide con el polo del horizonte.

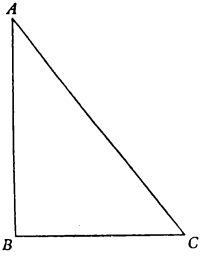
Anfiscios, los que envían las sombras del mediodía a una y otra parte, son los que habitan entre uno y otro trópico, espacio al que los antiguos llaman zona media; y puesto que el círculo de la eclíptica incide dos veces directamente sobre toda aquella región, según se demuestra en el segundo teorema de los *Phaenomena* de Euclides, allí mismo desaparecen las sombras de los gnomon dos veces, y al pasar el Sol de una a otra parte, los gnomon envían la sombra a veces hacia la zona austral, a veces hacia la boreal.

Los demás, que habitamos entre éstos y aquéllos, somos heteroscios, porque sólo enviamos sombras al mediodía hacia una parte, que es el norte.

Los matemáticos antiguos acostumbraron a dividir el orbe de la Tierra en siete climas, así Meroe, Siena, Alejandría, Rodas, Helesponto, por la mitad del Ponto, Dniéper, Bizancio y los demás, por cada paralelo, según la diferencia y exceso de los días más largos, también según la longitud de las sombras, que a mediodía observaron con gno-

mon en los días de equinoccio y en los otros cambios del Sol, y sobre todo según la elevación del polo o la latitud de cada clima. Estas cosas han cambiado en parte con el tiempo, más adelante no son las mismas que fueron antes, a causa (como hemos dicho) de la mudable oblicuidad de la eclíptica que los antiguos desconocieron: o sea, para decirlo con mayor corrección, a causa de la variable inclinación del círculo ecuatorial respecto del plano de la eclíptica, de lo que aquellas dependen. Pero las elevaciones del polo, o sea, las latitudes de los lugares, y las sombras equinocciales coinciden con las que se encuentran anotadas desde la antigüedad: lo cual era preciso que sucediera, puesto que el ecuador sigue al polo del globo terrestre. Por todo esto, aquellos climas no se designan ni definen con suficiente exactitud por determinados cambios de los días y de las sombras, sino más correctamente por sus distancias al ecuador, que siempre permanecen invariables. Pero aquel cambio en los trópicos, aun siendo muy poco considerable, admite en los lugares al sur una variación pequeña de los días y de las sombras, y se hace más evidente en los que se dirigen al norte.

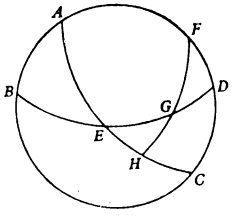
En lo que concierne a las sombras de los gnomon, es patente que para cualquier altitud determinada del Sol, se percibirá una longitud de la sombra, y viceversa. Así, si AB fuera un gnomon que arroja la sombra BC, y como el indicador es perpendicular con respecto al plano del horizonte, es necesario que el ángulo ABC sea siempre recto, por definición de las líneas perpendiculares al plano. Por lo cual, si se traza AC, tendremos el triángulo rectángulo ABC, y para una altitud determinada del Sol tendremos dado el ángulo ACB. Y por el primer teorema de los triángulos planos, estará dada la razón del gnomon AB a su sombra BC, y también la longitud de BC. Por el contrario, dados AB y BC, también constará, por el tercer teorema de los triángulos planos, el ángulo ACB y la elevación del Sol que proyecta aquella sombra según la hora. Por eso, los antiguos, en la descripción de aquellos climas del globo de la Tierra, les asignaron las longitudes de cada una de las sombras de mediodía, unas veces en los equinoccios, otras en uno u otro de los solsticios.



7. DE CÓMO SE PUEDEN DEMOSTRAR MUTUAMENTE EL DÍA MÁS LARGO, LA LATITUD DE LA SALIDA DEL SOL Y LA INCLINACIÓN DE LA ESFERA, Y SOBRE LAS RESTANTES DIFERENCIAS DE LOS DÍAS

Así pues, demostraremos simultáneamente, para cualquier oblicuidad de la esfera o inclinación del horizonte, el día más largo y más corto, con la latitud de la salida del Sol, y la restante diferencia de los días. En efecto, la latitud de la salida del Sol es un arco del círculo del horizonte, interceptado desde la salida del Sol en el solsticio de verano a la salida del Sol en el solsticio de invierno, o sea, la distancia a uno y otro solsticio desde la aparición del equinoccio.

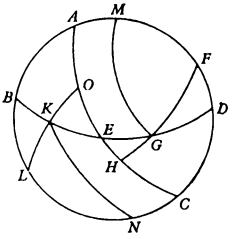
En consecuencia, sea ABCD el meridiano del orbe y BED el semicírculo del horizonte en el hemisferio oriental, AEC el semicírculo del ecuador, cuyo polo boreal sea F. Tomada la salida del Sol con la entrada del verano [solsticio] en el punto G, descríbase el arco FGH de un círculo máximo. Así pues, puesto que la movilidad de la esfera terrestre se produce alrededor del polo F del ecuador, es preciso que los puntos G, H, concuerden con el meridiano ABCD, puesto que los paralelos están alrededor de los mismos polos, a través de los cuales los círculos máximos interceptan arcos semejantes en aquellos [paralelos]. Por tanto, el mismo tiempo que hay desde la salida del Sol, en G, hasta mediodía, delimita también el arco AEH, y al CH parte restante subterránea del semicírculo desde medianoche a la salida del Sol. Hay, pues, un semicírculo AEC, cuyos cuadrantes del círculo son AE y EC, partiendo del mismo polo de ABCD; por lo tanto, EH será la mitad de la diferencia entre el día más largo y el equinoccial, y EG la latitud entre la salida del Sol en el equinoccio y en el solsticio. Por consiguiente, en el triángulo EGH, el ángulo GEH, de la oblicuidad de la esfera, es determinado por medio del arco AB, y siendo recto el ángulo GHE, dándose el lado GH por la distancia entre el trópico de verano y el ecuador, los restantes lados se darán también por el cuarto teorema de los triángulos esféricos: EH la mitad de la diferencia entre el día más largo y el equinoccial, y GE la latitud de la salida del Sol. E incluso si con el lado GH hubiera sido dado el lado EH, la mitad de la diferencia entre el día más largo y el equinoccio, o el lado EG, se da en E el ángulo de inclinación de la esfera, y de ahí FD elevación del polo sobre el horizonte.



Si no se toma el trópico, sino cualquier otro punto G en la eclíptica, no menos quedarían claros los arcos EG y EH. Puesto que, según la tabla de declinaciones expuesta más arriba, queda determinado el arco GH de declinación, el cual corresponde al mismo grado de la eclíptica, y las demás partes de la demostración quedan claras por el mismo sistema.

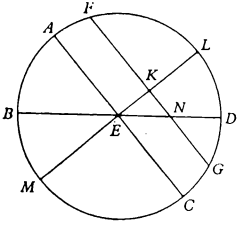
De donde se sigue que los grados de la eclíptica que equidistan del trópico cortan los mismos arcos del horizonte, desde la salida del Sol en el equinoccio y hasta el mismo número de grados, y producen las magnitudes de los días y de las noches sucesivamente iguales; esto es, porque el paralelo coincide en esos grados con la eclíptica, siendo igual la declinación para los mismos grados. Pero, tomando a una y otra parte de la sección equinoccial arcos iguales, resultan a su vez latitudes de la salida del Sol iguales, pero en diversas direcciones, y magnitudes inversas de los días y las noches, porque describirán por ambas partes arcos iguales de los paralelos, en la medida que los mismos puntos, equidistantes del ecuador, tienen iguales declinaciones desde el círculo equinoccial.

Descríbanse, pues, en la misma figura, los arcos de los paralelos GM y KN, que corten al horizonte BED en los puntos G, K, y también LKO, cuadrante del círculo máximo que pasa por el polo sur L. Así pues, ya que la declinación HG es igual a la declinación KO, se tendrán dos triángulos DFG y BLK, en los que dos lados de uno son iguales a dos lados del otro, FG es igual a LK, y las elevaciones del polo FD y LB, y los ángulos en B y D son rectos. En consecuencia, los terceros lados DG y BK son iguales,



y también son iguales lo que queda [del cuadrante] GE y EK, latitudes de la salida del Sol. Por lo tanto, siendo iguales dos lados EG, HG, a EK, KO, e iguales los ángulos que hay en el vértice E, por esto los restantes EH, EO son lados iguales; añadiendo a éstos una cantidad igual [un cuadrante], se tiene que el arco OEC es igual al AEH. Mas los círculos máximos trazados por los polos cortan arcos semejantes de los paralelos en las esferas; serán, pues, GM y KN mutuamente semejantes e iguales: como tenía que demostrarse.

Pero todo esto puede demostrarse también de otra manera. Trazado el círculo meridiano ABCD, cuyo centro es E, siendo AEC el diámetro del ecuador y sección común de ambos círculos, BED el diámetro del horizonte y línea meridiana, LEM eje de la esfera, L el polo visible, M el polo oculto. Sea AF la distancia tomada de la entrada del verano [solsticio] o cualquier otra declinación, hacia la cual se traza FG diámetro del paralelo, en una sección común con el meridiano, que cortará al eje en K, a la línea meridiana en N. Puesto que, líneas paralelas son, según definición de Posidonio, las que ni se acercan ni se alejan, sino que a las líneas perpendiculares entre sí cortan en partes iguales, la línea recta KE será igual a la mitad de la cuerda del doble del arco AF. Del mismo modo, KN será la mitad de la cuerda del arco del círculo paralelo cuyo radio es FK, por cuya diferencia el día equinoccial difiere de su contrario. Y esto es, porque todos los semicírculos, de los cuales aquéllas [rectas] son secciones comunes, esto es, de los cuales son diámetros, como BED del horizonte oblicuo, LEM del horizonte recto, AEC del equinoccio y FKG del paralelo, son perpendiculares al plano del círculo ABCD, y las secciones que se producen entre sí, según la proposición XIX del libro XI de los *Elementos* de Euclides, son perpendiculares al mismo plano en los puntos E, K, N, y por la VI proposición del mismo libro, son paralelas, y K es el centro del paralelo, E el centro de la esfera. Por todo lo cual, EN es la mitad de la cuerda del doble del arco del horizonte, por el que la salida del Sol en el paralelo difiere de la salida del Sol en el ecuador. En consecuencia, habiendo sido dada la declinación AF junto con el resto del cuadrante FL, KE la mitad de la cuerda del doble del arco AF, y FK la mitad de la cuerda del doble del arco FL, estarán divididos en unidades de las cuales AE tiene $\bar{c}$. Pero, en el triángulo rectángulo EKN, el ángulo KEN está dado con relación a DL elevación del polo, y el ángulo restante KNE es igual al AEB, porque en la esfera oblicua los paralelos se inclinan de igual modo hacia el horizonte; los lados se dan en las mismas unidades, de las cuales la línea que sale del centro de la esfera [radio] vale $\bar{c}$. En consecuencia, en estas unidades, de las que FK desde el centro del paralelo [radio] tiene $\bar{c}$, también se dará KN, como la mitad de la cuerda del arco que indica la diferencia entre el día equinoccial y el día en el paralelo, en grados de los cuales el círculo paralelo tiene CCCLX. A partir de esto, queda claro que la razón FK a KN



Diferencias de las ascensiones en una esfera oblicua

Declinación °	*Elevación del polo* 31		32		33		34		35		36	
	Unid.	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*
1	0	36	0	37	0	39	0	40	0	42	0	44
2	1	12	1	15	1	18	1	21	1	24	1	27
3	1	48	1	53	1	57	2	2	2	6	2	11
4	2	24	2	30	2	36	2	42	2	48	2	55
5	3	1	3	8	3	15	3	23	3	31	3	39
6	3	37	3	46	3	55	4	4	4	13	4	23
7	4	14	4	24	4	34	4	45	4	56	5	7
8	4	51	5	2	5	14	5	26	5	39	5	52
9	5	28	5	54	6	8	6	22	6	22	6	36
10	6	5	6	20	6	35	6	50	7	6	7	22
11	6	42	6	59	7	15	7	32	7	49	8	7
12	7	20	7	38	7	56	8	15	8	34	8	53
13	7	58	8	18	8	37	8	58	9	18	9	39
14	8	37	8	58	9	19	9	41	10	3	10	26
15	9	16	9	38	10	1	10	25	10	49	11	14
16	9	55	10	19	10	44	11	9	11	35	12	2
17	10	35	11	1	11	27	11	54	12	22	12	50
18	11	16	11	43	12	11	12	40	13	9	13	39
19	11	56	12	25	12	55	13	26	13	57	14	29
20	12	38	13	9	13	40	14	13	14	46	15	20
21	13	20	13	53	14	26	15	0	15	36	16	12
22	14	3	14	37	15	13	15	49	16	27	17	5
23	14	47	15	23	16	0	16	38	17	17	17	58
24	15	31	16	9	16	48	17	29	18	10	18	52
25	16	16	16	56	17	38	18	20	19	3	19	48
26	17	2	17	45	18	28	19	12	19	58	20	45
27	17	50	18	34	19	19	20	6	20	54	21	44
28	18	38	19	24	20	12	21	1	21	51	22	43
29	19	27	20	16	21	6	21	57	22	50	23	45
30	20	18	21	9	22	1	22	55	23	51	24	48
31	21	10	22	3	22	58	23	55	24	53	25	53
32	22	3	22	59	23	56	24	56	25	57	27	0
33	22	57	23	54	24	19	25	59	27	3	28	9
34	23	55	24	56	25	59	27	4	28	10	29	21
35	21	53	25	57	27	3	28	10	29	21	30	35
36	25	53	27	0	28	9	29	21	30	35	31	52

(continuación)

De clinación °	*Elevación del polo* 37		38		39		40		41		42	
	Unid.	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*
1	0	45	0	47	0	49	0	50	0	52	0	54
2	1	31	1	34	1	37	1	41	1	44	1	48
3	2	16	2	21	2	26	2	31	2	37	2	42
4	3	1	3	8	3	15	3	22	3	29	3	37
5	3	47	3	55	4	4	4	13	4	22	4	31
6	4	33	4	43	4	53	5	4	5	15	5	26
7	5	19	5	30	5	42	5	55	6	8	6	21
8	6	5	6	18	6	32	6	46	7	1	7	16
9	6	51	7	6	7	22	7	38	7	55	8	12
10	7	38	7	55	8	13	8	30	8	49	9	8
11	8	25	8	44	9	3	9	23	9	44	10	5
12	9	13	9	34	9	55	10	16	10	39	11	2
13	10	1	10	24	10	46	11	10	11	35	12	0
14	10	50	11	14	11	39	12	5	12	31	12	58
15	11	39	12	5	12	32	13	0	13	28	13	58
16	12	29	12	57	13	26	13	55	14	26	14	58
17	13	19	13	49	14	20	14	52	15	25	15	59
18	14	10	14	42	15	15	15	49	16	24	17	1
19	15	2	15	36	16	11	16	48	17	25	18	4
20	15	55	16	31	17	8	17	47	18	27	19	8
21	16	49	17	27	18	7	18	47	19	30	20	13
22	17	44	18	24	19	6	19	49	20	34	21	20
23	18	39	19	22	20	6	20	52	21	39	22	28
24	19	36	20	21	21	8	21	56	22	46	23	38
25	20	34	21	21	22	11	23	2	23	55	24	50
26	21	34	22	24	23	16	24	10	25	5	26	3
27	22	35	23	28	24	22	25	19	26	17	27	18
28	23	37	24	33	25	30	26	30	27	31	28	36
29	24	41	25	40	26	40	27	43	28	48	29	57
30	25	47	26	49	27	52	28	59	30	7	31	19
31	26	55	28	0	29	7	30	17	31	29	32	45
32	28	5	29	13	30	54	31	31	32	54	34	14
33	29	18	30	29	31	44	33	1	34	22	35	47
34	30	32	31	48	33	6	34	27	35	54	37	24
35	31	51	33	10	34	33	35	59	37	30	39	5
36	33	12	34	35	36	2	37	34	39	10	40	51

(continuación)

De clinación °	*Elevación del polo*											
	43		*44*		*45*		*46*		*47*		*48*	
	Unid.	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*
1	0	56	0	58	1	0	1	2	1	4	1	7
2	1	52	1	56	2	0	2	4	2	9	2	13
3	2	48	2	54	3	0	3	7	3	13	3	20
4	3	44	3	52	4	1	4	9	4	18	4	27
5	4	41	4	51	5	1	5	12	5	23	5	35
6	5	37	5	50	6	2	6	15	6	28	6	42
7	6	34	6	49	7	3	7	18	7	34	7	50
8	7	32	7	48	8	5	8	22	8	40	8	59
9	8	30	8	48	9	7	9	26	9	47	10	8
10	9	28	9	48	10	9	10	31	10	54	11	18
11	10	27	10	49	11	13	11	37	12	2	12	28
12	11	26	11	51	12	16	12	43	13	11	13	39
13	12	26	12	53	13	21	13	50	14	20	14	51
14	13	27	13	56	14	26	14	58	15	30	16	5
15	14	28	15	0	15	32	16	7	16	42	17	19
16	15	31	16	5	16	40	17	16	17	54	18	34
17	16	34	17	10	17	48	18	27	19	8	19	51
18	17	38	18	17	18	58	15	40	20	23	21	9
19	18	44	19	25	20	9	20	53	21	40	22	29
20	19	50	20	35	21	21	22	8	22	58	23	51
21	20	59	21	46	22	34	23	25	24	18	25	14
22	22	8	22	58	23	50	24	44	25	40	26	40
23	23	19	24	12	25	7	26	5	27	5	28	8
24	24	32	25	28	26	26	27	27	28	31	29	38
25	25	47	26	46	27	48	28	52	30	0	31	12
26	27	3	28	6	29	11	30	20	31	32	32	48
27	28	22	29	29	30	38	31	51	33	7	34	28
28	29	44	30	54	32	7	33	25	34	46	36	12
29	31	8	32	22	33	40	35	2	36	28	38	0
30	32	35	33	53	35	16	36	43	*38*	15	39	53
31	34	5	35	28	36	56	38	29	40	7	41	52
32	35	38	37	7	38	40	40	19	42	4	43	57
33	37	16	38	50	40	30	42	15	44	8	46	9
34	38	58	40	39	42	25	44	18	46	20	48	31
35	40	46	42	33	4!	27	46	23	48	36	51	3
36	42	39	44	33	46	36	48	47	51	11	53	47

(continuación)

De clinación	*Elevación del polo*											
	49		*50*		*51*		*52*		*53*		*54*	
°	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*
1	1	9	1	12	1	14	1	17	1	20	1	23
2	2	18	2	23	2	28	2	34	2	39	2	45
3	3	27	3	35	3	43	3	51	3	59		8
4	4	37	4	47	4	57	5	8	5	19	5	31
5	5	47	5	50	6	12	6	26	6	40	6	55
6	6	57	7	12	7	27	7	44	8	1	8	19
7	8	7	8	25	8	43	9	2	9	23	9	44
8	9	18	9	38	10	0	10	22	10	45	11	9
9	10	30	10	53	11	17	11	42	12	8	12	35
10	11	42	12	8	12	35	13	3	13	32	14	3
11	12	55	13	24	13	53	14	24	14	57	15	31
12	14	9	14	40	15	13	15	47	16	23	17	0
13	15	24	15	58	16	34	17	11	17	50	18	32
14	16	40	17	17	17	56	18	37	19	19	20	4
15	17	57	18	39	19	19	20	4	20	50	21	38
16	19	16	19	59	20	44	21	32	22	22	23	15
17	20	36	21	22	22	11	23	2	23	56	24	53
18	21	57	22	47	23	39	24	34	25	33	26	34
19	23	20	24	14	25	10	26	9	21	11	28	17
20	24	45	25	42	26	43	27	46	28	53	30	4
21	26	12	27	14	28	18	29	26	30	37	31	54
22	27	42	28	47	29	56	31	8	32	25	33	47
23	29	14	30	23	31	37	32	54	34	17	35	45
24	31	4	32	3	33	21	34	44	36	13	37	48
25	32	26	33	46	35	10	36	39	38	14	39	59
26	34	8	35	32	37	2	38	38	40	20	42	10
27	35	53	37	23	39	0	40	42	42	33	44	32
28	37	43	39	19	41	2	42	53	44	53	47	2
29	39	37	41	21	43	12	45	12	47	21	49	44
30	41	37	43	29	45	29	47	39	50	1	52	37
31	43	44	45	44	47	54	50	16	52	53	55	48
32	45	57	48	8	50	30	53	7	56	1	59	19
33	48	19	50	44	53	20	56	13	59	28	63	21
34	50	54	53	30	56	20	59	42	63	31	68	11
35	53	40	56	34	59	58	63	40	68	18	74	32
36	56	42	59	59	63	47	68	26	74	36	90	0

(continuación)

Declinación °	*Elevación del polo* 55		56		57		58		59		60	
	Unid.	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*
1	1	26	1	29	1	32	1	36	1	40	1	44
2	2	52	2	58	3	5	3	12	3	20	3	28
3	4	17	4	27	4	38	4	49	5	0	5	12
4	5	44	5	57	6	11	6	25	6	41	6	57
5	7	11	7	27	7	44	8	3	8	22	8	43
6	8	38	8	58	9	19	9	41	10	4	10	29
7	10	6	10	29	10	54	11	20	11	47	12	17
8	11	35	12	1	12	30	13	0	13	32	14	5
9	13	4	13	35	14	7	14	41	15	17	15	55
10	14	35	15	9	15	45	16	23	17	4	17	47
11	16	7	16	45	17	25	18	8	18	53	19	41
12	17	40	18	22	19	6	19	53	20	43	21	36
13	19	15	20	1	20	50	21	41	22	36	23	34
14	20	52	21	42	22	35	23	31	24	31	25	35
15	22	30	23	24	24	22	25	23	26	29	27	39
16	24	10	25	9	26	12	27	19	28	30	29	47
17	25	53	26	57	28	5	29	18	30	35	31	59
18	27	39	28	48	30	1	31	20	32	44	34	19
19	29	27	30	41	32	1	33	26	34	58	36	37
20	31	19	32	39	34	5	35	37	37	17	39	5
21	33	15	34	41	36	14	37	54	39	42	41	40
22	35	14	36	48	38	28	40	17	42	15	44	25
23	37	19	39	0	40	49	42	47	44	57	47	20
24	39	29	41	18	43	17	45	26	47	49	50	27
25	41	45	43	44	45	54	48	16	50	54	53	52
26	44	9	46	18	48	41	51	19	54	16	57	39
27	46	41	49	4	51	41	54	38	58	0	61	57
28	49	24	52	1	54	58	58	19	62	14	67	4
29	52	20	55	16	58	36	62	31	67	18	73	46
30	55	32	58	52	62	45	67	31	73	55	90	0
31	59	6	62	58	67	42	74	4	90	0		
32	63	10	67	53	74	12	90	0				
33	68	1	74	19	90	0						
34	74	33	90	0								
35	90	0										
36												

Lo que aquí falta pertenece a aquellos [astros] que ni nacen ni se ponen.

consta de dos razones: es decir, de la cuerda del doble de FL a la cuerda del doble de AF, esto es, FK es a KE, y de la cuerda del doble de AB a la cuerda del doble de DL, esto es, como EK es a KN, por lo tanto EK es asumido [tomado como término medio] entre FK y KN. También de la misma manera BE es a EN se compone de la razón BE es a EK y de KE es a EN, tal como de modo más detallado demuestra Ptolomeo por medio de los segmentos esféricos.

Así estimo que se determina no sólo la desigualdad de los días y de las noches, sino también la de la Luna y la de las estrellas, y la de cualquiera cuya declinación de los paralelos descritos por ellos en el movimiento diurno hubiera sido dada, y diferenciaría los segmentos que están en la parte superior de la Tierra [hemisferio norte] de los que están en la parte inferior, por lo que fácilmente podría entenderse el nacimiento y ocaso de aquéllos [astros].

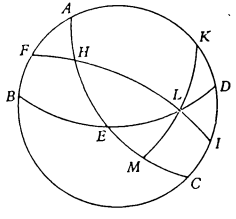
8. ACERCA DE LAS HORAS Y DE LAS PARTES DEL DÍA Y DE LA NOCHE

En consecuencia, partiendo de estas cosas, es evidente que, una vez tomada en la tabla la diferencia de los días correspondiente a la propuesta elevación del polo junto con la declinación del Sol, la añadiéramos a un cuadrante del círculo en la declinación boreal, o la sustrajéramos en la austral, y multiplicamos por dos lo que resulte, tendremos la magnitud de aquel día, y lo que quede del círculo será la duración de la noche; uno y otro de esos segmentos, divididos por XV unidades de tiempo [«temporas»], mostrará cuántas horas iguales hay. Pero tomando la duodécima parte, tendremos el contenido de una hora de tiempo. Y estas horas toman el nombre de su día, del cual siempre son la doceava parte. Por esto han sido llamadas por los antiguos horas solsticiales [solsticio de verano], equinocciales y brumales [solsticio de invierno]. Pero desde antiguo no se utilizaron otras nada más que estas XII, desde el alba hasta las tinieblas, pues la noche la dividían en cuatro vigilias o vigilancias: y tal uso de las horas duró mucho tiempo con el consentimiento tácito de todo el mundo. Gracias a que fueron inventadas las clepsidras, en las que por sustracción o adición de agua que goteaba acomodaban las horas a la diversidad de los días, para que cuando estuviera nublado no se ocultara la distinción del tiempo. Pero, después que el vulgo aceptara las horas como iguales y comunes a los días y a las noches, puesto que son más fáciles de observar, aquellas horas de tiempo [propias de cada una de las estaciones] llegaron a tal desuso que si se preguntara a cualquiera del vulgo cuál es la hora «prima» del día, la «tertia», o la «sexta», o la «nona», o la «undécima», no sabe qué responder o ciertamente responde lo que menos se relaciona con el tema. Ahora, algunos toman tal número de horas iguales a partir del mediodía, otros desde el ocaso, otros desde medianoche, algunos desde la salida del Sol, según lo que se haya establecido para cada ciudad.

9. SOBRE LA ASCENSIÓN OBLICUA DE LOS GRADOS DE LA ECLÍPTICA, Y CÓMO EL GRADO QUE ESTÁ EN MEDIO DE LOS CIELOS ES DETERMINADO CON RESPECTO AL GRADO DE LA SALIDA DEL SOL

Así pues, expuestas la magnitud y la diferencia de las noches y de los días, sigue en el correspondiente orden la exposición de las ascensiones oblicuas junto con sus «tiempos» [divisiones de tiempo], a las que llamaré «dodecatemorías», esto es, partes duodécimas del zodíaco, o de cualquier otro arco del mismo que se tome: no habiendo otras diferencias entre la ascensión recta y la oblicua que las que expusimos sobre el día equinoccial y el contrario. Por otra parte, las duodécimas partes, tomando prestados los nombres de seres vivos que son los nombres de las estrellas fijas, se llamaron Aries, Tauro, Géminis, Cáncer y las demás, siguiendo el orden a partir del equinoccio de primavera.

Por lo tanto, se repite para mayor evidencia el círculo meridiano ABCD, con el semicírculo ecuatorial AEC y el del horizonte BED, que se cortan en el punto E, tómese el equinoccio en H, por el cual el círculo FHI de la eclíptica corta al horizonte en L, a través de esta intersección desde el polo K del ecuador desciende el cuadrante del círculo máximo KLM. Así pues, aparece que, con el arco de la eclíptica HL, se levanta el arco equinoccial HE: pero en la esfera recta ascendía aquel arco junto con el HEM. La diferencia entre estas ascensiones es EM, la cual ya demostramos que es la diferencia partida por dos entre el día equinoccial y su contrario: pero lo que se añadía en la declinación boreal, aquí se quita, y a su vez se añade en una ascensión recta austral para volverse oblicua. Y cuantas veces aparezca cualquier signo o cualquier arco de la eclíptica, quedará de manifiesto por las ascensiones, numeradas desde el principio hasta el final.



De todo ello se sigue que habiendo sido dado algún grado de la eclíptica que se levanta, tomado desde el ecuador, se da también el que está en mitad del cielo. Por lo tanto, habiendo sido dada la declinación L del grado que nace, con respecto a la distancia HL del ecuador, también se conoce HEM la ascensión recta y todo AHEM el arco de la mitad de un día. En consecuencia, el arco restante AH es conocido, que es la ascensión recta del arco FH, el cual también se conoce por la tabla o porque en AFH se conoce el ángulo de la intersección AHF, el lado AH y el ángulo FAH que es recto. Y así, todo el arco FHL de la eclíptica se da entre el grado del orto y el grado que divide por la mitad al cielo.

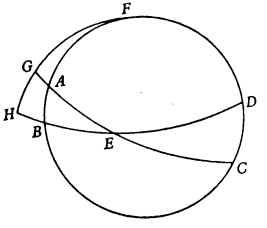
Y viceversa, si el grado que mide por la mitad al cielo hubiera sido dado primero como el arco FH, conoceríamos también el grado del orto; pues se conocerá la declinación AF y el arco AFB por el ángulo de declinación de la esfera, y el arco restante FB. Ahora bien, en el triángulo BFL es conocido por lo anterior el ángulo BFL, el lado

FB y el ángulo FBL es recto; luego se da el lado buscado FHL. O de otra manera, como deduciremos más abajo.

10. DEL ÁNGULO DE SECCIÓN DE LA ECLÍPTICA CON EL HORIZONTE

El círculo de la eclíptica, por ser oblicuo al eje de la esfera, describe varios ángulos con el horizonte. El hecho de que la eclíptica se eleve dos veces con respecto al horizonte para los que habitan entre los trópicos, ya lo hemos dicho acerca de las diferencias de las sombras. Pero pienso que nos es suficiente haber mostrado por lo menos los ángulos que sirven a los habitantes heteroscios, esto es, a nosotros, a partir de tales ángulos la teoría general de éstos se entenderá fácilmente.

En consecuencia, considero bastante claro que en la esfera oblicua (cuando empieza el equinoccio, o sea, en el principio de Aries) tanto más inclinada está la eclíptica y se eleva hacia el horizonte, cuanto aumenta la máxima declinación austral, la cual se manifiesta en el principio de Capricornio que se presenta entonces en medio del cielo, y a su vez la eclíptica produce el ángulo oriental de mayor elevación cuando emerge el principio de Libra, y el principio de Cáncer ocupa la mitad del cielo. Por lo que estos tres círculos, el ecuador, la eclíptica y el horizonte, convergen a través de la misma intersección común en los polos del círculo meridiano, cuyos arcos, interceptados por aquéllos, ponen de manifiesto aquel ángulo oriental, en cuanto sea valorado.



Pero para que quede también claro el proceso de medir otras partes de la eclíptica, tómese de nuevo el círculo meridiano ABCD, el semicírculo del horizonte BED, el semicírculo de la eclíptica AEC, un grado de la cual se eleva en E. Nos proponemos hallar el ángulo AEB, determinar su medida teniendo en cuenta que cuatro rectos son CCCLX [grados]. Puesto que se da E, el grado del orto, se da también partiendo de lo anterior el grado que está en medio del cielo y el arco AE, junto con la altitud meridiana AB. Y, puesto que el ángulo ABE es recto, se da la razón de la cuerda del doble de AB como la cuerda de la mitad de la esfera [diámetro] es a la cuerda del doble del arco que mide el ángulo AEB: por lo tanto, se da también el ángulo AEB.

Pero si no hubiera sido dado el grado del orto, sino un grado de la mitad del cielo, que sea A, no por eso el ángulo del orto hubiera podido ser menos medido. Pues supuesto el polo en E, descríbase el cuadrante FGH de un círculo máximo, y sean completados los cuadrantes EAG, EBH. Puesto que se da la altitud meridiana AB, y AF la altitud restante del cuadrante, también se da el ángulo FAG según lo que antecede, y el ángulo FGA es recto, luego se da también el arco FG y el arco restante GH, que mide el ángulo del orto buscado.

De donde se concluye de qué modo, con respecto al grado que está en medio del cielo, se conoce el del orto, porque la cuerda del doble de GH es a la cuerda del doble

Tabla de las ascensiones de los signos en la revolución de una esfera recta

Eclíptica Sig	°	Ascensión Unid.	Ascensión Min.	Un grado Unid.	Un grado Min.	Eclíptica Sig	°	Ascensión Unid.	Ascensión Min.	Un grado Unid.	Un grado Min.
	6	5	30	0	55		6	185	30	0	55
♈ ARIES	12	11	0	0	55	♎ LIBRA	12	191	0	0	55
	18	16	34	0	56		18	196	34	0	56
	24	22	10	0	56		24	202	10	0	56
	30	27	54	0	57		30	207	54	0	57
♉ TAURO	6	33	43	0	58	♏ ESCORPIO	6	213	43	0	58
	12	39	35	0	59		12	219	35	0	59
	18	45	32	1	0		18	225	32	1	0
	24	51	37	1	1		24	231	37	1	1
	30	57	48	1	2		30	237	48	1	2
♊ GÉMINIS	6	64	6	1	3	♐ SAGITARIO	6	244	6	1	3
	12	70	29	1	4		12	250	29	1	4
	18	76	57	1	5		18	256	57	1	5
	24	83	27	1	5		24	263	27	1	5
	30	90	0	1	5		30	270	0	1	5
♋ CÁNCER	6	96	33	1	5	♑ CAPRICORNIO	6	276	33	1	5
	12	103	3	1	5		12	283	3	1	5
	18	109	31	1	5		18	289	31	1	5
	24	115	54	1	4		24	295	54	1	4
	30	122	12	1	3		30	302	12	1	3
♌ LEO	6	128	23	1	2	♒ ACUARIO	6	308	23	1	2
	12	134	28	1	1		12	314	28	1	1
	18	140	25	1	0		18	320	25	1	0
	24	146	17	0	59		24	326	17	0	59
	30	152	6	0	58		30	332	6	0	58
♍ VIRGO	6	157	50	0	57	♓ PISCIS	6	337	50	0	57
	12	163	26	0	56		12	343	26	0	56
	18	169	0	0	56		18	349	0	0	56
	24	174	30	0	55		24	354	30	0	55
	30	180	0	0	55		30	360	0	0	55

Tabla de las ascensiones en una esfera oblicua

Eclíptica Sig.	°	*Elevación del polo* 39 Ascens. Unid.	Min.	42 Ascens. Unid.	Min.	45 Ascens. Unid.	Min.	48 Ascens. Unid.	Min.	51 Ascens. Unid.	Min.	54 Ascens. Unid.	Min.	57 Ascens. Unid.	Min.
♈	6	3	34	3	20	3	6	2	50	2	32	2	12	1	49
	12	7	10	6	44	6	15	5	44	5	8	4	27	3	40
	18	10	50	10	10	9	27	8	39	7	47	6	44	5	34
	24	14	32	13	39	12	43	11	40	10	28	9	7	7	32
	30	18	26	17	21	16	11	14	51	13	26	11	40	9	40
♉	6	22	30	21	12	19	46	18	14	16	25	14	22	11	57
	12	26	39	25	10	23	32	21	42	19	38	17	13	14	23
	18	31	0	29	20	27	29	25	24	23	2	20	17	17	2
	24	35	38	33	47	31	43	29	25	26	47	23	42	20	2
	30	40	30	38	30	36	15	33	41	30	49	27	26	23	22
♊	6	45	39	43	31	41	7	38	23	35	15	31	34	27	7
	12	51	8	48	52	46	20	43	27	40	8	36	13	31	26
	18	56	56	54	35	51	56	48	56	45	28	41	22	36	20
	24	63	0	60	36	47	54	54	49	51	15	47	1	41	49
	30	69	25	66	59	64	16	61	10	57	34	53	28	48	2
♋	6	76	6	73	42	71	0	67	55	64	21	60	7	54	55
	12	83	2	80	41	78	2	75	2	71	34	67	28	62	26
	18	90	10	87	54	85	22	82	29	79	10	75	15	70	28
	24	97	27	95	19	92	55	90	11	87	3	83	22	78	55
	30	104	54	102	54	100	39	98	5	13	13	91	50	87	46
♌	6	112	24	110	33	108	30	106	11	103	33	100	28	96	48
	12	119	56	118	16	116	25	114	20	111	58	109	13	105	58
	18	127	29	126	0	124	23	122	32	120	28	118	3	115	13
	24	135	4	133	46	132	21	130	48	128	59	126	56	124	31
	30	142	38	141	33	140	23	139	3	137	38	135	52	133	52
♍	6	150	11	149	19	148	23	147	20	146	8	144	47	143	12
	12	157	41	157	1	156	19	155	29	154	38	153	36	153	24
	18	165	7	164	40	164	12	163	41	163	5	162	24	162	47
	24	172	34	172	21	172	6	171	51	171	33	171	12	170	49
	30	180	0	180	0	180	0	180	0	180	0	180	0	180	0

(continuación)

Eclíptica Sig.	°	*Elevación del polo* 39 Ascens. Unid.	Min.	42 Ascens. Unid.	Min.	45 Ascens. Unid.	Min.	48 Ascens. Unid.	Min.	51 Ascens. Unid.	Min.	54 Ascens. Unid.	Min.	57 Ascens. Unid.	Min.
♎	6	187	26	187	39	187	54	188	9	188	27	188	48	189	11
	12	194	53	195	19	195	48	196	19	196	55	197	36	198	23
	18	202	21	203	0	203	41	204	30	205	24	206	25	207	36
	24	209	49	210	41	211	37	212	40	213	52	215	13	216	48
	30	217	22	218	27	219	37	220	57	222	22	224	8	226	8
♏	6	224	56	226	14	227	38	229	12	231	1	233	4	235	29
	12	232	31	234	0	235	37	237	28	239	32	241	57	244	47
	18	240	4	241	44	243	35	245	40	248	2	250	47	254	2
	24	247	36	249	27	251	30	253	49	256	27	259	32	263	12
	30	255	6	257	6	259	21	261	52	264	47	268	10	272	14
♐	6	262	33	264	41	267	5	269	49	272	57	276	38	281	5
	12	269	50	272	6	274	38	277	31	280	50	284	45	289	32
	18	276	58	279	19	281	58	284	58	288	26	292	32	297	34
	24	283	54	286	18	289	0	292	5	295	39	299	53	305	5
	30	290	35	293	1	295	45	298	50	302	26	306	42	311	58
♑	6	297	0	299	24	302	6	305	11	308	45	312	59	318	11
	12	303	4	305	25	308	4	311	4	314	32	318	38	323	40
	18	308	52	311	8	313	40	316	33	319	52	323	47	328	34
	24	314	21	316	29	318	53	321	37	324	45	328	26	332	53
	30	319	30	321	30	323	45	326	19	329	11	332	34	336	38
♒	6	324	21	326	13	328	16	330	35	333	13	336	18	339	58
	12	329	0	330	40	332	31	334	36	336	58	339	43	342	58
	18	333	21	334	50	336	27	338	18	340	22	342	47	345	37
	24	337	30	338	48	340	3	341	46	343	35	345	38	348	3
	30	341	34	342	39	343	49	345	9	346	34	348	20	350	20
♓	6	345	29	346	21	237	17	348	20	349	32	350	53	352	28
	12	349	11	349	51	350	33	351	21	352	14	353	16	354	26
	18	352	50	353	16	353	45	354	16	354	52	355	33	356	20
	24	356	26	356	40	356	23	357	10	357	53	357	48	358	11
	30	360	0	360	0	360	0	360	0	360	0	360	0	360	0

Tabla de los ángulos formados por la eclíptica con el horizonte

Eclíptica	*Elevación del polo*																*Eclíptica*
	39 Ángulo			*42 Ángulo*			*45 Ángulo*			*48 Ángulo*			*51 Ángulo*			*54 Ángulo*			*57 Ángulo*			
Sig.	°	°	'	°	'		°	'		°	'		°	'		°	'		°	'	"	*Sig.*
♈	0	27	32	24	32		21	32		18	32		15	32		12	32		9	32	30	
	6	27	37	24	36		21	36		18	36		15	35		12	35		9	35	24	
	12	27	49	24	49		21	48		18	47		15	45		12	43		9	41	18	
	18	28	13	25	9		22	6		19	3		15	59		12	56		9	53	12	
	24	28	45	25	40		22	34		19	29		16	23		13	18		10	3	6	♓
	30	29	27	26	15		23	11		20	5		16	56		13	45		10	31	30	
♉	6	30.	19	27	9		23	59		20	48		17	35		14	20		11	2	24	
	12	31	21	28	9		24	56		21	41		18	23		15	3		11	40	18	
	18	32	35	29	20		26	3		22	43		19	21		15	56		12	26	12	
	24	34	5	30	43		27	23		24	2		20	41		16	59		13	20	6	♒
	30	35	40	32	17		28	52		25	26		21	52		18	14		14	26	30	
♊	6	37	29	34	1		30	37		27	5		23	11		19	42		15	48	24	
	12	39	32	36	4		32	32		28	56		25	15		21	25		17	23	18	
	18	41	44	38	14		34	41		31	3		27	18		23	25		19	16	12	
	24	44	8	40	32		37	2		33	22		29	35		25	37		21	26	6	♑
	30	46	41	43	11		39	33		35	53		32	5		28	6		23	52	30	
♋	6	49	18	45	51		42	15		38	35		34	44		30	50		26	36	24	
	12	52	3	48	34		45	0		41	8		37	55		33	43		29	34	18	
	18	54	44	51	20		47	48		44	13		40	31		36	40		32	39	12	
	24	57	30	54	5		50	38		47	6		43	33		39	43		35	50	6	♐
	30	60	4	56	42		53	22		49	54		46	21		42	43		38	56	30	
♌	6	62	40	59	27		56	0		52	34		49	9		45	37		41	57	24	
	12	64	59	61	44		58	26		55	7		51	46		48	19		44	48	18	
	18	67	7	63	56		60	20		57	26		54	6		50	47		47	24	12	
	24	68	59	65	52		62	42		59	30		56	17		53	7		49	47	6	♏
	30	70	38	67	27		64	18		61	17		58	9		54	58		52	38	30	
♍	6	72	0	68	63		65	51		62	46		59	37		56	27		53	16	24	
	12	73	4	70	2		66	59		63	56		60	53		57	50		54	46	18	
	18	73	51	70	50		67	49		64	48		61	46		58	45		55	44	12	
	24	74	19	71	20		68	20		65	19		62	18		59	17		56	16	6	
	30	74	28	71	28		68	28		65	28		62	28		59	29		56	28	0	♎

de AB, como el diámetro es a la cuerda del doble de AE, según sucede en los triángulos esféricos.

Sobre estas cosas también añadiremos tres ejemplos de tablas. La primera será la de las ascensiones en la esfera recta, tomando el principio de Aries y el incremento de las seis partes de la eclíptica. La segunda será la de las ascensiones en la esfera oblicua, se procederá de un modo semejante cada seis grados desde el paralelo cuyo polo tiene una elevación de XXXIX grados, hasta el paralelo que tiene una elevación de LVII grados, señalando los incrementos medios de tres en tres grados. La restante trata de los ángulos del horizonte y procede de seis en seis grados bajo las mismas siete columnas. Y todo ello según la mínima oblicuidad de la eclíptica de XXIII grados, XXVIII minutos, con lo que casi se está de acuerdo en nuestro siglo.

11. SOBRE EL USO DE ESTAS TABLAS

De lo ya demostrado se deduce el uso de estas tablas. Puesto que, conocido un grado del Sol, si tomáramos la ascensión recta y a ésta, por cada hora igual tomada desde mediodía, le añadiéramos quince «tempora», desechados los CCCLX grados del círculo entero si excedieran de ellos, lo que resulta mostrará el grado de la ascensión recta de la eclíptica que corresponde a la hora propuesta en medio del cielo. De igual modo, si hicieras lo mismo respecto de la ascensión oblicua de tu región, tendrás el grado del orto de la eclíptica para la hora tomada a partir de la salida del Sol. En cualquiera de las estrellas que están fuera del círculo de los signos [zodíaco], de las cuales la ascensión recta se ha fijado (como demostramos más arriba), se dan por estas tablas los grados de la eclíptica que con ellas están en medio del cielo, a través de la misma ascensión recta a partir del principio de Aries, y también se da, a través de la ascensión oblicua de las mismas, el grado de la eclíptica que nace con ellas, además de que se muestran en las distintas zonas de las tablas las ascensiones y grados de la eclíptica. De igual modo, pero siempre por el lugar opuesto, se operará respecto del ocaso. Además, si a la ascensión recta, que está en medio del cielo, se añade un cuadrante de círculo, lo que de allí se calcula es la ascensión oblicua del orto. Por lo cual, a partir del grado de la mitad del cielo se da también el del orto, y al revés.

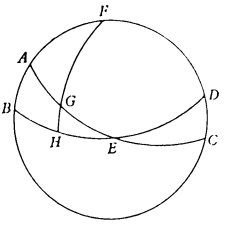
Sigue la tabla de los ángulos de la eclíptica con el horizonte, que son tomados por medio del grado del orto de la eclíptica; por los cuales se entiende a cuánto se eleva en el horizonte el nonagésimo grado de la eclíptica, lo que es necesario saber sobre todo en los eclipses solares. (Véanse las páginas 94-97.)

12. ACERCA DE LOS ÁNGULOS Y DE LOS ARCOS DE LOS CÍRCULOS QUE SE TRAZAN DESDE LOS POLOS DEL HORIZONTE AL CÍRCULO DE LA ECLÍPTICA

Es preciso que expongamos la relación existente entre los ángulos y los arcos formados por la intersección de la eclíptica con los [arcos] que tienen el vértice en el horizonte; en los casos en que la altitud está por encima del horizonte. Aunque más arriba ya se hizo una exposición acerca de la altitud meridiana del Sol, o de cualquier grado de la

eclíptica que está en medio del cielo, y del ángulo de sección con el meridiano, siendo el círculo del meridiano uno de los que también pasan a través del vértice del horizonte. Ya precedió también el razonamiento acerca del ángulo del orto, cuyo complementario es aquel al que el cuadrante del círculo comprende por el vértice del horizonte con el orto de la eclíptica.

Repetida la figura anterior, queda por tanto examinar las secciones medias, es decir, las intersecciones del círculo meridiano con los semicírculos de la eclíptica y del horizonte; tómese cualquier punto de la eclíptica entre el mediodía y el orto o el ocaso, por ejemplo sea éste G, por el cual desde el polo del horizonte F descienda el cuadrante del círculo FGH. Por lo tanto, en toda esa hora se conoce AGE, el arco de la eclíptica entre el meridiano y el horizonte, y AG por hipótesis; del mismo modo, también se da AF, a causa de ser conocida la altitud meridiana AB con el ángulo meridiano FAG, también se da FG por lo demostrado acerca de los triángulos esféricos, y el ángulo restante GH, altitud del punto G, con el ángulo FGA: lo que buscábamos.



Todo eso, acerca de los ángulos y secciones con respecto a la eclíptica, lo tomamos en síntesis de Ptolomeo, refiriéndonos en general a la tradición de los triángulos esféricos. Con lo que, si alguien quisiera ejercitarse, podría encontrar por sí mismo muchas más mediciones útiles además de estas que hemos utilizado como ejemplo.

13. DEL ORTO Y OCASO DE LOS ASTROS

También parece depender de la revolución diaria el orto y el ocaso de los astros, no sólo el simple orto y ocaso de los que acabamos de hablar, sino de qué manera se produce lo matutino y lo vespertino; lo cual, aunque acontece con el concurso de la revolución anual, sin embargo se hablará de ello aquí con más exactitud.

Los matemáticos antiguos separan los verdaderos de los aparentes. Entre los verdaderos está la matutina salida del astro, cuando emerge al mismo tiempo el Sol, en cambio se produce un ocaso matutino cuando la estrella se pone al salir el Sol, porque todo el tiempo que media se le llamaba matutino. Por el contrario, el orto vespertino se produce cuando la estrella sale al ponerse el Sol, en cambio ocaso vespertino cuando el astro se pone al ponerse el Sol; pues también al tiempo que media se le llama vespertino, de la misma manera que queda establecido lo que sucede durante el día y aquello que sucede durante la noche. Entre los aparentes, el orto del astro matutino es cuando, en el alba y antes de la salida del Sol, se presenta para emerger y empieza a aparecer, pero ocaso matutino cuando la estrella parece ocultarse muy pronto, antes de que salga el Sol. El orto vespertino se produce cuando, en el crepúsculo, parece que va a salir primero el astro, y el ocaso vespertino cuando algún tiempo después de la puesta del Sol, el astro ya deja de aparecer, y con la llegada del Sol el astro se oculta, hasta que en la salida matutina aparezcan en el orden anterior.

Todo esto acontece lo mismo con las estrellas fijas, incluso también con Saturno, Júpiter y Marte. En cambio, Venus y Mercurio realizan de otra manera el orto y el oca-

so; en efecto, no anticipan [su ocaso] con la llegada del Sol como acontece con aquellos planetas [Saturno, Júpiter, Marte], ni son descubiertos con el alejamiento de éste [el Sol], sino que anticipándose se mezclan con el fulgor del Sol y se desvanecen. Aquellos, al hacer la salida vespertina y matutina no se obscurecen durante algún tiempo, de manera que pasan la noche casi con su propia luz; y éstos [Venus y Mercurio] se ocultan completamente desde el ocaso hasta el orto y no pueden ser vistos. Hay también otra diferencia, en aquéllos el orto y el ocaso matutinos verdaderos son anteriores a los aparentes, los vespertinos posteriores, además de que por la mañana preceden a la salida del Sol y por la tarde siguen a su ocaso. En cambio, en los planetas inferiores, la salida matutina y vespertina aparentes son posteriores a las verdaderas, pero los ocasos son anteriores.

La manera según la cual se determinan [el orto y el ocaso] puede comprenderse por lo que se ha dicho más arriba al exponer la ascensión oblicua de cualquier astro que tenga una posición conocida y en coincidencia con qué grado de la eclíptica sale o se pone; si entonces apareciera el Sol en ese grado o en su contrario, el astro realizará entonces un orto o un ocaso matutino o vespertino verdadero. De estos se diferencian los aparentes según la claridad y magnitud de cada estrella, de tal modo que las que brillan con mayor luz están menos tiempo obscurecidas por los rayos solares que aquellas que son más oscuras. Y los límites de aparición y ocultación se toman en arcos sub-horizonte de los círculos que pasan por los polos del horizonte, entre el mismo horizonte y el Sol. En las estrellas fijas de primera magnitud hay aproximadamente XII grados [de límite], para Saturno XI, para Júpiter X, para Marte XI y medio, para Venus V, para Mercurio X. Pero en todo [este período], en el que lo que queda de luz diurna cede ante la noche, que abarca el crepúsculo o el alba, hay XVIII grados del ya mencionado círculo, y cuando el Sol ha atravesado tales grados, también las estrellas menores empiezan a aparecer; y precisamente con esta distancia, algunos [astrónomos] toman un paralelo trazado por debajo del horizonte, al cual, mientras el Sol lo toca, dicen que amanece o que termina la noche. Así pues, sabiendo en qué grado de la eclíptica el astro sale o se pone, y conociendo en el mismo punto el ángulo de sección de la eclíptica con el horizonte, si entonces hubiéramos encontrado también entre el grado del orto y el Sol, tantos grados de la eclíptica cuántos sean suficientes y que conciernen a la profundidad del Sol en relación al horizonte, según los límites prescritos del astro propuesto, nosotros podremos decir que se produce su primera salida u ocultación. Pero lo que expusimos en la precedente demostración sobre la altitud del Sol respecto a la Tierra, conviene también en todo su descenso bajo la Tierra y no difiere de la otra posición; de qué modo los [astros] que se ponen en el hemisferio aparente, nacen en el oculto, y que son cosas inversas, es fácil de entender. Acerca del orto y ocaso de los astros y del movimiento cotidiano del globo terrestre es suficiente con lo dicho.

14. SOBRE LA BÚSQUEDA DE LA POSICIÓN DE LAS ESTRELLAS Y LA DESCRIPCIÓN CANÓNICA DE LAS ESTRELLAS FIJAS

Después de haber expuesto el movimiento diario del globo terrestre y sus consecuencias, ahora debían seguir las demostraciones del circuito anual. Pero, puesto que algu-

nos matemáticos antiguos juzgaron que los fenómenos de las estrellas no errantes antecedían, como el principio de este arte, juzgamos que se debía seguir esta decisión, porque entre los principios y las hipótesis habíamos supuesto que la esfera de las estrellas no errantes era inmóvil, alrededor de tal decisión se acumulaban los errores, de todos los astros que se mueven.

Pero que nadie se admire porque hayamos aceptado este orden, habiendo estimado Ptolomeo en su *Almagesto* que no podía realizarse la explicación de las estrellas fijas, si antes no precedían los conocimientos [de las posiciones] sobre el Sol y la Luna, y por tanto lo que atañe a las estrellas fijas pensó diferirlo a aquellos [conocimientos]; nosotros juzgamos que hay que oponerse a este juicio. Porque si entiendes los cálculos sobre los que se deduce el movimiento de la Luna y el Sol, la idea quizá se mantendría. En efecto, también el geómetra Menelao determinó muchas estrellas y sus posiciones por medio de cálculos sobre las conjunciones lunares. Pero lo haremos mucho mejor si con la ayuda de instrumentos determinamos cualquier astro a través de las posiciones diligentemente examinadas del Sol y de la Luna, tal como mostraremos. También nos parece inútil el intento de aquellos que pensaron que podía delimitarse la magnitud del año solar a partir de los equinoccios o de los solsticios, y no a partir de las estrellas fijas; en lo cual nunca pudieron estar de acuerdo con nosotros, de tal manera que en ninguna parte la discrepancia fuera mayor. Esto lo había advertido Ptolomeo, quien habiendo considerado atentamente el año solar en su tiempo, no sin sospecha de error que con el tiempo pudiera manifestarse, aconsejó a la posterioridad que se escrutase más tarde la ulterior certeza de este asunto. Así pues, nos pareció que es preciso saber, tal como mostramos en este libro, de qué modo, con la ayuda de instrumentos, se toman las posiciones del Sol y de la Luna, esto es, cuánto distan del equinoccio primaveral o de otros puntos cardinales del mundo, lo que nos proporcionará una serie de comodidades para escrutar los otros astros, con lo que incluso expondremos la esfera de las estrellas fijas entretejida de constelaciones y su representación.

Pero con qué instrumentos se podría tomar la distancia de los trópicos, la oblicuidad de la eclíptica y la inclinación de la esfera o la altitud del polo del ecuador, se expuso anteriormente. Del mismo modo podemos tomar cualquier otra altitud del Sol de mediodía. Cuál sea la altitud, según su diferencia con respecto a la inclinación de la esfera, nos mostrará cuánto se inclina el Sol a partir del círculo equinoccial, y a través de esta declinación, se manifestará la posición del Sol al mediodía, tomada desde el equinoccio o desde el solsticio. El Sol parece atravesar aproximadamente un solo grado en el espacio de XXIIII horas; II minutos y medio pasan por cada hora. De donde, en cualquier hora determinada se deducirá fácilmente su posición.

Pero para observar la posición de la Luna y de las estrellas fijas hay otro instrumento, al que Ptolomeo llama astrolabio. Se fabrican dos órbitas circulares, o sea, los márgenes cuadriláteros de las órbitas, de tal modo que las superficies de lados o caras planos, la cóncava y la convexa, estén orientadas hacia los ángulos rectos, iguales en todo y semejantes, que concuerden en magnitud, por supuesto que por un tamaño demasiado pequeño no se hagan menos manejables, teniendo en cuenta que la amplitud contribuye mejor que la pequeñez para dividirlo en grados. La anchura y su espesor sean como mínimo la trigésima parte del diámetro. Conéctense y pónganse en contacto juntos entre sí los ángulos rectos, coincidiendo entre sí los cóncavos y los convexos, como en la redondez de un solo globo. Pero de ellos, uno obtenga el puesto de círculo de los signos, el otro el del que pasa por ambos polos (los llamaré equinoccial y de la eclípti-

ca). Aquel círculo de los signos hay que dividirlo en partes iguales, en CCCLX a lo largo de los lados, según se suele hacer; los cuales se subdividirán a su vez según la capacidad del instrumento. También en el otro círculo (medidos los cuadrantes desde la eclíptica) señálense los polos de la propia eclíptica, y tomada la distancia desde éstos, según el módulo de oblicuidad de la eclíptica, anótense también los polos del círculo ecuatorial.

Dispuestas así estas cosas, prepárense otras dos órbitas, construidas exactamente por los mismos polos de la eclíptica, en los cuales se moverán, una exterior y otra interior. Que éstos tengan igual grosor entre las dos superficies planas, pero la anchura de sus caras sea semejante a aquéllos; colocados de tal modo que la superficie cóncava del mayor toque la convexa, y la convexidad del menor toque por todas partes la cóncava de la eclíptica, de modo que no se impida su giro, pero que dejen fácilmente pasar a la eclíptica con su meridiano, y a la vez libremente entre sí. Perforaremos con habilidad estas órbitas circulares en los polos de la eclíptica según su diámetro y colocaremos unos ejes, con los que se conecten y se puedan mover. Divídase también la órbita interior en CCCLX partes iguales, de manera que en cada cuadrante salgan noventa hacia los polos.

Además, en la cavidad de éste ha de ser colocado otro círculo, y este quinto círculo susceptible también de virar en el mismo plano, a cuyas superficies planas se fijan unos instrumentos [agujas con pínulas] que tengan posibilidad de pasar de una a otra parte, de acuerdo con el diámetro, y reflectores o espejillos, por donde la luz de la estrella pueda entrar y salir, tal como sucede en las dioptras, por el mismo diámetro de la órbita circular, al que también se han de ajustar ciertos resaltes o indicadores de números para observar las latitudes del círculo continente. Ha de añadirse un sexto círculo, que lo rodee por completo y sostenga el astrolabio suspendido en puntos de sujeción de los polos ecuatoriales, colocado en alguna columnilla y sostenido por ella, y levantado perpendicularmente al plano del horizonte; ajustados también los polos según la inclinación de la esfera, de modo que tenga un meridiano similar al natural y con respecto a éste muévase lo menos posible.

Preparado así el instrumento, cuando queramos saber la posición de alguna estrella, hacia el atardecer, o sea, cuando el Sol está a punto de irse, cuando ya tenemos ante la vista la Luna, ajustaremos el círculo exterior al grado de la eclíptica, en el que habremos determinado la posición del Sol en ese tiempo, conocido por los métodos precedentes, y giraremos la sección de las órbitas hacia el Sol, hasta que cada uno de ellos, me refiero a la eclíptica y a aquel círculo exterior que pasa a través de sus polos, se oscurezcan a sí mismos.[1] Entonces giramos también el círculo interior hacia la Luna, y puesta la mirada en el plano de ella, donde veamos a la Luna bisecada desde el mismo plano o desde el opuesto, anotaremos la situación en la eclíptica del instrumento; ésta será, pues, la situación de la Luna vista según la longitud. Porque sin ella no habría modo de captar las posiciones de las estrellas, puesto que entre todas es la única partícipe del día y de la noche. Después, al llegar la noche, cuando puede ser vista la estrella cuya posición buscamos, ajustaremos la órbita exterior a la posición de la Luna, por la cual, con respecto a la Luna, colocamos la posición del astrolabio, tal como hicimos con el Sol. Entonces viramos también el círculo interior hacia la estrella, hasta que ésta parezca tomar contacto con la parte plana de la órbita, y es vista a través de los espejillos, que están en el pequeño círculo interior. Y así tendremos averiguada la longitud con la latitud de la estrella. Mientras se hace todo esto, examínese con la mirada qué

1. Es decir, hasta que las sombras se cortan como dos rectas perpendiculares entre sí.

grado de la eclíptica está en mitad del cielo, y a qué horas se ha llevado a cabo el experimento, y que conste en claro.[1]

Por ejemplo, Ptolomeo, en el año segundo del emperador Antonino Pío, en el noveno día de Pharmuthi, octavo mes de los egipcios, queriendo observar en Alejandría, hacia el ocaso del Sol, la posición de la estrella que se llama Basiliscos o Régulo en el pecho de Leo, dispuesto ya el astrolabio hacia el ocaso del Sol, pasadas cinco horas equinocciales desde mediodía, cuando el Sol se encontraba a III grados y una veinticuatroava parte de Piscis, al mover el círculo interior encuentra que la Luna sigue después [está al este] del Sol a XCII grados y un octavo; por lo que apareció entonces la posición de la Luna a V grados y una sexta parte de Géminis. Y después de media hora,

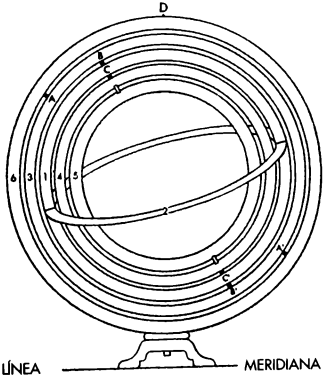
1. Leyenda:
1. Círculo a través de los polos de la eclíptica
2. Eclíptica
3. Círculo exterior
4. Círculo interior
5. Círculo menor
6. Círculo meridiano
A y A^1. Polos del ecuador
BCC^1B^1 Eje de la eclíptica
D Zenit, o polo del horizonte

El astrolabio está construido a imagen del firmamento ptolemaico, o como un «universo en miniatura». Consiguientemente, el funcionamiento del astrolabio es una imitación a escala reducida de la revolución de los cielos.

El astrolabio se dispone con el círculo meridiano (6) fijado en la línea meridiana y con los polos norte y sur del ecuador (A y A^1) apuntando hacia los polos celestes de encima y debajo del horizonte, de manera que el meridiano no cambie durante el curso de la revolución diaria. Los grados de la eclíptica celeste están indicados en el círculo eclíptico (2), con los solsticios o equinoccios en las intersecciones de la eclíptica (2) y el círculo que pasa por los polos de la eclíptica (1).

El círculo exterior (3) se hace girar hasta el punto de la eclíptica donde se calcula que está el sol, y a continuación la intersección del círculo exterior y de la eclíptica se hace girar hacia el mismo Sol, hasta que cada círculo produce una sombra rectilínea que corta perpendicularmente la otra sombra. Ahora, a medida que el círculo exterior gira alrededor del eje del ecuador hacia el eje de la eclíptica, el círculo que pasa por los polos de la eclíptica, el círculo interior y el círculo menor giran alrededor del eje del ecuador, y a medida que el polo de la eclíptica gira alrededor del polo del ecuador durante la revolución diaria; el giro hacia el Sol de la intersección de ambos círculos sirve para dar al giro anual y al giro diario del Sol la proporción adecuada el uno respecto del otro; y la sombra cruciforme indica que la eclíptica de madera ocupa en el astrolabio la posición relativa que la eclíptica celeste ocupa en este momento de la revolución diaria. El círculo interior (4) puede ser girado ahora hacia la Luna para marcar sobre la eclíptica la longitud lunar, y el círculo menor (5) puede ser rotado en el plano del círculo interior, para marcar la latitud lunar en el círculo interior graduado.

ASTROLABIO DE COPÉRNICO



cuando se cumplía la sexta a partir de mediodía y la estrella ya empezaba a aparecer, estando en mitad del cielo el cuarto grado de Géminis, viró el círculo exterior del instrumento hacia la ya tomada posición de la Luna. Continuando con el círculo interior, tomó la distancia de la estrella desde la Luna en LVII grados y una décima parte al este de los signos. Así pues, puesto que la Luna se descubría a partir del Sol poniente, como se ha dicho, a los XCII grados y una octava, los cuales determinan la posición de la Luna a V grados y un sexto de Géminis, pero era correcto que en la mitad del espacio de una hora [media hora] la Luna se había movido a través de un cuadrante de un solo grado [un cuarto de grado], puesto que una porción horaria [una hora] en el movimiento lunar continuó más o menos medio grado, pero a causa del paralaje en ese momento sustractivo de la Luna debía haber sido un poco menor de un cuadrante, lo que fijó aproximadamente como una doceava parte: por lo tanto, la Luna había estado a V grados y un tercio de Géminis. Pero, cuando hayamos tratado acerca de las conmutaciones [paralajes] lunares, aparecerá que no fue tanta la diferencia: de modo que puede quedar claro que la posición vista de la Luna excedía en más de un tercio o apenas menos de dos quintos los cinco grados de Géminis; añadidos a los cuales los LVII grados con una décima parte concluyen la posición de la estrella a II grados y medio de Leo, distante del solsticio de verano del Sol en XXXII grados y medio, con una latitud boreal de una sexta parte de grado. Ésta era la posición de Basiliscos, a través de la cual estaba abierta la vía incluso para las demás estrellas no errantes. Esta observación de Ptolomeo fue hecha según el calendario romano en el año CXXXIX de Cristo, día XXIIII de febrero, en el año primero de la Olimpíada CCXXIX.

Pero aquel hombre, el más eminente de los matemáticos, anotó tantas posiciones como cada una de las estrellas había obtenido en ese tiempo del equinoccio de primavera, y expuso [catalogó] las constelaciones de animales celestes. Con lo que no ayudó poco a este estudio nuestro y nos relevó de una labor bastante ardua, de modo que los que juzgamos que no son las posiciones de las estrellas las que cambian con el tiempo con respecto a los equinoccios, sino los equinoccios los que hay que referir a la esfera de las estrellas fijas, fácilmente podríamos deducir la descripción de los astros según cualquier otro principio inmutable. Así como pareció bien empezar desde Aries, como primer signo, y desde su primera estrella, la que está en su cabeza, así la misma configuración permanece siempre y absolutamente para las estrellas que brillan como fijas y en perpetua coherencia una vez captado su lugar. Están divididas por la admirable preocupación y maestría de los antiguos en XLVIII figuras, exceptuadas aquellas a las que siempre separaba el círculo de las ocultas desde el cuarto clima, aproximadamente por Rodas, y así quedaron estrellas informes [fuera de las figuras, de las constelaciones], como desconocidas para aquéllos. Y no por otra causa fueron las estrellas representadas en imágenes, según la opinión de Theón el Joven, en la exposición Aratea, a no ser para que tan gran multitud de ellas se distinguiera por partes, e individualmente pudieran ser designadas con algunas denominaciones, costumbre bastante antigua, puesto que leemos incluso en Hesíodo y Homero que habían sido ya nombradas Pleiades, Hyadas, Arcturo, Orión. En consecuencia, en la descripción de éstas según la longitud, no utilizaremos doceavas partes [«dodekatemorías»], que se deducen de los equinoccios y de los giros, sino el simple y acostumbrado número de grados, en lo restante seguiremos a Ptolomeo, con pocas excepciones, las que hayamos descubierto como alteradas o que son de otra manera. En el libro siguiente enseñaremos hasta qué punto queda clara la distancia de ellas a aquellos puntos cardinales [puntos equinoccios...].

Descripción en tablas de los signos y las estrellas
y en primer lugar las que pertenecen a la región septentrional

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
OSA MENOR O COLA DE PERRO						
En el extremo de la cola.	53	30	N.	66	0	3
Al este en la cola.	55	50	N.	70	0	4
En el comienzo de la cola.	69	20	N.	74	0	4
La que está más al sur en el cuadrángulo al oeste.	83	0	N.	75	20	4
La del mismo lado que está más al norte.	87	0	N.	77	40	4
La más al sur de las que están en el lado siguiente.	100	30	N.	72	40	2
La del mismo lado, que está más al norte.	109	30	N.	74	50	2
Siete estrellas de las que 2 son de segunda magnitud, 1 de tercera, 4 de cuarta.						
Y una no agrupada que está más al sur cerca de Cola de Perro en el lado siguiente en línea directa.	103	20	N.	71	10	4
OSA MAYOR A LA QUE LLAMAN «HÉLICE»						
La que está en el rostro.	78	40	N.	39	50	4
La que está al oeste en los ojos.	79	10	N.	43	0	5
Al este de ésta.	79	40	N.	43	0	5
De las dos que están en la frente la del oeste.	79	30	N.	47	10	5
La del este en la frente.	81	0	N.	47	0	5
La del oeste en la oreja derecha.	81	30	N.	50	30	5
De las dos que hay en el cuello, la del oeste.	85	50	N.	43	50	4
La del este.	92	50	N.	44	20	4
De las dos que hay en el pecho, la que está al norte.	94	20	N.	44	0	4
La que está más al sur.	89	20	N.	42	0	3
La que está en la rodilla izquierda anterior.	89	50	N.	35	0	3
De las 2 que hay en el pie izquierdo, la que está al norte.	89	50	N.	29	0	3
La que está más al sur.	88	40	N.	28	30	3
En la rodilla izquierda primera.	89	0	N.	36	0	4
La que está bajo la misma rodilla.	101	10	N.	33	30	4
La que está en el hombro.	104	0	N.	49	0	2
La que está en el vientre.	105	30	N.	44	30	2
La que está en el comienzo de la cola.	116	30	N.	51	0	3
En la pierna izquierda posterior.	117	20	N.	46	30	2
La del oeste de las 2 que hay en el pie izquierdo posterior.	106	0	N.	29	38	3
La del este a ésta.	107	30	N.	28	15	3
La que está en la cavidad izquierda.	115	0	N.	35	15	4

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
La del norte de las dos que hay en el pie derecho posterior.	123	10	N.	25	50	3
La que está al sur.	123	40	N.	25	0	3
La 1.ª de las tres que hay en la cola desde su comienzo.	125	30	N.	53	30	2
La del medio de ellas.	131	20	N.	55	40	2
La última y en el extremo de la cola.	143	10	N.	54	0	2
27 estrellas de las que 6 son de 2.ª magnitud, 8 de 3.ª, 8 de 4.ª y 5 de 5.ª.						
Estrellas no agrupadas que están alrededor de la «Hélice».						
Una hacia el sur, partiendo de la cola.	141	10	N.	39	45	3
Una más oscura y que precede a la anterior.	133	30	N.	41	20	5
Entre los pies anteriores de Osa y la cabeza de Leo.	98	20	N.	17	15	4
La más al norte, partiendo de ésta.	96	40	N.	19	10	4
La última de las tres oscuras.	99	30	N.	20	0	oscura
La del oeste a ésta.	95	30	N.	22	45	oscura
La que está más al oeste.	94	30	N.	23	15	oscura
La que está entre los pies anteriores y Géminis.	100	20	N.	22	15	oscura
De las 8 no agrupadas: 1 de 3.ª magnitud, 2 de 4.ª, 1 de 5.ª, 4 oscuras.						
DRAGÓN						
La que está en la lengua.	200	0	N.	76	30	4
En la boca.	215	10	N.	78	30	4 mayor
Sobre el ojo.	216	30	N.	75	40	3
En la mejilla.	229	40	N.	75	20	4
Sobre la cabeza.	233	30	N.	75	30	3
La que está al norte en la inflexión del cuello.	258	40	N.	82	20	4
De esas mismas la que está al sur.	295	50	N.	78	15	4
La que está entre ellas.	262	10	N.	80	20	4
La más al este en la segunda vuelta.	282	50	N.	81	10	4
La del sur del lado del cuadrilátero del oeste.	331	20	N.	81	40	5
La del norte del mismo lado.	343	50	N.	80	15	4
Del lado siguiente, la del norte.	1	0	N.	78	50	4
Del mismo lado, la del sur.	346	10	N.	77	50	4
La del sur del triángulo de la 3.ª vuelta.	4	0	N.	80	30	4
De las otras del rectángulo, la del oeste.	15	0	N.	81	40	5
La del este.	19	30	N.	80	15	5
De las 3 del triángulo, la del oeste.	66	20	N.	83	30	4
La del sur de las otras del mismo triángulo.	43	40	N.	83	30	4
La que está más al norte que las anteriores.	35	10	N.	84	50	4
De las 2 pequeñas, la que está al este del triángulo.	200	0	N.	87	30	6

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° '	*Latitud* ° '	*Magnitud*
La del oeste de ellas.	195 0	N. 86 50	6
De las 3 en línea recta, la del sur.	152 30	N. 81 15	5
La del medio de las 3.	152 50	N. 83 0	5
De ellas la que está más al norte.	151 0	N. 84 50	3
De las 2 que después de éstas están hacia el ocaso, la que está más al norte.	153 20	N. 78 0	3
Más al sur.	156 30	N. 74 40	4 mayor
De ahí, hacia el ocaso, en la vuelta de la cola.	156 0	N. 70 0	3
De las dos más distantes, la del oeste.	120 40	N. 64 64	4
La del este a ésa.	124 30	N. 65 30	3
La del este en la cola.	192 30	N. 61 15	3
En la punta (extremo) de la cola.	186 30	N. 56 15	3
31 estrellas, 8 de 3.ª magnitud, 16 de 4.ª, 5 de 5.ª y 2 de 6.ª.			
CEFEO			
En el pie derecho.	28 40	N. 75 40	4
En el pie izquierdo.	26 20	N. 64 15	4
En el lado derecho bajo el cinturón.	0 40	N. 71 10	4
La que está por encima del hombro derecho.	340 0	N. 69 0	3
La que toca la articulación derecha de la pierna.	332 40	N. 72 0	4
La del este a ésta, tocando la pierna.	333 20	N. 74 0	4
La que está en el pecho.	352 0	N. 65 30	5
En el brazo izquierdo.	1 0	N. 62 30	4 mayor
De las tres que están en la tiara, la austral.	339 40	N. 60 15	5
La del medio.	340 40	N. 61 15	4
La del norte de las tres.	342 20	N. 61 30	5
11 estrellas, 1 de 3.ª magnitud, 7 de 4.ª, 3 de 5.ª.			
De las dos no agrupadas, la del oeste a la tiara.	337 0	N. 64 0	5
La del este.	344 40	N. 59 30	4
BOYERO O ARTOPHYLACIS			
La del oeste de las tres que hay en la mano derecha.	145 40	N. 58 40	5
La del medio de las tres, la más al sur.	147 30	N. 58 20	5
La del este de las tres.	149 0	N. 60 10	5
La que está en la articulación de la pierna izquierda.	143 0	N. 54 40	5
En el hombro izquierdo.	163 0	N. 49 0	3
En la cabeza.	170 0	N. 53 50	4 mayor
En el hombro derecho.	179 0	N. 48 40	4
La más al sur de los dos que hay en la túnica.	179 0	N. 53 15	4
La que está más al norte en el extremo de la túnica.	178 20	N. 57 30	4

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° ′		*Latitud* ° ′			*Magnitud*
La que está el norte de las dos que hay bajo el hombro en la flecha.	181	0	N.	46	10	4 mayor
La más al sur de ellas.	181	50	N.	45	30	5
En el extremo de la mano derecha.	181	35	N.	41	20	5
La del oeste de las dos que hay en la palma de la mano.	180	0	N.	41	40	5
La del este.	180	20	N.	42	30	5
En el extremo de la manga de la túnica.	181	0	N.	40	20	5
En la pierna derecha.	173	20	N.	40	15	3
De las dos que hay en el cinturón, la del este.	169	0	N.	41	40	4
La del oeste.	168	20	N.	42	10	4 mayor
La que está en el talón derecho.	178	40	N.	28	0	3
De las tres que hay en la pierna izquierda, la del norte.	164	40	N.	28	0	3
La del medio de las tres.	163	50	N.	26	30	4
La más al sur de ellas.	164	50	N.	25	0	4
22 estrellas, de las que 4 son de magnitud 3.ª, 9 de 4.ª y 9 de 5.ª.						
1 no agrupada, entre las piernas, a la que llaman Arturo.	170	20	N.	31	30	1
CORONA BOREAL						
La que brilla en la corona.	188	0	N.	41	30	2 mayor
La más al oeste de todas.	185	0	N.	46	10	4 mayor
La que está al este del norte.	185	10	N.	48	0	5
Al este más al norte.	193	0	N.	50	30	6
Al este de la que brille desde el sur.	191	30	N.	44	45	4
Al este, más cerca.	190	30	N.	44	50	4
Al este, la que le sigue más lejos.	194	40	N.	46	10	4
La más al este de todas en la corona.	195	0	N.	49	20	4
8 estrellas, de las que 1 es de magnitud 2.ª, 5 de 4.ª, 1 de 5.ª, 1 de 6.ª.						
EL ARRODILLADO O HÉRCULES						
En la cabeza.	221	0	N.	37	30	3
En la axila derecha.	207	0	N.	43	0	3
En el brazo derecho.	205	0	N.	40	10	3
En el costado derecho.	201	20	N.	37	10	4
En el hombro izquierdo.	220	0	N.	48	0	3
En el brazo izquierdo.	225	20	N.	49	30	4 mayor
En el costado izquierdo.	231	0	N.	42	0	4
Una de las tres que hay en la izquierda.	238	50	N.	52	50	4 mayor
De las dos que quedan, la del norte.	235	0	N.	54	0	4 mayor
La más al sur.	234	50	N.	53	0	4
En el lado derecho.	207	10	N.	56	10	3
En el lado izquierdo.	213	30	N.	53	30	4
En la nalga izquierda.	213	20	N.	56	10	5
En la salida de la misma pierna.	214	30	N.	58	30	5
De las tres que hay en la pierna izquierda, la del oeste.	217	20	N.	59	50	3
La del este a ésta.	218	40	N.	60	20	4
La tercera del este.	219	40	N.	61	15	4

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° '	*Latitud* ° '	*Magnitud*
En la rodilla izquierda.	237 10	N. 61 0	4
En la rabadilla.	225 30	N. 69 20	4
De las tres que hay en el pie izquierdo, la del oeste.	188 40	N. 70 15	6
La del medio de ellas.	220 10	N. 71 15	6
La del este de las tres.	223 0	N. 72 0	6
En la salida de la pierna derecha.	207 0	N. 60 15	4 mayor
La más al norte de la misma pierna.	198 50	N. 63 0	4
En la rodilla derecha.	189 0	N. 65 30	4 mayor
La más al sur de las dos que hay bajo la misma rodilla.	186 40	N. 63 40	4
La que está más al norte.	183 30	N. 64 15	4
En la tibia derecha.	184 30	N. 60 0	4
En el extremo del pie derecho, la misma que está en el extremo de la túnica de Boyero.	178 20	N. 57 30	4
Además de ésta, 28 estrellas, 6 de 3.ª magnitud, 17 de 4.ª, 2 de 5.ª, 3 de 6.ª.			
Una, no agrupada, la más al sur a partir del brazo derecho.	206 0	N. 38 10	5
LIRA			
Una brillante, a la que llaman Lyra o Fidicula.	250 40	N. 62 0	1
La más al norte de las dos que están a su lado.	253 40	N. 62 40	4 mayor
La que está más al sur.	253 40	N. 61 0	4 mayor
En medio del comienzo de los cuernos.	262 0	N. 60 0	4
De las dos que continúan hacia el orto, la del norte.	265 20	N. 61 20	4
La que está más al sur.	265 0	N. 60 20	4
De las dos al oeste en la unión, la del norte.	254 20	N. 56 10	3
La más al sur.	254 10	N. 55 0	4 menor
De las dos al este en el mismo grupo, la del norte.	257 30	N. 55 20	3
La que está más al sur.	258 20	N. 54 45	4 menor
De las 10 estrellas, 1 de 1.ª magnitud, 2 de 3.ª, 7 de 4.ª.			
CISNE O AVE			
En el pico.	267 50	N. 49 20	3
En la cabeza.	272 20	N. 50 30	5
En medio del cuello.	279 20	N. 54 30	4 mayor
En el pecho.	291 50	N. 56 20	3
La que luce en la cola.	302 30	N. 60 0	2
En la articulación del ala derecha.	282 40	N. 64 40	3
De las tres que hay en la planta derecha, la más al sur.	285 50	N. 69 40	4
La del medio.	284 30	N. 71 30	4 mayor
La última de las tres y en el extremo del ala.	310 0	N. 74 0	4 mayor

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
En el codo del ala izquierda.	294	10	N.	49	30	3
En medio de la misma ala.	298	10	N.	52	10	4 mayor
En el extremo de la misma.	300	0	N.	74	0	3
En el pie izquierdo.	303	20	N.	55	10	4 mayor
En la rodilla izquierda.	307	50	N.	57	0	4
La del oeste de las dos que hay en el pie derecho.	294	30	N.	64	0	4
La del este.	296	0	N.	64	30	4
Una más nebulosa, en la rodilla derecha.	305	30	N.	63	45	5
17 estrellas de las que hay 1 de 2.ª magnitud, 5 de 3.ª, 9 de 4.ª, 2 de 5.ª.						
Y dos no agrupadas alrededor de Cisne.						
La que está más al sur de las dos que hay bajo el ala izquierda.	306	0	N.	49	40	4
La que está más al norte.	307	10	N.	51	40	4
CASIOPEA						
En la cabeza.	1	10	N.	45	20	4
En el pecho.	4	10	N.	46	45	3 mayor
En el cinturón.	6	20	N.	47	50	4
Sobre la silla, junto a las piernas.	10	0	N.	49	0	3 mayor
Junto a las rodillas.	13	40	N.	45	30	3
En la pierna.	20	20	N.	47	45	4
En el extremo del pie.	355	0	N.	48	20	4
En el brazo izquierdo.	8	0	N.	44	20	4
En el cúbito izquierdo.	7	40	N.	45	0	5
En el cúbito derecho.	357	40	N.	50	0	6
En el pie de la silla.	8	20	N.	52	40	4
En medio del respaldo.	1	10	N.	51	40	3 menor
En el extremo.	27	10	N.	51	40	6
13 estrellas, de las que hay 4 de 3.ª magnitud, 6 de 4.ª, 1 de 5.ª, 2 de 6.ª.						
PERSEO						
Una nebulosa en el final de la mano derecha.	21	0	N.	40	30	nebulosa
En el cúbito derecho.	24	30	N.	37	30	4
En el hombro derecho.	26	0	N.	34	30	4 menor
En el hombro izquierdo.	20	50	N.	32	20	4
En la cabeza como una nebula.	24	0	N.	34	30	4
En la escápula.	24	50	N.	31	10	4
La que brilla en el lado derecho.	28	10	N.	30	0	2
De las tres que hay en el mismo lado, la del oeste.	28	40	N.	27	30	4
La del medio.	30	20	N.	27	40	4
La que queda de las tres.	31	0	N.	27	30	3
En el codo izquierdo.	24	0	N.	27	0	4
La que brilla en la mano izquierda y en la cabeza de Medusa.	23	0	N.	23	0	2
La del este de la misma cabeza.	22	30	N.	21	0	4
La del oeste en la misma cabeza.	21	0	N.	21	0	4
La del oeste a ésta.	20	10	N.	22	15	4

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° '	*Latitud* ° '	*Magnitud*
En la rodilla derecha.	38 10	N. 28 15	4
La del oeste a ésta en la rodilla.	37 10	N. 28 10	4
De las dos que hay en el vientre, la del oeste.	35 40	N. 25 10	4
La del este.	37 20	N. 26 15	4
En el muslo derecho.	37 30	N. 24 30	5
En la pantorrilla derecha.	39 40	N. 28 45	5
En la pierna izquierda.	30 10	N. 21 40	4 mayor
En la rodilla izquierda.	32 0	N. 19 50	3
En la pierna izquierda.	31 40	N. 14 45	3 mayor
En el talón izquierdo.	24 30	N. 12 0	3 menor
En la parte más alta del pie izquierdo.	29 40	N. 11 0	3 mayor
26 estrellas, de las que 2 son de 2.ª magnitud, 5 de 3.ª, 16 de 4.ª, 2 de 5.ª, 1 nebulosa.			
No agrupadas alrededor de Perseo.			
La que mira al orto a partir de la rodilla izquierda.	34 10	N. 31 0	5
La que mira al norte a partir de la rodilla derecha.	38 20	N. 31 0	5
La que está delante de la cabeza de Medusa.	18 0	N. 20 40	oscura
De las 3 estrellas, 2 de 5.ª magnitud, 1 oscura.			
EL COCHERO O EL AURIGA			
La más al sur de las dos que hay en la cabeza.	55 50	N. 30 0	4
La que está más al norte.	55 40	N. 30 50	4
La que brilla en el hombro izquierdo, a la que llaman Cabra.	78 20	N. 22 30	1
En el hombro derecho.	56 10	N. 20 0	2
En el codo derecho.	54 30	N. 15 15	4
En el ala derecha.	56 10	N. 13 30	4 mayor
En el codo izquierdo.	45 20	N. 20 40	4 mayor
La del oeste de las cabrillas.	45 30	N. 18 0	4 menor
En el ala izquierda de las cabrillas, la del este.	46 0	N. 18 0	4 mayor
En la pantorrilla izquierda.	53 10	N. 10 10	3 menor
En la pantorrilla derecha y en el extremo del cuerno de Tauro al N.	49 0	N. 5 0	3 mayor
En el tobillo.	49 20	N. 8 30	5
En la nalga.	49 40	N. 12 20	5
Una pequeña en el pie izquierdo.	24 0	N. 10 20	6
14 estrellas, de las cuales 1 de 1.ª magnitud, 1 de 2.ª, 2 de 3.ª, 7 de 4.ª, 2 de 5.ª, 1 de 6.ª.			
OFIUCO O SERPENTERIO			
En la cabeza.	228 10	N. 36 0	3
De las dos que hay en el hombro derecho, la del oeste.	231 20	N. 27 15	4 mayor

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'	*Latitud*	°	'	*Magnitud*
La del este.	232	20	N.	26	45	4
De las dos que hay en el hombro izquierdo, la del oeste.	216	40	N.	33	0	4
La del este.	218	0	N.	31	50	4
En el codo izquierdo.	211	40	N.	34	30	4
De las dos que hay en la mano izquierda, la del oeste.	208	20	N.	17	0	4
La del este.	209	20	N.	12	30	3
En el codo derecho.	220	0	N.	15	0	4
La del oeste en la mano derecha.	205	40	N.	18	40	4 menor
La del este.	207	40	N.	14	20	4
En la rodilla derecha.	224	30	N.	4	30	3
En la tibia.	227	0	N.	2	15	3 mayor
De las cuatro que hay en el pie derecho, la del oeste.	226	20	N.	2	15	4 mayor
La del este.	227	40	N.	1	30	4 mayor
Al este de la 3.ª.	228	20	N.	0	20	4 mayor
La que queda al este.	229	10	N.	0	45	5 mayor
La que toca el talón.	229	30	N.	1	0	5
En la rodilla izquierda.	215	30	N.	11	50	3
De las tres que hay en la pierna izquierda, en línea recta la de N.	215	0	N.	5	20	5 mayor
La del medio.	214	0	N.	3	10	5
La de más al sur.	213	0	N.	1	40	5 mayor
En el talón izquierdo.	215	40	N.	0	40	5
La que toca la zapatilla del pie izquierdo.	214	0	N.	0	45	4
24 estrellas, de las que 5 son de 3.ª magnitud, 13 de 4.ª, 6 de 5ª.						
No agrupadas alrededor de Ofiuco.						
Desde el orto hacia el hombro derecho, la más al norte de las 3.	235	20	N.	28	10	4
La del medio de las 3.	236	0	N.	26	20	4
La del sur de las tres.	233	40	N.	25	0	4
La que aquí sigue a las 3.	237	0	N.	27	0	4
Una, separada de las cuatro, hacia el norte.	238	0	N.	33	0	4
De las no agrupadas, todas son de cuarta magnitud.						
LA SERPIENTE DE OFIUCO						
En el cuadrilátero la que está en la mejilla.	192	10	N.	38	0	4
La que toca la nariz.	201	0	N.	40	0	4
En la sien.	197	40	N.	35	0	3
En la salida del cuello.	195	20	N.	34	15	3
La del medio del cuadrilátero y en la cara.	194	40	N.	37	15	4
A partir de la cabeza hacia el norte.	201	30	N.	42	30	4
En la primera vuelta del cuello.	195	0	N.	29	15	3
La más al norte de las tres que están al este.	198	10	N.	26	30	4
La del medio.	197	40	N.	25	20	3

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° '	*Latitud* ° '	*Magnitud*
La más al sur de las tres.	199 40	N. 24 0	3
La del oeste, de las dos que hay en la izquierda de Serpentario.	202 0	N. 16 30	4
La del este a ésa, en la misma mano.	211 30	N. 16 15	5
La que está después del muslo derecho.	227 0	N. 10 30	4
La del norte, de las dos del este.	230 20	N. 8 30	4 mayor
La del norte.	231 10	N. 10 30	4
Detrás de la mano derecha en la inflexión de la cola.	237 0	N. 20 0	4
La del este en la cola.	242 0	N. 21 10	4 mayor
En la punta de la cola.	251 40	27 0	4

18 estrellas, de las que 5 son de 3.ª magnitud, 12 de 4.ª y 1 de 5.ª.

SAGITA O FLECHA

En la cúspide.	273 30	N. 39 20	4
De las tres que hay en la flecha, la del este.	270 0	N. 39 10	6
La mediana de ellas.	269 10	N. 39 50	5
La del oeste.	268 0	N. 39 0	5
En la muesca de atrás.	266 40	N. 38 45	5

5 estrellas, de las que 1 es de 4.ª magnitud, 3 de 5.ª, 1 de 6.ª.

ÁGUILA

En medio de la cabeza.	270 30	N. 26 50	4
En el cuello.	268 10	N. 27 10	3
La que brilla en las espaldas, a la que llaman Águila.	267 10	N. 29 10	2 mayor
La próxima a ésta, más al norte.	268 0	N. 30 0	3 menor
La del oeste, en el hombro izquierdo.	266 30	N. 31 30	3
La del este.	269 20	N. 31 30	5
La del oeste en el hombro derecho.	263 0	N. 28 40	5
La del este.	264 30	N. 26 40	5 mayor
La que toca el círculo lácteo, en la cola.	255 30	N. 26 30	3

9 estrellas, de las que 1 es de 2.ª magnitud, 4 de 3.ª, 1 de 4.ª, 3 de 5.ª.

No agrupadas alrededor de Águila.

La del oeste, partiendo de la cabeza, al sur.	272 0	N. 21 40	3
La del este.	272 10	N. 29 10	3
Partiendo del hombro derecho hacia Africo.	259 20	N. 25 0	4 mayor
Hacia el sur.	261 30	N. 20 0	3
Más hacia el sur.	263 0	N. 15 30	5
La más al oeste de todas.	254 30	N. 18 10	3

6 no agrupadas, de las que 4 son de 3.ª magnitud, 1 de 4.ª y 1 de 5.ª.

DELFÍN

De las tres que hay en la cola, la del oeste.	281 0	N. 29 10	3 menor
De las otras dos, la del oeste hacia	282 0	N. 29 0	4 menor

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
La más al sur.	282	0	N.	26	40	4
La más al sur del lado al oeste en el romboide.	281	50	N.	32	0	3 menor
La más al norte del mismo lado.	283	30	N.	33	50	3 menor
La más al sur del lado siguiente.	284	40	N.	32	0	3 menor
La más al norte del mismo lado.	286	50	N.	33	10	3 menor
De las tres que hay entre la cola y el rombo, la más al sur.	280	50	N.	34	15	6
De las otras dos, la del oeste hacia el norte.	280	50	N.	31	50	6
La del este.	282	20	N.	31	30	6
10 estrellas, 5 de 3.ª magnitud, 2 de 4.ª, 3 de 6.ª.						
SECCIÓN DEL CABALLO						
De las dos que hay en la cabeza, la del oeste.	289	40	N.	20	30	oscura
La del este.	292	20	N.	20	40	oscura
La del oeste de las dos que hay en la cabeza.	289	40	N.	25	30	oscura
La del este.	291	0	N.	25	0	oscura.
4 estrellas, todas oscuras.						
CABALLO ALADO O PEGASO						
En la abertura de la boca.	298	40	N.	21	30	3 mayor
La que está más al N, de las dos más cercanas en la cabeza.	302	40	N.	16	50	3
La que está más al sur.	301	20	N.	16	0	4
La que está más al sur de las dos que hay en la crin.	314	40	N.	15	0	5
La que está más al norte.	313	50	N.	16	0	5
De las dos que hay en la cerviz, la del oeste.	312	10	N.	18	0	3
La del este.	313	50	N.	19	0	4
En el jarrete izquierdo.	305	40	N.	36	40	4 mayor
En la rodilla izquierda.	311	0	N.	34	15	4 mayor
En el jarrete derecho.	317	0	N.	41	10	4 mayor
La del oeste de las dos contiguas en el pecho.	319	30	N.	29	0	4
La del este.	320	20	N.	29	30	4
La del N de las dos que hay en la rodilla derecha.	322	20	N.	35	0	3
La del sur.	321	50	N.	24	30	5
La que está más al N de las 2 que hay en el cuerpo bajo el ala.	327	50	N.	25	40	4
La que está más al sur.	328	20	N.	25	0	4
En las espaldas y la juntura del ala.	350	0	N.	19	40	2 menor
En el hombro derecho y en la salida de la pata.	325	30	N.	31	0	2 menor
En el extremo del ala.	335	30	N.	12	30	2 menor

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° '	*Latitud* ° '	*Magnitud*
En el ombligo, una que también es común con la cabeza de Andrómeda.	341 10	N. 26 0	2 menor
20 estrellas, 4 de 2.ª magnitud, 4 de 3.ª, 9 de 4.ª, 3 de 5.ª.			
ANDRÓMEDA			
La que está en la espalda.	348 40	N. 24 30	3
En el hombro derecho.	349 40	N. 27 0	4
En el hombro izquierdo.	347 40	N. 23 0	4
La más al sur de las tres que hay en el brazo derecho.	347 0	N. 32 0	4
La más al norte.	348 0	N. 33 30	4
La del medio de las tres.	348 20	N. 32 20	5
La más al S de las 3 que hay en la parte mayor de la mano derecha.	343 0	N. 41 0	4
La del medio de ellas.	344 0	N. 42 0	4
La más al norte.	345 30	N. 44 0	4
En el brazo izquierdo.	347 30	N. 17 30	4
En el codo izquierdo.	349 0	N. 15 50	3
La del sur de las tres que hay en el cinturón.	357 10	N. 25 20	3
La mediana.	355 10	N. 30 0	3
La del norte de las tres.	355 20	N. 32 30	3
En el pie izquierdo.	10 10	N. 23 0	3
En el pie derecho.	10 30	N. 37 20	4 mayor
La más al sur de ellas.	8 30	N. 35 0	4 mayor
La que está al norte, de las dos que hay bajo la cara.	5 40	N. 29 20	4
La que está al sur.	5 20	N. 28 0	4
En la rodilla derecha.	5 30	N. 35 30	5
La más al norte de las dos que hay en la túnica.	6 0	N. 34 30	5
La más al sur.	7 30	N. 32 30	5
La que sale de la mano derecha, no agrupada.	5 0	N. 44 0	3
23 estrellas, 7 de 3.ª, 12 de 4.ª, 4 de 5.ª.			
TRIÁNGULO			
En el vértice del triángulo.	4 20	N. 16 30	3
De las 3 que hay en la base del triángulo, la del oeste.	9 20	N. 20 40	3
La del medio.	9 30	N. 20 20	4
De las tres, la de este.	10 10	N. 19 0	3
4 estrellas, 3 de 3.ª magnitud, 1 de 4.ª.			

Así pues, en esta región septentrional, hay en total 360 estrellas: 3 son de 1.ª magnitud, 18 de 2.ª, 81 de 3.ª, 177 de 4.ª, 58 de 5.ª, 13 de 6.ª, 1 nebulosa y 9 oscuras.

De las que están en medio y alrededor del círculo del zodíaco

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° '		*Latitud* ° '		*Magnitud*
ARIES					
De las dos que hay en el cuerno la del oeste, que es la 1.ª de todas.	0	0 N.	7	20	3 menor
La del este en los cuernos.	1	0 N.	8	20	3
De las dos que hay en la abertura de la boca, la del norte.	4	20 N.	7	40	5
La que está más al sur.	4	50 N.	6	0	5
En la cerviz.	9	50 N.	5	30	5
En la nariz.	10	50 N.	6	0	6
La que está en el principio de la cola.	14	40 N.	4	50	5
De las tres que hay en la cola, la del oeste.	17	10 N.	1	40	4
La del medio.	18	40 N.	2	30	4
La que está al este.	20	20 N.	1	50	4
En el muslo.	13	0 N.	1	10	5
En la corva.	11	20 N.	1	30	5
En el extremo del pie posterior.	8	10 N.	5	15	4 mayor
13 estrellas, de las que 2 son de 3.ª magnitud, 4 de 4.ª, 6 de 5.ª, 1 de 6.ª.					
No agrupadas alrededor de Aries.					
La que brilla sobre la cabeza.	3	50 N.	10	0	3 mayor
La más al sur sobre la espalda.	15	0 N.	10	10	4
La del norte de las otras tres pequeñas.	14	40 N.	12	40	5
La mediana.	13	0 N.	10	40	5
La del sur.	12	30 N.	10	40	5
5 estrellas, 1 de 3.ª magnitud, 1 de 4.ª, 5 de 5.ª.					
TAURO					
La más al norte de las cuatro que hay en el corte.	19	40 sur	6	0	4
La después de ésa.	19	20 sur	7	15	4
La tercera.	18	0 sur	8	30	4
La cuarta, la más al sur.	17	50 sur	9	15	4
En la articulación derecha.	23	0 sur	9	30	5
En el pecho.	27	0 sur	8	0	3
En la rodilla derecha.	30	0 sur	12	40	4
En el corvejón derecho.	26	20 sur	14	50	4
En la rodilla izquierda.	35	30 sur	10	0	4
En el corvejón izquierdo.	36	20 sur	13	30	4
De las cinco que hay en la cara, a las que llaman Succulas, la que está en la nariz.	32	0 sur	5	45	3 menor
Entre ésta y el ojo que está al norte.	33	40 sur	4	15	3 menor
Entre la misma y el ojo que está al sur.	34	10 sur	0	50	3 menor
La que brilla en el mismo ojo, llamada por los romanos Palilicium.	36	0 sur	5	10	1

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° '		*Latitud* ° '		*Magnitud*
En el ojo del norte.	35	10 sur	3	0	3 menor
La que está al sur entre el comienzo del cuerno y la oreja.	40	30 sur	4	0	4
La más al sur de las dos que hay en el mismo cuerno.	43	40 sur	5	0	4
La que está más al norte.	43	20 sur	3	30	5
En el extremo del mismo.	50	30 sur	2	30	3
La del norte en el comienzo del cuerno.	49	0 sur	4	0	4
En el extremo del mismo, y que está en el pie derecho de Cochero.	49	0 N.	5	0	3
De las dos que hay en la oreja del norte, la que está al norte.	35	20 N.	4	30	5
De ésas, la más al sur.	35	0 N.	4	0	5
De las dos pequeñas que hay en la cerviz, la del oeste.	30	20 N.	0	40	5
La del este.	32	20 N.	1	0	6
La más al sur de las del oeste en el cuello del cuadrilátero.	31	20 N.	5	0	5
La más al norte del mismo lado.	32	10 N.	7	10	5
La más al sur del lado este.	35	20 N.	3	0	5
La más al norte de ese mismo lado.	35	0 N.	5	0	5
El término norte del lado al oeste de las Pléyades.	25	30 N.	4	30	5
Del mismo lado el término sur.	25	50 N.	4	40	5
El término más extremo del este de las Pléyades.	27	0 N.	5	20	5
La más pequeña de las Pléyades y cortadas por los extremos.	26	0 N.	3	0	5

32 estrellas, y además de la que está en el extremo del cuerno del norte, 1 es de 1.ª magnitud, 6 de 3.ª, 11 de 4.ª, 13 de 5.ª, 1 de 6.ª.

Las no agrupadas que están alrededor de Tauro.

Entre el pie y la articulación de abajo.	18	20 sur	17	30	4
De las 3 que hay alrededor del cuerno del N, la del oeste.	43	20 sur	2	0	5
La del medio de las tres.	47	20 sur	1	45	5
La del este.	49	20 sur	2	0	5
De las 2 que hay en el extremo del mismo cuerno, la del norte.	52	20 sur	6	20	5
La del sur.	52	20 sur	7	40	5
De las 5 que hay en el cuerno del norte, la que va delante.	50	20 N.	2	40	5
La otra del este.	52	20 N.	1	0	5
La tercera del este.	54	20 N.	1	20	5
De las dos que quedan la que está al norte.	55	40 N.	3	20	5
La que está al sur.	56	40 N.	1	15	5

De las 11 estrellas no agrupadas, 1 de 4.ª magnitud, 10 de 5.ª.

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° '		*Latitud* ° '		*Magnitud*
GÉMINIS					
En la cabeza al oeste de Géminis, Castor.	76 40	N.	9 30		2
Una roja en la cabeza al este de Géminis, Polux.	79 50	N.	6 15		2
En el codo izquierdo del Gemelo del oeste.	70 0	N.	10 0		4
En el mismo brazo.	72 0	N.	7 20		4
En la espalda del mismo Gemelo.	75 20	N.	5 30		4
En el hombro derecho del mismo.	77 20	N.	4 50		4
En el hombro izquierdo del Gemelo del este.	80 0	N.	2 40		4
En el lado derecho del Gemelo del oeste.	75 0	N.	2 40		5
En el lado izquierdo del Gemelo del este.	76 30	N.	3 0		5
En la rodilla izquierda del Gemelo del oeste.	66 30	N.	1 30		3
En la rodilla izquierda del Gemelo del este.	71 35	sur	2 30		3
En la ingle izquierda del mismo.	75 0	sur	0 30		3
En la cavidad derecha del mismo.	74 40	sur	0 40		3
La del oeste en el pie del Gemelo del oeste.	60 0	sur	1 30		4 mayor
La del este en el mismo pie.	61 30	sur	1 15		4
En el extremo del pie del Gemelo del oeste.	63 30	sur	3 30		4
En la parte alta del pie del este.	65 20	sur	7 30		3
En la parte baja del mismo pie.	68 0	sur	10 30		4
18 estrellas, de las que 2 son de 2.ª magnitud, 5 de 3.ª, 9 de 4.ª, 2 de 5.ª.					
Estrellas no agrupadas alrededor de Géminis.					
Una al oeste a partir de la parte alta del pie del Gemelo del oeste.	57 30	sur	0 40		4
Una que brilla al oeste de la rodilla del mismo.	59 50	N.	5 50		4 mayor
Una del oeste de la rodilla izquierda del Gemelo del este.	68 30	sur	2 15		5
De las tres del este, de la mano derecha del Gemelo del este, la del norte.	81 40	sur	1 20		5
La del medio.	79 40	sur	3 20		5
De las dos que hay alrededor del brazo derecho, la del sur.	79 20	sur	4 30		5
Una lúcida que va detrás de las tres.	84 0	sur	2 40		4
7 estrellas no agrupadas, 3 de magnitud 4.ª y 4 de 5.ª.					
CÁNCER					
Una nebulosa en medio del pecho que se llama Praesepe.	93 40	N.	0 40		nebulosa
De las dos al oeste del cuadrilátero, la más al norte.	91 0	N.	1 15		4 menor
La más al sur.	91 20	sur	1 10		4 menor
De las dos del este, a las que se llama Asnos, la más al norte.	93 40	N.	2 40		4 mayor
La Asinus al sur.	94 40	sur	0 10		4 mayor
En la pinza o brazo del sur.	99 50	sur	5 30		4

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° '		*Latitud* ° '		*Magnitud*
En el brazo del norte.	91	40	N.	11	50	4
En el extremo del pie del norte.	86	0	N.	1	0	5
En el extremo del pie del sur.	90	30	sur	7	30	4 mayor
De las 9 estrellas, 7 de 4.ª magnitud, 1 de 5.ª, 1 nebulosa.						
No agrupadas alrededor de Cáncer.						
Cheles, «Pinza» al sur sobre el codo.	103	0	sur	2	40	4 menor
Cheles, «Pinza» al este desde el extremo del mismo.	105	0	sur	5	40	4 menor
La del oeste de las dos sobre una nubecilla.	97	20	N.	4	50	5
La del este de la anterior.	100	20	N.	7	15	5
De las 4 no agrupadas, 2 de 4.ª, 4 de 5.ª.						
LEO						
En las narices.	101	40	N.	10	0	4
En la boca.	104	30	N.	7	30	4
De las dos que hay en la cabeza, la del norte.	107	40	N.	12	0	3
La del sur.	107	30	N.	9	30	3 mayor
De las tres que hay en la cerviz, la del norte.	113	30	N.	11	0	3
La del medio.	115	30	N.	8	30	2
De las tres, la del sur.	114	0	N.	4	30	3
En el corazón, la que llaman Basilisco o Regulo.	115	50	N.	0	10	1
De las dos que hay en el pecho, la del sur.	116	50	sur	1	50	4
La que está un poco al oeste de la que está en el corazón.	113	20	sur	0	15	5
En la rodilla derecha del oeste.	110	40	sur	0	0	5
En la muñeca derecha.	117	30	sur	3	40	6
En la rodilla izquierda anterior.	122	30	sur	4	10	4
En la muñeca izquierda.	115	50	sur	4	15	4
En la axila izquierda.	112	30	sur	0	10	4
De las tres que hay en el vientre, la del oeste.	120	20	N.	4	0	6
La más al norte de las dos del este.	126	20	N.	5	20	6
La que está más al sur.	125	40	N.	2	20	6
De las dos que hay en el lomo, la del oeste.	124	40	N.	12	15	5
La del este.	127	30	N.	13	40	2
De las dos que hay en la grupa, la más al norte.	127	40	N.	11	30	5
La más al sur.	129	40	N.	9	40	3
En el muslo posterior.	133	40	N.	5	50	3
En la cavidad.	135	0	N.	1	15	4
En el codo posterior.	135	0	sur	0	50	4
En el pie posterior.	134	0	sur	3	0	5
En el extremo de la cola.	137	50	N.	11	50	1 menor
De las 27 estrellas, 2 de la l.ª magnitud, 2 de 2.ª, 6 de 3.ª, 8 de 4.ª, 5 de 5.ª, 4 de 6.ª.						

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
No agrupadas alrededor de Leo.						
De las dos que hay sobre la espalda, la del oeste.	119	20	N.	13	20	5
La del este.	121	30	N.	15	30	5
De las tres que hay bajo el vientre, la del norte.	129	50	N.	1	10	4 menor
La del medio.	130	30	sur	0	30	5
La más al sur de las tres.	132	20	sur	2	40	5
Entre los extremos de Leo y de Osa, de involución nebulosa, una cola que llaman cabellera de Berenice, que está más al norte.	138	10	N.	30	0	luminosa
De las dos del sur, la que está al oeste.	133	50	N.	25	0	oscura
La del este en figura de hoja de hiedra.	141	50	N.	25	30	oscura
De las 8 no agrupadas, 1 de 4.ª magnitud, 4 de 5.ª, 1 luminosa, 2 oscuras.						
VIRGO						
De las dos que hay en lo alto de la cabeza, la del oeste más al sur.	139	40	N.	4	15	5
La del este más al norte.	140	20	N.	5	40	5
De las dos que hay en la cara, la del norte.	144	0	N.	8	0	5
La del sur.	143	30	N.	5	30	5
En el extremo del ala izquierda y al sur.	142	20	N.	6	0	3
De las 4 que hay en el ala izquierda, la del oeste.	151	35	N.	1	10	3
La otra del este.	156	30	N.	2	50	3
La tercera.	160	30	N.	2	50	5
La del este, la última de las cuatro.	164	20	N.	1	40	4
En el costado derecho, bajo el cinturón.	157	40	N.	8	30	3
La del oeste, de las 3 que hay en el ala derecha del norte.	151	30	N.	13	50	5
De las otras dos, la del sur.	153	30	N.	11	40	6
De ellas, la del norte, la llamada Vindemiator.	155	30	N.	15	10	3 mayor
En la mano izquierda la que se llama Spica.	170	0	N.	2	0	1
Bajo el cinturón y en la nalga derecha.	168	10	N.	8	40	3
En el muslo izquierdo, de las del oeste del cuadrilátero, la más al N.	169	40	N.	2	20	5
La más al sur.	170	20	N.	0	10	6
De las dos del este, la del norte.	173	20	N.	1	30	4
La del sur.	171	20	N.	0	20	5
En la rodilla izquierda.	175	0	N.	1	30	5
En el final del muslo derecho.	171	20	N.	8	30	5
En la túnica, la que está en el medio.	180	0	N.	7	30	4
La que está al sur.	180	40	N.	2	40	4
La que está al norte.	181	40	N.	11	40	4
En el pie izquierdo, la que está al sur.	183	20	N.	0	30	4
En el pie derecho, la que está al norte.	186	0	N.	9	50	3
De las 26 estrellas, 1 de 1.ª, 7 de 3.ª, 6 de 4.ª, 10 de 5.ª, 2 de 6.ª.						

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° ′		*Latitud* ° ′		*Magnitud*
No agrupadas alrededor de Virgo.					
En el brazo izquierdo, la del oeste de las tres.	158	0	sur	3 30	5
La del medio.	162	20	sur	3 30	5
La del este.	165	35	sur	3 20	5
De las 3 que hay bajo Spica en línea recta, la del oeste.	170	30	sur	7 20	6
La del medio, que es doble.	171	30	sur	8 20	5
La del este de las tres.	173	20	sur	7 50	6
De las 6.no agrupadas, 4 de 5.ª, 2 de 6.ª.					
LIBRA					
De las dos que hay en la pinza extrema al sur, la que brilla.	191	20	N.	0 40	2 mayor
La más oscura, al norte.	190	20	N.	2 30	5
De las dos que hay en la pinza extrema al norte, la que brilla.	195	30	N.	8 30	2
La más oscura al oeste de ésta.	191	0	N.	8 30	5
En medio de la pinza del sur.	197	20	N.	1 40	4
En la misma, la del oeste.	194	40	N.	1 15	4
En la pinza que está en el medio, al norte.	200	50	N.	3 45	4
En la misma, la del este.	206	20	N.	4 30	4
8 estrellas, de las que 2 son de 2.ª magnitud, 4 de 4.ª, 2 de 5.ª.					
No agrupadas alrededor de Cheles, «Libra».					
De las 3 que hay hacia el norte desde Cheles, la del oeste.	199	30	N.	9 0	5
De las dos del este, la del sur.	207	0	N.	6 40	4
La del norte, de ellas.	207	40	N.	9 15	4
De las tres que hay entre las Cheles, la del este.	205	50	N.	5 30	6
La del norte, de las dos del oeste.	203	40	N.	2 0	4
La del sur.	204	30	sur	1 30	5
De las tres que hay bajo la pinza del sur, la del oeste.	196	20	sur	7 30	3
De las otras dos del este, la del norte.	204	30	sur	8 10	4
La del sur.	205	20	sur	9 40	4
De las 9 no agrupadas, 1 de 3.ª magnitud, 5 de 4.ª, 2 de 5.ª, 1 de 6.ª.					
ESCORPIÓN					
De las tres que brillan en la frente, la del norte.	209	40	N.	1 20	3 mayor
La del medio.	209	0	sur	1 40	3
La del sur de las tres.	209	0	sur	5 0	3
La que está más al sur y en el pie.	209	20	sur	7 50	3

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
De las dos que están juntas, la que brilla al norte.	210	20	N.	1	40	4
La del sur.	210	40	N.	0	30	4
De las tres que brillan en el cuerpo, la del oeste.	214	0	sur	3	45	3
La que brilla en el medio, a la que llaman Amares.	216	0	sur	4	0	2 mayor
De las tres, la del este.	217	50	sur	5	30	3
De las dos que hay en la última concavidad la del oeste.	212	40	sur	6	10	5
La del este.	213	50	sur	6	40	5
En el primer segmento del cuerpo.	221	50	sur	11	0	3
En el segundo segmento.	222	10	sur	15	0	4
En el tercero, la doble del norte.	223	20	sur	18	40	4
La doble del sur.	223	30	sur	18	0	3
En el cuarto segmento.	226	30	sur	19	30	3
En el quinto segmento.	231	30	sur	18	50	3
En el sexto segmento.	233	50	sur	16	40	3
En el séptimo, que está próximo al aguijón.	232	20	sur	15	10	3
En el mismo aguijón, de las dos, la del este.	230	50	sur	13	20	3
La del oeste.	230	20	sur	13	30	4
21 estrellas, de las que 1 es de 2.ª magnitud, 13 de 3.ª, 5 de 4.ª, 2 de 5.ª.						
Agrupadas alrededor de Escorpión.						
Una nebulosa al este del aguijón.	234	30	sur	13	15	nebulosa
De las dos que van desde el aguijón hacia el norte, la del oeste.	228	50	sur	6	10	5
La del este.	232	50	sur	4	10	5
De las 3 no agrupadas, 2 de 5.ª magnitud, 1 nebulosa.						
SAGITARIO						
En la cúspide de la flecha.	237	50	sur	6	30	3
En el mango de la mano izquierda.	241	0	sur	6	30	3
En la parte del sur del arco.	241	20	sur	10	50	3
De las dos que hay en la del norte, la más al sur.	242	20	sur	1	30	3
Más al norte, en la extremidad del arco.	240	0	N.	2	50	4
En el hombro izquierdo.	248	40	sur	3	10	3
La que antecede a ésta en el dardo.	246	20	sur	3	50	4
Una doble nebulosa en el ojo.	248	30	N.	0	45	nebulosa
De las tres que hay en la cabeza, la del oeste.	249	0	N.	2	10	4
La del medio.	251	0	N.	1	30	4 mayor
La del este.	252	30	N.	2	0	4
En el contacto norte de las tres, la más al sur.	254	40	N.	2	50	4
La del medio.	255	40	N.	4	30	4

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° '	*Latitud* ° '	*Magnitud*
De las tres, la del norte.	256 10	N. 6 30	4
Una oscura que sigue a las tres.	259 0	N. 5 30	6
De las dos que hay en el contacto sur, la del norte.	262 50	N. 5 50	5
La del sur.	261 0	N. 2 0	6
En el hombro derecho.	255 40	sur 1 50	5
En el codo derecho.	258 10	sur 2 50	5
En la espalda.	253 20	sur 2 30	5
En la articulación.	251 0	sur 4 30	4 mayor
Bajo la axila.	249 0	sur 6 45	3
En el primer jarrete izquierdo.	251 0	sur 23 0	2
En la rodilla de la primera pierna.	250 20	sur 18 0	2
En el primer jarrete derecho.	240 0	sur 13 0	3
En la espalda derecha.	260 40	sur 13 30	3
En la rodilla derecha.	260 0	sur 20 10	3
En la salida de la cola, de las cuatro del lado del norte, la del oeste.	261 10	sur 4 50	5
Del mismo lado, la del este.	261 10	sur 4 50	5
Del mismo lado del sur, la del oeste.	261 50	sur 5 50	5
De ese lado, la del este.	263 0	sur 6 30	5

31 estrellas, de las que 2 son de 2.ª magnitud, 9 de 3.ª, 9 de 4.ª, 8 de 5.ª, 2 de 6.ª. 1 nebulosa.

CAPRICORNIO

De las tres que hay en el cuerno del oeste, la del norte.	270 40	N.	7	30	3
La del pecho.	271 0	N.	6	40	6
De las tres, la del sur.	270 40	N.	5	0	3
En el extremo del cuerno del este.	272 20	N.	8	0	6
De las tres que hay en la boca, la del sur.	272 20	N.	0	45	6
De las otras dos, la del oeste.	272 0	N.	1	45	6
La del este.	272 10	N.	1	30	6
Bajo el ojo derecho.	270 30	N.	0	40	5
De las dos que hay en la cerviz, la del norte.	275 0	N.	4	50	6
La del sur.	275 10	sur	0	50	5
En la rodilla derecha.	274 10	sur	6	30	4
En la rodilla izquierda.	275 0	sur	8	40	4
En el hombro izquierdo.	280 0	sur	7	40	4
Bajo el vientre, de las dos contiguas, la del oeste.	283 30	sur	6	50	4
La del este.	283 40	sur	6	0	5
De las tres que hay en la mitad del cuerpo, la del este.	282 0	sur	4	15	5
De las dos del oeste, la del sur.	280 0	sur	4	0	5
De ellas, la del norte.	280 0	sur	2	50	5
De las dos que hay en la espalda, la del oeste.	280 0	sur	0	0	4
La del este.	284 20	sur	0	50	4
De las dos que hay en la espalda del sur, la del oeste.	40	sur	4	45	4

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
La del este.	288	20	sur	4	30	4
De las dos que hay en la salida de la cola, la del oeste.	288	10	sur	2	10	3
La del este.	289	40	sur	2	0	3
De las 4 que hay en la parte norte de la cola, la del oeste.	290	10	sur	2	20	4
De las otras tres, la del sur.	292	0	sur	5	0	5
La del medio.	291	0	sur	2	50	5
La del norte que está en el extremo de la cola.	292	0	N.	4	20	5

28 estrellas, de las que 4 son de 3.ª magnitud, 9 de 4.ª, 9 de 5.ª, 6 de 6.ª.

ACUARIO

En la cabeza.	293	40	N.	15	45	5
Una que es más clara.	299	44	N.	11	0	3
Una que es más oscura.	298	30	N.	9	40	5
En el hombro izquierdo.	290	0	N.	8	50	3
Bajo la axila.	290	40	N.	6	15	5
De las 3 que hay bajo la mano izquierda en el vestido, la del este.	280	0	N.	5	30	3
La del medio.	279	30	N.	8	0	4
La del oeste de las tres.	278	0	N.	8	30	3
En el codo derecho.	302	50	N.	8	45	3
En la mano derecha, la que está al norte.	303	0	N.	10	45	3
De las dos del sur, la del oeste.	305	20	N.	9	0	3
La del este.	306	40	N.	8	30	3
En el muslo derecho, de las dos cercanas, la del oeste.	299	30	N.	3	0	4
La del este.	300	20	N.	2	10	5
En la nalga derecha.	302	0	sur	0	50	4
De las dos que hay en la nalga izquierda, la del sur.	295	0	sur	1	40	4
La más al norte.	295	30	N.	4	0	6
En la tibia derecha, la del sur.	305	0	sur	7	30	3
La del norte.	304	40	sur	5	0	4
En la pierna izquierda.	301	0	sur	5	40	5
En la tibia izquierda, de las dos, la del sur.	300	40	sur	10	0	5
La que hay al norte, bajo la rodilla.	302	10	sur	9	0	5
En la salida del agua, de la mano primera.	303	20	N.	2	0	4
La del este más al sur.	308	10	N.	0	10	4
La del este en la primera curva del agua.	311	0	sur	1	10	4
La del este a ésta.	313	20	sur	0	30	4
En la otra curva del sur.	313	50	sur	1	40	4
De las dos al este, la del norte.	312	30	sur	3	30	4
La del sur.	312	50	sur	4	10	4
Apartada hacia el sur.	314	10	sur	8	15	5
Después de ésta, de las dos que hay juntas, la del oeste.	316	0	sur	11	0	5
La del este.	316	30	sur	10	50	5
De las dos que hay en la 3.ª curva del agua, la del norte.	315	0	sur	14	0	5

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° '		*Latitud* ° '		*Magnitud*
La del medio.	316 0	sur	14 45		5
De las tres, la del este.	316 30	sur	15 40		5
De las tres al este, con similar formación, la del norte.	310 20	sur	14 10		4
La del medio.	310 50	sur	15 0		4
De las tres, la del sur.	311 40	sur	15 45		4
De las tres que hay en la última inflexión, la del oeste.	305 10	sur	14 50		4
De las dos al este, la del sur.	306 0	sur	15 20		4
La del norte.	306 30	sur	14 0		4
La última en el agua y en la boca del pez del sur.	300 20	sur	23 0		1
42 estrellas, 1 de l.ª magnitud, 9 de 3.ª, 18 de 4.ª, 13 de 5.ª, 1 de 6.ª.					
No agrupadas alrededor de Acuario.					
De las dos al este del curso del agua, la del oeste.	320 0	sur	15 30		4
De las otras dos, la del norte.	323 0	sur	14 20		4
De ellas, la del sur.	322 20	sur	18 15		4
3 estrellas mayores que la 4.ª magnitud.					
PISCIS					
En la boca del pez que está al oeste.	315 0	N.	19 15		4
De las dos que hay en la cabeza, la del sur.	317 30	N.	7 30		4 mayor
La del norte.	321 30	N.	9 30		4
De las dos que hay en la espalda, la del oeste.	319 20	N.	9 20		4
La del este.	324 0	N.	7 30		4
En la espalda, la del oeste.	319 20	N.	4 30		4
La del este.	323 0	N.	2 30		4
En la cola del mismo pez.	329 20	N.	6 20		4
En su red, la primera desde la cola.	334 20	N.	5 45		6
La del este.	336 20	N.	2 45		6
De las tres brillantes que hay detrás de éstas, la del oeste.	340 30	N.	2 15		4
La del medio.	343 50	N.	1 10		4
La del este.	346 20	sur	1 20		4
De las dos pequeñas que hay en la curva, la del norte.	345 40	sur	2 0		6
La del sur.	346 20	sur	5 0		6
De las 3 que hay al oeste de la inflexión, la del oeste.	350 20	sur	2 20		4
La del medio.	352 0	sur	4 40		4
La del este.	354 0	sur	7 45		4
En la unión de ambas redes.	356 0	sur	8 30		3
En la red del norte, desde la unión, la del oeste.	354 0	sur	4 20		4
Después de ésta, de las tres, la del sur.	353 30	N.	1 30		5

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'	*Latitud* °	'	*Magnitud*
La del medio.	353	40	N.	5	20	3
De las tres, la del norte, y última en la red.	353	50	N.	9	0	4
AL ESTE DE PISCIS						
De las dos que hay en la boca, la del norte.	355	20	N.	21	45	5
La del sur.	355	0	N.	21	30	5
De las tres pequeñas que hay en la cabeza, la del este.	352	0	N.	20	0	6
La del medio.	351	0	N.	19	50	6
De las tres, la del oeste.	350	20	N.	23	0	6
En la espina del sur, de las tres, la del oeste, cerca del codo izqdo. de Andrómeda.	349	0	N.	14	20	4
La del medio.	349	40	N.	13	0	4
De las tres, la del este.	351	0	N.	12	0	4
De las dos que hay en el vientre, la que está al norte.	355	30	N.	17	0	4
La que está más al sur.	352	40	N.	15	20	4
En la espina al este, cerca de la cola.	353	20	N.	11	45	4
34 estrellas, 2 de 3.ª magnitud, 22 de 4.ª, 3 de 5.ª, 7 de 6.ª.						
Estrellas no agrupadas que hay alrededor de Piscis.						
En el cuadrilátero, bajo el pez que está delante, al oeste en el lado del norte.	324	30	sur	2	40	4
La del este.	325	35	sur	2	30	4
La del oeste en el lado del sur.	324	0	sur	5	50	4
La del este.	325	40	sur	5	30	4
4 no agrupadas de 4.ª magnitud.						

Por tanto, hay 346 estrellas en el zodíaco. Así, son: 5 de 1.ª magnitud, 9 de 2.ª, 64 de 3.ª, 133 de 4.ª, 105 de 5.ª, 27 de 6.ª, 3 nebulosas, y además de éstas, Coma, la que más arriba hemos dicho que se llamaba, según el matemático Conón, «Cabellera de Berenice».

Las que están en la región austral

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° '	*Latitud* ° '	*Magnitud*
BALLENA			
En el extremo de la nariz.	11 0	N. 7 45	4
De las tres de la mandíbula, la del este.	11 0	N. 11 20	3
La del medio, en medio de la cara.	6 0	N. 11 30	3
La del oeste, de las tres de la mejilla.	3 50	N. 14 0	3
En el ojo.	4 0	N. 8 10	4
En la barba, la del norte.	5 30	N. 6 20	4
La del oeste de ella.	1 0	N. 4 10	4
De las cuatro del oeste en el pecho, la del norte.	355 20	N. 24 30	4
La del sur.	356 40	N. 28 0	4
De las del este, la del norte.	0 0	N. 25 10	4
La del sur.	0 20	N. 27 30	3
De las tres que hay en el cuerpo, la del medio.	345 20	N. 25 20	3
La del sur.	346 20	N. 30 30	4
De las tres, la del norte.	348 20	N. 20 0	3
De las dos que hay junto a la cola, la del este.	343 0	N. 15 20	3
La del oeste.	338 20	N. 15 40	3
Del cuadrilátero de las del este en la cola, la del norte.	335 0	N. 11 40	5
La del sur.	334 0	N. 13 40	5
De las otras del oeste, la del norte.	332 40	N. 13 0	5
La del sur.	332 20	N. 14 0	5
En la extremidad septentrional de la cola.	327 40	N. 9 30	3
En la extremidad austral de la cola.	329 0	N. 20 20	3
22 estrellas, de las que 10 son de 3.ª magnitud, 8 de 4.ª, 4 de 5.ª.			
ORIÓN			
Una nebulosa en la cabeza.	50 20	N. 16 30	nebulosa
Una brillante y rojiza en el hombro derecho.	55 20	N. 17 0	1
En el hombro izquierdo.	43 40	N. 17 30	2 mayor
La del este a ésta.	48 20	N. 18 0	4 menor
En el codo derecho.	57 40	N. 14 30	4
En el antebrazo derecho.	59 40	N. 11 50	6
De las 4 del sur que hay en la mano derecha, la del este.	59 50	N. 10 40	4
La del oeste.	59 20	N. 9 45	4
Del lado del norte, la del este.	60 40	N. 8 15	6
Del mismo lado la del oeste.	59 0	N. 8 15	6
De las dos de la túnica, la del oeste.	55 0	N. 3 45	5
La del este.	57 40	N. 3 15	5
De las 4 que hay en línea recta en la espalda, la del este.	50 50	N. 19 40	4
La del oeste en segundo lugar.	49 40	N. 20 0	6
La del oeste en tercer lugar.	48 40	N. 20 20	6

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
La del oeste en cuarto lugar.	47	30	sur	20	30	5
En el escudo, la más al norte de las nueve.	43	50	sur	8	0	4
La segunda.	42	40	sur	8	10	4
La tercera.	41	20	sur	10	15	4
La cuarta.	39	40	sur	12	50	4
La quinta.	38	30	sur	14	15	4
La sexta.	37	50	sur	15	50	3
La séptima.	38	10	sur	17	10	3
La octava.	38	40	sur	20	20	3
De ellas, la del oeste, la más al sur.	39	40	sur	21	30	3
De las tres que brillan en el cinturón, la del oeste.	48	40	sur	24	10	2
La del medio.	50	40	sur	24	50	2
De las tres, la del este en línea recta.	52	40	sur	25	30	2
En la empuñadura de la espada.	47	10	sur	25	50	3
De las tres de la espada, la del norte.	50	10	sur	28	40	4
La del medio.	50	0	sur	29	30	3
La del sur.	50	20	sur	29	50	3 menor
De las dos del extremo de la espada, la del este.	51	0	sur	30	30	4
La del oeste.	49	30	sur	30	50	4
Una clara y común con Fluvio en el pie izquierdo.	42	30	sur	31	30	1
En la tibia izquierda.	44	20	sur	30	15	4 mayor
En el talón.	46	40	sur	31	10	4
En la rodilla derecha.	53	30	sur	33	30	3

38 estrellas, 2 de 1.ª magnitud, 4 de 2.ª, 8 de 3.ª, 15 de 4.ª, 3 de 5.ª, 5 de 6.ª y 1 nebulosa.

FLUVIO

Una que hay en el principio de Fluvio, partiendo del pie izq. de Orion.	41	40	sur	31	50	4
En la curva, junto a la pierna de Orion, la más al norte.	42	10	sur	28	15	4
De las dos que hay al este de ésta, la del este.	41	20	sur	29	50	4
La del oeste.	38	0	sur	28	15	4
La del este de esas dos.	36	30	sur	25	15	4
La del oeste.	33	30	sur	25	20	4
De las tres que hay al este de éstas, la del este.	29	40	sur	26	0	4
La del medio.	29	0	sur	27	0	4
La del oeste de las tres.	26	0	sur	27	50	4
De las cuatro que hay al este de un intervalo, la del este.	20	20	sur	32	50	3
La del oeste a ésta.	18	0	sur	31	0	4
La del oeste en tercer lugar.	17	30	sur	28	50	3
La cuarta, la del oeste a todas.	15	30	sur	28	0	3
Otra vez, del mismo modo, la del este de las cuatro.	10	30	sur	25	30	3
La del oeste de ésta.	8	10	sur	23	50	4

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° '	*Latitud* ° '	*Magnitud*
Más al oeste de ésta.	5 30	sur 23 10	3
La cuarta, la del oeste a ésas.	3 50	sur 23 15	4
Una que en la vuelta de Fluvio, toca el pecho de Ballena.	358 30	sur 32 10	4
Al este de ésta.	359 10	sur 34 50	4
De las tres al este, la del oeste.	2 10	sur 38 30	4
La del medio.	7 10	sur 38 10	4
De las tres, la del este.	10 50	sur 39 0	5
De las 2 al oeste en el cuadrilátero, la del norte.	14 40	sur 41 30	4
La del sur.	14 50	sur 42 30	4
Del lado al este, la del oeste.	15 30	sur 43 20	4
La del este, de esas cuatro.	18 0	sur 43 20	4
De las dos unidas junto al orto, la del norte.	27 30	sur 50 20	4
La más al sur.	28 20	sur 51 45	4
De las dos que hay en el giro, la del este.	21 30	sur 53 50	4
La del oeste.	19 10	sur 53 10	4
De las 3 que hay en la distancia restante, la del este.	11 10	sur 53 0	4
La del medio.	8 10	sur 53 30	4
La del oeste.	5 10	sur 52 0	4
Una que brilla en el extremo de Flumen.	353 30	sur 53 30	1

34 estrellas, 1 de 1.ª magnitud, 5 de 3.ª, 27 de 4.ª, 1 de 5.ª.

LIEBRE

De las del oeste del cuadrilátero en las orejas, la del norte.	43 0	sur 35 0	5
La del sur.	43 10	sur 36 30	5
La del norte del lado del este.	44 40	sur 35 30	5
La del sur.	44 40	sur 36 40	5
En la barba.	42 30	sur 39 40	4 mayor
En el extremo del pie izquierdo del oeste.	39 30	sur 45 15	4 mayor
En medio del cuerpo.	48 50	sur 41 30	3
Bajo el vientre.	48 10	sur 44 20	3
De las 2 que hay en los pies posteriores, la del norte.	54 20	sur 44 0	4
La que está más al sur.	52 20	sur 45 50	4
En el lomo.	53 20	sur 38 20	4
En el extremo de la cola.	56 0	sur 38 10	4

12 estrellas, 2 de 3.ª magnitud, 6 de 4.ª, 4 de 5.ª.

PERRO (CAN)

En la cara, una brillantísima llamada can.	71 0	sur 39 10	1 máxima
En las orejas.	73 0	sur 35 0	4
En la cabeza.	74 40	sur 36 30	5
De las dos que hay en el cuello, la del norte.	76 40	sur 37 45	4
La del sur.	78 40	sur 40 0	4
En el pecho.	73 50	sur 42 30	5

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
De las dos de la rodilla derecha, la del norte.	69	30	sur	41	15	5
La del sur.	69	20	sur	42	30	5
En el extremo del pie del oeste.	64	20	sur	41	20	3
De las dos de la rodilla izquierda, la del oeste.	68	0	sur	46	30	5
Al este de la anterior.	69	30	sur	45	50	5
De las dos del hombro izquierdo, la del este.	78	0	sur	46	0	4
La del oeste.	75	0	sur	47	0	5
En el muslo izquierdo.	80	0	sur	48	45	3 menor
Bajo el vientre, entre los muslos.	77	0	sur	51	30	3
En la cavidad del pie derecho.	76	20	sur	55	10	4
En el extremo del mismo pie.	77	0	sur	55	40	3
En el extremo de la cola.	85	30	sur	50	30	3 menor
18 estrellas, 1 de 1.ª magnitud, 5 de 3.ª, 5 de 4.ª, 7 de 5.ª.						
Estrellas no agrupadas junto a Can.						
Una desde el norte junto a la cabeza de Can.	72	50	sur	25	15	4
Una al sur, bajo los pies posteriores en línea recta.	63	20	sur	60	30	4
Una más al norte.	64	40	sur	58	45	4
Una más al norte que ésta.	66	20	sur	57	0	4
De esas cuatro, la que queda más al norte.	67	30	sur	56	0	4
De las tres que hay en línea recta hacia el ocaso, la del oeste.	50	20	sur	55	30	4
La del medio.	53	40	sur	57	40	4
De las tres, la del este.	55	40	sur	59	30	4
De las dos que brillan bajo éstas, la del oeste.	52	20	sur	59	40	2
Una más al oeste.	49	20	sur	57	40	2
Otra más al sur que las antedichas.	45	30	sur	59	30	4
11 estrellas, 2 de 2.ª magnitud, 9 de 4.ª.						
CANÍCULA O PROCIÓN (ANTECANIS)						
En la cerviz.	78	20	sur	14	0	4
La misma Proción o Canícula que brilla en la pierna.	82	30	sur	16	10	1
De las 2, 1 de 1.ª magnitud, 1 de 4.ª.						
NAVÍO O ARGOS						
De las dos que hay en el extremo de la nave, la del oeste.	93	40	sur	42	40	5
La del este.	97	40	sur	43	20	3
De las dos de la popa, la del norte.	92	10	sur	45	0	4
La que está más al sur.	92	10	sur	46	0	4
Una al oeste de las dos.	88	40	sur	45	30	4

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° '		*Latitud* ° '		*Magnitud*
Una que brilla en medio del escudo.	89	40 sur	47	15	4
De las tres que hay bajo el escudo, la del oeste.	88	40 sur	49	45	4
La del este.	92	40 sur	49	50	4
De las tres, la del medio.	91	50 sur	49	15	4
En el extremo del timón.	97	20 sur	49	50	4
La del norte de las dos que hay en la quilla de la popa.	87	20 sur	53	0	4
La del sur.	87	20 sur	58	30	3
La del norte en el asiento de popa.	93	30 sur	55	30	5
De las tres que hay en el mismo asiento, la del oeste.	95	30 sur	58	30	5
La del medio.	96	40 sur	57	15	4
La del este.	99	50 sur	57	45	4
Una que brilla al este en el asiento de remeros.	104	30 sur	58	20	2
De las dos oscuras bajo ésta, la del oeste.	101	30 sur	60	0	5
La del este.	104	20 sur	59	20	5
De las dos oscuras al este de la brillante anterior, la del oeste.	106	30 sur	56	40	5
La del este.	107	40 sur	57	0	5
Entre los cilindros y en la posición del mástil, de las tres, la del N.	119	0 sur	5	30	4 mayor
La del medio.	119	30 sur	55	30	4 mayor
De las tres, la del sur.	117	20 sur	57	10	4
De dos juntas que hay bajo ellas, la del norte.	122	30 sur	60	0	4
La más al sur.	122	20 sur	61	15	4
De las dos que hay en medio del mástil, la del sur.	113	30 sur	51	30	4
La del norte.	112	40 sur	49	0	4
De las dos en lo más alto de la vela, la del oeste.	111	20 sur	43	20	4
La del este.	112	20 sur	43	30	4
Bajo la tercera, una al este del escudo.	98	30 sur	54	30	2 menor
En la parte no cubierta.	100	50 sur	51	15	2
Entre los remos, en la quilla.	95	0 sur	63	0	4
Una oscura, al este de ésta.	102	20 sur	64	30	6
Una lúcida, al este de ésta.	113	20 sur	63	50	2
Una que brilla, hacia el sur, bajo la quilla.	121	50 sur	69	40	2
De las tres que siguen a ésta, la del oeste.	128	30 sur	65	40	3
La del medio.	134	40 sur	65	50	3
La del este.	139	20 sur	65	50	2
De las dos del este a ésta en la parte no cubierta, la del oeste.	144	20 sur	62	50	3
La del este.	151	20 sur	62	15	3
En el timón del norte, la del oeste.	57	20 sur	65	50	4 mayor
La del este.	73	30 sur	65	40	3 mayor
La que hay en el otro timón, la del oeste, Canobo.	70	30 sur	75	0	1
Otra al este de ésta.	82	20 sur	71	50	3 mayor

45 estrellas, 1 de 1.ª magnitud, 6 de 2.ª, 8 de 3.ª, 22 de 4.ª, 7 de 5.ª, 1 de 6.ª.

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'	*Latitud* °	'	*Magnitud*
HIDRA					
De las cinco de la cabeza, la del sur, de las dos al oeste en la nariz.	97	20 sur	15	0	4
La del sur, en el ojo.	98	40 sur	13	40	4
La del norte de las dos al este, en el occipucio.	99	0 sur	11	30	4
La del sur, en la boca.	98	50 sur	14	45	4
Una al este de todas éstas, en la mejilla.	100	50 sur	12	15	4
De las dos que hay en el nacimiento de la cerviz, la del oeste.	103	40 sur	11	50	5
La del este.	106	40 sur	13	30	4
De las tres de la flexión del cuello, la del medio.	111	40 sur	15	20	4
La del este.	114	0 sur	14	50	4
La más al sur.	111	40 sur	17	10	4
A partir del sur, de dos juntas, una oscura al norte.	112	30 sur	19	45	6
De ellas, la del este, lúcida y al sur.	113	20 sur	20	30	2
La del oeste de las tres, después de la flexión del cuello.	119	20 sur	26	30	4
La del este.	124	30 sur	23	15	4
La del medio.	122	0 sur	26	0	4
Una al oeste de las tres que hay en línea recta.	131	20 sur	24	30	3
La del medio.	133	20 sur	23	0	4
La de atrás.	136	20 sur	22	10	3
De las dos que hay bajo la base de «Copa», la del norte.	144	50 sur	25	45	4
La del sur.	145	40 sur	30	10	4
Después de éstas, la que precede en el triángulo.	155	30 sur	31	20	4
La del sur.	157	50 sur	34	10	4
La del oeste a esas tres.	159	30 sur	31	40	3
Al este de «Cuervo», próxima a la cola.	173	20 sur	13	30	4
En el extremo de la cola.	186	50 sur	17	30	4
25 estrellas, 1 de 2.ª magnitud, 3 de 3.ª, 19 de 4.ª, 1 de 5.ª, 1 de 6.ª.					
Estrellas no agrupadas junto a Hidra.					
A partir de la cabeza, hacia el sur.	96	0 sur	23	15	3
Una al este de las que están en el cuello.	124	20 sur	26	0	3
2 no agrupadas de 3.ª magnitud.					
COPA					
En la base de Copa, que es común a Hidra.	139	40 sur	23	0	4
De las dos que hay en la mitad de Copa, la del sur.	146	0 sur	19	30	4
La del norte.	143	30 sur	18	0	4
En el círculo sur del orificio.	150	20 sur	18	30	4 mayor

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° '	*Latitud* ° '	*Magnitud*
En el círculo del norte.	142 40	sur 13 40	4
En el asa del sur.	152 30	sur 16 30	4 menor
En el asa del norte.	145 0	sur 11 50	4
7 estrellas de 4.ª magnitud.			
CUERVO			
En el pico y común a Hidra.	158 40	sur 21 30	3
En la cerviz.	157 40	sur 19 40	3
En el pecho.	160 0	sur 18 10	5
En el ala derecha y al oeste.	160 50	sur 14 50	3
De las dos del ala del este, la del oeste.	160 0	sur 12 30	3
La del este.	161 20	sur 11 45	4
En el extremo del pie, común a Hidra.	163 50	sur 18 10	3
De las 7 estrellas, 5 de 3.ª magnitud, 1 de 4.ª y 1 de 5.ª.			
CENTAURO			
De las cuatro de la cabeza, la más al sur.	183 50	sur 21 20	5
La más al norte.	183 20	sur 13 50	5
De las dos del medio, la del oeste.	182 30	sur 20 30	5
La del este, la que queda de las cuatro.	183 20	sur 20 0	5
En el hombro izquierdo.	179 30	sur 25 30	3
En el hombro derecho.	189 0	sur 22 30	3
En la articulación del hombro izquierdo.	182 30	sur 17 30	4
La del norte, de las dos que hay al oeste de las 5 del escudo.	191 30	sur 22 30	4
La del sur.	192 30	sur 23 45	4
De las otras dos, la que está en la parte alta del escudo.	195 20	sur 18 15	4
La que está más al sur.	196 50	sur 20 50	4
De las tres del costado derecho, la del oeste.	186 40	sur 28 20	4
La del medio.	187 20	sur 29 20	4
La de detrás.	188 30	sur 28 0	4
En el brazo derecho.	189 40	sur 26 30	4
En el codo.	196 10	sur 25 15	3
En el extremo de la mano derecha.	200 50	sur 24 0	4
Una que brilla en el nacimiento del cuerpo humano.	191 20	sur 33 30	3
De dos oscuras, la del este.	101 0	sur 31 0	5
La del oeste.	189 50	sur 30 20	5
En la dirección de la espalda.	185 30	sur 33 50	5
La que antecede a ésta en la espalda del caballo.	182 20	sur 37 30	5
De las tres del lomo la del este.	179 10	sur 40 0	3
La del medio.	178 20	sur 40 20	4
La del oeste.	176 0	sur 41 0	5
De dos juntas en la pierna derecha, la del oeste.	176 0	sur 46 10	2
La del este.	176 40	sur 46 45	4
En el pecho, bajo el ala del caballo.	191 40	sur 40 45	4
De las dos bajo el vientre, la del oeste.	179 50	sur 43 0	2

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
La del este.	181	0	sur	43	45	3
En el hueco del pie derecho.	183	20	sur	51	10	2
En la pierna del mismo lado.	188	40	sur	51	40	2
En el hueco del pie izquierdo.	188	40	sur	55	10	4
En el músculo del mismo.	184	30	sur	55	40	4
En el extremo del pie derecho del oeste.	181	40	sur	41	10	1
En la rodilla izquierda.	197	30	sur	45	20	2
Por fuera, bajo la pierna derecha.	188	0	sur	49	10	3
37 estrellas, 1 de 1.ª magnitud, 5 de 2.ª, 7 de 3.ª, 15 de 4.ª, 9 de 5.ª.						
EL ANIMAL QUE TIENE CENTAURO						
En el pie posterior, junto a la mano de Centauro.	201	20	sur	24	50	3
En el hueco del mismo pie.	199	10	sur	20	10	3
De las dos de la articulación, la del oeste.	204	20	sur	21	15	4
La que está al este.	207	30	sur	21	0	4
En medio del cuerpo.	206	20	sur	25	10	4
En el vientre.	203	30	sur	27	0	5
En la pierna.	204	10	sur	29	0	5
De las dos que hay en la dirección de la pierna, la del norte.	208	0	sur	28	30	5
La del sur.	207	0	sur	30	0	5
En lo alto del lomo.	208	40	sur	33	10	5
De las tres que hay en el extremo de la cola, la del sur.	195	20	sur	31	20	5
La del medio.	195	10	sur	30	0	4
De las tres, la del norte.	196	20	sur	29	20	4
De las dos de la garganta, la del sur.	212	10	sur	17	0	4
La del norte.	212	40	sur	15	20	4
De las dos de la boca, la del oeste.	209	0	sur	13	30	4
La que está al este.	210	0	sur	12	50	4
De las dos del pie de delante, la más al sur.	240	40	sur	11	30	4
La más al norte.	239	50	sur	10	0	4
19 estrellas, 2 de 3.ª magnitud, 11 de 4.ª, 6 de 5.ª.						
ALTAR O INCENSARIO						
De las dos de la base, la del norte.	231	0	sur	22	40	5
La del sur.	233	40	sur	25	45	4
En la mitad del Ara pequeña.	229	30	sur	26	30	4
De las tres del fuego, la del norte.	224	0	sur	30	20	5
De las otras dos juntas, la del sur.	228	30	sur	34	10	4
La del norte.	228	20	sur	33	20	4
En medio de la llama.	224	10	sur	34	10	4
7 estrellas, 5 de 4.ª magnitud, 2 de 5.ª.						
CORONA AUSTRAL						
Una fuera, que está delante, junto al círculo del sur.	242	30	sur	21	30	4

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* ° '		*Latitud* ° '		*Magnitud*
Al este de ésta, en la corona.	245 0	sur	21 0		5
Al este de ésta.	246 30	sur	20 20		5
Al este de ésta también.	248 10	sur	20 0		4
Al este de ésta, al oeste de la rodilla de Sagitario.	249 30	sur	18 30		5
Una al norte, que luce en la rodilla.	250 40	sur	17 10		4
Una más al norte.	250 10	sur	16 0		4
Hasta aquí, la más al norte.	249 50	sur	15 20		4
De las dos del círculo del sur, la del este.	248 30	sur	15 50		6
La del oeste.	248 0	sur	14 50		6
A partir del intervalo, la del oeste a éstas.	245 10	sur	14 40		5
Una al oeste también a ésta.	243 0	sur	15 50		5
Otra más al sur.	242 30	sur	18 30		5

13 estrellas, 5 de 4.ª magnitud, 6 de 5.ª y 2 de 6.ª.

PISCIS AUSTRAL

En la boca, la misma que en el extremo del agua.	300 20	sur	23 0		1
De las tres de la cabeza, la del oeste.	294 0	sur	21 20		4
La del medio.	297 30	sur	22 15		4
La del este.	299 0	sur	22 30		4
Una junto a la agalla.	297 40	sur	16 15		4
En la espina del sur, y en la espalda.	288 30	sur	19 30		5
De las dos del vientre, la del este.	294 30	sur	15 10		5
La del oeste.	292 10	sur	14 30		4
En la espina del norte, de las tres, la del este.	288 30	sur	15 15		4
La del medio.	285 10	sur	16 30		4
La del oeste.	284 20	sur	18 10		4
En el extremo de la cola.	289 20	sur	22 15		4

Exceptuada la 1.ª, 11 estrellas, 9 de 4.ª magnitud, 2 de 5.ª.

No agrupadas, alrededor del Pez Austral.

Una al oeste de las lúcidas que preceden a Pez.	271 20	sur	22 20		3
La del medio.	274 30	sur	22 10		3
De las tres, la del este.	277 20	sur	21 0		3
Una oscura, al oeste de ésta.	275 20	sur	20 50		5
La más al sur, de las otras que están hacia el norte.	277 10	sur	16 0		4
La más al norte.	277 10	sur	14 50		4

6 estrellas, 3 de 3.ª magnitud, 2 de 4.ª, 1 de 5.ª.

En esta parte austral hay 316 estrellas, de las que 7 son de 1.ª magnitud, 18 de 2.ª, 60 de 3.ª, 167 de 4.ª, 54 de 5.ª, 9 de 6.ª, 1 nebulosa; y así, hay en total 1.022 estrellas, de las que 15 son de 1.ª magnitud, 45 de 2.ª, 208 de 3.ª, 474 de 4.ª, 216 de 5.ª, 50 de 6.ª, 9 oscuras y 5 nebulosas.

LIBRO TERCERO

1. SOBRE LA PRECESIÓN DE LOS EQUINOCCIOS Y SOLSTICIOS

Descrita la configuración de las estrellas fijas con respecto a la revolución anual, seguiremos avanzando y trataremos en primer lugar del cambio de los equinoccios, por cuya causa consideraron que se movían incluso las estrellas fijas.

En efecto, encontramos que los matemáticos antiguos no habían distinguido el año rotatorio, o sea, el natural, el que se mide a partir de un equinoccio o de un solsticio, de aquel que se determina en relación con alguna de las estrellas fijas. De aquí se deriva el que juzgasen los años Olímpicos, los que empezaban a partir de la salida de Canícula, como aquellos mismos que empiezan en el solsticio (no era todavía conocida la diferencia entre uno y otro). Pero Hiparco de Rodas, hombre de admirable sagacidad, fue el primero en advertir que éstos eran diferentes; el cual, mientras observaba con más atención la duración del año, halló que era mayor el medido con respecto a las estrellas fijas que el de los equinoccios o solsticios. De donde estimó que también en las estrellas fijas había algún movimiento hacia el este, aunque hasta tal punto lentísimo que no era perceptible de inmediato. Pero ahora, con el paso del tiempo, se ha hecho evidentísimo, por lo que ya hace algún tiempo distinguimos el nacimiento y ocaso de los signos y de las estrellas distinto del prescrito por los antiguos. Pero las doce partes del círculo de los signos [eclíptica] se distanciaron a su vez con un intervalo bastante grande de los signos de las estrellas inmóviles, aunque primitivamente coincidían a la vez en nombre y en posición.

Además, se encontró desigual este movimiento, y queriendo encontrar la causa de esta diversidad, aportaron diversas opiniones. Algunos opinaron que había un cierto balanceo del mundo suspendido, como el movimiento que encontramos en los planetas con respecto a sus latitudes, y de ahí que, dentro de ciertos límites, cuanto avanzase [en un sentido], tendría que retrocederlo [en sentido opuesto] en algún momento,[1] y la desviación hacia una u otra parte no era, a partir del punto medio, superior a VIII grados.

1. Es decir, la esfera del mundo ha girado hacia el oeste y en algún momento girará el mismo ángulo hacia el este.

Pero esta opinión anticuada no pudo permanecer, sobre todo porque ya ha quedado claro que la cabeza de la constelación Aries dista más de tres veces VIII grados del equinoccio de primavera; y porque, de un modo semejante en otras estrellas, no ha sido percibido ningún vestigio de regresión en tantos siglos. Otros opinaron que la esfera de las estrellas fijas se movía, pero con pasos desiguales, sin embargo no lo decidieron de ninguna manera segura. Sucedió después otra maravilla de la naturaleza, el que la oblicuidad de la eclíptica no nos parece tan grande como se consideraba antes de Ptolomeo, según ya dijimos.

Unos imaginaron como causa de estos acontecimientos la novena esfera, otros la décima, mediante las cuales pensaron se explicaban aquellos hechos, pero no podían defender lo que prometían. Ya había empezado también a salir a la luz la undécima esfera. Tal número de círculos lo refutaremos fácilmente como superfluo al tratar del movimiento de la tierra. Pues, según ya expusimos en parte en el libro primero, las dos revoluciones, me refiero a la de la declinación anual y la del centro de la Tierra, no son en absoluto iguales, pues es evidente que la vuelta al punto de origen en la declinación se anticipa en una pequeña cantidad al ciclo del centro. De donde necesariamente se sigue que los equinoccios y los solsticios parecen adelantarse, no porque la esfera de las estrellas fijas se mueva hacia el este, sino más bien por el movimiento del círculo equinoccial hacia el oeste, siendo oblicuo al plano de la eclíptica, conforme al grado de inclinación del globo terráqueo. Pues está más de acuerdo con las cosas decir que el círculo equinoccial es oblicuo a la eclíptica, que la eclíptica al equinoccial (en comparación de menor a mayor). Con mucho es mayor la eclíptica, descrita por la distancia del Sol y de la Tierra en un circuito anual, que el círculo equinoccial, el cual (según se ha dicho) es trazado por el movimiento diario alrededor del eje de la Tierra. Y de este modo, los cortes equinocciales con la oblicuidad de la eclíptica, al pasar el tiempo, se advierte que se adelantan; sin embargo, las estrellas se retrasan. Pero la medida y la proporción de este movimiento se ocultó a los antepasados, porque se ignoraba cuán grande pudiera ser el período de revolución a causa de su interminable tardanza, puesto que éste [período de revolución], después de tantos siglos, para los mortales que lo conocieron por primera vez, había recorrido la quinceava parte de un círculo. Sin embargo, estableceremos con más certeza cuanto nosotros sabemos a través de lo que hemos recibido de éstos [antepasados], desde la historia de las observaciones hasta nuestra propia época.

2. HISTORIA DE LAS OBSERVACIONES QUE CONFIRMAN LA IRREGULAR PRECESIÓN DE LOS EQUINOCCIOS Y LOS SOLSTICIOS

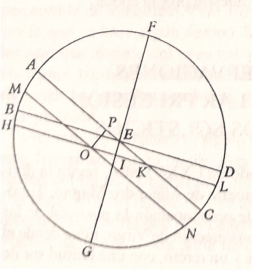
En consecuencia, en el año XXXVI del primer período de LXXVI años, según la división de Calippo, que era el año XXX después de la muerte de Alejandro Magno, Timócaris de Alejandría, a quien por primera vez sirvió de preocupación la posición de las estrellas fijas, descubrió que Espica, que está en la constelación de Virgo, tiene desde el punto del solsticio una elongación de LXXXII grados y un tercio, con una latitud sur de dos grados; y la [estrella] que está en la frente de Escorpión, de las tres [que están en la cabeza de Scorpio] la más al norte, y la primera en el orden de formación del propio signo, había tenido una latitud de I grado y un tercio, y una longitud de XXXII grados

desde el equinoccio de otoño. Pero, a su vez, en el año IIL del mismo período, encontró que Espica, en Virgo, con una longitud de LXXXII grados y medio desde el solsticio de verano, mantenía la misma latitud. Por otra parte, Hiparco, en el año L del tercer período de Calippo, en el año CIIIIC de Alejandro, encontró que la estrella que se llama Régulo, en el pecho de Leo, estaba al este a XXIX grados y medio y un tercio [5/6] desde el solsticio de verano. Después, Menelao, geómetra romano, en el año primero del emperador Trajano, que fue el IC a partir del nacimiento de Cristo y el CCCCXXII desde la muerte de Alejandro, manifestó que Spica, en Virgo, distaba en longitud desde el equinoccio de otoño LXXXVI grados y un cuarto, en cambio, la que está en la frente de Scorpio, XXXVI grados, menos una doceava parte. Siguiendo a éstos, Ptolomeo, según se dijo, en el año II de Antonino Pío, conoció que Régulo, en Leo, tenía XXXII grados y medio desde el solsticio; Spica, LXXXVI grados y medio, y la citada en la frente de Scorpio, XXXVI grados y un tercio, los grados tomados en longitud, no habiendo variado de ninguna manera la latitud, según más arriba se expresó en la exposición de la tabla. Y estas cosas las examinamos según fueron publicadas por aquéllos.

Pero después de mucho tiempo, en el año MCCII después de la muerte de Alejandro, aconteció la observación de Albatenio el Aratense, al que conviene dar muchísima confianza. En aquel año, pareció que Régulo o Basiliscos, en Leo, había llegado a XLIIII grados y V minutos desde el solsticio, y la que está en la frente de Scorpio a IIIL grados y L minutos desde el equinoccio de otoño, en todas ellas su latitud siempre permaneció la misma, de tal modo que no parece que sobre esta parte quepa algo más de duda.

Por lo cual, también nosotros en el año MDXXV de Cristo, el primero después del intercalado [bisiesto] según él calendario romano, que es el MDCCCIL de los años de los egipcios después de la muerte de Alejandro, observamos a menudo a la llamada Spica desde Frauenburg, en Prusia, y su altitud máxima parecía en el círculo meridiano como de XXVII grados aproximadamente. Pero encontramos que la latitud del lugar [Frauenburg] era de LIIII grados, XIX minutos y medio. Por lo cual su declinación desde el ecuador constaba de VIII grados, XL minutos, de donde se manifestó su posición según se sigue.

En efecto, describamos un círculo meridional a través de los polos de uno y otro [círculo], eclíptica y ecuador, que sea ABCD, en los cuales las secciones comunes y diámetros serían: AEC el diámetro del ecuador y BED el diámetro de la eclíptica, cuyo polo boreal sería F, el eje FEG, y sea B el principio de Capricornio y D el de Cáncer. Se toma también el arco BH, que sea igual a la latitud austral de la estrella, de II grados, y desde el punto H trácese la paralela HL a BD, que corte al eje de la eclítica en I, al ecuatorial en K. Tómese también, de acuerdo con la declinación austral de la estrella, el arco MA de VIII grados, XL minutos, y desde el punto M trácese la paralela MN a AC, que cortará a la paralela de la eclíptica HIL; luego la cortará en el punto O, y la línea recta OP, perpendicular, será igual a la mitad de la cuerda del doble de la declinación AM.



Pero los círculos, cuyos diámetros FG, HL y MN son perpendiculares al plano ABCD, y sus secciones comunes, por la proposición XIX del libro XI de los *Elementos* de Eu-

clides, son perpendiculares al mismo plano en los puntos O, I; las mismas [secciones comunes], por la VI proposición del mismo libro, son paralelas entre sí. Y puesto que I es el centro del círculo, cuyo diámetro es HL, así pues, OI será igual a la mitad de la cuerda de un arco doble en un círculo de diámetro HL, y buscamos un arco similar a éste, por el cual está la estrella alejada del principio de Libra según la longitud.

Se encontró de este modo. Los ángulos que están bajo OKP y AEB son iguales, el exterior es igual al interior y opuesto, y el OPK es recto. Por lo que están en la misma proporción OP a OK, como la mitad de la cuerda del doble de AB es a BE, y como la mitad de la cuerda del doble de AH es a HIK: pues comprenden triángulos semejantes al OPK. Pero AB es de XXIII grados, XXVIII minutos y medio; y la mitad de la cuerda del doble de ese arco [AB] es de 39.832 unidades, de las que BE está dividido en 100.000; y ABH tiene XXV grados, XXVIII minutos y medio, la mitad de la cuerda del doble de ese arco [ABH] 43.010 unidades, pero MA es la mitad de la cuerda del doble de la declinación, de 15.069 unidades: de todo esto se sigue que toda HIK es de 107.978 unidades, OK de 37.831 unidades y la restante HO de 70.147. Pero el doble de HOI es la cuerda del segmento del círculo HGL de CLXXVI grados; la misma HOI será de 99.939 unidades, de las que BE tenía 100.000 y, por lo tanto, la restante OI de 29.792 unidades. Pero, en tanto en cuanto HOI es la mitad del diámetro de 100.000 unidades, OI será de 29.810 unidades, a la que corresponde un arco de XVII grados, XXI minutos aproximadamente, en lo que distaba Spica de Virgo desde el principio de Libra: y ésta era la posición de la propia estrella.

También un decenio antes, esto es, en el año MDXV, nosotros encontramos que la misma se desviaba [su declinación] en VIII grados, XXXVI minutos, y su posición estaba a XVII grados, XIIII minutos de Libra. Ptolomeo, en cambio, declaró que ésta se había desviado solamente medio grado, luego su posición hubiera tenido que estar a XXVI grados, XL minutos de Virgo: lo cual parece ser más cierto en comparación con las observaciones precedentes.

De todo ello parece que ha quedado bastante claro que en todo el tiempo desde Timócaris hasta Ptolomeo, en CCCCXXXII años, han cambiado los equinoccios y los solsticios, adelantando generalmente un grado cada cien años, tomada siempre la relación entre el tiempo y la longitud del avance de situación de ellos [cantidad de predecesión], la cual en total era de IIII grados y un tercio. Pues en lo que concierne al triunfo del verano [solsticio de verano], con respecto a Basiliscos de Leo, desde Hipparco a Ptolomeo, en CCLXVI años, avanzaron II grados con tres cuartos, de modo que esto también manifestaba en la relación del tiempo, que cada cien años se había anticipado I grado. Más adelante, la estrella que está en primer lugar en la frente de Scorpio, desde [la observación de] Albatenio hasta la de Menelao, mediando DCCLXXXII años, habiendo adelantado XI grados, LV minutos, de ninguna manera parecerá que hay que atribuirle a un solo grado cien años, sino LXVI, sin embargo desde Ptolomeo, en DCCXLI años, a un grado solamente corresponden LXV. Si, finalmente, se comparan el restante espacio de años, DCXLV, con la diferencia de IX grados, XI minutos de nuestra observación, se obtendrá un grado por los LXXI años. De donde queda claro que la precesión de los equinoccios en aquellos CCCC años antes de Ptolomeo había sido más lenta que desde Ptolomeo a Albatenio, y que ésta fue más rápida desde Albatenio hasta nuestra época.

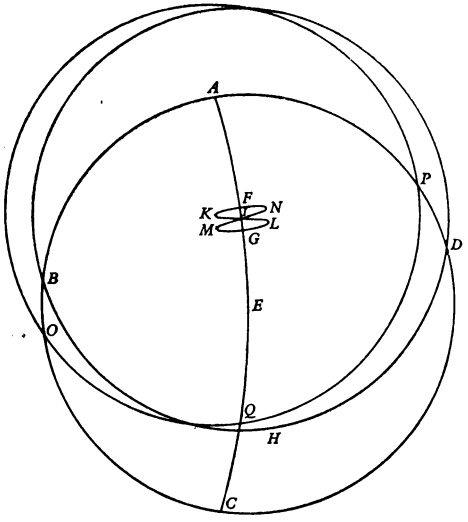
También en el movimiento de oblicuidad se encuentra una diferencia, puesto que Aristarco de Samos encontró la oblicuidad entre la eclíptica y el ecuador en XXIII gra-

dos, LI minutos, XX segundos, la misma que Ptolomeo, Albatenio en XXIII grados XXXVI minutos, Arzaquel el Hispano, CXC años después de aquél, en XXIII grados, XXXIIII minutos; y también, después de CCXXX años, Prophatius el Judío la encontró menor en casi dos minutos; pero en nuestro tiempo no viene a ser mayor de XXIII grados, XXVIII minutos y medio, de modo que de aquí también se manifiesta que el cambio fue el mínimo de Aristarco a Ptolomeo y el mayor desde Ptolomeo hasta Albatenio.

3. HIPÓTESIS CON LAS QUE SE DEMUESTRA LA VARIACIÓN DE LOS EQUINOCCIOS Y DE LA OBLICUIDAD DE LA ECLÍPTICA Y DEL ECUADOR

De todo esto parece que ha quedado de manifiesto que los equinoccios y los solsticios varían con un movimiento desigual. Sobre lo cual quizá nadie podría aportar una causa mejor, sino una pequeña inclinación del eje de la Tierra y de los polos del círculo equinoccial. En efecto, esto parece seguirse de la hipótesis del movimiento de la Tierra, puesto que es manifiesto que el círculo, que pasa a través de los signos, permanece perennemente inmutable (atestiguando esto las latitudes constantes de las estrellas fijas), pero el círculo ecuatorial varía. Puesto que, si el movimiento del eje de la Tierra [movimiento de rotación] se correspondiera simple y exactamente con el movimiento del centro [traslación], no aparecería, según hemos dicho, ningún adelanto de los equinoccios y de los solsticios. Pero, diferenciándose entre sí, aunque con diferencia desigual, fue necesario también que los solsticios y equinoccios adelantasen a las posiciones de las estrellas con un movimiento irregular. Del mismo modo sucede con respecto al movimiento de declinación, que desigualmente cambia la oblicuidad de la eclíptica, tal oblicuidad más correctamente se atribuiría al círculo ecuatorial.

Por esta causa, conviene que se entiendan los dos movimientos recíprocos de los polos como semejantes a oscilaciones vacilantes, puesto que los polos y los círculos en la esfera encajan mutuamente y coinciden. Así pues, habrá un movimiento que cambia la inclinación de aquellos círculos llevando los polos arriba y abajo con respecto al ángulo de sección, y otro que aumenta y disminuye alternativamente las precesiones solsticiales y equinocciales, realizada la conmoción en sentido transversal. Nosotros llamamos a estos movimientos libraciones, porque se producen a semejanza de los pendulares, entre dos límites por el mismo camino, más rápidos en el centro, lentísimos en los extremos, tal como generalmente sucede con respecto a las latitudes de los planetas (según veremos en su lugar). Se diferencian también en sus giros, porque la desigualdad de los equinoccios se restablece dos veces por una sola restitución de la oblicuidad. Pero así como en todo movimiento aparente irregular conviene pensar un cierto valor medio, por el cual pueda determinarse la razón de la desigualdad, así también aquí era necesario imaginar polos medios y círculo ecuatorial medio, también secciones equinocciales y puntos medios de los giros, por los cuales desviándose los polos y el círculo ecuatorial terrestre, establecidos, sin embargo, unos límites, hagan aparecer aquellos movimientos regulares como irregulares. Y así se producen aquellas dos libraciones coincidentes entre sí, de modo que los polos de la Tierra con el tiempo describan ciertas líneas semejantes a un pequeño bucle entrelazado.



Pero puesto que esto no es fácil de explicar suficientemente con palabras, y menos aún, según me temo, que se perciban de oído, si no se ven también con los ojos, describamos, pues, en una esfera el círculo de la eclíptica ABCD; su polo boreal sea E, el origen de Capricornio A, el de Cáncer C, el de Aries B, el de Libra D, y a través de los puntos A,C, y del polo E trácese el círculo AEC; la máxima distancia de los polos boreales de la eclíptica y del ecuador sea EF, la mínima EG, y por tanto el polo I esté en el lugar medio, desde el cual describase el círculo ecuatorial BHD, que se llame medio, y B, D, los puntos equinocciales medios. Todo lo cual se desplace alrededor del polo E con un movimiento regular hacia el oeste, esto es, contrario al orden de los signos, bajo la esfera de las estrellas fijas, con un movimiento lento, según se dijo. Ya se han discernido dos movimientos de los polos terrestres, alternativos, semejantes a los pendulares: uno entre los límites F, G, que será llamado movimiento de anomalía,[1] esto es, de desigualdad, de declinación; el otro, transversalmente, de oeste a este y de este a oeste, al cual llamaremos anomalía de los equinoccios, doblemente más veloz que el primero.

Estos dos movimientos, que coinciden en los polos de la Tierra, los desvían de modo admirable. En efecto, para el primero, el círculo ecuatorial descrito bajo F, constituido en polo boreal de la Tierra, pasará por las secciones B, D, esto es, por los polos del círculo AFEC; pero realizará ángulos de oblicuidad mayores en proporción al arco

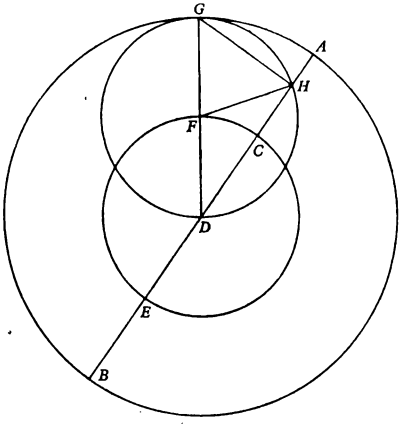
1. El término anomalía será utilizado para designar un movimiento regular la composición del cual con el movimiento regular principal considerado hace que el movimiento principal parezca irregular.

FI. A partir de haber emprendido este movimiento, al sobrevenir el otro movimiento no deja al polo de la Tierra, que pasaría hacia la oblicuidad media en I, incidir en línea recta por FI, sino que lo conduce a través de un círculo y la extrema latitud hacia el oeste que está en K. En cuya posición la intersección del ecuador aparente descrito OQP no estará en B, sino detrás de la misma [más al este] en O; y, por tanto, disminuye la precesión de los equinoccios, tanto cuanto valga BO. Girando desde aquí el polo y tendiendo hacia el oeste, retrocede, por ambos movimientos coincidentes a la vez, a una posición media I, y el ecuador aparente se identifica en todo al regular, o sea, al medio, y pasando por él el polo de la Tierra se traslada al oeste, y separa al ecuador aparente del medio e incrementa la precesión de los equinoccios hasta el otro límite L. Regresando de allí [del punto L], se aleja, aunque sólo lo que había añadido a los equinoccios, hasta que situado en el punto G consiga la mínima oblicuidad en la intersección B, donde de nuevo aparecerá un movimiento lentísimo de los equinoccios y solsticios, del mismo modo casi que en F. En este tiempo, consta que la desigualdad de éstos [los equinoccios] ha llevado a cabo su giro, cuando desde el medio haya pasado a cada uno de los extremos, mientras el movimiento de la oblicuidad, desde la máxima declinación hasta la mínima, nada más ha recorrido medio circuito. Continuando desde allí, el polo repite el camino hacia el este, hasta el límite extremo en M, e invertida su dirección de nuevo se une con el punto medio I, e inclinándose de nuevo hacia el este, recorriendo el límite N, cierra finalmente, como dijimos, la línea entrelazada FKILGMINF. Y así queda de manifiesto, que en un solo giro de oblicuidad, el polo de la Tierra alcanza dos veces el límite de los puntos al oeste y dos veces el de los puntos al este.

4. CÓMO EL MOVIMIENTO RECÍPROCO, O MOVIMIENTO DE LIBRACIÓN, SE COMPONE DE MOVIMIENTOS CIRCULARES

Ahora mostraremos por qué este movimiento se corresponde con los aparentes. Entretanto, alguien preguntará de qué modo puede entenderse la igualdad de aquellas libraciones, habiendo dicho desde el principio que el movimiento celeste era regular o compuesto de movimientos regulares o circulares. Pero he aquí que, en ambos casos, los dos movimientos aparecen como en uno solo entre dos límites, en los cuales es necesario que sobrevenga la interrupción. Más aún, reconocemos que son gemelos. Sin embargo, partiendo de movimientos regulares se han demostrado de este modo.

Sea la línea recta AB, que es cortada en cuatro partes por los puntos C, D, E y desde el centro D descríbanse los círculos homocéntricos en el mismo plano ADB y CDE, y en la circunferencia del círculo interior tómese un punto cualquiera F, y desde dicho punto F como centro, pero con la distancia FD, descríbase el círculo GHD, que corte a la línea recta AB en el punto H, y trácese el diámetro DFG. Hay que demostrar que en los movimientos gemelos coincidentes entre sí de los círculos GHD y CFE, el punto móvil H se desliza marchando atrás y adelante a través de la línea AB. Lo que acontecerá si se entiende que H se mueve en una dirección distinta y doblemente mayor que F, puesto que el ángulo CDF, que está colocado en el centro del círculo CFE y en la circunferencia del GHD, comprende a los dos arcos de círculos iguales, el GH doble que el FC, supuesto que cuando en la conjunción de las líneas rectas ACD y DFG el punto móvil H está en G



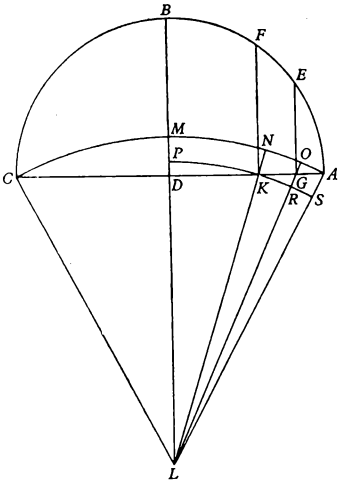
coincidiendo con A, y F en C. Pero ahora el centro F se ha movido hacia la derecha a través de FC, y el H hacia la izquierda por el arco GH doblemente mayor que CF, o al contrario, en consecuencia H se deslizará a lo largo de la línea AB: de otra manera sucedería que la parte sería mayor que el todo, lo que creo se entiende fácilmente. Pero desde la anterior posición se retira, retrocediendo según la longitud AH por la línea quebrada DFH, igual a AD, en el intervalo en que el diámetro DFG excede a la cuerda DH. Y de este modo se conducirá H hasta el centro D, que estará en el punto de contacto del círculo DHG con la línea recta AB, mientras GD se mantenga en ángulo recto con AB, y después llegará al otro límite B, desde el que volverá de nuevo con un proceso igual. En consecuencia, queda claro que el movimiento a lo largo de una línea recta se compone de dos movimientos circulares y que coinciden entre sí de este modo, y que es recíproco e irregular partiendo de movimientos regulares, que era lo que había que demostrar.

De ello también se sigue que la línea recta GH será perpendicular a AB; pues las líneas [DH y HG] en el semicírculo DHG comprenden un ángulo recto. Y por esto, GH será la mitad de la cuerda del doble del arco AG, y DH la mitad de la cuerda del doble del arco del cuadrante del círculo menos AG, porque el círculo ABG es el doble del HGD según el diámetro.

5. DEMOSTRACIÓN DE LA IRREGULARIDAD EN LA PRECESIÓN DE LOS EQUINOCCIOS Y EN LA OBLICUIDAD

Por esta causa algunos llaman a dicho movimiento del círculo, movimiento en latitud, esto es, a lo largo del diámetro, del cual, sin embargo, toman el período y la regularidad

de la periferia [circunferencia], pero su dimensión en las líneas subtendidas [cuerdas]. Por todo ello se demuestra fácilmente que este movimiento aparece irregular, más rápido alrededor del centro y más lento junto a la circunferencia.



Sea, pues, el semicírculo ABC, su centro D, su diámetro ADC, y córtese por la mitad en el punto B. Tómense también los arcos AE y BF iguales, y desde los puntos E y F trácense EG, FK, perpendiculares a ADC. En consecuencia, puesto que el doble de DK subtiende al doble de BF y el doble de EG al doble de AE, por tanto son iguales DK y EG. Pero AG, por la VII proposición del libro III de los *Elementos* de Euclides, es menor que GE, también será menor que DK. Pero, en un tiempo igual, atravesaron GA y KD por los arcos iguales AE y BF; luego el movimiento es más lento alrededor del arco A, que alrededor del centro D.

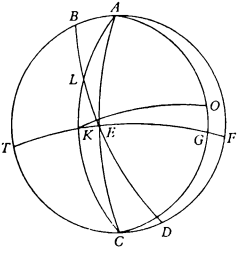
Demostrado esto, supóngase el centro de la Tierra en L, de tal modo que la línea recta LD sea perpendicular al plano ABC del semicírculo, y por los puntos A, C, descríbase con centro en L la circunferencia del círculo AMC, y trácese LDM en línea recta. Por tanto estará en M el polo del semicírculo ABC y ADC será la sección común de los círculos, y únase LA, LC, y de igual modo LK, LG, extendidas las cuales en línea recta cortarán al arco AMC en N, O. En consecuencia, puesto que el ángulo LDK es recto, será agudo el LKD. También, puesto que la línea LK es más larga que LD, tanto más en los triángulos obtusángulos el lado LG es mayor que el lado LK, y LA mayor que el LG.

Descrito el círculo con centro en L, con la distancia [radio] LK, caerá fuera de LD, pero cortará a las restantes LG y LA; descríbase y sea PKRS. Y puesto que el triángulo LDK es menor que el sector LPK, pero el triángulo LGA es mayor que el sector LRS, y por tanto la proporción del triángulo LDK al sector LPK es menor que la del triángulo LGA al sector LRS, estará a su vez el triángulo LDK al triángulo LGA en menor proporción que el sector LPK al sector LRS: pero por la proposición I del libro VI de los *Elementos* de Euclides, tal como el triángulo LDK es al triángulo LGA, así la base DK es a la base AG. Pero la proporción de sector a sector es como la del ángulo DLK al ángulo RLS, o sea, del arco MN al OA. Pero ya demostramos que entre DK y GA hay una proporción menor que entre MN y OA, que se entienden descritos en intervalos iguales de tiempo a través de los polos de la Tierra, según AE y BF arcos iguales de anomalías: esto era lo que había que demostrar.

Pero en verdad, siendo pequeña la diferencia entre la máxima y la mínima oblicuidad, que no excede las dos quintas partes de un grado, será también insensible la dife-

rencia entre la curva AMC y la recta ADC, por lo que no saldría ningún error si hubiéramos operado con la línea ADC y el semicírculo ABC. Lo mismo casi acontece con respecto al otro movimiento de los polos, el que se refiere a los equinoccios, puesto que no asciende ni a medio grado, como aparecerá más abajo.

Sea, de nuevo, el círculo ABCD a través de los polos de la eclíptica y del ecuador medio, al que podríamos llamar coluro medio de Cáncer. Sea DEB la parte central del zodíaco, y el ecuador medio AEC, cortándose entre sí en el punto E, en el que estará el medio equinoccial. Sea el polo ecuatorial F, por el que describase el círculo máximo FET; el mismo será por tanto el coluro de los equinoccios medios, o sea, regulares. Separemos ya la libración de los equinoccios, por ser de más fácil demostración, de la [libración de la] oblicuidad de la eclíptica, tomando en el coluro EF el arco FG, por medio de éste entiéndase a G como polo ecuatorial separado del polo medio F, y teniendo a G como polo descríbase el semicírculo ALKC del ecuador aparente que cortará al zodíaco [eclíptica] en L. Será, pues, L el equinoccio aparente, distando del medio a través del arco LE, al cual produce EK que es igual a FG. Porque si con K convertido en polo hubiéramos descrito el círculo AGC, y se entendiera que el polo ecuatorial, en el tiempo en que se realiza la libración FG, no hubiera permanecido entretanto como polo verdadero en el punto G, sino que por el impulso de la otra libración hubiera avanzado hacia la oblicuidad de la eclíptica por el arco GO: en consecuencia, permaneciendo el zodíaco BED, se cambiará el ecuador verdadero por el aparente, de acuerdo con la trasposición del polo a O. Y del mismo modo, el movimiento de la sección L del equinoccio aparente será más rápido alrededor del punto medio E, lentísimo en los extremos, casi proporcional a la libración de los polos, ya demostrada. Lo que era preciso advertir.



6. ACERCA DE LOS MOVIMIENTOS REGULARES DE LA PRECESIÓN DE LOS EQUINOCCIOS Y DE LA DECLINACIÓN DEL ZODÍACO

Todo movimiento circular, aparentemente irregular, se realiza dentro de cuatro puntos límites; uno cuando aparece lento, otro cuando aparece veloz, por ejemplo en los extremos, otro cuando aparece mediano como en los puntos medios, puesto que desde el fin de la disminución [de velocidad] y del principio del incremento pasa a una [velocidad] media, desde la media aumenta, de nuevo desde la veloz tiende a la media, y desde allí, en lo que queda, de la uniforme vuelve a la primitiva lentitud. Con lo que puede comprenderse en qué parte del círculo ha estado la posición de la diversidad o anomalía, según el tiempo [dado], e incluso con esos indicios se percibe la renovación de la anomalía.[1]

1. Este círculo no es el círculo de libración, sino un círculo que tipifica el ciclo en velocidad que resulta al componer la libración con el movimiento regular de precesión de los equinoccios.

Así, en un círculo dividido en cuatro partes, sea A la posición de la máxima lentitud, B la media creciente, C el final del aumento y el principio de la disminución, D la media decreciente. En consecuencia, tal como se explicó más arriba, desde Timócaris a Ptolomeo, en comparación con los restantes tiempos, el movimiento aparente de precesión de los equinoccios se descubrió más lento, y puesto que en alguna ocasión aparecía igual y uniforme, según muestran las observaciones de Aristilo, Hiparco, Agripa y Menelao, en un tiempo medio [realizadas hacia la mitad del anterior período]: prueba simplemente que el movimiento aparente de los equinoccios había sido lentísimo, y en el período intermedio, en el principio del aumento, cuando cesando la disminución unida al aumento incipiente, por compensación mutua, se realiza de tal manera que el movimiento aparece como uniforme. Por lo tanto, hay que restablecer la observación de Timócaris hacia la última parte del círculo, bajo DA, y la de Ptolomeo cae dentro del primer cuadrante, bajo AB. Por el contrario, puesto que en el segundo intervalo, de Ptolomeo a Albatenio el Aratense, el movimiento se descubre más veloz que en el tercero, muestra que la máxima velocidad, esto es, el punto C, ha pasado ya el segundo intervalo de tiempo y que la anomalía ha llegado ya al tercer cuadrante del círculo, bajo CD, y desde el tercer intervalo hasta nosotros se ha completado poco más o menos la restauración de la anomalía y hemos vuelto al principio de Timócaris. Pues si dividimos todo el período de MDCCCXIX años, desde Timócaris hasta nosotros, en los CCCLX grados que se acostumbra, tendremos proporcionalmente para CCCCXXXII años un arco de XVC grados y medio, pero para DCCXLII años CXLVI grados, LI minutos, y para los DCVL restantes el arco restante de CXXVII grados, XXXIX minutos. En busca de la simplicidad admitimos estas conjeturas, pero examinándolo con un cálculo más estricto, en cuanto coincidieran más exactamente con las observaciones, encontramos que el movimiento de anomalía en MDCCCXIX años egipcios había excedido ya su revolución completa en XXI grados y XXIIII minutos, y el tiempo del período sólo contenía MDCCXVII años egipcios: por lo que se puso de manifiesto que el primer segmento del círculo tiene XC grados, XXXV minutos; el otro CLV grados, XXXIIII minutos; y el tercero en DXLIII años, contendrá los restantes grados del círculo, CXIII, LI minutos.

Establecido así esto, también se manifestó el movimiento medio de la precesión de los equinoccios, y que era de XXIII grados, LVII minutos, en los MICCXVII años, en los que toda la irregularidad volvió a su primitivo estado, puesto que en MDCCCXIX años tuvimos un movimiento aparente de XXV grados y casi un minuto. Pero desde Timócaris, en los CII años que existen de diferencia entre MDCCCXIX y MDCCXVII años, convenía que el movimiento aparente hubiera sido aproximadamente de I grado, IIII minutos, y por esto, el que entonces hubiera sido algo mayor es verosímil, ya que cada cien años mediría un grado, mientras decrecía hasta el fin de la disminución, no habiéndola conseguido aún. Por tanto, si quitamos I grado y una quinceava parte [4 minutos] de los XXV grados, I minuto, quedará lo que se ha dicho, en MDCCXVII años egipcios un movimiento medio y regular de XXIII grados, LVII minutos, igualado ahora con el irregular y aparente, con lo que la íntegra y regular revolución de la precesión de los equinoccios se eleva a $\overline{\text{XXV}}$ DCCCXVI años, en cuyo tiempo se producen XV circuitos de anomalía con casi XXVIII partes [1/28 del circuito].

También se acomoda a esta proporción el movimiento de oblicuidad, cuyo retorno, señalábamos, es doblemente más lento que la precesión de los equinoccios. Pues lo que Ptolomeo presentó, que la oblicuidad de XXIII grados, LI minutos, XX segundos, había variado lo mínimo en CCCC años desde Aristarco de Samos, indica que la mis-

ma se había mantenido entonces en el límite de la máxima oblicuidad, cuando a su vez la precesión de los equinoccios se producía con el movimiento más lento. Pero también ahora, mientras llega la restauración de la lentitud, la inclinación del eje no tiende al máximo, sino hacia lo mínimo; la cual, en un período intermedio, Albatenio (según se ha dicho) descubrió como de XXIII grados, XXXV minutos, CXC años después de éste, Arzaquel el Hispano en XXIII grados, XXXIIII minutos, y CCXXX años después, Prophatius el Judío aproximadamente en dos minutos menos.

Finalmente, en lo que concierne a nuestro tiempo, nosotros, después de XXX años de frecuente observación, encontramos XXIII grados, XXVIII minutos y casi dos quintas partes de minuto, de los que poco difieren Georg Peurbach y Johann Regiomontanus, que próximamente nos precedieron. Donde de nuevo aparece clarísimo que el cambio de oblicuidad desde Ptolomeo hasta CM años después ha resultado mayor que en cualquier otro intervalo de tiempo, Así pues, teniendo ya el circuito de anomalías de precesión en MDCCXVII años, tendremos también en ese tiempo la mitad del período de oblicuidad, y en MMMCCCCXXXIIII años su restitución completa. Por lo que, si CCCLX hubieran sido repartidos entre el mismo número de $\overline{\text{III}}$ CCCCXXXIIII años, o CLXXX grados entre MDCCXVII, mostrará el movimiento anual de la anomalía simple en VI minutos, XVII segundos, XXIIII terceros, IX cuartos. Éstos, a su vez, distribuidos entre los CCCLXV días, dan un movimiento diario de I segundo, II terceros, II cuartos. De la misma manera, distribuyendo la precesión media de los equinoccios entre los MDCCXVII años, que era de XXIII grados, LVII minutos, mostrará el movimiento anual en L segundos, XII terceros, V cuartos, y el movimiento diario a través de los CCCLXV días, en VIII terceros, XV cuartos.

Para que estos movimientos se hagan más accesibles y se tengan a la mano, cuando sea oportuno, expondremos las tablas o cánones de ellos mediante una continua e igual adición del movimiento anual, reduciendo siempre LX a la fracción superior o a grados, si hubieran excedido esa cantidad; y completaremos las tablas hasta un orden de LX años para mayor comodidad, puesto que cada sesenta años los números presentan el mismo aspecto, trasponiendo sólo las denominaciones de grados y minutos, de manera que aparezcan como minutos lo que antes eran segundos, y así sucesivamente.[1] En tal compendio, por medio de estas tablas, se podrá por lo menos, con doble entrada, encontrar y calcular por debajo de $\overline{\text{III}}$ DC años los movimientos regulares en los años propuestos. Del mismo modo se realiza también con el número de los días.

Usaremos asimismo en el cálculo de los movimientos celestes los años egipcios, que son los únicos que se han encontrado iguales entre los pueblos. Pues convenía que la medida coincidiera con lo medido, porque en los años de los romanos, de los griegos y de los persas, no sólo no coincidían, sino que a éstos, y no de un modo único, se le agrega según le place a cada uno de los pueblos. En efecto, el año egipcio no comporta ambigüedad con respecto a un número fijo de CCCLXV días, en los cuales (a los que ellos por orden llaman con sus nombres: Thoth, Phaophi, Athyr, Choiac, Tybi, Mechir, Phamenoth, Pharmuthi, Pachon, Payni, Epiphi, Mesori) por igual están comprendidos seis grupos de sesenta días, y a los cinco días restantes los llaman intercalares. Y por eso los años de los egipcios son los que mejor se acomodan al cálculo de los movimientos regulares, a los que se reducen con mucha facilidad otros años cualesquiera por la reducción de los días.

1. Es decir, la misma configuración de números se repite en múltiplos de sesenta años, porque el ciclo del movimiento está dividido según un sistema sexagesimal, tal como se repetiría en múltiplos de diez años si el círculo estuviera dividido según el sistema decimal.

Movimiento regular de precesión de los equinoccios en años y períodos de sesenta años

Años	60°	Movimiento °	'	"	'''	Años	60°	Movimiento °	'	"	'''
1	0	0	0	50	12	31	0	0	25	56	14
2	0	0	1	40	24	32	0	0	26	46	26
3	0	0	2	30	36	33	0	0	27	36	38
4	0	0	3	20	48	34	0	0	28	26	50
5	0	0	4	11	0	35	0	0	29	17	2
6	0	0	5	1	12	36	0	0	30	7	15
7	0	0	5	51	24	37	0	0	30	57	27
8	0	0	6	41	36	38	0	0	31	47	39
9	0	0	7	31	48	39	0	0	32	37	51
10	0	0	8	22	0	40	0	0	33	28	3
11	0	0	9	12	12	41	0	0	34	18	15
12	0	0	10	2	25	42	0	0	35	8	27
13	0	0	10	52	37	43	0	0	35	58	39
14	0	0	11	42	49	44	0	0	36	48	51
15	0	0	12	33	1	45	0	0	37	39	3
16	0	0	13	23	13	46	0	0	38	29	15
17	0	0	14	13	25	47	0	0	39	19	27
18	0	0	15	3	37	48	0	0	40	9	40
19	0	0	15	53	49	49	0	0	40	59	52
20	0	0	16	44	1	50	0	0	41	50	4
21	0	0	17	34	13	51	0	0	42	40	16
22	0	0	18	24	25	52	0	0	43	30	28
23	0	0	19	14	37	53	0	0	44	20	40
24	0	0	20	4	50	54	0	0	45	10	52
25	0	0	20	55	2	55	0	0	46	1	4
26	0	0	21	45	14	56	0	0	46	51	16
27	0	0	22	35	26	57	0	0	47	41	28
28	0	0	23	25	38	58	0	0	48	31	40
29	0	0	24	15	50	59	0	0	49	21	52
30	0	0	25	6	2	60	0	0	50	12	5

Movimiento regular de precesión de los equinoccios en días y períodos de sesenta días

Días	60°	*Movimiento* °	'	"	"'	*Días*	60°	*Movimiento* °	'	"	"'
1	0	0	0	0	8	31	0	0	0	4	15
2	0	0	0	0	16	32	0	0	0	4	24
3	0	0	0	0	24	33	0	0	0	4	32
4	0	0	0	0	33	34	0	0	0	4	40
5	0	0	0	0	41	35	0	0	0	4	48
6	0	0	0	0	49	36	0	0	0	4	57
7	0	0	0	0	57	37	0	0	0	5	5
8	0	0	0	1	6	38	0	0	0	5	13
9	0	0	0	1	14	39	0	0	0	5	21
10	0	0	0	1	22	40	0	0	0	5	30
11	0	0	0	1	30	41	0	0	0	5	38
12	0	0	0	1	39	42	0	0	0	5	46
13	0	0	0	1	47	43	0	0	0	5	54
14	0	0	0	1	55	44	0	0	0	6	3
15	0	0	0	2	3	45	0	0	0	6	11
16	0	0	0	2	12	46	0	0	0	6	19
17	0	0	0	2	20	47	0	0	0	6	27
18	0	0	0	2	28	48	0	0	0	6	36
19	0	0	0	2	36	49	0	0	0	6	44
20	0	0	0	2	45	50	0	0	0	6	52
21	0	0	0	2	53	51	0	0	0	7	0
22	0	0	0	3	1	52	0	0	0	7	9
23	0	0	0	3	9	53	0	0	0	7	17
24	0	0	0	3	18	54	0	0	0	7	25
25	0	0	0	3	26	55	0	0	0	7	42
27	0	0	0	3	42	57	0	0	0	7	50
28	0	0	0	3	51	58	0	0	0	7	58
29	0	0	0	3	59	59	0	0	0	8	6
30	0	0	0	4	7	60	0	0	0	8	15

Movimiento de anomalía de los equinoccios en años y períodos de sesenta años

Años	60°	Movimiento °	'	"	'''	Años	60°	Movimiento °	'	"	'''
1	0	0	6	17	24	31	0	3	14	59	28
2	0	0	12	34	48	32	0	3	21	16	52
3	0	0	18	52	12	33	0	3	27	34	16
4	0	0	25	9	36	34	0	3	33	51	41
5	0	0	31	27	0	35	0	3	40	9	5
6	0	0	37	44	24	36	0	3	46	26	29
7	0	0	44	1	49	37	0	3	52	43	53
8	0	0	50	19	13	38	0	3	59	1	17
9	0	0	56	36	37	39	0	4	5	18	42
10	0	1	2	54	1	40	0	4	11	36	6
11	0	1	9	11	25	41	0	4	17	53	30
12	0	1	15	28	49	42	0	4	24	10	54
13	0	1	21	46	13	43	0	4	30	28	18
14	0	1	28	3	38	44	0	4	36	45	42
15	0	1	34	21	2	45	0	4	43	3	6
16	0	1	40	38	26	46	0	4	49	20	31
17	0	1	46	55	50	47	0	4	55	37	55
18	0	1	53	13	14	48	0	5	1	55	19
19	0	1	59	30	38	49	0	5	8	12	43
20	0	2	5	48	3	50	0	5	14	30	7
21	0	2	12	5	27	51	0	5	20	47	31
22	0	2	18	22	51	52	0	5	27	4	55
23	0	2	24	40	25	53	0	5	33	22	20
24	0	2	30	57	39	54	0	5	39	39	44
25	0	2	37	15	3	55	0	5	45	57	8
26	0	2	43	32	27	56	0	5	52	14	32
27	0	2	49	49	52	57	0	5	58	31	56
28	0	2	56	7	16	58	0	6	4	49	20
29	0	3	2	24	40	59	0	6	11	6	45
30	0	3	8	42	4	60	0	6	17	24	9

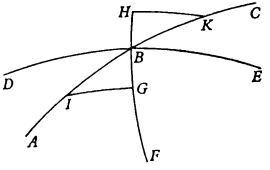
Movimiento de anomalía de los equinoccios en días y períodos de sesenta días

Días	*Movimiento*					*Días*	*Movimiento*				
	60°	°	'	"	"'		60°	°	'	"	"'
1	0	0	0	1	2	31	0	0	0	32	3
2	0	0	0	2	4	32	0	0	0	33	5
3	0	0	0	3	6	33	0	0	0	34	7
4	0	0	0	4	8	34	0	0	0	35	9
5	0	0	0	5	10	35	0	0	0	36	11
6	0	0	0	6	12	36	0	0	0	37	13
7	0	0	0	7	14	37	0	0	0	38	15
8	0	0	0	8	16	38	0	0	0	39	17
9	0	0	0	9	18	39	0	0	0	40	19
10	0	0	0	10	20	40	0	0	0	41	21
11	0	0	0	11	22	41	0	0	0	42	23
12	0	0	0	12	24	42	0	0	0	43	25
13	0	0	0	13	26	43	0	0	0	44	27
14	0	0	0	14	28	44	0	0	0	45	29
15	0	0	0	15	30	45	0	0	0	46	31
16	0	0	0	16	32	46	0	0	0	47	33
17	0	0	0	17	34	47	0	0	0	48	35
18	0	0	0	18	36	48	0	0	0	49	37
19	0	0	0	19	38	49	0	0	0	50	39
20	0	0	0	20	40	50	0	0	0	51	41
21	0	0	0	21	42	51	0	0	0	52	43
22	0	0	0	22	44	52	0	0	0	53	45
23	0	0	0	23	46	53	0	0	0	54	47
24	0	0	0	24	48	54	0	0	0	55	49
25	0	0	0	25	50	55	0	0	0	56	51
26	0	0	0	26	52	56	0	0	0	57	53
27	0	0	0	27	54	57	0	0	0	58	55
28	0	0	0	28	56	58	0	0	0	59	57
29	0	0	0	29	58	59	0	0	1	0	59
30	0	0	0	31	1	60	0	0	1	2	2

7. CUÁL PUEDE SER LA MÁXIMA DIFERENCIA ENTRE LA PRECESIÓN REGULAR Y LA APARENTE DE LOS EQUINOCCIOS

Expuestos de este modo los movimientos medios, se ha de investigar ahora cuánta pueda ser la diferencia máxima entre el movimiento regular y el aparente de los equinoccios, o sea, el diámetro del pequeño círculo a través del cual gira el movimiento de anomalía.[1] Pues, conocido esto, será fácil distinguir otras cualesquiera diferencias de los mismos movimientos. Puesto que, según se dijo más arriba, entre la primera [observación] de Timócaris y la de Ptolomeo, bajo el segundo año de Antonino Pío, hubo CDXXXII años, en cuyo tiempo el movimiento medio fue de VI grados, sin embargo el aparente era de IIII grados, XX minutos, la diferencia entre ellos era de un grado, XL minutos; también el movimiento de anomalía doble[2] fue de XC grados, XXXV minutos, y pareció que en medio de este tiempo, o próximo a él, el movimiento aparente había alcanzado el hito de máxima lentitud, en el que es necesario que coincidiese con el movimiento medio y que en la misma sección de los círculos hubiera estado el [movimiento] verdadero y el medio de los equinoccios.[3] Por lo que, hecha la distribución en dos partes del movimiento y del tiempo, en cada parte las diferencias del movimiento irregular y del regular será de cinco sextos de un grado, que en una y otra parte están comprendidos en XLV grados, XVII minutos y medio del arco del círculo de anomalía.

Constituido esto así, sea ABC el arco de la eclíptica, DBE el arco medio del ecuador, y sea B la sección media de los equinoccios aparentes, o bien de Aries o bien de Libra, y por los polos de DBE descienda FB. Tómense también en ABC, a ambos lados, los arcos BI, BK, de cinco sextos de grado, de modo que IBK sea de I grado XL minutos. Introdúzcanse también dos arcos de los círculos equinocciales, IG y HK, formando ángulos rectos [perpendiculares] con FB, que se ha extendido hasta FBH. Pero digo en ángulos rectos, aunque sin embargo los polos de IG y HK generalmente están fuera del círculo BF, tomando parte en el movimiento de declinación, según se ha visto en la hipótesis, pero por una distancia muy pequeña, que cuando fuera la máxima no excedería una CCCCLava parte de un recto [90°/450], sin embargo usamos aquéllos como ángulos rectos para la percepción: pues ningún error aparecerá por esta causa. En consecuencia, puesto que en el triángulo IBG se conoce el ángulo IBG de



1. Es decir, cuál es el diámetro del círculo pequeño, a lo largo del cual tiene lugar la libración una y otra vez.

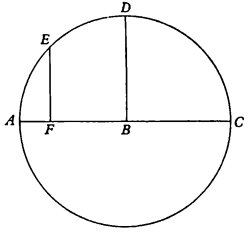
2. La anomalía de precesión es denominada «doble» anomalía porque completa dos ciclos por cada ciclo de la anomalía de oblicuidad.

3. Tal como Copérnico demostró en el capítulo 4, el movimiento de la libración, considerado anteriormente, parece más rápido en las proximidades del centro del círculo. Por consiguiente, el movimiento aparente parecerá más lento cuando el movimiento de libración más rápido esté en oposición al movimiento medio con el cual se compone. Y la libración más rápida está en oposición al movimiento medio cuando el equinoccio aparente está girando hacia el este y se halla en las proximidades el centro del círculo o del equinoccio medio.

LXVI grados, XX minutos, pues lo que falta para un recto [ángulo complementario] el DBA de XXIII grados, XL minutos, era el ángulo de la oblicuidad media de la eclíptica, y el ángulo BGI es recto, y también se conoce el BIG, aproximadamente igual a su alterno IBD, y el lado IB tiene L minutos: luego se da que BG, arco de la distancia de los polos del [ecuador] medio y aparente, es igual a XX minutos. De modo semejante, en el triángulo BHK los ángulos BHK y HBK son iguales a los dos ángulos IBG e IGB, y el lado BK igual al lado BI: igual será, por tanto, BH a BG, que tiene XX minutos.

Pero puesto que todo esto se refiere a cantidades mínimas, de modo que no alcanzan un grado y medio de la eclíptica, en las que las líneas rectas subtendidas [cuerdas] igualan casi a sus arcos y apenas aparece alguna diversidad en las terceras [divisiones (''')], no cometeremos ningún error si utilizamos líneas rectas en vez de arcos. Serán, pues, GB y BH proporcionales a IB y BK, y los movimientos estarán en una proporción semejante en unos y otros, tanto en los polos como en las intersecciones.

Sea ABC la porción del círculo de los signos [eclíptica], en la que el equinoccio medio sea B, tomado éste como polo descríbase el semicírculo ADC, que corte al círculo de los signos en los puntos A, C; también hágase bajar DB desde el polo del zodíaco, que en D bisecará al semicírculo descrito, en el que se entiende está el mayor límite de lentitud y el principio del aumento.[1] En el cuadrante AD, tómese el arco DE de XLV grados, XVII minutos y medio, y por el punto E desde el polo del zodíaco baje EF, y sea BF de L minutos; nuestro propósito es, partiendo de estos datos, hallar BFA completa. En consecuencia, está claro que el doble de BF subtiende al segmento doble de DE; pero así como BF de 7.107 unidades es a las 10.000 unidades de AFB, así los L minutos de BF son a los LXX de AFB: luego AB tiene I grado, X minutos, y tal es la máxima diferencia entre el movimiento medio y aparente de los equinoccios que buscábamos, y de la que se sigue la máxima desviación de los polos de XXVIII minutos.



8. SOBRE LAS DIFERENCIAS PARTICULARES DE LOS MISMOS MOVIMIENTOS Y SU EXPOSICIÓN CANÓNICA

Habiendo sido dado AB de LXX minutos, tal arco no parece diferir en nada de la recta subtensa [de la cuerda] según la longitud, no será difícil mostrar otras cualesquiera diferencias particulares entre los movimientos medios y los aparentes, a las que los griegos llaman «prostaféresis», los modernos «aequationes», que con sumas o restas ajustan las apariencias. Nosotros usaremos mejor el vocablo griego como el más adecuado.

En consecuencia, si ED hubiera sido de III grados, con respecto a la proporción de AB a la cuerda BF, tendremos la prostaféresis BF de IIII minutos; si VI grados, serán

1. Así, el círculo ADC es el círculo de libración trasladado del polo de la eclíptica al equinoccio.

VII minutos, por IX grados, XI minutos, y así sucesivamente. Con respecto al cambio de oblicuidad juzgamos que también debe hacerse con una proporción similar. Cuando entre la máxima y la mínima oblicuidad se encontraron, según hemos dicho, XXIIII minutos, que subtienden un semicírculo de anomalía simple cada MDCCXVII años, y la diferencia media subtendiendo un cuadrante del círculo será de XII minutos, entonces el polo del círculo pequeño de esta anomalía estará bajo una oblicuidad de XXIII grados, XL minutos. Y, según dijimos, de este modo extraeremos las restantes unidades de diferencia casi proporcionales a las predichas, según se contiene en la próxima tabla.

Aunque los movimientos aparentes pueden componerse de varios modos a través de estas demostraciones, gustó más aquel procedimiento por el que se toman por separado cada una de las prostaféresis particulares, con lo que se hace más fácil de comprensión el cálculo de los movimientos y concuerda mejor con las explicaciones de lo que ha sido demostrado. En consecuencia, hemos construido una tabla de sesenta líneas con incrementos de tres en tres grados. Así, ni ocupará una amplitud vasta, ni parecerá tener una brevedad demasiado ficticia, lo haremos de manera semejante a las demás. De este modo tendrá cuatro columnas, las dos primeras de las cuales contienen los grados de uno y otro semicírculo, a los que llamamos número común, y esto porque la oblicuidad del círculo de los signos se toma por medio de un número simple, y duplicado servirá como la prostaféresis [del movimiento] de los equinoccios, cuyo principio [el de los números] se toma desde el comienzo del aumento [de velocidad].[1]

En tercer lugar, se colocarán las prostaféresis de los equinoccios correspondientes a los tres grados simples, que hay que sumar o restar al movimiento medio, que medimos desde la primera estrella de la cabeza de Aries hasta el equinoccio de primavera; las prostaféresis sustractivas se corresponden con el semicírculo menor, o sea, con la primera columna, las aditivas con la segunda columna y semicírculo siguiente.

Finalmente, en último lugar están los minutos, llamados [las] diferencias en las proporciones de oblicuidad, que ascienden hasta la suma de sesenta, pues en lugar del máximo y mínimo exceso de oblicuidad de XXIIII minutos, ponemos LX, con los que ajustamos las unidades en proporción similar con respecto a la proporción de las otras diferencias [de oblicuidad], y por eso en el principio y fin de la anomalía ponemos LX; pero cuando se llega a un exceso de XXII minutos, como en la anomalía de XXXIII grados, en su lugar ponemos LV. Así L en lugar de XX minutos, como en la anomalía de XLVIII grados, y según este método en las otras, como en la tabla siguiente.[2]

1. Es decir, en el diagrama anterior, el primer cuadrante comprende el arco DA; y el cuarto cuadrante, el arco CD.

2. Así, supongamos que la línea FG, como en el capítulo 3, represente los colores de los solsticios. El punto F es el límite de máxima oblicuidad de la eclíptica, el punto G el de mínima oblicuidad, y por lo tanto la distancia FG es 28°. La distancia KN de la libración de los equinoccios es 2° 20'. En la tabla precedente, las anomalías de precesión y de oblicuidad fueron tomadas a partir del punto I y siguiendo la línea INF-KILGM.

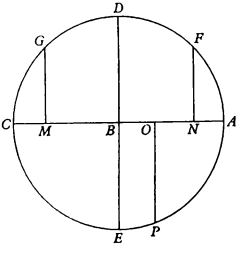
Tabla de la prostaféresis equinoccial y de la oblicuidad de la eclíptica

Números comunes		*Prostaféresis equinoccial*		*Minutos proporcionales de oblicuidad*	*Números comunes*		*Prostaféresis equinoccial*		*Minutos proporcionales de oblicuidad*
°	°	°	'		°	°	°	'	
3	357	0	4	60	93	267	1	10	28
6	354	0	7	60	96	264	1	10	27
9	351	0	11	60	99	261	1	9	25
12	348	0	14	59	102	258	1	9	24
15	345	0	18	59	105	255	1	8	22
18	342	0	21	59	108	252	1	7	21
21	339	0	25	58	111	249	1	5	19
24	336	0	28	57	114	246	1	4	18
27	333	0	32	56	117	243	1	2	16
30	330	0	35	56	120	240	1	1	15
33	327	0	38	55	123	237	0	59	14
39	321	0	44	53	129	231	0	54	11
42	318	0	47	52	132	228	0	52	10
45	315	0	49	51	135	225	0	49	9
48	312	0	52	50	138	222	0	47	8
51	309	0	54	49	141	219	0	44	7
54	306	0	56	48	144	216	0	41	6
57	303	0	59	46	147	213	0	38	5
60	300	1	1	45	150	210	0	35	4
63	297	1	2	44	153	207	0	32	3
66	294	1	4	42	156	204	0	28	3
69	291	1	5	41	159	201	0	25	2
72	288	1	7	39	162	198	0	21	1
75	285	1	8	38	165	195	0	18	1
78	282	1	9	36	168	192	0	14	1
81	279	1	9	35	171	189	0	11	0
84	276	1	10	33	174	186	0	7	0
87	273	1	10	32	177	183	0	4	0
90	270	1	10	30	180	180	0	0	0

9. SOBRE EL EXAMEN Y CORRECCIÓN DE LO QUE CON RESPECTO A LA PRECESIÓN DE LOS EQUINOCCIOS SE EXPUSO

Puesto que, por una conjetura, admitimos que el inicio del aumento en el movimiento diferente [de anomalía] había sucedido en una época intermedia entre el año XXXVI del primer período según Calippo hasta el segundo año de Antonino, a partir de este principio medimos el movimiento de anomalía: de modo que ahora conviene que nosotros experimentemos si procedimos correctamente y si coincide con los datos observados. Repitamos aquellas tres observaciones sobre las estrellas hechas por Timócaris, Ptolomeo y Albatenio el Aratense: y quedó claro que en el primer intervalo hubo CCCCXXXII años egipcios, en el segundo DCCXLII años. El movimiento regular en el primer espacio de tiempo era de VI grados, el irregular de IIII grados, XX minutos, el de anomalía doble de XC grados, XXXV minutos, restando I grado, XL minutos al movimiento regular. En el segundo, el movimiento regular fue de X grados, XXI minutos, el irregular de XI grados y medio, el de anomalía doble de CLV grados, XXXIIII minutos, añadiéndole I grado, IX minutos al movimiento regular.

Sea ahora el arco del zodíaco, como antes, ABC, y en B, que es el equinoccio medio de primavera, tómese el polo, y siendo el arco AB de un grado, X minutos, descríbase el circulito ADCE. El movimiento regular de B entiéndase hacia A, esto es, hacia el oeste, y sea A el límite occidental, en el que el equinoccio irregular está más al oeste, y C el límite oriental, en el que se alcanza el límite máximo. También desde el polo del zodíaco, por el punto B, descienda DBE, que junto con el círculo del zodíaco cortará al pequeño círculo ADCE en cuatro partes, puesto que se cortan en ángulos rectos al ser trazadas ambas a través de los polos. Habiendo sido el movimiento en el hemiciclo ADC hacia el este, y en el restante CEA hacia el oeste, el punto medio de la lentitud del equinoccio aparente estará en D, a causa de la resistencia al avance del B, pero la máxima velocidad estará en E para los movimientos que avanzan hacia la misma dirección. Tómense también a un lado y otro de D los arcos FD, DG, ambos de XLV grados, XVII minutos y medio. Sea F el primer término de la anomalía que observó Timócaris, G el segundo que observó Ptolomeo, y P el tercero que observó Albatanio. Por tales puntos desciendan círculos máximos a través de los polos de la eclíptica FN, GM y OP, que todos son semejantes a líneas rectas en el pequeño círculo. En consecuencia, el arco FDG será de XC grados, XXXV minutos, de los que el círculo ADCE tiene CCCLX, restando del movimiento medio MN I grado, XL minutos, de los que ABC tiene II grados, XX minutos, y GCEP tiene CLV grados, XXXIIII minutos, añadiendo a MO I grado, IX minutos: por lo que la restante PAF de CXIII grados, LI minutos, añade a la restante ON XXXI minutos, de donde igualmente AB es de LXX minutos. Pero siendo todo el arco DGCEP de CC grados, LI minutos y medio, y EP el exceso del semicírculo de XX grados, LI minutos y medio, en consecuencia BO, considerado como una recta, por

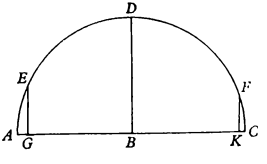


la tabla de las líneas subtendidas en un círculo [cuerdas], tendrá 356 unidades, de las que AB tiene 1.000: pero si AB tiene LXX minutos, BO tendrá aproximadamente XXIIII minutos, y BM se estableció en L minutos. En consecuencia, toda MBO tiene LXXIIII minutos y la restante NO de XXVI minutos. Pero en lo anteriormente establecido tenía MBO I grado, IX minutos, y la restante NO XXXI minutos. Faltan aquí V minutos, los que sobran allí. Por lo tanto, hay que girar el círculo hasta que se realice la compensación de una y otra parte. Y esto se habrá realizado si tomamos el arco DG de XLII grados y medio, teniendo la restante DF de XLVIII grados, V minutos. Pues por esto quedará claro que se ha dado satisfacción a uno y a otro error, y a todos los demás, puesto que tomado el principio en D, límite máximo de la lentitud, será el límite de anomalía en el primer intervalo todo el arco DGCEPAF de CCCXI grados, LV minutos, en el segundo DG de XLII grados y medio, en el tercero DGCEP de CIIC grados, IIII minutos. Y siendo AB de LXX minutos, en el primer término será añadida la prostaféresis BN de LII minutos, según las demostraciones precedentes, en el segundo se quita MB de IIIL minutos y medio. Y en el tercer término, de nuevo se añade BO de casi XXI minutos. En consecuencia, todo MN comprende en el primer intervalo I grado XL minutos, también todo MBO en el segundo comprende I grado IX minutos: todo lo cual coincide bastante con los datos observados. Con lo que también se manifiesta que la anomalía simple en el primer término es de CLV grados, LVII minutos y medio, en el segundo de XXI grados, XV minutos, en el tercero de IC grados, II minutos: lo que debíamos demostrar.

10. CUÁL PUEDE SER LA MÁXIMA DIFERENCIA ENTRE LAS INTERSECCIONES DEL ECUADOR Y DEL ZODÍACO [ECLÍPTICA]

Del mismo modo comprobaremos y descubriremos que se tomó correctamente todo lo expuesto acerca del cambio de la oblicuidad de la eclíptica y del ecuador. Tuvimos, pues, hasta el año segundo de Antonino, según Ptolomeo, una anomalía simple corregida de XXI grados y un cuarto, bajo la cual se halló una oblicuidad máxima de XXIII grados, LI minutos, XX segundos. Desde este momento hasta nuestra observación, hay alrededor de MCCCLXXXVII años, en los que la posición de la anomalía simple se calcula en CXLIIII grados, IIII minutos: y en ese tiempo aparece una oblicuidad de XXIII grados, XXVIII minutos, con casi dos quintos de minuto.

Acerca de esto, repítase el arco ABC del zodíaco, o en lugar de él, por su exigüidad, una recta, y sobre la recta el hemiciclo de anomalía simple con el polo en B, como antes. Sea A el límite máximo de la declinación, C el mínimo, cuya diferencia averiguaremos. Tómese, pues, un arco AE del círculo pequeño de XXI grados, XV minutos, y ED lo que queda del cuadrante será de LXVIII grados, XLV minutos, y toda EDF, según el cálculo, de CXLIIII grados, IIII minutos, y el resto DF de LXXV grados, XIX minutos. Trácense EG y FK, perpendiculares al diámetro ABC. Y el arco GK del círculo máximo, a causa de la



diferencia de las oblicuidades desde Ptolomeo a la conocida por nosotros, será de XXII minutos, LVI segundos. Pero GB, similar a una recta, es la mitad de la cuerda del doble de ED, o igual a 932 unidades de las que AC sería a manera de diámetro de 2.000 unidades, de las que también KB, la mitad de la cuerda del doble de DF, sería de 967 unidades; toda GK es conocida como de 1.899 unidades de éstas, de las que AC tiene 2.000. Pero teniendo GK XXII minutos, LVI segundos, AC tendrá aproximadamente XXIIII minutos, la diferencia entre la máxima y la mínima oblicuidad que estamos examinando. Con lo que consta que la máxima oblicuidad entre Timócaris y Ptolomeo fue de XXIII grados, LII minutos completos, y ahora tiende a una oblicuidad mínima de XXIII grados, XXVIII minutos. Así pues, se encuentra que cualesquiera inclinaciones medias de estos círculos se relacionan en la misma proporción que expusimos acerca de las precesiones.

11. SOBRE LA DETERMINACIÓN DE LAS POSICIONES. DE LOS MOVIMIENTOS REGULARES DE LOS EQUINOCCIOS Y DE LA ANOMALÍA

Expuestas así todas estas cosas, falta que determinemos las posiciones de los movimientos del equinoccio primaveral, llamadas raíces por algunos, de las que, en cualquier tiempo propuesto, se han deducido cálculos. Ptolomeo coloca el hito más alejado de esta cuestión al principio del reinado de Nabonasar de los caldeos, al que muchos, equivocados por la afinidad del nombre creyeron que era Nabucodonosor, a éste la razón de los tiempos y la suposición de Ptolomeo declara muy posterior, todo lo cual, según los historiadores, coincide con el rey de los caldeos Salmanasar. Pero nosotros juzgamos que habíamos seguido una cronología bastante más conocida, si empezáramos desde la primera Olimpíada, la cual está mostrado que precedió a Nabonasar en XXVIII años, tomada la señal desde el solsticio de verano, en cuyo tiempo Canícula empezaba a surgir para los griegos, y se celebraban los juegos olímpicos, según manifestaron Censorio, y otros probados autores. De donde, según un cálculo más exacto de los tiempos, que es necesario en el cómputo de los movimientos celestes, desde la primera Olimpíada, desde el mediodía, del día primero del mes Hecatombaeano de los griegos, hasta Nabonasar, hasta el mediodía del primer día del mes Thot según los egipcios, hay XXVII años y CCXLVII días. Desde aquí hasta la muerte de Alejandro hay CCCCXXIIII años egipcios, desde la muerte de Alejandro al principio de los años de Julio César hay CCLXXVIII años egipcios, CXVIII y medio días hasta la media noche anterior a las calendas de enero [1 de enero], donde Julio César tomó el principio del año constituido por él, que como pontifex maximus en su tercer consulado que compartía con M. Emilio Lépido instituyó tal año. Así, a partir de este año ordenado por Julio César, los siguientes se llaman julianos y éstos para los romanos son ciertamente XVIII desde el cuarto consulado de César hasta Octavio Augusto, los mismos que calendas de enero, aunque el día XVI antes de las calendas de febrero [mitad de enero] Augusto fuera nombrado emperador e hijo del divino Julio César por el senado y por los demás ciudadanos, según la opinión de Numatius Plancus, siendo cónsules él por séptima vez y M. Vipsanus. Pero los egipcios, que habían caído un bienio antes bajo el poder de los romanos, después de la muerte de Antonio y Cleopatra, tie-

nen XV años, CCXLVI días y medio al mediodía del primer día del mes Thoth, que para los romanos es el tercero antes de las calendas de septiembre [30 de agosto]. Por lo que desde Augusto hasta los años de Cristo, que empiezan de igual modo desde enero, hay según los romanos XXVII años, pero según los egipcios XXVIIII de sus años y CXXX días y medio. Desde aquí hasta el segundo año de Antonino, en el que C. Ptolomeo describió las posiciones de las estrellas observadas por él, hay CXXXVIII años romanos, LV días, los cuales años añaden XXXVII días a los egipcios. Desde la primera Olimpíada hasta aquí se calculan CMXIII años, CI días.

En dicho tiempo, la precesión regular de los equinoccios es de XII grados, XLVII minutos; XCV grados, XLVII minutos de anomalía simple. Pero en el año segundo de Antonino, según se manifestó, el equinoccio de primavera estaba al oeste de la primera de las estrellas que están en la cabeza de Aries, en VI grados y XL minutos, y siendo la anomalía doble de XLII grados y medio, la diferencia sustractiva del movimiento regular y el aparente fue de XLVIII minutos, la cual cuando hubiera sido restituida al movimiento aparente de VI grados, XL minutos, determina la posición media del equinoccio primaveral en VII grados, XXVIII minutos. A los que, si hubiéramos añadido CCCLX grados de un círculo, y de la suma hubiéramos quitado XII grados, XLVII minutos, tendríamos con respecto a la primera Olimpíada, que comenzó a mediodía del primer día del mes Hecatombaeon para los atenienses, la posición media del equinoccio primaveral a CCCLIIII grados, XLVII minutos, es decir, que entonces estaba al este de la primera estrella de Aries en V grados, XVI minutos. De igual modo, si a los XXI grados, XV minutos, de anomalía simple, se les sustraen VC grados, XLV minutos, quedarán, para el mismo principio de la Olimpíada, CCXVC grados, XXX minutos, como posición de la anomalía simple. Pero a su vez, por adición hecha de los movimientos en relación con la distancia de los tiempos, desdeñándose siempre CCCLX grados cada vez que se hayan excedido, tendremos las posiciones o raíces del movimiento regular, el de [la muerte de] Alejandro de I grado, II minutos, de anomalía simple CCCXXXII grados, LII minutos, para el movimiento medio en la época de César corresponden IIII grados, LV minutos, de anomalía II grados, II minutos, para la posición media al principio de los años de Cristo V grados, XXXII minutos, de anomalía VI grados, XLV minutos. Y así determinaremos las raíces de los movimientos de los demás con respecto a cualquier punto de partida de tiempo tomado.

12. SOBRE EL CÁLCULO DE LA PRECESIÓN DEL EQUINOCCIO DE PRIMAVERA Y DE LA OBLICUIDAD

En consecuencia, cada vez que queramos determinar la posición del equinoccio de primavera, si desde el principio supuesto hasta el tiempo dado fueran los años desiguales, como son los de los romanos que usamos vulgarmente, los convertiremos en años iguales, o sea, egipcios. Y así, no usaremos en el cálculo de los movimientos regulares otros años nada más que los egipcios, por la causa que dijimos. Distribuiremos el número de años en grupos de sesenta, en la medida en que el número sea mayor de sesenta, y cuando hayamos introducido en la tabla de los movimientos a los grupos de sesenta, entonces omitiremos la primera columna que se presenta en los movimientos como lo que excede, y empezando desde la segunda columna, tomaremos los grupos de sesenta

grados, si los hubiera, con los restantes grados y minutos que siguen.[1] Después, en una segunda entrada, y desde la primera columna, tal como están, tomaremos con respecto a los restantes años los grupos de sesenta grados, los grados y minutos que concurran. Igualmente haremos con los días y con los grupos de sesenta días. Los cuales podríamos conectarlos con los movimientos regulares de acuerdo con las tablas de días y minutos (aunque en este lugar los minutos de día podrían despreciarse sin perjuicio, o incluso los propios días, por la lentitud de esos movimientos, ya que en el movimiento diario no se trata sino con respecto a fragmentos segundos y terceros), en consecuencia cuando hayamos agregado estas cosas a su raíz, añadiendo cada una a su correspondiente de la misma especie, y desechados seis grupos de sesenta grados, si excedieran, tendríamos con respecto al tiempo propuesto la posición media del equinoccio primaveral, en la distancia al oeste de la primera estrella de Aries, o en la distancia de esa estrella al este del equinoccio.

Del mismo modo determinaremos también la anomalía. Pero encontraremos los minutos de las proporciones correspondientes a la anomalía simple colocados en la última columna de la tabla de la diversidad [prostaféresis], los cuales conservaremos aparte. Después, en la tercera columna de la misma tabla correspondiendo a la anomalía doble encontraremos la prostaféresis, esto es, los grados y minutos en los que el verdadero movimiento difiere del medio. Y esta misma prostaféresis la restaremos del movimiento medio, si la anomalía doble fuera menor que un semicírculo. Pero si excediera al semicírculo, teniendo más de CXXC grados, la añadiremos al movimiento medio, y así lo que resulta, como suma o como resta, contendrá la precesión verdadera y aparente del equinoccio primaveral, o sea, cuánto a su vez la primera estrella de Aries se encuentra entonces alejada [elongación angular] del equinoccio primaveral. Por lo que, si buscaras la posición de cualquier otra estrella, añade el número de ésta asignado en el catálogo de las estrellas.

Pero puesto que las cosas que se efectúan por medio de trabajo suelen hacerse más claras con ejemplos, sea nuestro propósito encontrar la verdadera posición del equinoccio de primavera, a la vez que la oblicuidad de la eclíptica, el día XVI antes de las calendas de mayo del año de Cristo MDXXV, y cuánto distaría Spica en Virgo de dicho equinoccio. En consecuencia, queda claro que en los MDXXIIII años, CVI días, romanos desde el principio de los años de Cristo hasta este tiempo, han sido intercalados CCCLXXXI días (esto es, I año y XVI días), los cuales en años iguales hacen MDXXV y CXXII días, y constituyen XXV grupos de sesenta años y XXV años, y también dos grupos de sesenta días, más dos días. Así pues, a los XXV grupos de sesenta años corresponden en la tabla de movimientos medios XX grados, LV minutos, II segundos; a los XXV años, XX minutos, LV segundos; a los dos grupos de sesenta días, XVI segundos; a los dos días restantes corresponden fracciones terceras. Todo esto con su raíz, que era de V grados, XXXII minutos, suman XXVI grados, XLVIII minutos, precesión media del equinoccio primaveral. Del mismo modo, el movimiento de anomalía simple en los XXV grupos de sesenta años implica dos veces LX grados y XXXVII grados; XV minutos, III segundos; más en los XXV años, II grados, XXXVII minutos, XV segundos; en los dos grupos de sesenta días, II minutos, IIII segundos, y en los otros dos días, II segundos. Esto, más la raíz, que es de VI grados, XLV minutos, producen

1. Es decir, leyendo la columna de grados como 60^{m}, los minutos como grados, y así sucesivamente.

una anomalía simple de II grupos de sesenta, XLVI grados, XL minutos, por medio de la cual, en la última columna de la tabla de diversidades [prostaféresis], conservaré los minutos de las proporciones, que se utilizarán para buscar la oblicuidad, y sólo un minuto se encuentra en este caso. Después, duplicando la anomalía, que tendrá V grupos de sesenta, XXXIII grados, XX minutos, encuentra una prostaféresis positiva de XXXII minutos, porque la anomalía doble es mayor a un semicírculo, añadiéndola al movimiento medio, se muestra la verdadera y aparente precesión del equinoccio primaveral de XXVII grados, XXI minutos, a la que si finalmente le añadiera CLXX grados, que es la distancia [angular] de Spica en Virgo desde la primera estrella de Aries, tendré su posición al este del equinoccio de primavera a XVII grados y XXI minutos de Libra, donde casi se mostraba en el tiempo de nuestra observación.

Pero la oblicuidad de la eclíptica y la declinación cumplen este razonamiento, que, cuando haya LX minutos de proporción, colocado lo que excede en la tabla de las declinaciones, las diferencias, me refiero a la existente entre la máxima y mínima oblicuidad, se añaden enteramente a los grados de las declinaciones. Pero en el presente caso uno de aquellos minutos añade a la oblicuidad sólo XXIIII segundos. Por lo que las declinaciones de los grados de la eclíptica puestas en la tabla, en este tiempo permanecen como están, a causa de la mínima oblicuidad ahora próxima a nosotros, en otro tiempo cambiarían de modo más evidente.

De este modo, por ejemplo, si la anomalía simple hubiera sido de IC grados, como era en el año DCCCXXC de los egipcios, para la misma se dan XXV minutos de proporción. Pero así como LX minutos son a XXIIII, diferencia entre la máxima y la mínima oblicuidad, así XXV es a X; estos X añadidos a los XXVIII proporciona una oblicuidad existente en ese tiempo de XXIII grados, XXXVIII minutos. Entonces, si también quisiera conocer la declinación de alguna parte de la eclíptica, por ejemplo del tercer grado de Tauro, que está a XXXIII grados del equinoccio, encuentro en la tabla XII grados, XXXII minutos con un exceso de XII minutos. Pero así como LX es a XXV, así XII es a V, estos V añadidos a los grados de la declinación hacen XII grados, XXXVII minutos para los XXXIII grados de la eclíptica. Del mismo modo podríamos hacer con respecto a los ángulos de sección de la eclíptica y del ecuador y de las ascensiones rectas (si no gusta más mediante las proporciones entre los triángulos esféricos), excepto que conviene siempre añadir en aquéllos [ángulos de sección], restar en éstas [ascensiones rectas], de modo que todas las cosas de acuerdo con su tiempo se muestren más escrupulosamente.

13. ACERCA DE LA MAGNITUD Y DIFERENCIA DEL AÑO SOLAR

Aquello que se considera precesión de los equinoccios y de los solsticios, que según se ha dicho es producida por la inclinación del eje de la Tierra, lo confirmará también el movimiento anual del centro de la Tierra, tal como se muestra alrededor del Sol (de lo que trataremos ahora). En realidad conviene deducir que cuando se traslada la duración anual a otro equinoccio o solsticio, resulta desigual a causa del desigual cambio de los mismos términos: pues estas cosas están relacionadas entre sí. Por lo que hemos de definir y separar el año temporal [año trópico] del sidéreo. Dado que llamamos año natu-

ral al que nos regula los cuatro cambios [de estaciones] anuales, sideral el que retorna con respecto a alguna estrella no errante. Pero que el año natural, al que también llaman «vertente» [rotatorio], es desigual lo declaran muchísimas veces las observaciones de los antiguos. En efecto, Calippo, Aristarco de Samos y Arquímedes de Siracusa, determinaron que además de CCCLXV días enteros contenía la cuarta parte de un día, tomado el principio del año desde el solsticio de verano, según la costumbre de los atenienses.

Pero C. Ptolomeo, advirtiendo que era difícil incluso una aprehensión escrupulosa de los solsticios, no confió suficientemente en las observaciones de aquéllos y recurrió mejor a Hiparco, que dejó tras de sí no sólo solsticios solares, sino también equinoccios registrados en Rodas, y manifestó lo muy poco que faltaba para un cuarto de día, lo que luego Ptolomeo describió que era la tricentésima [1/300] parte de un día, de este modo: tomó el equinoccio de otoño, observado por aquél [Hiparco], lo más exactamente posible en Alejandría, en el año CLXXVII después de la muerte de Alejandro Magno, en el tercer día intercalar según los egipcios, a media noche, a la que seguía el cuarto intercalar. Después, Ptolomeo añade el equinoccio observado por él en Alejandría en el año tercero de Antonino, que era el año CCCCLXIII desde la muerte de Alejandro, en el día noveno del tercer mes de los egipcios, Arthyr, casi una hora después de la salida del Sol. Entre ésta y la observación de Hiparco, pasaron CCLXXXV años egipcios, LXX días, VII horas y la quinta parte de una hora, cuando deberían ser LXXI días y VI horas, si el año rotatorio hubiera tenido, además de los días enteros, una cuarta parte del día. En consecuencia, falta en CCLXXXV años, un día menos una vigésima parte de día. De donde se deduce que en CCC años faltaría un día completo.

También dedujo la misma interpretación partiendo del equinoccio de primavera. Pues mencionó lo anotado por Hiparco en el año CLXXVIII de Alejandro, en el día XXVII de Mechir, el sexto mes de los egipcios, a la salida del Sol, él mismo [Ptolomeo anotó] en el año CCCCLXIII [después de la muerte de Alejandro], en el séptimo día del mes Pachon, el noveno según los egipcios, una hora después de medio día o un poco más, que también en CCLXXXV años faltaba un solo día menos la vigésima parte de un día. Ayudado por estos indicios, Ptolomeo definió que el año rotatorio era de CCCLXV días, XIIII minutos, XLVIII segundos.[1]

Después de esto, Albatenio en Arata de Siria, con no menos habilidad consideró el equinoccio de otoño, en el año MCCVI después de la muerte de Alejandro, y encontró que éste había ocurrido después del séptimo día del mes Pachon, en la noche siguiente, a las VII horas y casi dos quintos, esto es, alrededor de IIII horas y tres quintos antes del amanecer del día octavo. En consecuencia, comparando esta consideración suya con aquella de Ptolomeo, hecha en el año tercero de Antonino, una hora después de la salida del Sol en Alejandría, que dista de Arata X grados hacia el ocaso [oeste], la adecuó a su meridiano aratense, con respecto al cual debía haber sido de una hora y dos tercios desde la salida del Sol. En consecuencia, en un intervalo de DCCXLIII años iguales había CLXXVIII días de más, XVII horas y III quintos [de hora], en vez de CXVC días y tres cuartas partes. Luego, faltando VII días y dos quintos de una hora, pareció que al cuarto [de día] le faltaba la centésima y sexta parte [1/106]. En consecuencia dividió siete días y dos quintos de hora por setecientos cuarenta y tres, según el

1. Es decir, Ptolomeo halló una deficiencia de 1/300 de día en el día añadido cada cuatro años.

número de años, y son XIII minutos de hora, XXXVI segundos, lo que restó del cuarto de día, y manifestó que el año natural contiene CCCLXV días, V horas, XLVI minutos, XXVII segundos.

Nosotros también observamos el equinoccio de otoño en Frauenburg, que podemos llamar Gynopolis, en el año MDXV del nacimiento de Cristo, en el día décimo octavo antes de las calendas de octubre: era, pues, en el año MDCCCXL de los egipcios después de la muerte de Alejandro, en el sexto día del mes Phaophi, media hora después de la salida del Sol. Pero, puesto que Arata está casi XXV grados más al oriente que nuestra región, que hacen II horas menos un tercio, luego transcurrieron en el tiempo medio entre el nuestro y el equinoccio de Albatenio, además de los DCXXXIII años egipcios, CLIII días, VI horas y tres cuartas partes de hora, en lugar de CLVIII días y VI horas. Pero desde aquella observación Alejandrina de Ptolomeo, hasta el lugar y tiempo de nuestra observación, hay MCCCLXXVI años egipcios, CCCXXXII días y media hora. Diferimos de Alejandría, pues, en casi una hora. Luego, desde el tiempo de Albatenio hasta nosotros, en DCXXXIII años, habiendo excedido en V días menos una hora y cuarto, por lo menos un día por cada CXXVIII años, sin embargo en MCCCLXXVI años desde Ptolomeo, XII días casi, por lo menos un día en CXV años, acontece porque en una y otra ocasión el año se produjo desigual.

Determinamos también el equinoccio primaveral, lo que se hizo al año siguiente, MDXVI después del nacimiento de Cristo, a las IIII horas y un tercio después de la medianoche que va hacia el día quinto antes de los idus de marzo. Hay desde aquel equinoccio primaveral de Ptolomeo (mantenida la comparación del meridiano alejandrino con el nuestro) MCCCLXXVI años egipcios, CCCXXXII días, XVI horas y un tercio, de donde también parecen que sean desiguales las distancias de los equinoccios de primavera y otoño. Por lo demás, es de mucho interés que el año solar tomado de este modo sea igual.

Puesto que en los equinoccios otoñales entre Ptolomeo y nosotros (se ha mostrado más arriba), según la igual distribución de los años, la centésima y quintadécima parte [1/115] que faltaba a la cuarta parte del día, no coincide con el equinoccio de Albatenio por medio día. Y tampoco el período que va de Albatenio hasta nosotros (en el que debía faltar a un cuarto de día la centésima vigésima octava parte del día) concuerda con Ptolomeo, sino que el número supera al equinoccio observado por el más allá de un día entero, al de Hiparco por encima de dos días. De igual modo el cálculo de Albatenio, medido desde Ptolomeo, excede al equinoccio de Hiparco en dos días.

Con mayor corrección se mide la igualdad del año solar desde la esfera de las estrellas no errantes, lo que encontró primero Thebites hijo de Chora, y cuya duración era de CCCLXV días, XV minutos de día, XXIII segundos de día, que son VI horas, IX minutos, XII segundos, aproximadamente, tomando verosímilmente como argumento que en el transcurso más lento de los equinoccios y solsticios el año parece más largo que en el transcurso más rápido, y esto según una proporción fija, lo que no podría realizarse si no existiera una igualdad en comparación con la esfera de las estrellas fijas. Por todo esto, Ptolomeo no debe ser oído en esta parte, el cual estimó absurdo y no pertinente el medir la igualdad anual del Sol con respecto a reintegrarse a la situación primitiva de las estrellas fijas, y que no coincide mejor que si esto lo hiciera alguien respecto de Júpiter o Saturno. Y así es patente la causa por la que antes de Ptolomeo había sido más largo el año estacional, y después de él se hizo más breve con una diferencia variable.

Pero acerca del año asteroide, o sea, sideral, puede producirse un error, aunque pequeño, y, con mucho, menor que el explicado, y esto sobre todo porque el movimiento

del centro de la Tierra alrededor del Sol aparece como desigual a causa de otra doble irregularidad. La primera y simple de estas diferencias tiene una reintegración a la situación primitiva anual, la otra, que varía modificando a la primera, no se percibe inmediatamente sino en un largo período de tiempo. Por lo que no es sencillo ni fácil conocer el cálculo de la igualdad anual. En efecto, si alguien quisiera averiguarla con respecto a la distancia fija de alguna estrella que tiene lugar conocido (lo que puede hacerse con la utilización del astrolabio, mediando la Luna, tal como ejemplificamos con respecto a Basiliscos en Leo), no podrá evitar el error sin dificultad, a no ser que entonces el Sol, por el movimiento de la Tierra, o no tuviera en aquel tiempo ninguna prostaféresis, o produzca otra similar e igual en cualquier otro término. Si no sucediera esto, y hubiera alguna diferencia en su irregularidad, no parecerá que en tiempos iguales se haya producido un circuito igual. Pero si en uno y otro término toda la diferencia haya sido sustraída o añadida proporcionalmente, el trabajo habrá sido perfecto.

Además, el conocimiento de la diversidad exige el previo conocimiento del movimiento medio, que por esta causa buscamos. Pero, para que lleguemos alguna vez a la resolución de este problema, encontramos cuatro causas de la desigualdad aparente. La primera es la irregularidad de la precesión de los equinoccios, que ya hemos expuesto; otra es que el Sol parece interceptar arcos desiguales de la eclíptica, lo que acontece casi anualmente; la tercera es también lo que hace variar a ésta, y a la que llamaremos segunda diversidad; la cuarta que queda es la que cambia los ápsides superior e inferior[1] del centro de la Tierra, según aparecerá más abajo. De todas ellas, sólo la segunda fue conocida por Ptolomeo, la cual por sí sola no hubiera podido producir la desigualdad anual, pero enlazada más bien con las otras la produce. Para demostrar la diferencia entre el movimiento regular y el aparente del Sol, no parece necesario el exactísimo cálculo del año, sino que parece ser suficiente si tomáramos para la demostración los CCCLXV días y un cuarto como duración del año, con los que se completa aquel movimiento de la primera irregularidad. Ya que difiere tan poco de todo el círculo que, tomando una magnitud menor, se desvanece casi por completo. Pero, para el buen orden y facilidad de la enseñanza expondremos primero los movimientos regulares de la revolución anual del centro de la Tierra, los que después demostraremos mediante las pruebas necesarias, junto con las diferencias entre la regularidad y la apariencia.

14. ACERCA DE LOS MOVIMIENTOS REGULARES Y MEDIOS DE LAS REVOLUCIONES DEL CENTRO DE LA TIERRA

Encontramos que la duración del año y su regularidad, que transmitió Thebit ben Chora, es mayor al menos en un segundo, X terceros, esto es, CCCLXV días, XV minutos, XXIIII segundos, X terceros, que equivalen a VI horas iguales, IX minutos, XXXX segundos y manifiesta una segura regularidad con respecto a la esfera de las estrellas no errantes. Luego, habiendo multiplicado CCCLX grados de un círculo por CCCLXV días, y habiendo dividido el resultado por CCCLXV días, XV minutos, XXIIII segundos, X ter-

1. Los ápsides son las posiciones de mayor y menor altura de un planeta con respecto al Sol.

ceros, tendremos el movimiento de un año egipcio en V grupos de sesenta, LIX grados, XLIIII minutos, IL segundos, VII terceros, IIII cuartos. Y el movimiento durante sesenta años semejantes (descontados los círculos íntegros) es de V veces sesenta grados, XLIIII grados, IL minutos, VII segundos, IIII terceros. A su vez, si dividimos el movimiento anual por CCCLXV días, tendremos un movimiento diario de LIX minutos, VIII segundos, II terceros, XXII cuartos. Por lo que, si añadiéramos a éstos la precesión regular y media de los equinoccios, compondremos un movimiento anual también regular en los años «temporales» [trópicos] de V veces sesenta, LIX grados, XLV minutos, XXXIX segundos, XIX terceros, VIIII cuartos, y un movimiento diario de LIX minutos, VIII segundos, XIX terceros, XXXVII cuartos. Y por esta razón, incluso a aquel movimiento del Sol (por usar la expresión vulgar) podemos llamarle simple regular, pero a éste regular compuesto: también éstos los expondremos en las tablas, del mismo modo a como lo hicimos con respecto a la precesión de los equinoccios. A las que se añade el movimiento regular de anomalía del Sol, del que trataremos después.

Tabla del movimiento regular simple del Sol en años y períodos de sesenta años

Años	60°	*Movimiento* °	'	"	'''	*Años*	60°	*Movimiento* °	'	"	'''
1	5	59	44	49	7	31	5	52	9	22	39
2	5	59	29	38	14	32	5	51	54	11	46
3	5	59	14	27	21	33	5	51	39	0	53
4	5	58	59	16	28	34	5	51	23	50	0
5	5	58	44	5	35	35	5	51	8	39	7
6	5	58	28	54	42	36	5	50	53	28	14
7	5	58	13	43	49	37	5	50	38	17	21
8	5	57	58	32	56	38	5	50	23	6	28
9	5	57	43	22	3	39	5	50	7	55	35
10	5	57	28	11	10	40	5	49	52	44	42
11	5	57	13	0	17	41	5	49	37	33	49
12	5	56	57	49	24	42	5	49	22	22	56
13	5	56	42	38	31	43	5	49	7	12	3
14	5	56	27	27	38	44	5	48	52	1	10
15	5	56	12	16	46	45	5	48	36	50	18
16	5	55	57	5	53	46	5	48	21	39	25
17	5	55	41	55	0	47	5	48	6	28	32
18	5	55	26	44	7	48	5	47	51	17	39
19	5	55	11	33	14	49	5	47	36	6	46
20	5	54	56	22	21	50	5	47	20	55	53
21	5	54	41	11	28	51	5	47	5	45	0
22	5	54	26	0	35	52	5	46	50	34	7
23	5	54	10	49	42	53	5	46	35	23	14
24	5	53	55	38	49	54	5	46	20	12	21
25	5	53	40	27	56	55	5	46	5	1	28
26	5	53	25	17	3	56	5	45	49	50	35
27	5	53	10	6	10	57	5	45	34	39	42
28	5	52	54	55	17	58	5	45	19	28	49
29	5	52	39	44	24	59	5	45	4	17	56
30	5	52	24	33	32	60	5	44	49	7	4

Movimiento simple del Sol en días, períodos de sesenta días y minutos de día

Días	*Movimiento* 60°	°	'	"	"'	*Días*	*Movimiento* 60°	°	'	"	"'
1	0	0	59	8	11	31	0	30	33	13	52
2	0	1	58	16	22	32	0	31	32	22	3
3	0	2	57	24	34	33	0	32	31	30	15
4	0	3	56	32	45	34	0	33	30	38	26
5	0	4	55	40	56	35	0	34	29	46	37
6	0	5	54	49	8	36	0	35	28	54	49
7	0	6	53	57	19	37	0	36	28	3	0
8	0	7	53	5	30	38	0	37	27	11	11
9	0	8	52	13	42	39	0	38	26	19	23
10	0	9	51	21	53	40	0	39	25	27	34
11	0	10	50	30	5	41	0	40	24	35	45
12	0	11	49	38	16	42	0	41	23	43	57
13	0	12	48	46	27	43	0	42	22	52	8
14	0	13	47	54	39	44	0	43	22	0	20
15	0	14	47	2	50	45	0	44	21	8	31
16	0	15	46	11	1	46	0	45	20	16	42
17	0	16	45	19	13	47	0	46	19	24	54
18	0	17	44	27	24	48	0	47	18	33	5
19	0	18	43	35	35	49	0	48	17	41	16
20	0	19	42	43	47	50	0	49	16	49	28
21	0	20	41	51	58	51	0	50	15	57	39
22	0	21	41	0	9	52	0	51	15	5	50
23	0	22	40	8	21	53	0	52	14	14	2
24	0	23	39	16	32	54	0	53	13	22	13
25	0	24	38	24	44	55	0	54	12	30	25
26	0	25	37	32	55	56	0	55	11	38	36
27	0	26	36	41	6	57	0	56	10	46	47
28	0	27	35	49	18	58	0	57	9	54	59
29	0	28	34	57	29	59	0	58	9	3	10
30	0	29	34	5	41	60	0	59	8	11	22

Movimiento regular compuesto del Sol en años y períodos de sesenta años

Años	60°	*Movimiento* °	'	"	'''	*Años*	60°	*Movimiento* °	'	"	'''
1	5	59	45	39	19	31	5	52	35	18	53
2	5	59	31	18	38	32	5	52	20	58	12
3	5	59	16	57	57	33	5	52	6	37	31
4	5	59	2	37	16	34	5	51	52	16	51
5	5	58	48	16	35	35	5	51	37	56	10
6	5	58	33	55	54	36	5	51	23	35	29
7	5	58	19	35	14	37	5	5	9	14	48
8	5	58	5	14	33	38	5	50	54	54	7
9	5	57	50	53	52	39	5	50	40	33	26
10	5	57	36	33	11	40	5	50	26	12	46
11	5	57	22	12	30	41	5	50	11	52	5
12	5	57	7	51	49	42	5	49	57	31	24
13	5	56	53	31	8	43	5	49	43	10	43
14	5	56	39	10	28	44	5	49	28	50	2
15	5	56	24	49	47	45	5	49	14	29	21
16	5	56	10	29	6	46	5	49	0	8	40
17	5	55	56	8	25	47	5	48	45	48	0
18	5	55	41	47	44	48	5	48	31	27	19
19	5	55	27	27	3	49	5	48	17	6	38
20	5	55	13	6	23	50	5	48	2	45	57
21	5	54	58	45	42	51	5	47	48	25	16
22	5	54	44	25	1	52	5	47	34	4	35
23	5	54	30	4	20	53	5	47	19	43	54
24	5	54	15	43	39	54	5	47	5	23	14
25	5	54	1	22	58	55	5	46	51	2	33
26	5	53	47	2	17	56	5	46	36	41	52
27	5	53	32	41	37	57	5	46	22	21	11
28	5	53	18	20	56	58	5	46	8	0	30
29	5	53	4	0	15	59	5	45	53	39	49
30	5	52	49	39	34	60	5	45	39	19	9

Movimiento compuesto del Sol en días, períodos de sesenta días y minutos de días

Días	*Movimiento* 60°	°	'	"	"'	*Días*	*Movimiento* 60°	°	'	"	"'
1	0	0	59	8	19	31	0	30	33	18	8
2	0	1	58	16	39	32	0	31	32	26	27
3	0	2	57	24	58	33	0	32	31	34	47
4	0	3	56	33	18	34	0	33	30	43	6
5	0	4	55	41	38	35	0	34	29	51	26
6	0	5	54	49	57	36	0	35	28	59	46
7	0	6	53	58	17	37	0	36	28	8	5
8	0	7	53	6	36	38	0	37	27	16	25
9	0	8	52	14	56	39	0	38	26	24	45
10	0	9	51	23	16	40	0	39	25	33	4
11	0	10	50	31	35	41	0	40	24	41	24
12	0	11	49	39	55	42	0	41	23	49	43
13	0	12	48	48	15	43	0	42	22	58	3
14	0	13	47	56	34	44	0	43	22	6	23
15	0	14	47	4	54	45	0	44	21	14	42
16	0	15	46	13	13	46	0	45	20	23	2
17	0	16	45	21	33	47	0	46	19	31	21
18	0	17	44	29	52	48	0	47	18	39	41
19	0	18	43	38	12	49	0	48	17	48	1
20	0	19	42	46	32	50	0	49	16	56	20
21	0	20	41	54	51	51	0	50	16	4	40
22	0	21	41	3	11	52	0	51	15	13	0
23	0	22	40	11	31	53	0	52	14	21	19
24	0	23	39	19	50	54	0	53	13	29	39
25	0	24	38	28	10	55	0	54	12	37	58
26	0	25	37	36	30	56	0	55	11	46	18
27	0	26	36	44	49	57	0	56	10	54	38
28	0	27	35	53	9	58	0	57	10	2	57
29	0	28	35	1	28	59	0	58	9	11	17
30	0	29	34	9	48	60	0	59	8	19	37

Movimiento de anomalía[1] regular del Sol en años y períodos de sesenta años

Años	*Movimiento* 60°	°	'	"	'''	*Años*	*Movimiento* 60°	°	'	"	'''
1	5	59	44	24	46	31	5	51	56	48	11
2	5	59	28	49	33	32	5	51	41	12	58
3	5	59	13	14	20	33	5	51	25	37	45
4	5	58	57	39	7	34	5	51	10	2	32
5	5	58	42	3	54	35	5	50	54	27	19
6	5	58	26	28	41	36	5	50	38	52	6
7	5	58	10	53	27	37	5	50	23	16	52
8	5	57	55	18	14	38	5	50	7	41	39
9	5	57	39	43	1	39	5	49	52	6	26
10	5	57	24	7	48	40	5	49	36	31	13
11	5	57	8	32	35	41	5	49	20	56	0
12	5	56	52	57	22	42	5	49	5	20	47
13	5	56	37	22	8	43	5	48	49	45	33
14	5	56	21	46	55	44	5	48	34	10	20
15	5	56	6	11	42	45	5	48	18	35	7
16	5	55	50	36	29	46	5	48	2	59	54
17	5	55	35	1	16	47	5	47	47	24	41
18	5	55	19	26	3	48	5	47	31	49	28
19	5	55	3	50	49	49	5	47	16	14	14
20	5	54	48	15	36	50	5	47	0	39	1
21	5	54	32	40	23	51	5	46	45	3	48
22	5	54	17	5	10	52	5	46	29	28	35
23	5	54	1	29	57	53	5	46	13	53	22
24	5	53	45	54	44	54	5	45	58	18	9
25	5	53	30	19	30	55	5	45	42	42	55
26	5	53	14	44	17	56	5	45	27	7	42
27	5	52	59	9	4	57	5	45	11	32	29
28	5	52	43	33	51	58	5	44	55	57	16
29	5	52	27	58	38	59	5	44	40	22	3
30	5	52	12	23	25	60	5	44	24	46	50

1. Todo movimiento regular que, compuesto con el movimiento medio, produce una apariencia de irregularidad es denominado movimiento de anomalía. En este caso, el movimiento regular de anomalía es el movimiento del círculo excéntrico, o el primer epiciclo.

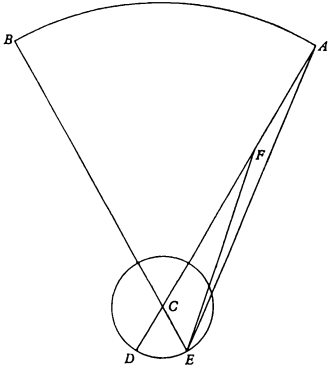
Tabla del movimiento de anomalía del Sol en días y períodos de sesenta días

Días	60°	*Movimiento* °	'	"	'''	*Días*	60°	*Movimiento* °	'	"	'''
1	0	0	59	8	7	31	0	30	33	11	48
2	0	1	58	16	14	32	0	31	32	19	55
3	0	2	57	24	22	33	0	32	31	28	3
4	0	3	56	32	29	34	0	33	30	36	10
5	0	4	55	40	36	35	0	34	29	44	17
6	0	5	54	48	44	36	0	35	28	52	25
7	0	6	53	56	51	37	0	36	28	0	32
8	0	7	53	4	58	38	0	37	27	8	39
9	0	8	52	13	6	39	0	38	26	16	47
10	0	9	51	21	13	40	0	39	25	24	54
11	0	10	50	29	21	41	0	40	24	33	2
12	0	11	49	37	28	42	0	41	23	41	9
13	0	12	48	45	35	43	0	42	22	49	16
14	0	13	47	53	43	44	0	43	21	57	24
15	0	14	47	1	50	45	0	44	21	5	31
16	0	15	46	9	57	46	0	45	20	13	38
17	0	16	45	18	5	47	0	46	19	21	46
18	0	17	44	26	12	48	0	47	18	29	53
19	0	18	43	34	19	49	0	48	7	38	0
20	0	19	42	42	27	50	0	49	16	46	8
21	0	20	41	50	34	51	0	50	15	54	15
22	0	21	40	58	42	52	0	51	15	2	23
23	0	22	40	6	49	53	0	52	14	10	30
24	0	23	39	14	56	54	0	53	13	18	37
25	0	24	38	23	4	55	0	54	12	26	45
26	0	25	37	31	11	56	0	55	11	34	52
27	0	26	36	39	18	57	0	56	10	42	59
28	0	27	35	47	26	58	0	57	9	51	7
29	0	28	34	55	33	59	0	58	8	59	14
30	0	29	34	3	41	60	0	59	8	7	22

15. PRINCIPIOS PARA DEMOSTRAR LA IRREGULARIDAD APARENTE DEL MOVIMIENTO SOLAR

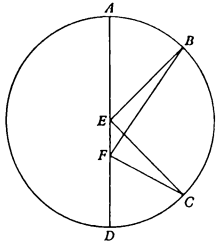
Para iniciar el estudio de la irregularidad aparente del Sol, demostraremos ahora con mayor claridad que, estando el Sol en el centro del mundo, alrededor del cual como centro se mueve la Tierra, si hubiera, como se ha dicho, una distancia entre el Sol y la Tierra que no puede apreciarse con respecto a la inmensidad de la esfera de las estrellas fijas, el Sol parecerá que se mueve regularmente con respecto a cualquier punto determinado o estrella de dicha esfera.

Sea, pues, AB un círculo máximo en el universo, en el plano de la eclíptica, sea su centro C, en el que se coloca el Sol, y de acuerdo con la distancia del Sol y la Tierra CD, con respecto a la cual la altitud del universo sería inmensa, descríbase el círculo DE en el mismo plano de la eclíptica, en el que se pone la revolución anual del centro de la Tierra. Digo que respecto a cualquier punto determinado o a una estrella en el círculo AB, el Sol parecerá moverse regularmente. Tómese [un punto] y éste sea A, hacia el que la visual del Sol desde la Tierra, que está en D, se prolonga como ACD. Muévase también la Tierra a través del arco DE, y desde el punto E de la Tierra trácese AE y BE; en consecuencia, se verá ahora el Sol desde E en el punto B; y puesto que AC es inmensa en comparación a CD, y éste es igual a CE, será también AE inmensa en comparación a CE. Tómese en AC un punto cualquiera F, y únase EF. Así pues, puesto que desde los extremos CE de la base, dos líneas rectas caen fuera del triángulo EFC, en el punto A, por la inversa de la proposición XXI del libro I de los *Elementos* de Euclides, el ángulo FAE será menor que el ángulo EFC. Por lo tanto, las líneas rectas tendidas hacia la inmensidad comprenden un ángulo CAE tan agudo que no puede discernirse aún con más amplitud: y a causa de éste [CAE] es por lo que BCA es un ángulo mayor que AEC, aunque éstos por una diferencia tan pequeña parecen iguales, y las líneas AC, AE paralelas, y el Sol parece moverse regularmente con respecto a cualquier punto de la esfera de las estrellas, como si girase alrededor del centro E: que era lo que se quería demostrar.



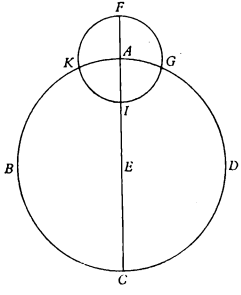
Pero su irregularidad se demuestra porque el movimiento del centro de la Tierra y su revolución anual no se efectúa totalmente alrededor del centro del Sol. Lo que puede entenderse correctamente de dos modos: o por un círculo excéntrico, es decir, cuyo centro no sea el del Sol, o por un epiciclo en el homocéntrico. Por un círculo excéntrico se demuestra de este modo.

Sea, pues, un círculo excéntrico ABCD, en el plano de la eclíptica, cuyo centro E esté fuera del centro del Sol o del universo, a muy pequeña distancia, el cual sea F, su diámetro a través de ambos centros sea AEFD, y esté su apogeo en A, que fue llamado ápside superior por los latinos, el lugar más alejado del centro del universo, y sea D el perigeo, que está próximo y es el ápside inferior. Pero, mientras la Tierra en su órbita ABCD se mueve regularmente alrededor de su centro E, aparecerá alrededor de F (según se ha dicho), un movimiento irregular. Tomados los arcos iguales AB y CD y trazadas las líneas BE, CE, BF, CF, también serán ángulos iguales AEB y CED, con los cuales alrededor del centro E interceptan arcos iguales. Y el ángulo CFD es mayor que el ángulo CED, el exterior es mayor que el interior; por lo tanto, es también mayor que el ángulo AEB, igual al CED. Pero también el ángulo AEB exterior es mayor que el interior AFB, tanto más el ángulo CFD es mayor que el AFB. Pero ambos se produjeron en un tiempo igual, por lo que los arcos AB y CD son iguales; luego aparecerá un movimiento regular alrededor de E, irregular alrededor de F.



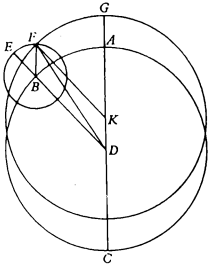
Esto mismo puede verse, e incluso con mayor sencillez, porque el arco AB está más alejado de F que el CD. Pues, por la proposición VII del libro III de los *Elementos* de Euclides, las líneas con las que se limitan, AF, BF, son más largas que CF, DF, y, como se demuestra en óptica, las magnitudes iguales que están más cercanas parecen mayores que las más alejadas. Y así queda manifiesto lo que se propuso acerca del círculo excéntrico.

También se clarificará lo mismo por medio de un epiciclo en un círculo homocéntrico. Sea, pues, el centro del mundo E del homocentro ABCD, donde también está el Sol, y esté en el mismo plano A el centro del epiciclo FG, y a través de ambos centros la línea recta CEAF, F como apogeo del epiciclo, I como perigeo. Así se demuestra que hay regularidad en A, pero irregularidad aparente en el epiciclo FG, puesto que si A se mueve hacia B, esto es, hacia el este, y el centro de la Tierra desde el apogeo F hacia el oeste, parecerá que E en el perigeo, que está en I, se mueve más deprisa, porque los dos movimientos el de A y el de I tienden hacia las mismas direcciones; en cambio, en el apogeo que está en F, parecerá que es más lento el movimiento de E, puesto que sólo se mueve en virtud del movimiento que excede a los dos contrarios, y así, situada la Tierra en G, está al oeste del movimiento regular, pero en K está al este, y en ambas partes según el arco AG y AK, por lo que parece moverse también el Sol de modo diverso.

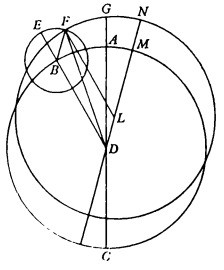


Pero estas cosas que ocurren con el epiciclo pueden ocurrir del mismo modo con el excéntrico, al igual que el paso de la estrella en el epiciclo describe un círculo homocéntrico y en el mismo plano, el centro de tal excéntrico dista del centro del círculo ho-

mocéntrico en una medida igual al semidiámetro del epiciclo. Y esto sucede de tres modos. Puesto que si el epiciclo en el círculo homocéntrico y la estrella en el epiciclo realizan revoluciones semejantes, pero con movimientos que se oponen entre sí, el movimiento de la estrella trazará un círculo excéntrico fijo, de tal modo que el apogeo y perigeo del cual mantienen unos lugares inmutables. De este modo, si ABC fuera el círculo homocéntrico, D el centro del universo, ADC el diámetro, y supongamos que cuando el epiciclo esté en A, la estrella estaría en el apogeo del epiciclo, que está en G, y la mitad de su diámetro en la línea recta DAG. Tómese ahora el arco AB del homocéntrico y con centro en B, y con la distancia AG, descríbase el epiciclo EF, y prolónguese DB y EB en línea recta y tómese el arco EF semejante al AB pero de dirección contraria, y estando en F la estrella o la Tierra, únase también, y tómese en la línea AD el segmento DK igual al BF. Puesto que los ángulos EBF y BDA son iguales y por tanto BF y DK paralelas e iguales, pues si líneas rectas se unen con líneas rectas iguales y paralelas, son también paralelas e iguales por la proposición XXXIII del libro I de Euclides; y puesto que DK, AG, se han establecido iguales, se añade el segmento común AK, GAK será igual a AKD, y por tanto también será igual a KF: así pues, el círculo descrito con centro en K y la distancia [radio] KAG pasará por F, a este mismo F compuesto por el movimiento de AB y EF lo describió un círculo excéntrico igual al homocéntrico y, por tanto, fijo. Así pues, mientras el epiciclo haya realizado revoluciones iguales [proporcionalmente iguales] con el homocéntrico, es necesario que los ápsides del excéntrico así descrito permanezcan en el mismo lugar.

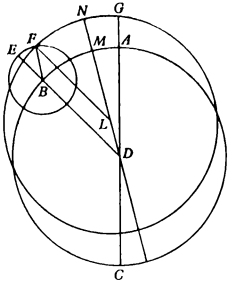


Por lo cual, si el centro del epiciclo y la circunferencia hubieran realizado revoluciones dispares, el movimiento de la estrella ya no describirá un excéntrico fijo, sino aquel cuyo centro y ápsides se trasladan hacia el este o el oeste, según que el movimiento de la estrella haya sido más rápido o más lento en el centro de su epiciclo. De todos modos, si EBF fuera mayor que el ángulo BDA, pero se hubiera establecido igual que el ángulo BDM, se demostrará también. Porque si en la línea DM se toma DL igual a BF, el círculo descrito con centro en L y con la distancia [radio] LMN iguala a AD, pasará por la estrella F, con lo que se manifiesta que el arco NF del círculo excéntrico es descrito por un movimiento compuesto de la estrella, cuyo apogeo se desplazó entretanto desde el signo G hacia el oeste, a través del arco GN. Por el contrario, si el movimiento de la estrella hubiera sido más lento en el epiciclo, entonces el centro del excéntrico avanzará hacia el este y por donde se traslada el centro del epiciclo, tal como si el ángulo EBF fuera menor que el BDA, pero igual que el BDM, es manifiesto que se llega a lo que dijimos.



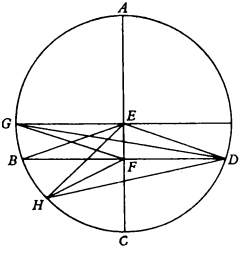
De todo lo cual se manifiesta que siempre se produce la misma irregularidad de la apariencia, sea por el epiciclo en el homocéntrico, sea por el círculo excéntrico igual al

homocéntrico, y que nada difieren entre sí, mientras la distancia entre los centros sea igual al radio del epiciclo.



No es fácil de distinguir cuál de ellos existe en el cielo. Ptolomeo, como consideró la irregularidad simple y fijas e inmutables las posiciones de los ápsides (como en el caso del Sol), pensaba que era suficiente la teoría de la excentricidad. En cambio, a la Luna y a los otros cinco planetas, que vagan errantes por dobles o más trayectorias diferentes, les aplicó los excéntricos del epiciclo. Partiendo de ellos se demuestra también fácilmente que la máxima diferencia entre la regularidad y la apariencia se manifiesta cuando la estrella aparece en su posición media, entre el ápside superior y el inferior, de acuerdo con el excéntrico, y según el epiciclo en contacto con él, como en Ptolomeo.

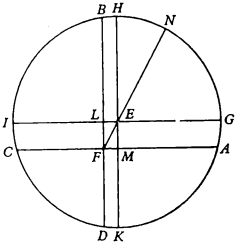
En el caso del excéntrico de este modo. Sea, pues, el círculo ABCD con centro en E, su diámetro AEC que pasa por el Sol F, fuera del centro. Trácese por F la perpendicular BFD y únanse BE y ED; sea A el apogeo, C el perigeo, a partir de los cuales sean las apariencias medias B, D. Es claro que el ángulo exterior AEB comprende el movimiento regular, el interior EFB el aparente y el ángulo EBF es la diferencia entre ellos. Digo que no puede construirse ningún ángulo mayor que los ángulos en B, D [con vértice] en la circunferencia y sobre la línea [como base] EF. Tomados antes y después de B los puntos G y H, únanse GD, GE, GF, y de igual modo HE, HF, HD. Siendo FG, que está más cercana al centro, mayor que DF, el ángulo GDF será mayor que el DGF. En cambio, son iguales EDG y EGD, puesto que sus lados EG y ED descienden iguales sobre la base. En consecuencia, también el ángulo EDF es igual a EBF y es mayor que EGF. Del mismo modo, también DF es más larga que FH, y el ángulo FHD es mayor que FDH, y EHD completo es igual al EDH completo, pues son iguales EH y ED: luego el que queda EDF es igual al EBF y es mayor que el restante EHF. En consecuencia, sobre la línea EF, en ningún sitio más que en los puntos B y D podrá formarse un ángulo mayor. Y así la máxima diferencia entre la regularidad y la apariencia se produce en la posición media entre el apogeo y el perigeo.



16. DE LA APARENTE IRREGULARIDAD DEL SOL

Estas cosas se han demostrado de un modo general, las cuales pueden aplicarse no sólo a las apariencias solares, sino también a la irregularidad de otras estrellas. Ahora vamos a tratar las que son específicas del Sol y la Tierra, en primer lugar aquellas que tomamos

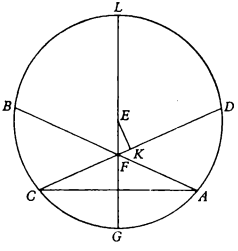
de Ptolomeo y de otros más antiguos, y luego las que el tiempo más reciente y la propia experiencia nos enseñó: Ptolomeo halló que desde el equinoccio de primavera hasta el solsticio [de verano] habían pasado XCIIII días y medio, desde el solsticio hasta el equinoccio de otoño XCII días y medio. Había, pues, según el cálculo del tiempo, en el primer intervalo un movimiento medio y regular de XCIII grados, IX minutos, y en el segundo XCI grados, XI minutos. De este modo dividido el círculo del año, que sea ABCD con centro en E, tómese AB por el primer espacio de tiempo de XCIII grados, IX minutos, BC por el segundo de XCI grados, XI minutos. Desde A se considera el equinoccio de primavera, desde B el solsticio de verano, desde C el equinoccio de otoño, y lo que queda desde D el solsticio de invierno. Únanse AC, BD, que se cortan entre sí en ángulos rectos en F, donde colocamos el Sol. Ya que el arco ABC es mayor que el semicírculo y el AB también es mayor que el BC, Ptolomeo entendió, partiendo de estas cosas, que el centro E del círculo estaba contenido entre las líneas BF y FA, y el apogeo entre el equinoccio de primavera y el trópico estival del Sol. Trácese ahora por el centro E la recta IEG [paralela] a AFC, que cortará a BFD en L, y HEK [paralela] a BFD, que cortará a AF en M. Quedará constituido de este modo LEMF paralelogramo rectángulo cuya diagonal FE prolongada en la línea recta FEN indicará la máxima longitud de la Tierra desde el Sol, y la posición del apogeo en N. Siendo el arco ABC de CLXXXIIII grados, XX minutos, su mitad AH de XCII grados, X minutos, si se resta de AGB queda un exceso HB de LIX minutos. A su vez, descontado el cuadrante del círculo HG del arco AH, queda AG de II grados, X minutos. Pero la mitad de la cuerda del doble del arco AG tiene 377 unidades, de las que la mitad de la cuerda que pasa por el centro [el radio] tiene 10.000, y es igual a LF, pero la mitad de la cuerda correspondiente al doble del arco BH es LE y tiene 172 de las mismas unidades. Así, pues, dados los lados del triángulo ELF, la cuerda [la hipotenusa] EF tendrá 414 unidades (de las que la cuerda que parte desde el centro [radio] tiene 10.000), casi la vigésimo cuarta parte [1/241] de la línea trazada desde el centro [radio] NE. Pero tal como EF es a EL, así NE, desde el centro, es a la mitad de la cuerda del doble del arco NH. En consecuencia, se da NH de XXIIII grados y medio, y de acuerdo con estos grados el ángulo NEH, el cual también es igual a LFE, ángulo del movimiento aparente. Por tanto, en tan gran espacio, el ápside más alto antes de Ptolomeo precedía al solsticio de verano del Sol. Pero, puesto que IK es un cuadrante del círculo, si se le quitan IC, DK, iguales a AG, HB, quedará CD de LXXXVI grados, LI minutos, y lo que queda de CDA, el arco DA de LXXXVIII grados, IL minutos. Pero a los LXXXVI grados, LI minutos corresponden LXXXVIII días y la octava parte de un día; y a los LXXXVIII grados, IL minutos, XC días y la octava parte de un día, que son III horas, en los que por el movimiento regular de la Tierra, el Sol parecía pasar del equinoccio de otoño al solsticio de invierno, y regresar en lo que queda de año desde el solsticio de invierno al equinoccio de primavera. Estas cosas fueron expuestas por Ptolomeo, de igual manera que lo habían sido antes de él por Hiparco, según el mismo atestigua que las había encontrado.



Por lo que pensó que en el tiempo restante no sólo el ápside superior estaría a XXIIII grados y medio antes del trópico estival, sino que la excentricidad (según se ha dicho), la veinticuatroava parte del radio, permanecería siempre. Uno y otro se encuentran ahora cambiados con una diferencia evidente.

Albatenio anotó XCIII días, XXXV minutos, desde el equinoccio de primavera hasta el solsticio de verano, hasta el equinoccio de otoño anotó CLXXXVI días, XXXVII minutos, de los que, según lo fijado por Ptolomeo, obtuvo una excentricidad no mayor que 346 unidades, de las que el radio tiene 10.000. Con este coincide Arzaquel el Hispano en el cálculo del excéntrico, pero coloca el apogeo XII grados, X minutos al oeste del solsticio, lo que Albatenio observó VII grados, XLIII minutos al oeste del mismo solsticio. De estos indicios se descubre que queda otra irregularidad en el movimiento del centro de la Tierra, lo que también se comprobaba a partir de las observaciones de nuestro tiempo. En efecto, desde hace más de diez años, que dedicamos la atención a investigar estas cosas y sobre todo desde el año MDXV de Cristo, encontramos que desde el equinoccio de primavera hasta el de otoño se completan CLXXXVI días y V minutos y medio; y para equivocarnos menos al tomar los solsticios, lo que sospechan algunos que les ha sucedido a veces a nuestros predecesores, adoptamos otras posiciones del Sol en este asunto, que no fueran incluso para los equinoccios en manera alguna difícil de observar, como son las posiciones medias de los signos Tauro, Virgo, Leo, Scorpio y Aquarium. Encontramos, pues, desde el equinoccio de otoño hasta la mitad de Scorpio XLV días, XVI minutos, hasta el equinoccio de primavera CLXXVIII días, LIII minutos y medio. Pero el movimiento regular en el primer intervalo de XLIIII grados, XXXVII minutos; en el segundo de CLXXVI grados, XIX minutos.

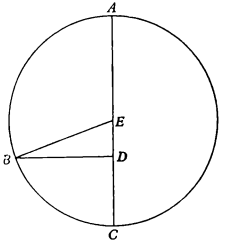
Preparado así esto, repítase el círculo ABCD. Sea A el punto en el que el Sol ha aparecido en el equinoccio de primavera, B en donde se ve el equinoccio de otoño, C el punto medio de Scorpio: únanse AB, CD, que se cortan en F, en el centro del Sol, y trácese la cuerda AC. En consecuencia, puesto que el arco CB es conocido, de XLIIII grados, XXXVII minutos y, por tanto, el ángulo que se da en BAC, si CCCLX son dos rectos; y el que está en BFC, el ángulo del movimiento aparente, es de XLV grados, si CCCLX son cuatro rectos, pero en la medida en que fueran dos rectos, el mismo BFC será de XC grados: por lo tanto, el otro ángulo ACD, que se da en el arco AD, es de XLV grados, XXIII minutos. Pero todo el segmento ACB es de CLXXVI grados, XIX minutos; quitado BC quedará AC de CXXXI grados, XLII minutos, el cual junto con el AD comprende el arco CAD de grados, V minutos y medio.

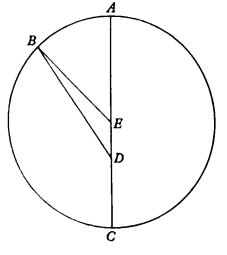


Suponiendo que ambos segmentos ACB y CAD sean menores que un semicírculo, está claro que en el resto BD está contenido el centro del círculo, y éste sea E, y por F trácese el diámetro LEFG, y sea L el apogeo, G el perigeo; trácese EK perpendicular a CFD. Pero también son dadas por las tablas las cuerdas de los arcos dados, AC de 182.494 unidades y CFD de 199.934 unidades, si el diámetro se supone de 200.000. Así pues, se ha dado también la proporción entre los lados del triángulo ACF, de ángulos dados, según la primera regla de los triángulos planos, y CF de 97.967 unidades, de las

que AC era de 182.494 unidades, y por esto la mitad del exceso de FD [sobre CF], esto es, FK, tiene 2.000 de las mismas unidades. Y puesto que el segmento CAD se diferencia del semicírculo en II grados, LIIII minutos, la mitad de la cuerda de los cuales [de 2°, 54'], igual a EK es de 2.534 unidades, de donde en el triángulo EFK, los dos lados dados FK y KE, al comprender un ángulo recto, serán dados los lados y los ángulos, EF será de 323 unidades, de las que EL tiene 10.000, y el ángulo EFK de LI grados y dos tercios, si CCCLX son cuatro rectos. Luego todo AFL es de XCVI grados y dos tercios y BFL de LXXXIII grados y un tercio. Pero EL tendrá 60 unidades cuando EF tenga I unidad, LVI minutos aproximadamente. Ésta era la distancia del Sol desde el centro de la órbita, ahora apenas una treintaiunava parte [del radio], que era considerada por Ptolomeo una veinticuatroava parte. Y el apogeo entonces estaba XXIIII grados y medio al oeste del solsticio de verano, ahora está a VI grados y dos tercios al este del mismo.

17. DEMOSTRACIÓN DE LA PRIMERA Y ANUAL IRREGULARIDAD DEL SOL JUNTO CON SUS PARTICULARES DIFERENCIAS





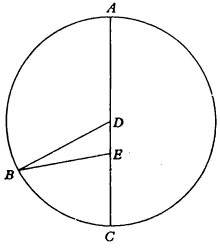
Habiéndose encontrado múltiples diferencias en la irregularidad del Sol, pensamos deducir primero la que es anual y más conocida que las otras, por lo que repítase el círculo ABC con centro en E, con diámetro AEC, apogeo en A, perigeo en C y el Sol en D. Pero se ha demostrado que la mayor diferencia entre el [movimiento] regular y el aparente en la posición media, según el [movimiento] aparente, estaba entre ambos ápsides, y por esta causa se levantará la perpendicular BD a AEC, que cortará la circunferencia en el punto B, y únanse B, E. En consecuencia, puesto que en el triángulo rectángulo BDE dos lados han sido dados, sin duda BE que va del centro del círculo a la circunferencia, y DE distancia del Sol desde el centro: luego será de ángulos dados, y el ángulo DBE es dado, diferencia entre el BEA del movimiento regular y el recto EDB del movimiento aparente. Pero, en tanto DE se haga mayor o menor, toda la especie del triángulo cambia. Así, antes de Ptolomeo el ángulo B era de II grados, XXIII minutos, en la época de Albatenio y Arzaquel de I grado ILX minutos, en cambio ahora de I grado LI minutos; y Ptolomeo tenía al arco AB, al que el ángulo AEB abarca, de XCII grados, XXIII minutos, al BC de LXXXVII grados, XXXVII minutos; Albatenio al AB de XCI grados, LIX minutos, al BC de XIIC grados, I minuto, ahora el AB tiene XCI grados, LI minutos, el BC LXXXIIX grados, VIIII minutos. A partir de aquí se manifiestan las restantes diferencias. Tomando otro arco

AB, como en la figura siguiente, de modo que estén dados el ángulo AEB, el interior BED, y los dos lados BE, ED: estará dado, según la teoría de los triángulos planos el ángulo EBD, la prostaféresis y la diferencia entre el movimiento regular y el aparente, tales diferencias es necesario cambiar a causa del cambio del lado ED, según se ha dicho.

18. RELATIVO AL EXAMEN DEL MOVIMIENTO REGULAR SEGÚN LA LONGITUD

Se ha expuesto lo relativo a la irregularidad anual del Sol, pero no por una diferencia simple (según apareció), sino mezclada con aquella que muestra la duración del tiempo. Después separaremos una de otra. Entretanto, el movimiento medio y regular del centro de la Tierra se traducirá en números más seguros en cuanto más haya sido separado por las diferencias de la irregularidad y diste un intervalo más largo de tiempo.

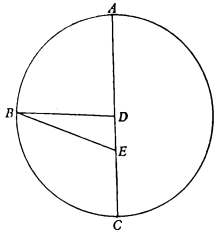
Pero esto se establecerá de este modo. Tomamos aquel equinoccio de otoño que había sido observado por Hiparco en Alejandría, en el año XXXII del tercer período de Calippo, que era, según se ha dicho más arriba, el centésimo septuagésimo séptimo [177] año después de la muerte de Alejandro, en la medianoche del tercer día de los cinco intercalares, al que seguía el día cuarto; pero como Alejandría en longitud está casi una hora al oriente de Cracovia, era casi una hora antes de medianoche. En consecuencia, según los cálculos establecidos más arriba, en la esfera de las fijas estaba a CLXXVI grados, X minutos, a partir de la cabeza de Aries, y esta misma era la posición aparente del Sol; distaba, pues, del ápside superior CXIIII grados y medio. De acuerdo con este ejemplo, dibújese con centro en D el círculo ABC que haya descrito el centro de la Tierra. Sea ADC el diámetro y en él colóquese el Sol, que esté en el punto E, el apogeo en A, el perigeo en C. Y B sea desde donde habrá aparecido el Sol en otoño, en el equinoccio, y únanse las líneas rectas BD, BE. En consecuencia, siendo el ángulo DEB, según el cual se observa la distancia del Sol al apogeo, de CXIIII grados y medio, y siendo entonces DE de 416 unidades, de las que BD tiene 10.000, así pues el triángulo BDE (por el cuarto teorema de los triángulos planos) es de ángulos dados, y el ángulo en DBE vale II grados, X minutos, en los que el ángulo BED se diferencia del BDA, pero el ángulo BED vale CXIIII grados, XXX minutos; el BDA será de CXVI grados, XL minutos, y por esto la posición media y regular del Sol está a CLXXVIII grados, XX minutos, de la cabeza de Aries en la esfera de las fijas.



Comparemos con esto el equinoccio de otoño observado por nosotros en Frauenburg, en el mismo meridiano de Cracovia, en el año MDXV de Cristo, el día décimo octavo antes de las calendas de octubre, en el año MDCCCXL de los egipcios después de la muerte de Alejandro, en el sexto día de Phaophi, el segundo mes según los egipcios, media hora después de la salida del Sol. En este momento, la posición del equinoccio de otoño, según el cálculo y las observaciones, era de CLII grados, XLV minu-

tos, en la esfera de las estrellas fijas, distando del ápside superior, según la precedente demostración, LXXXIII grados y XX minutos.

Determínese ahora el ángulo BEA de LXXXIII grados, XX minutos, siendo CLXXX dos rectos; dos de los lados del triángulo han sido dados, el BD de 10.000 unidades, el DE de 323 unidades; por el cuarto teorema demostrado de los triángulos planos el ángulo DBE será de I grado y casi L minutos. Puesto que si un círculo circunscribe al triángulo BDE, el ángulo BED en la circunferencia será de CLXVI grados, XL minutos, siendo CCCLX dos rectos, y la cuerda BD de 19.864 unidades, siendo el diámetro de 20.000, y dada la proporción de BD a DE, se dará DE con una longitud de casi 640 unidades, la que como cuerda del ángulo DBE mide en relación al arco III grados, XL minutos, con relación al centro I grado L minutos. Y ésta será la prostaféresis y la diferencia entre el movimiento regular y el aparente, la cual añadiéndose al ángulo BED, que tenía LXXXIII grados, XX minutos, tendremos el ángulo BDA y el arco AB de LXXXV grados, X minutos, distancia regular desde el apogeo y, por tanto, la posición media del Sol con respecto a la esfera de las estrellas fijas es de CLIIII grados, XXXV minutos.



Hay, pues, entre ambas observaciones MDCLXII años egipcios, XXXVII días, XVIII minutos, XLV segundos, y el movimiento medio y regular, además de las revoluciones completas, que son MDCLX, es de CCCXXXVI grados y casi XV minutos, conforme con el número que expusimos en la tabla de los movimientos regulares.

19. SOBRE LA DETERMINACIÓN DE LAS POSICIONES Y DE LOS PRINCIPIOS [DE LOS AÑOS] CON RESPECTO AL MOVIMIENTO REGULAR DEL SOL

Así pues, en el tiempo transcurrido desde la muerte de Alejandro Magno hasta la observación de Hiparco, hay CLXXVI años, CCCLXII días, XXVII minutos y medio, en los que el movimiento medio, según los cálculos es de CCCXII grados, XLIII minutos. Restándose éstos de los CLXXVIII grados, XX minutos de la observación de Hiparco, añadidos a los CCCLX grados del círculo, quedará, para el principio de los años contados a partir de la muerte de Alejandro Magno, la posición al mediodía del primer día del mes Thoth, el primer mes de los egipcios, en CCXXV grados, XXXVII minutos, y esto en el meridiano de Cracovia y de Frauenburg, lugar de nuestra observación.

Desde aquí, hasta el principio de los años romanos de Julio César, en CCLXXVIII años, CXVIII días y medio, el movimiento medio es, aparte de las revoluciones completas, de XLVI grados, XXVIII minutos: a los que añadiendo el número de grados de la posición de Alejandro, proporcionará la posición del año de César, en la medianoche antes de las calendas de enero, desde donde los romanos suelen empezar los años y los días, en CCLXXII grados, IIII minutos. Después, en XLV años, XII días, o desde Alejandro Magno en CCCXXIII años, CXXX días y medio, la posición de Cristo en

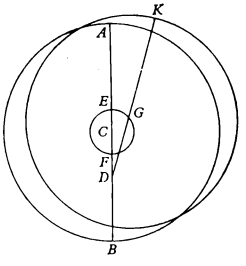
CCLXXII grados, XXXI minutos. Y habiendo nacido Cristo en la Olimpíada CX-CIIII, en su tercer año, que suma desde el principio de la Olimpíada DCCLXXV años, XII días y medio, hasta la media noche anterior a las calendas de enero, proporciona igualmente la posición de la primera Olimpíada en XCVI grados, XVI minutos, al mediodía del primer día del mes Hecatombeon, cuyo aniversario es ahora en las calendas de julio según los años romanos. De este modo se constituyeron los principios del movimiento simple solar con respecto a la esfera de las estrellas no errantes. También las posiciones de los movimientos compuestos se realizan mediante la adición de las precesiones de los equinoccios, y de modo semejante a aquéllas se establece la posición Olímpica en XC grados, LIX minutos, la de Alejandro en CCXXVI grados, XXXVIII minutos, la de César en CCLXXVI grados, LIX minutos, la de Cristo en CCLXXVIII grados, II minutos. Referidas todas ellas (según se ha dicho) al meridiano de Cracovia.

20. SOBRE LA SEGUNDA Y DOBLE IRREGULARIDAD QUE ACONTECE CON RESPECTO AL SOL A CAUSA DEL CAMBIO DE LOS ÁPSIDES

Se presenta ahora una dificultad mayor a causa de la inconstancia de los ápsides del Sol. Aunque Ptolomeo pensó que era fija, otros pensaron que seguía el movimiento de la octava esfera, de acuerdo con el que también se mueven las estrellas fijas. Arzaquel opinó que asimismo este movimiento era desigual, puesto que según los indicios retrocede, porque habiendo encontrado Albatenio (según se ha dicho) el apogeo en VII grados, XXXXIII minutos, antes del solsticio, y antes, desde Ptolomeo, en DCCXL años había progresado casi XVII grados; a Arzaquel después de CC años menos VII, le parecía que había retrocedido casi IIII grados y medio, por eso juzgaba que era cualquier otro movimiento adicional del centro de la órbita anual sobre cierto círculo pequeño, según el cual el apogeo se inclinaba antes y después, y el centro de aquella órbita producía distancias desiguales desde el centro del mundo. Hallazgo bastante pulcro, pero no por ello aceptado, pues no tiene coherencia en general con la posición de los demás. De cualquier modo, si por la naturaleza de tal movimiento se considera la sucesión, que se había detenido poco antes de Ptolomeo, que en DCCXL años había pasado aproximadamente por XVII grados, después que en CC años había retrocedido IIII o V grados, ha avanzado en el restante tiempo hasta nosotros, no siendo percibida en todo el tiempo ninguna otra regresión ni detenciones, que es necesario que ocurran en movimientos contrarios. Estas cosas no pueden entenderse en un movimiento uniforme y circular. Por lo que se cree que habían incidido en algún error en aquellas abundantes observaciones. Siendo ambos matemáticos semejantes en su cuidado y diligencia, es dudoso a quien debamos seguir.

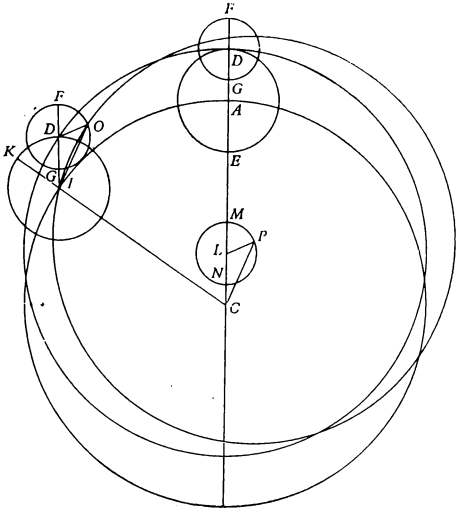
En cuanto a mí, confieso que no existe en parte alguna mayor dificultad que en captar el apogeo del Sol, donde calculamos lo grande por medio de [elementos] mínimos difícilmente aprehensibles, puesto que [el desplazamiento de] cualquier grado en las proximidades del apogeo o del perigeo varía en la prostaféresis sólo dos minutos más o menos, pero en un solo minuto cerca de los ápsides medios avanza V o VI grados [en la prostaféresis]: y por eso un pequeño error puede propagarse muchísimo. Por ello, aunque

hubiéramos determinado el apogeo en VI grados, dos tercios, de Cáncer, no nos quedamos satisfechos, aunque confiásemos en los instrumentos de los horoscopios, si no nos daban más certeza los eclipses de Sol y de la Luna. Puesto que si en ellos se esconde algún error, lo descubren sin duda alguna. En consecuencia, para que fuera más coherente, desde la misma concepción en general del movimiento podemos constatar que se dirige hacia el este, pero que es irregular. Ya que, después de aquel estacionamiento desde Hiparco a Ptolomeo, apareció el apogeo en continuo, ordenado y creciente progreso hasta el presente, pareciendo coincidir el resto, excepto en aquel error (como se cree) que se había presentado entre Albatenio y Arzaquel. También, que la prostaféresis del Sol no cesa de un modo semejante de disminuir, parece seguirse de la misma proporción del movimiento circular, y de que una y otra irregularidad se igualan bajo aquella primera y simple anomalía de la oblicuidad de la eclíptica o algo similar.



Para que esto aparezca más claro, trácese en el plano de la eclíptica el círculo AB con centro en C, trácese el diámetro ACB, en el que se toma D, el globo del Sol, como en el centro del mundo, y con centro C descríbase otro círculo pequeño EF, que no incluya al Sol, y entiéndase que siguiendo este pequeño círculo se mueve el centro de revolución anual del centro de la Tierra con cierto avance muy lento. Y teniendo el pequeño círculo EF en una sola línea con AD un movimiento hacia el este, y por el contrario, el centro de la revolución anual a través del círculo EF [tiene un movimiento hacia el oeste], y ambos con un movimiento lento, unas veces se encontrará el centro de la órbita anual en la máxima distancia, que es DE, otras en la mínima, que es DF, allí con un movimiento más lento, aquí con uno más rápido y en los arcos medios el circulito con el tiempo hará crecer y decrecer la distancia entre los centros y hará preceder el ápside superior y alternativamente seguir a ese ápside, o sea, al apogeo, que toca en la línea ACD como posición media. De este modo, si se toma el arco EG y haciendo centro en G se describe un círculo igual al AB, estará entonces el ápside superior en la línea DGK, y DG será una distancia menos a DE por la proposición VIII del libro III de Euclides.

Y estas cosas se demuestran así, por medio de un excéntrico a un excéntrico y también por medio de un epiciclo a un epiciclo, del modo siguiente. Sea, pues, AB homocéntrico para el mundo y para el Sol, y ACB el diámetro, en el que está contenido el ápside superior. Y con centro en A descríbase el epiciclo DE, y a su vez con centro en D el epiciclo FG, en el que se mueve la Tierra: y todo esto en el mismo plano de la eclíptica. Y sea el movimiento del primer epiciclo hacia el este y aproximadamente anual, y el del segundo, o sea, D, también anual pero hacia el oeste, y sus revoluciones sean iguales con respecto a la línea AC. A la vez, el centro de la Tierra, partiendo de F hacia el oeste, añade un pequeño movimiento a D. A partir de aquí se manifiesta que, estando la Tierra en F, se producirá el máximo apogeo del Sol, en G el mínimo, pero en los arcos medios del epiciclo FG, hará preceder o seguir al apogeo, aumentado o disminuido, mayor o menor: y por ello aparecerá el movimiento irregular, según se ha demostrado antes con respecto al epiciclo y al excéntrico.

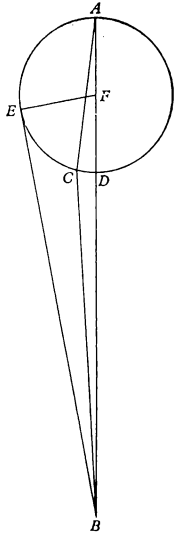


Tómese ahora el arco AI, y con centro en I vuélvase a tomar el epiciclo del epiciclo, y unida CI extiéndase en la línea recta CIK, y KID será un ángulo igual al ACI, por la igualdad de las revoluciones. En consecuencia, como se ha demostrado más arriba, el punto D describirá, con centro en L, un círculo excéntrico igual al homocéntrico AB, y con una distancia CL igual a DI; F también [describirá] su excéntrico de acuerdo con la distancia CLM, que será igual a IDF; y G de un modo semejante a tenor de las distancias iguales IG y CN. Entretanto, si el centro de la Tierra hubiera ya recorrido un arco tal como FO de su segundo epiciclo, el punto O ya no describirá un excéntrico cuyo centro está en la línea AC, sino en una que es paralela a DO, como la LP. Por lo que si se unen OI y CP, que son iguales, pero a su vez menores que IF y CM, y el ángulo DIO igual al ángulo LCP por la proposición VIII del libro I de Euclides, y, por tanto, parecerá que el apogeo del Sol en la línea CP precede a A. De aquí se deduce también que lo mismo sucede por medio del epiciclo del excéntrico, puesto que en el único excéntrico preexistente, el que habría descrito el epiciclo D alrededor del centro L, el centro de la Tierra gira a través de un arco FO en las condiciones antedichas, esto es, en menos tiempo del que hubiera durado un giro anual. Pues describirá, como antes, otro excéntrico al primero alrededor del centro P, y sucederá de nuevo lo mismo. Y aunque todas las mediciones se reducen al mismo número, no podría decir fácilmente cuál es la real, si no fuera porque aquella perpetua armonía de números y apariencias obliga a creer que es alguna de ellas.

21. SOBRE CUÁNTA PUEDA SER LA SEGUNDA DIFERENCIA EN LA IRREGULARIDAD SOLAR

En consecuencia, como ya se ha visto, esta segunda irregularidad sigue a aquella primera y simple anomalía de la oblicuidad de la eclíptica, o a sus semejanzas, por lo que tendremos sus diferencias fijadas, a no ser que lo impida algún error en los observadores anteriores. En efecto, tenemos una anomalía simple en el año de Cristo MDXV según el cálculo de CLXV grados, XXXIX minutos aproximadamente, y su principio, hecho el cálculo retrospectivo en casi LXIIII años antes del nacimiento de Cristo, desde entonces hasta nosotros se calculan MDLXXX años; sin embargo, la excentricidad máxima de aquel principio fue descubierta por nosotros como de 417 unidades, de las que la línea desde el centro de la órbita [tendría] 10.000; en cambio, en nuestro tiempo, según se ha mostrado, es de 323.

Sea ahora AB una línea recta en la que B fuera el Sol y el centro del mundo, AB la excentricidad máxima, la mínima DB, y descrito un pequeño círculo cuyo diámetro fuera AD, tómese el arco AC en proporción a la primera anomalía simple, de CLXV grados, XXXIX minutos. En consecuencia, puestó que se dio AB de 417 unidades, encontradas al principio de la anomalía simple, esto es, en A, pero ahora BC es de 323 unidades, tendremos el triángulo ABC de lados dados, el AB, BC, y un solo ángulo el CAD, puesto que el arco CD, lo que queda del semicírculo, es de XIIII grados, XXI minutos. Se dará, pues, por la demostración de los triángulos planos el otro lado AC y el ángulo ABC, diferencia entre el movimiento medio y el irregular del apogeo: y en tanto AC subtiende al arco dado, se dará también AD diámetro del círculo ACD. Y así, por el ángulo CAD de XIIII grados, XXI minutos, tendremos CB de 2.496 unidades, de las que el diámetro del círculo que circunscribe el triángulo tiene 100.000, y por la razón de BC a AB se da AB de 3.225 de las mismas unidades: la que subtiende al ángulo ACB de CCCXLI grados, XXVI minutos. Y, por tanto, lo que queda, en la medida en que CCCLX son dos rectos, el ángulo CBD será de IIII grados, XIII minutos, al que subtiende AC de 735 unidades.



En consecuencia, siendo AB de 417 unidades, se descubrió AC de aproximadamente 95 unidades, la cual en cuanto subtiende a un arco conocido, estará en proporción a AD, tanto como a un diámetro. Por lo tanto, se da AD de 96 unidades, de las que ADB tiene 417 unidades, y el resto DB de 321 unidades, distancia mínima de la excentricidad, pero el ángulo CBD se descubrió de IIII grados, XIII minutos con respecto a la circunferencia, en cambio con respecto al centro es de II grados, VI minutos y medio, y ésta era la prostaféresis sustractiva del movimiento regular de AB alrededor del centro B. Trácese ahora la línea recta BE que toque al círculo en el punto E, y tomado F como centro únase EF. En consecuencia, puesto que en el triángulo rectángulo BEF se da el lado EF de 48 unidades y el BDF de 369 unidades: por lo que valiendo FDB en cuanto línea trazada desde el centro [radio] 10.000, EF será de 1.300 unidades, que es la mitad de la cuerda del doble del ángulo EBF, y éste vale VII grados, XXVIII minutos, de los que cuatro rectos tienen

CCCLX, prostaféresis máxima entre el movimiento regular en F y el aparente en E. A partir de aquí pudieron constar las demás y particulares diferencias. Por ejemplo, si hubiéramos tomado el ángulo AFE de VI grados. Tendremos entonces un triángulo de lados dados EF, FB, con un ángulo el EFB, a partir de los cuales parecerá la prostaféresis EBF de XLI minutos. Pero si el ángulo AFE fuera de XII, tendremos la prostaféresis de un grado, XXIII minutos; para XVIII, II grados, III minutos: y así con respecto a las demás y del modo que se ha dicho más arriba con respecto a las prostaféresis anuales.

22. DE CÓMO EL MOVIMIENTO REGULAR DEL APOGEO SOLAR SE EXPLICARÁ CONJUNTAMENTE CON EL IRREGULAR

Puesto que el intervalo de tiempo en que la máxima excentricidad coincidía con el principio de la primera y simple anomalía era en el año III de la CLXXVIII Olimpíada, pero según los egipcios en el año CCLIX de Alejandro Magno, y por esa causa la posición verdadera del apogeo y al mismo tiempo media estaba a los V grados y medio de Géminis, esto es, a LXV y medio grados del equinoccio de primavera. Ya, que la precesión del equinoccio, coincidiendo entonces la real con la media, era de IIII grados, XXXVIII minutos, restados los cuales de los LXV grados y medio, quedarán desde la cabeza de Aries en la esfera de las estrellas fijas, LX grados, LII minutos, en la posición del apogeo. A su vez, en el segundo año de la DLXXIII Olimpíada, pero en el MDXV de Cristo, se encontró la posición del apogeo a VI grados y dos tercios de Cáncer; pero, puesto que la precesión del equinoccio primaveral según el cálculo era de XXVII grados con la cuarta parte de un grado, los cuales si se restan de XCVI grados, la mitad y un tercio de la mitad [40'], quedarán LXIX grados, XXV minutos, pero se mostró que la anomalía primera entonces existente era de CLXV grados, XXXVIII minutos, había sido la prostaféresis de II grados y VII minutos en los que la posición real precedía a la media, y en consecuencia se puso de manifiesto la posición media del apogeo solar de LXXI grados, XXXII minutos. Por tanto, en los MDLXXX años medios egipcios el movimiento medio y regular del apogeo era de X grados, XLI minutos, que dividiéndose por el número de los mismos años, tendremos la porción anual de XXIIII segundos, XX terceros, XIIII cuartos.

23. ACERCA DE LA CORRECCIÓN DE LA ANOMALÍA DEL SOL Y DE LA DETERMINACIÓN DE SUS POSICIONES

Si restásemos esto del movimiento simple anual, que era de CCCLIX grados, XLIIII minutos, XLIX segundos, VII terceros, IIII cuartos, quedará el movimiento regular anual de anomalía de CCCLIX grados, XLIIII minutos, XXIIII segundos, XLVI terceros, L cuartos. Éstos, a su vez divididos por CCCLXV, mostrarán una porción diaria de LIX minutos, VIII segundos, VII terceros, XXII cuartos, que corresponden a los que ya fueron expuestos en las tablas. Y a partir de aquí tendremos también las posiciones de las épocas constituidas, empezando desde la primera Olimpíada. Así pues, se ha mostrado que en el día XVIII an-

tes de las calendas de octubre del año II de la Olimpíada DLXXIII, media hora después de la salida del Sol, el apogeo medio del Sol era de LXXI grados, XXXVII minutos, de donde la distancia media del Sol era de LXXXIII grados, LVIII minutos. Y desde la primera Olimpíada hay MMCCXC años egipcios, CCLXXXI días, XLVI minutos, en los que el movimiento de anomalía (restados los círculos enteros) era de XLII grados, XXXIII minutos, los que restados de LXXXII grados y LVIII minutos dan un resto de XL grados, XXV minutos, posición de la anomalía hasta la primera Olimpíada; y del mismo modo, como más arriba, la posición en los años de Alejandro era de CLXVI grados, XXXVIII minutos, en los de César de CCXI grados, XI minutos, en los de Cristo de CCXI grados, XIX minutos.

24. EXPOSICIÓN CANÓNICA DE LAS DIFERENCIAS ENTRE EL MOVIMIENTO REGULAR Y EL APARENTE [DEL SOL]

Pero para que sea más aprovechable lo que se ha demostrado con respecto a las diferencias entre el movimiento regular y el aparente del Sol, expondremos también una tabla de ellos que tiene sesenta filas y seis columnas. Así pues, las dos primeras columnas de uno y otro hemiciclo (me refiero al ascendente y descendente) contendrán números incrementados por tríadas de grados, tal como hacíamos antes con respecto al movimiento de los equinoccios. En la tercera columna se escribirán los grados de diferencia del movimiento del apogeo solar, o sea, de la anomalía, cuya diferencia asciende hasta un máximo de VII grados y medio, y casi coincide con cada tercera parte de los grados. La cuarta posición está ocupada por los minutos proporcionales, hasta un máximo de LX, y se estiman con respecto al exceso de las prostaféresis superiores de la anomalía anual. Siendo el mayor exceso de éstas de XXXII minutos, será la sexagésima parte de XXXII segundos. Luego, según la cantidad de exceso (que calcularemos por medio del excéntrico, según el modo transmitido más arriba) pondremos el número de los grupos de sesenta repartido de tres en tres cada uno por filas. En la quinta, se colocarán también cada una de las prostaféresis desde la anual y primera anomalía, según la mínima distancia del Sol hasta el centro. En el sexto y último lugar, el exceso [diferencia] entre ésta [prostaféresis] y la que se produce en la máxima excentricidad.[1] Éstas son las tablas:

1. El movimiento sobre el círculo homocéntrico, sobre el primer epiciclo, y sobre el segundo epiciclo son proporcionalmente iguales. Por consiguiente, de las dos primeras columnas de la tabla se debe tomar el movimiento sobre el segundo epiciclo, o arco KJ; y de la tercera columna, la suma y sustracción que debe aplicarse a la anomalía anual o movimiento del primer epiciclo; esta suma y sustracción, ángulo KFJ, corrige la anomalía media de H a I. (Los minutos proporcionales correspondientes al arco KJ deben ser conservados.) De la quinta columna se debe tomar la suma y sustracción GEI, correspondiente al ángulo GFI. Pero como la verdadera posición del Sol no está en I sino en J, la suma y sustracción debe ser corregida por la diferencia entre el ángulo FEI y el ángulo FIJ. Los minutos proporcionales que han sido conservados permiten ajustar la diferencia final, el ángulo IEJ, según la longitud de la cuerda FJ varía entre FL y FK; es decir, el cambio de excentricidad según el movimiento alrededor del círculo CO puede ser considerado como si hubiera una variación de la longitud del radio del epiciclo corregido HK.

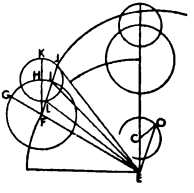


Tabla de prostaféresis del Sol

Números comunes		*Prostaféresis del centro*		*Minutos proporcionales*	*Prostaféresis de la órbita*		*Exceso*
°	°	°	'		°	'	'
3	357	0	21	60	0	6	1
6	354	0	41	60	0	11	3
9	351	1	2	60	0	17	4
12	348	1	23	60	0	22	6
15	345	1	44	60	0	27	7
18	342	2	5	59	0	33	9
21	339	2	25	59	0	38	11
24	336	2	46	59	0	43	13
27	333	3	5	58	0	48	14
30	330	3	24	57	0	53	16
33	327	3	43	57	0	58	17
36	324	4	2	56	1	3	18
39	321	4	20	55	1	7	20
42	318	4	37	54	1	12	21
45	315	4	53	53	1	16	22
48	312	5	8	51	1	20	23
51	309	5	23	50	1	24	24
54	306	5	36	49	1	28	25
57	303	5	50	47	1	31	27
60	300	6	3	46	1	34	28
63	297	6	15	44	1	37	29
66	294	6	27	42	1	39	29
69	291	6	37	41	1	42	30
72	288	6	46	40	1	44	30
75	285	6	53	39	1	46	30
78	282	7	1	38	1	48	31
81	279	7	8	36	1	49	31
84	276	7	14	35	1	49	31
87	273	7	20	33	1	50	31
90	270	7	25	32	1	50	32

(continuación)

Números comunes		*Prostaféresis del centro*		*Minutos proporcionales*	*Prostaféresis de la órbita*		*Exceso*
°	°	°	'		°	'	'
93	267	7	28	30	1	50	32
96	264	7	28	29	1	50	33
99	261	7	28	27	1	50	32
102	258	7	27	26	1	49	32
105	255	7	25	24	1	48	31
108	252	7	22	23	1	47	31
111	249	7	17	21	1	45	31
114	246	7	10	20	1	43	30
117	243	7	2	18	1	40	30
120	240	6	52	16	1	38	29
123	237	6	42	15	1	35	28
126	234	6	32	14	1	32	27
129	231	6	17	12	1	29	25
132	228	6	5	11	1	25	24
135	225	5	45	10	1	21	23
138	222	5	30	9	1	17	22
141	219	5	13	7	1	12	21
144	216	4	54	6	1	7	20
147	213	4	32	5	1	3	18
150	210	4	12	4	0	58	17
153	207	3	48	3	0	53	14
156	204	3	25	3	0	47	13
159	201	3	2	2	0	42	12
162	198	2	39	1	0	36	10
165	195	2	13	1	0	30	9
168	192	1	48	1	0	24	7
171	189	1	21	0	0	18	5
174	186	0	53	0	0	12	4
177	183	0	27	0	0	6	2
180	180	0	0	0	0	0	0

25. SOBRE EL CÁLCULO DE LA APARIENCIA SOLAR

De todas estas cosas, considero que se deduce satisfactoriamente de qué modo se calcula la posición aparente del Sol en cualquier tiempo propuesto. Hay que averiguar, pues, la verdadera posición del equinoccio primaveral en dicho tiempo o su precesión con su anomalía primera y simple, según hemos expuesto antes. Después, el movimiento medio simple del centro de la Tierra, o si prefieres llamarle movimiento del Sol, según las tablas de los movimientos regulares, que se añaden a sus principios ya determinados. En consecuencia, cuando encuentras la primera y simple anomalía y su número en la primera o segunda columna de la tabla precedente (el número exacto o el más próximo) y la prostaféresis que se halla en la tercera columna[1] para corregir la anomalía anual y en la siguiente [columna] los minutos proporcionales, y conserva estos últimos. Ahora añade la prostaféresis a la anomalía anual, si la primera es menor que un semicírculo o si su número está comprendido en la primera columna, en caso contrario réstaselo. Lo que queda o el resultado de la suma será la anomalía del Sol corregida, por medio de la cual toma de nuevo la prostaféresis de la órbita anual, que estará en la quinta columna, y el exceso [diferencia] en la siguiente. Si este exceso, añadido a los minutos proporcionales conservados antes, valiera algo, se añadirá siempre a la prostaféresis, lo que hace que la prostaféresis quede corregida, la cual se resta de la posición media del Sol, si el número de la anomalía anual se hubiera encontrado en la primera columna, o si es menor que un semicírculo. Se añadirá, en cambio, si es mayor o si estuviera en la otra columna de números. Lo que quede de resto o el resultado de la suma, determinará la verdadera posición del Sol tomada a partir de la cabeza de la constelación de Aries; si, por último, se le añade la verdadera precesión del equinoccio primaveral, se mostrará inmediatamente la posición del Sol a partir de dicho equinoccio, en medio de los doce signos y en grados de la eclíptica.

Si se quisiera hacer esto de otro modo, en lugar del movimiento simple tómese el compuesto y se hará igualmente lo que se ha dicho, excepto que en lugar de la precesión del equinoccio añadas o disminuyas, según lo exija la circunstancia, sólo la prostaféresis. Así se obtiene el cálculo de la apariencia solar por medio de la movilidad de la Tierra, cálculo que coincide con las anotaciones antiguas y con las más modernas, por lo que se presume que está previsto para el futuro. Pero, sin embargo, tampoco ignoramos, que si alguien estimase que el centro de la revolución anual es fijo como el centro del mundo, y que el Sol se mueve con dos movimientos semejantes e iguales a los que se han mostrado con respecto al centro del excéntrico, aparecerán ciertamente todos los datos de antes, los mismos números y la misma demostración, no habiendo cambiado en ellos ninguna otra cosa excepto la posición, sobre todo las que se refieren al Sol. Pues, entonces, el movimiento del centro de la Tierra sería absoluto y simple alrededor del centro del mundo (asignados los dos restantes movimientos al propio Sol). Y, por lo tanto, permanecerá la duda acerca de cuál de aquéllos pueda ser el centro del mundo, según desde el principio decíamos ambiguamente, que el centro del mundo está en el Sol o alrededor de él. Pero con respecto a este tema diremos muchas cosas en la explanación de las cinco estrellas errantes, en la cual según nuestras posibilidades decidiremos juzgando si hemos introducido ya cálculos ciertos y lo menos falsos posibles sobre el movimiento aparente del Sol.

1. Es decir, ya que los movimientos en el primer y el segundo epiciclos son proporcionales entre sí.

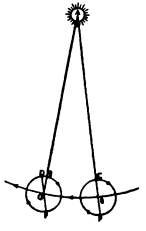
26. SOBRE NYXΘHMEPΩI [LAS NOCHES MÁS LOS DÍAS], ESTO ES, LA VARIABILIDAD DEL DÍA NATURAL

Falta por decir algo acerca de la desigualdad del día natural con respecto al Sol, tiempo que está comprendido en el espacio de XXIIII horas iguales, que usamos, al menos hasta aquí, como medida común y segura de los movimientos celestes. Algunos definen al tal día como el tiempo que hay entre dos salidas del Sol, como los caldeos y la antigüedad judaica, otros como el tiempo entre dos ocasos como los atenienses, o desde medianoche a medianoche como los romanos, desde mediodía a mediodía como los egipcios.

Es claro que, en ese tiempo, la revolución propia del globo terráqueo se completa con la que entretanto se añade a causa del progreso anual, según el movimiento aparente del Sol.[1] El aparente curso desigual del Sol muestra en primer lugar que esta adición se hace desigual, y sobre todo porque el día natural nace en los polos del círculo equinoccial, pero el anual en el círculo de los signos [eclíptica]. Por estas cosas, aquel tiempo aparente no puede ser una medida común y segura del movimiento, no estando de acuerdo un día con otro y consigo mismo desde cualquier respecto, y por eso fue oportuno elegir uno medio e igual entre ellos, con el cual se pudiese medir sin temor la regularidad del movimiento.

En consecuencia, puesto que en el círculo de un año completo se realizan CCCLXV revoluciones alrededor de los polos de la Tierra, sobre las cuales, a causa de la adición de un día por el progreso aparente del Sol, aumenta casi una revolución completa que excede el número, es lógico que una parte de aquel número CCCLXV sea la que configura por igual al día natural. Por lo tanto, hemos de definir y separar el día igual del aparente e irregular. Llamamos, pues, día igual al que contiene una revolución completa del círculo equinoccial y además una porción de tal magnitud cuánto en ese tiempo parece el Sol atravesar con el movimiento regular; en cambio, llamamos día irregular y aparente el que comprende CCCLX «tiempos»[2] de una sola revolución equinoccial y además lo que asciende en el horizonte o en el meridiano junto con el progreso aparente del Sol. La diferencia entre estos días, aunque sea muy pequeña y sea apenas sensible, sin embargo al multiplicarse los días crece en evidencia.

Dos son las causas de esto: tanto la irregularidad del movimiento aparente del Sol, como también la desigual ascensión de la oblicuidad de la eclíptica. La primera, que



1. En Ptolomeo, la revolución diaria y el movimiento anual tenían direcciones opuestas, de manera que el día solar era ligeramente más largo que el día sidéreo. Aquí, la revolución diaria de la Tierra y su movimiento anual tienen la misma dirección, es decir, hacia el este, pero el día solar sigue siendo más largo que el día sidéreo debido al tercer movimiento de la Tierra, a saber, la declinación del polo de la Tierra, que es aproximadamente igual a la revolución anual pero en el sentido opuesto.

Sea A el Sol, CD y DEF la Tierra con centro en B y G, y sean FBC y FGD la misma línea meridiana. Supongamos que el centro de la Tierra se desplaza de B a G durante un intervalo de 24 horas ecuatoriales. Como el movimiento de declinación mantiene el eje de la Tierra paralelo a sí mismo, también la línea meridiana FBC o FGD será paralela a sí misma al final de una revolución diaria, pero no coincidirá con GEA, la línea del centro de la Tierra al centro del Sol, hasta que la Tierra haya girado un arco adicional DE. Es decir, el día solar es igual a los 360 grados del día sidéreo DEFD más el arco DE.

2. Hemos denominado las unidades del ecuador «tiempos» en lugar de grados.

tiene su razón de ser en el irregular y aparente movimiento del Sol, ya se manifestó, puesto que en el semicírculo en el que media el ápside superior faltaban con respecto a las partes del zodíaco IIII «tiempos» y tres cuartos de uno, según Ptolomeo, y en el otro semicírculo, en el que estaba el ápside inferior, sobraban los mismos. Por lo tanto, el exceso total de uno a otro [semicírculo] era de IX tiempos y medio.

Pero en la otra causa, la que se refiere al nacimiento y el ocaso, acontece la máxima diferencia entre los semicírculos de uno y otro solsticio, que existe entre el día menor y el mayor, muy diversa y peculiar de cada región. Pero ésta [la diferencia] se produce desde mediodía o desde medianoche, en los cuatro términos por los que está contenida, puesto que desde el grado XVI de Tauro hasta el XIIII de Leo cruzan el meridiano LXXXVIII grados [de la eclíptica] junto con aproximadamente XCIII «tiempos», y desde el XIIII de Leo hasta el XVI de Scorpio pasan XCII grados, en cerca de LXXXVII «tiempos», pues aquí faltan cinco «tiempos», allí sobran los mismos. Así los días sumados en el primer segmento exceden a los que están en el segundo en diez «tiempos», que hacen dos tercios de una hora, lo que sucede de modo semejante en el otro semicírculo, alternándose a la vez en los otros términos opuestos a partir del diámetro. Pareció bien a los matemáticos que se tomara el principio del día natural no desde la salida o el ocaso, sino desde mediodía o medianoche. Pues la diferencia que se toma partiendo del horizonte es muy variable, de tal modo que se extiende a algunas horas, y además porque no es la misma en cualquier parte, sino que varía muchísimo según la oblicuidad de la esfera. En cambio, la que se refiere al meridiano es la misma en todas partes y más sencilla.

Luego toda la diferencia que se producía por las dos causas ya dichas, tanto por el aparente progreso irregular del Sol como por su desigual tránsito con respecto al meridiano, antes de Ptolomeo, tomando el principio de la disminución a partir de la mitad de Aquario y aumentando desde el principio de Scorpio, esa diferencia acumulaba VIII «tiempos» y un tercio de uno; en cambio ahora, disminuyendo desde el XX grado de Aquario, o cerca, hasta el X de Scorpio, y aumentando desde el X de Scorpio hasta el XX de Aquario, se ha reducido a VII «tiempos», XLVIII minutos. Cambian, pues, también estas cosas a causa de la variabilidad del perigeo y el excéntrico con el paso del tiempo.

Además, si a éstas se hubiera unido también la diferencia máxima de la precesión de los equinoccios, hubiera podido extenderse toda la diferencia de los días naturales a más de X «tiempos» en algún número de años. Por esto se ocultó hasta aquí la tercera causa de la desigualdad de los días, porque la revolución del círculo equinoccial se halló regular con respecto al equinoccio medio y regular, no con respecto a los equinoccios aparentes, que (como ha quedado suficientemente claro) no son en modo alguno regulares. En consecuencia, diez tiempos duplicados constituyen una hora y un tercio, en los que a veces los días más largos pueden exceder a los más cortos. Todo esto quizá pudiera ser desdeñado sin manifiesto error con respecto al progreso anual del Sol y al movimiento más lento de las demás estrellas; pero de ningún modo puede despreciarse con respecto a la celeridad de la Luna, en relación con la cual medio grado y un tercio [5/6°] [en el movimiento del Sol] podría producir de error. En consecuencia, la manera de reducir el tiempo irregular y aparente, en el que todas las diferencias se reúnen, al tiempo igual, es ésta. Propuesto cualquier tiempo, hay que buscar en ambos límites de dicho tiempo, es decir, en el principio y en el final, la posición media del Sol con respecto al equinoccio medio de acuerdo con su movimiento regular, al que llama-

mos compuesto, y también la aparente posición verdadera con respecto al equinoccio verdadero, y averiguar cuántas unidades «temporales» han pasado a partir de las ascensiones rectas alrededor del mediodía o de la medianoche, o cuántas interfirieron de las que hay entre la primera verdadera posición y la segunda verdadera. Pues si fueran iguales a los grados que hay entre una y otra posición media, entonces el tiempo aparente será tomado como igual al medio. Pero si excedieran las unidades «temporales», el exceso se añade al tiempo dado, y si faltara, el defecto se resta del tiempo aparente. Pues, haciendo esto, a partir de las sumas y restas tendremos el tiempo reducido a igualdad, tomando por cualquier unidad «temporal» IIII minutos de una hora o X segundos de un minuto de un día. En cambio, si hubiera sido dado el tiempo igual y se quisiera conocer cuánto tiempo aparente le corresponde, habría que actuar al contrario. Así tuvimos en la primera Olimpíada la posición media del Sol a partir del equinoccio medio de primavera, a mediodía del primer día del mes primero, el Hecatombeon según los atenienses, a XC grados, LVIIII minutos, y a partir del equinoccio aparente a 0 grados, XXXVI minutos de Cáncer; pero para los años de Cristo tenemos el movimiento medio del Sol a VIII grados, II minutos de Capricornio, el movimiento verdadero a VIII grados, XLVIII minutos, del mismo. En consecuencia, en la esfera recta de 0 grados, XXXVI minutos, de Cáncer a VIII grados, XLVIII minutos de Capricornio, ascienden a CLXXIIX «tiempos», LIIII minutos, excediendo la distancia de las posiciones medias en I «tiempo», LI minutos, que hacen VII minutos de una hora. Y de la misma manera con respecto a las demás, en las que puede examinarse exactísimamente el curso de la Luna, de la que se habla en el libro siguiente.

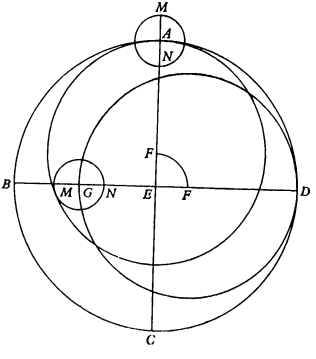
LIBRO CUARTO

Después de exponer en el libro precedente aquellos aspectos relativos al movimiento de la Tierra alrededor del Sol, dentro de lo que nuestra mediocridad fue capaz, y comoquiera que, siguiendo el mismo sistema, es nuestro propósito estudiar los movimientos de todas las estrellas errantes, ahora nos apremia el curso de la Luna y ello de manera imprescindible, puesto que con respecto a ella, que participa del día y de la noche, se obtienen y se examinan cualesquiera posiciones de las estrellas; además, porque entre todas [las estrellas errantes] es la única que refiere en su totalidad sus revoluciones, aun siendo variadas, al centro de la Tierra, porque es con mucho la más parecida a la Tierra; y además, por sí misma, nos proporciona datos acerca de la movilidad terrestre, a no ser, quizá, en lo que se refiere a la [revolución] diaria, por lo que se ha podido creer más aún que la Tierra es el centro del mundo, centro común a todas las revoluciones. No obstante, nosotros, en la explicación del curso de la Luna, no nos apartaremos de la opinión de los antiguos, según la cual se realiza alrededor de la Tierra. Pero también aduciremos algunas otras cosas, además de las que tomamos de nuestros mayores, y en consonancia con ellas fijaremos también de manera más certera el movimiento lunar, en lo que sea posible.

1. LAS HIPÓTESIS SOBRE LOS CÍRCULOS LUNARES SEGÚN LA OPINIÓN DE LOS ANTIGUOS

Es propio del curso de la Luna el que no sigue al círculo que está en el medio de los signos [del zodíaco (la eclíptica)], sino el suyo propio, inclinado, que corta a aquél en dos partes y a su vez es cortado; a partir del cual se dirige hacia una u otra latitud. Todo esto se considera tan seguro, como los solsticios en el movimiento anual del Sol. Pues, evidentemente, aquello que para el Sol es un año, es un mes para la Luna. Las posiciones medias de las secciones reciben el nombre de eclíptica, según otros nodos, y las conjunciones y oposiciones del Sol y de la Luna que acontecen en estos puntos de contacto se llaman eclípticas. En verdad, no hay ningún otro punto común a unos y otros círculos, excepto aquellos en los que puedan producirse eclipses de Sol y de Luna. Pues la digresión de la Luna hace que en otros lugares no se enfrenten entre sí con sus luces; y al pasar por delante no se entorpezcan.

Además, esta órbita oblicua de la Luna, con sus cuatro puntos cardinales, gira alrededor del centro de la Tierra regularmente, con una diferencia diaria de casi tres minutos de grado, completando su revolución en el decimonoveno año. Por lo tanto, en esta órbita y en su propio plano parece moverse la Luna siempre hacia el este, pero unas veces despacio, otras más deprisa; tanto más lentamente cuanto está más elevada, pero con más velocidad cuanto más cercana a la Tierra. Lo que puede distinguirse en ella con más facilidad que en cualquier otro astro a causa de su cercanía. Entendieron [los antiguos] que esto acontecía así por medio de un epiciclo, al circunscribir el cual la Luna, en la parte superior de la circunferencia, disminuyera el movimiento regular, pero en la parte inferior ampliara el mismo. Además se demostró, que lo que se explica por medio de un epiciclo, también puede ser explicado por un excéntrico. Pero eligieron el epiciclo, porque la Luna parece admitir una doble irregularidad. Puesto que cuando estaba en la curvatura superior o inferior del epiciclo no apareció diferencia alguna con respecto al movimiento regular, pero alrededor del punto de contacto del epiciclo [con respecto al círculo a partir del cual el epiciclo se traza] esto no acontece así, sino que era ampliamente mayor en la parte creciente o menguante que si estaba llena o nueva, y esto con una sucesión fija y ordenada. Por lo tanto, pensaron que el círculo sobre el cual se mueve el epiciclo no era homocéntrico con la Tierra, sino excéntrico, en el que la Luna se movería según la ley de que en todas las conjunciones y oposiciones medias del Sol y de la Luna el epiciclo estuviera en el apogeo del excéntrico, en cambio en los cuadrantes medios del círculo[1] en el perigeo del mismo. En consecuencia imaginaron dos movimientos iguales, contrarios entre sí, con respecto al centro de la Tierra, un epiciclo moviéndose hacia el este y el centro del excéntrico y sus ápsides hacia el oeste, mediando siempre entre uno y otro la línea de la posición media del Sol. Y de este modo, el epiciclo atraviesa el excéntrico dos veces por mes.



Para visualizar estas cosas, sea el círculo oblicuo de la Luna, homocéntrico a la Tierra, ABCD, dividido en cuatro por los diámetros AEC y BED, siendo E el centro de la Tierra. Se tendrá, pues, en la línea AC la conjunción media del Sol y de la Luna, y el apogeo del excéntrico, cuyo centro es F y a la vez en la misma posición y tiempo el centro del epiciclo MN. Muévase ahora el apogeo del excéntrico hacia el oeste, tanto cuanto el epiciclo hacia el este, ambos igualmente alrededor de E, con revoluciones regulares y mensuales con respecto a las conjunciones u oposiciones medias del Sol, estando siempre entre ellos la línea AEC de la posición

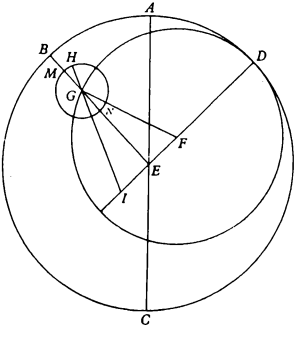
1. El ciclo sinódico es el ciclo de revolución lunar con respecto al Sol.

media del Sol, y la Luna a su vez se mueve hacia el oeste partiendo del apogeo del epiciclo. Dispuesto esto así, juzgaron que coincide con las apariencias, ya que el epiciclo en medio mes recorre alejándose del Sol un semicírculo, pero, a partir del apogeo del círculo excéntrico, recorre la revolución completa de éste, de donde se deduce que, en la mitad de este tiempo, que es alrededor de un cuarto lunar [cuando la Luna se encuentra en uno de los «cuartos»], en el diámetro se oponen entre sí [la posición de la Luna en el epiciclo y el apogeo del excéntrico] y el epiciclo pasa a estar en el perigeo del círculo excéntrico, como en el punto G: en el momento en que más cerca de la Tierra se produce esto, se originan diferencias de irregularidad mayores. Pues magnitudes iguales se exponen en intervalos desiguales: aquella que está más cercana a la vista parece mayor. Serán, pues, más pequeñas, cuando el epiciclo esté en A, mayores cuando esté en G, puesto que el diámetro del epiciclo MN tendrá valoración mínima en la línea AE, en GE la mayor de todas las demás que aparezcan en cualesquiera otros lugares, puesto que GE es la distancia más corta de todas y AE, o su igual DE; la más larga, de cuantas puedan extenderse desde el centro de la Tierra al círculo excéntrico.

2. DEL DEFECTO DE ESTOS SUPUESTOS

Nuestros predecesores consideraron tal disposición de los círculos como coincidente con las apariencias lunares. Pero si examináramos con más detenimiento esta misma cuestión, no encontraríamos tal hipótesis ni lo bastante apta, ni suficiente. Lo cual podemos comprobar por medio de la razón y de los sentidos.

En el caso en que se acepte que el movimiento del centro del epiciclo es regular alrededor del centro de la Tierra habrá que aceptar también que es irregular en la propia órbita excéntrica (la cual describe). Puesto que si, por ejemplo, se toma el ángulo AEB de XLV grados, esto es, medio ángulo recto, e igual al AED, de modo que la suma BED sea un recto, y se toma el centro del epiciclo en G, y se une GF, es evidente que el ángulo exterior GFD es mayor que el GEF, interior y opuesto. Por lo tanto, también los arcos DAB y DG, tan desiguales, descritos ambos en un mismo tiempo, de tal modo que siendo DAB un cuadrante, DG que describió entretanto el centro del epiciclo, es mayor que un cuadrante de circulo. Pero ha quedado claro que en el «cuarto» lunar tanto DAB como DG eran semicírculos; luego es irregular el movimiento del epiciclo que el mismo describe sobre su excéntrico.



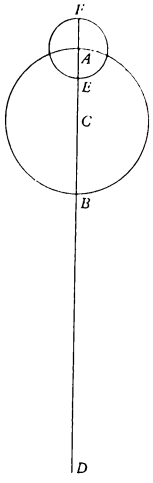
Si esto es así, ¿qué podemos responder al axioma: *el movimiento de los cuerpos celestes es regular, aunque parezca irregular por las apariencias*, si el movimiento aparente del epiciclo fuera en realidad irregular acontece completamente todo lo contrario del principio establecido y supuesto? Pero si dices que él [epiciclo] se mueve de una ma-

nera regular alrededor del centro de la Tierra, y que esto habría de ser suficiente para guardar la regularidad, ¿cuál será esa regularidad en un círculo ajeno, en el que el movimiento de éste no existe, ni siquiera en su excéntrico? Del mismo modo nos admira el hecho de que quieren entender la regularidad de la Luna en el epiciclo no por comparación con el centro de la Tierra, que sería a través de la línea EGM, a la que con toda razón debía referirse la regularidad conforme con el centro del epiciclo, sino por referencia a otro punto diferente, entre el cual y el centro del excéntrico se encuentra en el punto medio la Tierra, y tiene a la línea IGH como índice de la regularidad de la Luna en el epiciclo, lo cual en realidad demuestra suficientemente que este movimiento es irregular. Esto es lo que obligan a confesar las apariencias (que en parte siguen esta hipótesis). Así pues, al recorrer también la Luna su epiciclo irregularmente, si ahora quisiéramos comprobar la irregularidad de la apariencia partiendo de desigualdades, hay que señalar cuál va a ser la argumentación. ¿Qué otra cosa haremos sino dar ocasión a los que critican este arte?

Además, la experiencia y los mismos sentidos nos enseñan que las paralajes de la Luna no concuerdan con las que promete el cálculo de los círculos. Pues las paralajes, que se llaman conmutaciones, se producen por la evidente magnitud de la Tierra en relación con la proximidad de la Luna. Cuando desde la superficie de la Tierra y desde el centro de ésta se trazan líneas rectas, ya no parecerán paralelas, sino que con evidente inclinación se cortarán en el cuerpo lunar, y tienen necesariamente que producir diferencias en la apariencia de la Luna, de modo que la misma Luna aparezca en diferente lugar para los que miran oblicuamente desde la convexidad de la Tierra que para los que ven la Luna desde el centro o desde un vértice. Por lo tanto, tales conmutaciones varían según la relación de la distancia de la Luna a la Tierra. La máxima [distancia], según en acuerdo de todos los matemáticos, es de 64 unidades y un sexto, la unidad de las cuales va del centro de la Tierra a su superficie [el radio de la Tierra], pero la mínima, según las mediciones simétricas de aquéllos, debe ser de 33 unidades y otros tantos minutos, de modo que la Luna se nos acercaría hasta casi la mitad del espacio, y por consiguiente era necesario que las paralajes difiriesen entre sí casi en el doble entre la mínima y la máxima distancia.[1] Pero vemos que poco o nada difieren las [paralajes] que se producen en el cuarto creciente o menguante, incluso en el perigeo del epiciclo, de las que se producen en los eclipses de Sol y de Luna, tal como mostraremos suficientemente en su lugar. Pero este error lo pone de manifiesto el propio cuerpo de la Luna, que por la misma razón debería parecer doblemente mayor o menor según el diámetro. Pero como los círculos están en proporción al cuadrado[2] de sus diámetros, cuando está próxima a la Tierra parecerá cuatro veces mayor en sus «cuartos», que cuando está opuesta al Sol, aunque luciera como «llena»; pero puesto que luce la mitad [en los cuartos creciente y menguante], lucirá al menos con una luz doble [doble superficie luminosa] que estando «llena». Aunque lo opuesto a esto por sí mismo es evidente, si alguien no contento con la simple visión quisiera experimentarlo con la dioptra de Hiparco o cualquier otro instrumento, con los que se obtiene el diámetro de la Luna, encontrará que no difiere sino en cuanto lo exija el epiciclo sin [necesidad de] aquel excéntrico. Por esa causa, Melenao y Timócares, cuando examinaron las estrellas fijas por medio de la posición de la Luna, no dudaron en usar para ello el diámetro de medio grado, que es el que la Luna parece ocupar la mayor parte del tiempo.

1. Literalmente, en razón doble.
2. Literalmente, en razón doble.

3. OTRA OPINIÓN ACERCA DEL MOVIMIENTO DE LA LUNA



De esta manera se muestra claramente que no es a causa del excéntrico por lo que el epiciclo aparece mayor o menor, sino por otra relación entre los círculos. Sea el epiciclo AB, al que designaremos como primero y mayor; sea su centro C, y desde el centro de la Tierra, que es D, prolónguese la línea recta DC hasta el ápside mayor del epiciclo, y tomando como centro este punto A descríbase otro epiciclo EF y todo ello en el mismo plano de la órbita oblicua de la Luna. Muévase C hacia el este, el cambio A hacia el oeste y a su vez la Luna muévase desde F, parte superior del [epiciclo] EF, hacia el este, conservado dicho orden, de modo que mientras la línea DC coincide con la posición media del Sol, la Luna estaría siempre próxima al centro C, esto es, estaría en el punto E, pero en los «cuartos» estaría muy lejana, en F.

Afirmo que las apariencias lunares [coinciden] con las cosas así constituidas. Pues se sigue, que la Luna recorre el epiciclo EF dos veces en un mes, tiempo en el que C da la vuelta una vez con respecto al Sol y en la [Luna] nueva y llena parecerá describir un círculo mínimo, naturalmente aquel que tiene a CE como radio, en cambio en los «cuartos» parecerá describir un círculo máximo, según la distancia desde el centro CF, y así, a su vez, allí mostrará menores, aquí mayores diferencias entre el [movimiento] regular y el aparente, bajo semejantes pero desiguales arcos alrededor del centro C. Y estando siempre el centro C del epiciclo en un círculo homocéntrico de la Tierra, no mostrará por tanto diferentes paralajes, sino sólo las adecuadas al propio epiciclo. Y saltará a la vista la causa por la que el cuerpo lunar aparece en cierta manera semejante a sí mismo, y del mismo modo sucederá con todas las demás cosas que se observan con respecto al curso lunar.

Sucesivamente vamos a demostrar esto por medio de nuestra hipótesis, por más que esto mismo puede hacerse también por medio de círculos excéntricos, como lo hemos hecho respecto del Sol, guardando la debida proporción. Partiremos también de movimientos regulares, como hacíamos más arriba, sin los cuales no pueden juzgarse los irregulares. Pero en esta ocasión hay una dificultad no pequeña por causa de las paralajes que ya tratamos. Por lo cual su localización [la de la Luna] no es observable por medio del astrolabio y otros instrumentos semejantes. Pero la benignidad de la naturaleza ayuda también en esta parte al deseo humano, de modo que por medio de sus eclipses pueda captarse con más certeza que con el uso de instrumentos y sin sospecha de error. Pues estando las otras partes del mundo puras y llenas de luz diurna, consta que la noche no es otra cosa que la sombra de la Tierra, que se muestra en una figura cónica y termina en punta: al coincidir la Luna con esta figura cónica se la considera no sólo colocada en la mitad de las tinieblas, sino que se entiende que ha llegado sin duda a la posición opuesta al Sol. Por otra parte, los eclipses que se producen por la interposición de la Luna, no pro-

porcionan argumentos ciertos de la posición lunar. Pues entonces acontece que la conjunción del Sol y de la Luna es contemplada por nosotros, la cual, sin embargo, en confrontación con el centro de la Tierra, o ya ha pasado o aún no se ha realizado debido a la llamada «causa de la conmutación» [paralaje]. Y por ello no vemos el mismo eclipse de Sol igual en magnitud y duración en todos los lugares de la Tierra, ni siquiera parcialmente semejante. En cambio, en los eclipses lunares no se produce en modo alguno tal impedimento, sino que desde cualquier lugar son iguales, ya que la Tierra a través de su centro transmite desde el Sol el eje de aquella sombra cónica y por tanto los eclipses lunares son los más apropiados, mediante los cuales con un método más seguro se capta el curso de la Luna.

4. DE LAS REVOLUCIONES DE LA LUNA Y DE SUS MOVIMIENTOS PARTICULARES

De entre los más antiguos a los que sirvió de preocupación este tema, hasta el punto que pasase por sus cálculos a la posterioridad, se encuentra Meton el Ateniense, que vivió aproximadamente en la ochenta y siete Olimpíada. Calculó que en XIX años solares se completaban CCXXXV meses [lunares], por lo que aquel gran año ἐννεαδεκαετερίς, esto es, de diecinueve años, fue llamado Metónico. Este número agradó tanto que se fijó en el foro de Atenas y en las ciudades más insignes, e incluso en la actualidad es aceptado por el pueblo, porque consideran que gracias al mismo quedan fijados los principios y los finales de los meses con un orden seguro, y hasta el año solar de CCCLXV días con un cuarto de día es conmensurable con sus meses. A partir de aquí surgió el período Calíppico de LXXVI años, en los que se intercala un [día] diecinueve veces, al que llamaron año Calíppico.

Pero el talento de Hiparco descubre que en CCCIIII años sobra un día completo y que sólo se verifica cuando el año solar haya sido menor en CCC [una trescientava] parte del día. Por eso también este gran año, en el que se completan $\overline{\text{IIII}}$DCCLX meses, fue llamado de Hiparco por algunos. Estas cosas, según dicen más simplemente y de manera más ruda, son denominadas de Minerva, cuando se buscan también las reintegraciones a la situación primitiva de la anomalía y de la latitud, por medio de las cuales el mismo Hiparco más tarde las investigó [las reintegraciones]. En consecuencia, colocadas las anotaciones que observó con mucha diligencia en los eclipses lunares junto a las que recibió de los caldeos, determinó que el tiempo en el que retornaban las revoluciones de los meses y a la vez las anomalías era de CCCXLV años egipcios, LXXXII días y una hora, y que en ese tiempo se completaban $\overline{\text{IIII}}$DCCLXVII [4.267] meses, en cambio $\overline{\text{IIII}}$DLXXIII [4.573] circuitos de anomalía. Así pues, distribuidos en el número de meses la cantidad propuesta de días, y siendo éstos ciento veintiséis mil y VII días y una hora, se encuentra que un mes es igual a XXIX días, XXXI minutos, L segundos, VIII terceros, IX cuartos, XX quintos. Con este razonamiento se patentiza también el movimiento en cualquier tiempo. Pues divididos los CCCLX grados de una revolución mensual entre el tiempo mostrado [número de días en un mes], el movimiento diario de la Luna con respecto al Sol resulta ser de XII grados, XI minutos, XXVI segundos, XLI terceros, XX cuartos, XVIII quintos. Esto, trescientas sesenta y cinco veces, produce, además de las doce revoluciones, un movimiento anual de CXXIX grados, XXXXVII

minutos, XXI segundos, XXVIII terceros, XXVIIII cuartos. Además, estando concertados los IIIICCLXVII [4.267] meses en números relacionados entre sí con los IIIIDLXXIII [4.573] circuitos de anomalía, puesto que se enumeran con la común medida de XVII, estarán en números muy breves como CCLI a CCLXIX, en tal relación, por el teorema quince del libro V de Euclides, tendremos el curso lunar con respecto al movimiento de anomalía, de tal modo que habiendo multiplicado el movimiento de la Luna por CCLXIX y habiendo dividido el producto por CCLI, se obtendrá el movimiento de la anomalía; un año después de XIII revoluciones completas será de LXXXVIII grados, XLIII mineros, VIII segundos, XL terceros, XX cuartos, y por tanto, al día, de XIII grados, III minutos, LIII segundos, LVI terceros, XXIX cuartos.

En cambio, la revolución en latitud tiene otra propiedad. Pues no concuerda con el tiempo previamente fijado en el que se restablece la anomalía, sino que entendemos que sólo ha regresado al punto de partida la anomalía, cuando el último eclipse lunar, a través de todas sus fases, haya sido semejante e igual al anterior, de tal modo que los oscurecimientos de uno y otro hayan sido iguales y en la misma parte, iguales, digo, en magnitud y duración. Lo que sucede cuando han sido iguales las distancias desde el más alto o el más bajo ápside de la Luna. Pues entonces se entiende que la Luna ha atravesado sombras iguales en igual tiempo. Pero tal reversión sucede, según Hiparco, en V̄CCCCLVIII [5.458] meses, a los que corresponden V̄CMXXIII [5.923] revoluciones de latitud. Así pues, con este cálculo quedaban claros los movimientos particulares de latitud en años y en días, como los otros. Pues una vez multiplicado el movimiento de la Luna con respecto al Sol por V̄CMXXIII [5.923] meses y dividido el producto por V̄CCCCLVIII [5.458], tendremos el movimiento en latitud de la Luna: en años, después de XIII revoluciones, CXLVIII grados, XLII minutos, XLVI segundos, XIX terceros, III cuartos; también en días XIII grados, XIII minutos, XLV segundos, XXXIX terceros, XL cuartos.

Hiparco calculó de este modo los movimientos regulares de la Luna, y nadie, anterior a él, se aproximó más a ellos. Sin embargo, los siglos sucesivos pusieron de manifiesto que no eran totalmente correctos todos sus cálculos. Pues Ptolomeo encontró el mismo movimiento medio que Hiparco con respecto al Sol, pero en cambio registró que el movimiento anual de anomalía se diferenciaba de aquél por la falta de I segundo, XI terceros, XXXIX cuartos, en cambio el anual de latitud se distinguía por un exceso de LIII terceros, XLI cuartos. Nosotros también, pasado ya tanto tiempo, encontramos que el movimiento medio anual de Hiparco difiere por defecto de I segundo, II terceros, XLIX cuartos, en cambio el de anomalía sólo por defecto de XXIIII terceros, XLIX cuartos. También hay para el movimiento de latitud I segundo, I tercero, XLII cuartos. Y así el movimiento regular de la Luna, en lo que se diferencia del movimiento terrestre, será al año de II, IX, XXXVII, XXII, XXXII, XL, el de anomalía de I, XXVIII, XLIII, IX, V, IX, el de latitud de II, XXVIII, XLII, XLV, XVII, XXI.

Movimiento de la luna en años y períodos de sesenta años

Años	*Movimiento*					*Años*	*Movimiento*				
	60°	°	'	"	"'		60°	°	'	"	"'
1	2	9	37	22	36	31	0	58	18	40	8
2	4	19	14	45	12	32	3	7	56	3	25
3	0	28	52	7	49	33	5	17	33	26	1
4	2	38	29	30	25	34	1	27	10	48	38
5	4	48	6	53	2	35	3	36	48	11	14
6	0	57	44	15	38	36	5	46	25	33	51
7	3	7	21	38	14	37	1	56	2	56	27
8	5	16	59	0	51	38	4	5	40	19	3
9	1	26	36	23	27	39	0	15	17	41	40
10	3	36	13	46	4	40	2	24	55	4	16
11	5	45	51	8	40	41	4	34	22	26	53
12	1	55	28	31	17	42	0	44	9	49	29
13	4	5	5	53	53	43	2	53	47	12	5
14	0	14	43	16	29	44	5	3	24	34	42
15	2	24	20	39	6	45	1	13	1	57	18
16	4	33	58	1	42	46	3	22	39	19	55
17	0	43	35	24	19	47	5	32	16	42	31
18	2	53	12	46	55	48	1	41	54	5	8
19	5	2	50	9	31	49	3	51	31	27	44
20	1	12	27	32	8	50	0	1	8	50	20
21	3	22	4	54	44	51	2	10	46	12	57
22	5	31	42	17	21	52	4	20	23	35	33
23	1	41	19	39	57	53	0	30	0	58	10
24	3	50	57	2	34	54	2	39	38	20	46
25	0	0	34	25	10	55	4	49	15	43	22
26	2	10	11	47	46	56	0	58	53	5	59
27	4	19	49	10	23	57	3	8	30	28	35
28	0	29	26	32	59	58	5	18	7	51	12
29	2	39	3	55	36	59	1	27	45	13	48
30	4	48	41	18	12	60	3	37	22	36	25

Movimientos de la luna en días, períodos de sesenta días y minutos

Días	60°	*Movimiento* °	'	"	'''	*Días*	60°	*Movimiento* °	'	"	'''
1	0	12	11	26	41	31	6	17	54	47	26
2	0	24	22	53	23	32	6	30	6	14	8
3	0	36	34	20	4	33	6	42	17	40	49
4	0	48	45	46	46	34	6	54	29	7	31
5	1	0	57	13	27	35	7	6	40	34	12
6	1	13	8	40	9	36	7	18	52	0	54
7	1	25	20	6	50	37	7	31	3	27	35
8	1	37	31	33	32	38	7	43	14	54	17
9	1	49	43	0	13	39	7	55	26	20	58
10	2	1	54	26	55	40	8	7	37	47	40
11	2	14	5	53	36	41	8	19	49	14	21
12	2	26	17	20	18	42	8	32	0	41	3
13	2	38	28	47	0	43	8	44	12	7	44
14	2	50	40	13	41	44	8	56	23	34	26
15	3	2	51	40	22	45	9	8	35	1	7
16	3	15	3	7	4	46	9	20	46	27	49
17	3	27	14	33	45	47	9	32	57	54	30
18	3	39	26	0	27	48	9	45	9	21	12
19	3	51	37	27	8	49	9	57	20	47	53
20	4	3	48	53	50	50	10	9	32	14	35
21	4	16	0	20	31	51	10	21	43	41	16
22	4	28	11	47	13	52	10	33	55	7	58
23	4	40	23	13	54	53	10	46	6	34	40
24	4	52	34	40	36	54	10	58	18	1	21
25	5	4	46	7	17	55	11	10	29	28	2
26	5	16	57	33	59	56	11	22	40	54	43
27	5	29	9	0	40	57	11	34	52	21	25
28	5	41	20	27	22	58	11	47	3	48	7
29	5	53	31	54	3	59	11	59	15	14	48
30	6	5	43	20	45	60	12	11	26	41	31

Movimiento de anomalía lunar en años y períodos de sesenta años

Años	*Movimiento*					*Años*	*Movimiento*					
	60°	°	'	"	'''		60°	°	'	"	'''
1	1	28	43	9	7	31	3	50	17	42	44
2	2	57	26	18	14	32	5	19	0	51	52
3	4	26	9	27	21	33	0	47	44	0	59
4	5	54	52	36	29	34	2	16	27	10	6
5	1	23	35	45	36	35	3	45	10	19	13
6	2	52	18	54	43	36	5	13	53	28	21
7	4	21	2	3	50	37	0	42	36	37	28
8	5	49	45	12	58	38	2	11	19	46	35
9	1	18	28	22	5	39	3	40	2	55	42
10	2	47	11	31	12	40	5	8	46	4	50
11	4	15	54	40	19	41	0	37	29	13	57
12	5	44	37	49	27	42	2	6	12	23	4
13	1	13	20	58	34	43	3	34	55	32	11
14	2	42	4	7	41	44	5	3	38	41	19
15	4	10	47	16	48	45	0	32	21	50	26
16	5	39	30	25	56	46	2	1	4	59	33
17	1	8	13	35	3	47	3	29	48	8	40
18	2	36	56	44	10	48	4	58	31	17	48
19	4	5	39	53	17	49	0	27	14	26	55
20	5	34	23	2	25	50	1	55	57	36	2
21	1	3	6	11	32	51	3	24	40	45	9
22	2	31	49	20	39	52	4	43	23	54	17
23	4	0	32	29	46	53	0	22	7	3	24
24	5	29	15	38	54	54	1	50	50	12	31
25	0	57	58	48	1	55	3	19	33	21	38
26	2	26	41	57	8	56	4	48	16	30	46
27	3	55	25	6	15	57	0	16	59	39	53
28	5	24	8	15	23	58	1	45	42	49	0
29	0	52	51	24	30	59	3	14	25	58	7
30	2	21	34	33	37	60	4	43	9	7	15

Movimiento de anomalía lunar en días, grupos de sesenta días y minutos

Días	60°	*Movimiento* °	'	"	'''	*Días*	60°	*Movimiento* °	'	"	'''
1	0	13	3	53	56	31	6	45	0	52	11
2	0	26	7	47	53	32	6	58	4	46	8
3	0	39	11	41	49	33	7	11	8	20	4
4	0	52	15	35	46	34	7	24	12	34	1
5	1	5	19	29	42	35	7	37	16	27	57
6	1	18	23	23	39	36	7	50	20	21	54
7	1	31	27	17	35	37	8	3	24	15	50
8	1	44	31	11	32	38	8	16	28	9	47
9	1	57	35	5	28	39	8	29	32	3	43
10	2	10	38	59	25	40	8	42	35	57	40
11	2	23	42	53	21	41	8	55	39	51	36
12	2	36	46	47	18	42	9	8	43	45	33
14	3	2	54	35	11	44	9	34	51	33	26
15	3	15	58	29	7	45	9	47	55	27	22
16	3	29	2	23	4	46	10	0	59	21	19
17	3	42	6	17	0	47	10	14	3	15	15
18	3	55	10	10	57	48	10	27	7	9	12
19	4	8	14	4	53	49	10	40	11	3	8
20	4	21	17	58	50	50	10	53	14	57	5
21	4	34	21	52	46	51	11	6	18	51	1
22	4	47	25	46	43	52	11	19	22	44	58
23	5	0	29	40	39	53	11	32	26	38	54
24	5	13	33	34	36	54	11	45	30	32	51
25	5	26	37	28	32	55	11	58	34	26	47
26	5	39	41	22	29	56	12	11	38	20	44
27	5	52	45	16	25	57	12	24	42	14	40
28	6	5	49	10	22	58	12	37	46	8	37
29	6	18	53	4	18	59	12	50	50	2	33
30	6	31	56	58	13	60	13	3	53	56	30

Movimiento de latitud de la luna en años y períodos de sesenta años

Años	*Movimiento*					*Años*	*Movimiento*				
	60°	°	'	"	'''		60°	°	'	"	'''
1	2	28	42	45	17	31	4	50	5	23	57
2	4	57	25	30	34	32	1	18	48	9	14
3	1	26	8	15	52	33	3	47	30	54	32
4	3	54	51	1	9	34	0	16	13	39	48
5	0	23	33	46	26	35	2	44	56	25	6
6	2	52	16	31	44	36	5	13	39	10	24
7	5	20	59	17	1	37	1	42	21	55	41
8	1	49	42	2	18	38	4	11	4	40	58
9	4	18	24	47	36	39	0	39	47	26	16
10	0	47	7	32	53	40	3	8	30	11	33
11	3	15	50	18	10	41	5	37	12	56	50
12	5	44	33	3	28	42	2	5	55	42	8
13	2	13	15	48	45	43	4	34	38	27	25
14	4	41	58	34	2	44	1	3	21	12	42
15	1	10	41	19	20	45	3	32	3	58	0
16	3	39	24	4	37	46	0	0	46	43	17
17	0	8	6	49	54	47	2	29	29	28	34
18	2	36	49	35	12	48	4	58	12	13	52
19	5	5	32	20	29	49	1	26	54	59	8
20	1	34	15	5	46	50	3	55	37	44	26
21	4	2	57	51	4	51	0	24	20	29	44
22	0	31	40	36	21	52	2	53	3	15	1
23	3	0	23	21	38	53	5	21	46	0	18
24	5	29	6	6	56	54	1	50	28	45	36
25	1	57	48	52	13	55	4	19	11	30	53
26	4	26	31	37	30	56	0	47	54	16	10
27	0	55	14	22	48	57	3	16	37	1	28
28	3	23	57	8	5	58	5	45	19	46	45
29	5	52	39	53	22	59	2	14	2	32	2
30	2	21	22	38	40	60	4	42	45	17	21

Movimiento de latitud de la luna en días, grupos de sesenta días y minutos

Días	*Movimiento* 60°	°	'	"	'''	*Días*	*Movimiento* 60°	°	'	"	'''
1	0	13	13	45	39	31	6	50	6	35	20
2	0	26	27	31	18	32	7	3	20	20	59
3	0	39	41	16	58	33	7	16	34	6	39
4	0	52	55	2	37	34	7	29	47	52	18
5	1	6	8	48	16	35	7	43	1	37	58
6	1	19	22	33	56	36	7	56	15	23	37
7	1	32	36	19	35	37	8	9	29	9	16
8	1	45	50	5	14	38	8	22	42	54	56
9	1	59	3	50	54	39	8	35	56	40	35
10	2	12	17	36	33	40	8	49	10	26	14
11	2	25	31	22	13	41	9	2	24	11	54
12	2	38	45	7	52	42	9	15	37	57	33
13	2	51	58	53	31	43	9	28	51	43	13
14	3	5	12	39	11	44	9	42	5	28	52
15	3	18	26	24	50	45	9	55	19	14	31
16	3	31	40	10	29	46	10	8	33	0	11
17	3	44	53	56	9	47	10	21	46	45	50
18	3	58	7	41	48	48	10	35	0	31	39
19	4	11	21	27	28	49	10	48	14	17	9
20	4	24	35	13	7	50	11	1	28	2	48
21	4	37	48	58	46	51	11	14	41	48	28
22	4	51	2	44	26	52	11	27	55	34	7
23	5	4	16	30	5	53	11	41	9	19	46
24	5	17	30	15	44	54	11	54	23	5	26
25	5	30	44	1	24	55	12	7	36	51	5
26	5	43	57	47	3	56	12	20	50	36	44
27	5	57	11	32	43	57	12	34	4	22	74
28	6	10	25	18	22	58	12	47	18	8	3
29	6	23	39	4	1	59	13	0	31	53	43
30	6	36	52	49	41	60	13	13	45	39	22

5. DE LA PRIMERA IRREGULARIDAD QUE OCURRE EN LA LUNA NUEVA O LLENA. DEMOSTRACIÓN

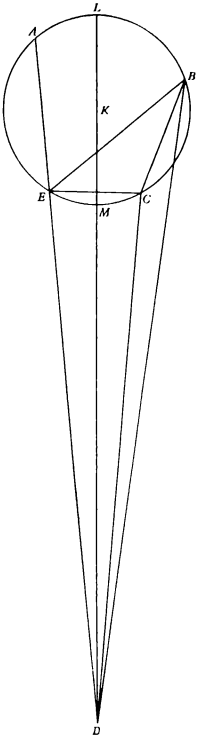
Hemos expuesto los movimientos regulares de la Luna, al menos en lo que hasta el presente se nos han dado a conocer. Ahora es preciso añadir el cálculo de la irregularidad, la que demostraremos por medio del epiciclo, y en primer lugar la que acontece en las conjunciones y oposiciones del Sol, con respecto a la cual los matemáticos antiguos trabajaron con admirable ingenio por medio de tríadas de eclipses lunares. Nosotros seguiremos tal camino preparado por ellos y tomaremos tres eclipses observados cuidadosamente por Ptolomeo, con los cuales compararemos otros tres anotados con no menor cuidado, para que pueda examinarse si los movimientos regulares ya expuestos se han observado correctamente. A imitación de los antiguos, utilizaremos en la explicación de éstos los movimientos medios del Sol y de la Luna, considerándolos regulares, partiendo de la localización del equinoccio primaveral. Puesto que la diversidad, que se produce a causa de la irregular precesión de los equinoccios, no puede percibirse en tan breve tiempo, ni siquiera en diez años.

Así pues, Ptolomeo tomó el primer eclipse, uno ocurrido el año XVII del emperador Adriano, transcurrido el vigésimo día del mes Pauni, según los egipcios; el ciento treinta y tres de los años de Cristo, el sexto día del mes de mayo, o sea, el día antes de las nonas. Faltó toda [la Luna] durante un tiempo medio de tres cuartos de hora igual, antes de la medianoche en Alejandría, pero en Frauenburg o en Cracovia fue de una hora con tres cuartos antes de medianoche a la que seguía el día séptimo, ocupando el Sol XIII grados y un cuarto de grado de [la constelación] Tauro, pero según el movimiento medio XII y XXI de Tauro.

Dice que el otro eclipse fue en el año XIX de Adriano, transcurridos dos días del mes Chiach, el cuarto de los egipcios. Era, pues, el año CXXXIIII de Cristo, XIII días antes de las calendas de noviembre, y hubo un eclipse por el norte de diez doceavos de su diámetro, cuya tiempo medio era una hora equinoccial en Alejandría, pero en Cracovia de dos horas antes de la medianoche, estando el Sol en el grado XXV y un sexto del signo Libra, pero según el movimiento medio en XXVI, XLIII del mismo [signo].

El tercer eclipse ocurrió en el año XX de Adriano, transcurridos XIX días de Pharmuthi, octavo mes de los egipcios, en el año CXXXV de Cristo, pasado el sexto día de marzo, eclipsándose la Luna de nuevo por el norte en la mitad de su diámetro. El tiempo medio de éste fue en Alejandría de cuatro horas equinocciales, pero en Cracovia duró tres horas después de la medianoche, cuya madrugada eran las nonas de marzo. También estaba entonces el Sol en el grado XIII y XII minutos en la parte de Piscis, por el movimiento medio en XI y XLIIII de Piscis.

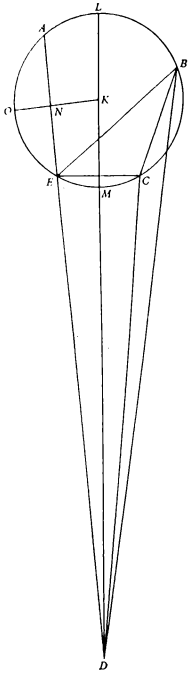
Así queda claro que en la mitad del tiempo que había entre el primer y segundo eclipse, la Luna recorrió tanto espacio como el Sol (excluidos los círculos completos), CLXI grados y LV minutos, y desde el segundo al tercero CXXXVII grados, LV minutos. Había en el primer intervalo I año, CLXVI días, XXIII horas iguales y tres cuartos de una según la apariencia, pero examinado escrupulosamente XXIII horas con cinco octavos. En cambio, en el segundo intervalo hay I año, CXXXVII días, V horas de un modo simple, pero con exactitud V y media. Y el movimiento regular del Sol y de la Luna en conjunto, en el primer intervalo, excluidos los círculos [completos], era de



CLXIX grados, XXXVII minutos y el de anomalía de CX grados, XXI minutos. En el segundo intervalo, el movimiento igualmente regular del Sol y de la Luna era de CXXXVII grados, XXXIIII minutos, pero en cambio el de anomalía era de LXXXI grados, XXXVI minutos. Así pues, queda claro que en la primera distancia los CX grados, XXI minutos del epiciclo restan al movimiento medio de la Luna VII grados, XLII minutos; en la segunda, los LXXXI grados, XXXVI minutos suman un grado, XXI minutos.

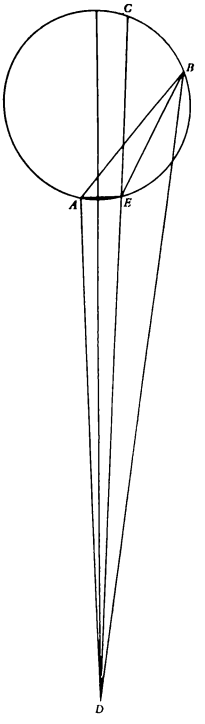
Después de proponer estas cosas, descríbase el epiciclo lunar ABC, en el cual el primer eclipse estuviera en A, el otro en B y el tercero en C, y en esta dirección entiéndase la marcha de la Luna hacia el oeste. Y sea el arco AB de CX grados, XXI minutos, que resta (como hemos dicho) VII grados, XLII minutos BC tendrá LXXXI grados, XXXVI minutos, que suma un grado, XXI minutos; el resto del círculo CA será de CLXVIII grados, III minutos, que suman los VI grados y XXI minutos que faltan. Pero el ápside superior del epiciclo no está en los arcos BC y CA, puesto que han sido añadidos y son menores que un semicírculo, es necesario encontrarlo en AB.

Tomemos D como centro de la Tierra, alrededor del cual se mueve regularmente el epiciclo, láncese desde allí líneas hacia los puntos de los eclipses DA, DB y DC y únanse BC, BE, CE. Así pues, como el arco AB se extiende a VII grados, XLII minutos del zodíaco, el ángulo ADB será de VII grados, XLII minutos tal como CLXXX son dos rectos. Pero si dos rectos fueran CCCLX, el mismo ángulo sería de XV grados, XXIIII minutos y el ángulo AEB con respecto a la circunferencia es de similares CX grados, XXI minutos, siendo un ángulo exterior del triángulo BDE. Luego se da el ángulo EBD de XCIIII grados, LVII minutos. Pero en los triángulos de ángulos dados son también conocidos los lados y es DE de 147.396 unidades, BE de 26.798 unidades, de las 200.000 que tiene el diámetro del círculo que circunscribe al triángulo. A su vez, puesto que el arco AEC comprende en el zodíaco VI grados, XXI minutos, el ángulo que está en EDC será de VI grados, XXI minutos, si CLXXX son dos rectos. Pero si dos rectos valen CCCLX grados, él mismo será de XII grados, XLII minutos, tal como también el ángulo en AEC es de CXCI grados, LVII minutos, y siendo exterior del triángulo CDE desde el mismo ángulo D queda el tercero ECD de los mismos CLXXIX grados, XV minutos. Se tienen, pues, los lados DE de 199.996 unidades, CE de 22.120 unidades, siendo de 200.000 el diámetro del círculo que circunscribe. Pero siendo DE de 147.396 unidades, CE es de 16.302, como tambien BE es de 26.798. Luego siendo conocidos en el triángulo BEC dos lados, el BE y el CE, y el ángulo E de LXXXI grados, XXXVI minutos, igual al arco BC, tendremos también el tercer lado BC, según la demostración



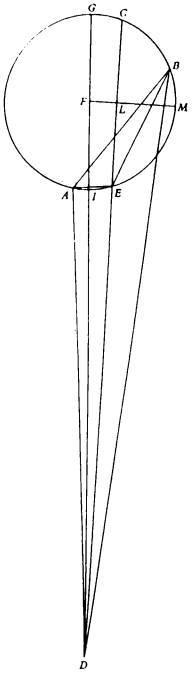
de los triángulos planos, de aquellas mismas 17.960 unidades. Pero siendo el diámetro del epiciclo de 200.000 unidades, la misma BC, en cuanto cuerda de LXXXI grados, XXXVI minutos, será de 130.684 unidades y las otras de acuerdo con la relación dada, ED de 1.072.684 unidades y CE de 118.637 y el arco CE de LXXII grados, XLVI minutos, X segundos. Pero, según lo establecido previamente, el arco CEA tenía CLXVIII grados, III minutos; luego, lo que resta, EA es de XCV grados, XVI minutos, L segundos, y su cuerda de 147.786 unidades. Y de ahí que toda la línea AED tenga 1.220.460 de las mismas unidades. Pero, puesto que el segmento EA es menor a un semicírculo, el centro del epiciclo no estará en él, sino dentro de los otros ABCE. Sea, pues, dicho centro K, y trácese por uno y otro ápside DMKL, y sea L el ápside superior y M el inferior. Además, se mostró en el teorema treinta del [libro] III de Euclides, que el rectángulo contenido bajo ADE [AD-DE] es igual al que está contenido bajo LDM [LD-DM]. Pero, como el diámetro LM del círculo se corta en dos partes iguales en K, al que se añade en línea recta DM, junto con el [más el] cuadrado de KM, será igual al [cuadrado] de DK. Por lo tanto, se da DK con una longitud de 1.148.556 unidades, siendo LK de 100.000; y por otra parte, si DK fuera de 100.000, tendrá 8.706 unidades LK, que parte del centro del epiciclo.

Realizado esto así, trácese KNO perpendicular a AD. Luego puesto que KD, DE, EA tienen una relación entre sí dada en unidades de las cuales LK vale 100.000 y NE, la mitad de AE, 73.893 de las mismas unidades: por lo tanto, en total [por suma] DEN es de 1.146.577 unidades. Pero en el triángulo DKN son dados dos lados DK, ND, y el ángulo N que es recto. Por lo tanto, el ángulo NKD en el centro tendrá LXXXVI grados, XXXVIII minutos y medio y lo mismo el arco MEO, y LAO, resto del semicírculo, será de XCIII grados, XXI minutos y medio quitado del cual OA (la mitad de AOE) será de XLVII grados, XXXVIII y medio minutos, queda la restante LA de VI grados, XLIII minutos, que es la distancia de la Luna desde el ápside superior del epiciclo al primer eclipse o anomalía. Pero todo [el arco] AB era de CX grados, XXI minutos; así pues, la restante anomalía LB, en el otro eclipse, es de LXIII grados, XXXVIII minutos, y todo [el arco] LBC de CIIIIL grados, XIIII minutos, donde incidía el tercer eclipse. Y ya quedará también claro, que siendo el ángulo DKN de LXXXVI grados, XXXVIII minutos (siendo CCCLX cuatro rectos), el ángulo KDN de III grados, XXII minutos, es lo que falta con respecto a un recto [el complementario], esto es, la prostaféresis que añade la anomalía en el primer eclipse. Tambien, el ángulo completo ADB era de VII grados, XLII minutos; luego el restante LDB tiene IIII grados, XX minutos, que se restan al arco LB en el movimiento regular de la Luna en el segundo eclipse. Y puesto que el ángulo BDC era de I grado, XXI minutos, luego el restante CDM queda de II grados, IL



minutos, prostaféresis restada del arco LBC en el tercer eclipse. Era, por tanto, la posición media de la Luna, esto es, del centro K, en el primer eclipse, de IX grados, LIII minutos de Scorpio, mientras que su posición aparente estaba a XIII grados, XV minutos de Scorpio; tanto, digo, cuanto el Sol, en posición diametralmente opuesta, había ocupado en Tauro. Y del mismo modo, la posición media de la Luna en el segundo eclipse tenía XXIX grados y medio de Aries. En el tercero tenía XVII grados, IIII minutos de Virgo. Tambien las distancias lunares regulares desde el Sol eran en el primero de CLXXVII grados, XXXIII minutos, en el segundo de CLXXXII grados, IIIL minutos, en el último CLXXXV grados, XX minutos. Así lo juzgó Ptolomeo.

Siguiendo este ejemplo, dirijámonos hacia otro tipo de eclipses lunares, que también han sido observados por nosotros con el mayor cuidado. El primero ocurrió en el año MDXI de Cristo, transcurridos seis días del mes de octubre, y empezó la Luna a eclipsarse una hora y un octavo de hora antes de media noche, según las horas iguales, y volvió a su integridad dos horas y un terció después de medianoche, y así el punto medio del eclipse estuvo media hora y una doceava parte de hora [7/12] despues de medianoche, cuya madrugada era el día septimo en las nonas de octubre: y se eclipsó la Luna completa, estando el Sol a XXII, grados, XXV minutos de Libra, pero según el movimiento regular a XXIIII grados, XIII minutos de Libra. Observamos el segundo eclipse en el año MDXXII de Cristo, el mes de septiembre, transcurridos cinco días, faltando la Luna completa, cuyo principio fue a los dos quintos de una hora igual antes de medianoche, pero su tiempo medio estuvo una hora y un tercio después de la medianoche, a la que seguía el día sexto, y el octavo antes de los idus de septiembre. Estaba el Sol entonces a XXII grados y un quinto de Virgo, pero según el movimiento regular a XXIII grados y LIX minutos de Virgo. El tercero lo observamos también en el año MDXXIII de Cristo, transcurridos ya XXV días del mes de agosto, el cual [el eclipse] empezó III horas menos un quinto de hora después de la medianoche, y el tiempo medio del eclipse también total estuvo a las IIII horas y 1/12 de hora despues de la medianoche, siendo ya inminente el día séptimo de las calendas de septiembre, estando el Sol a XI grados, XXI minutos de Virgo, según el movimiento regular a XIII grados, II minutos de Virgo. Y a partir de aquí tambien se manifestó que la distancia entre las posiciones verdaderas del Sol y de la Luna, desde el primer eclipse al segundo, fue de CCCXXIX grados, XLVII minutos, pero del segundo al tercero fue de CCCXLIX grados, IX minutos. El tiempo desde el primer eclipse al segundo es de diez años iguales, CCCXXXVII días y tres cuartos de una hora según el tiempo aparente, pero para el movimiento regular exacto era de una hora menos una quinta parte; desde



el segundo eclipse hasta el tercero pasaron CCCLIIII días, III horas, V minutos, pero de tiempo regular III horas, IX minutos. En el primer intervalo el movimiento medio del Sol y la Luna conjuntamente, abandonados los círculos [completos], suma CCCXXXIIII grados, XLVII minutos, y el de anomalía CCL grados, XXXVI minutos, restando del movimiento regular casi cinco grados. En el segundo intervalo, el movimiento medio del Sol y de la Luna fue de CCCXLVI grados, X minutos, el de anomalía de CCCVI grados, XLIII minutos, añadiendo al movimiento regular II grados, LIX minutos.

Sea ahora el epiciclo ABC y sea A la posición de la Luna en la mitad del primer eclipse, B en el segundo, C en el tercero, y entiéndase el movimiento del epiciclo dirigido desde C hacia B, y desde B hacia A, esto es, desde arriba hacia el oeste, desde abajo hacia el este; y sea el arco ACB de CCL grados, XXXVI minutos, que detrae al movimiento regular de la Luna (como dijimos) cinco grados, en el primer intervalo de tiempo. Y sea el arco BAC de CCCVI grados, XLIII minutos, añadiendo al movimiento regular de la Luna II grados, LIX minutos, y por tanto el restante [arco] AC de CXCVII grados, XIX minutos, detrae los restantes II grados, I minuto. Pero puesto que el AC es mayor que un semicírculo y es sustractivo, es preciso que en él esté el ápside más alto, y ya que no puede estar ni en BA ni en CBA, que son aditivos y uno y otro menor a un semicírculo, por el contrario el movimiento más lento se supone alrededor del apogeo. Tómese, pues, el centro D de la Tierra como opuesto y únase AD, DB, DEC, AB, AE, EB. Puesto que CEB, ángulo exterior del triángulo DEB, se conoce como de LIII grados, XVII minutos, juntamente con el arco CB, que es el resto del círculo menos BAC, y el ángulo BDE es según el centro de II grados, LIX minutos, pero según el arco de V grados, LVIII minutos, y en consecuencia el restante EBD es de XLVII grados, XVIII minutos. Por lo tanto, el lado BE será de 1.042 unidades, y el lado DE de 8.024 de las mismas unidades de las que tendría 10.000 el radio del círculo que circunscribe al triángulo.

De igual modo, el ángulo AEC, constituido en la circunferencia ACB, es de CXCVII grados, XIX minutos, y el ADC es de II grados, I minuto, en cuanto al centro, pero en cuanto al arco es de IIII grados, II minutos: por lo tanto, el ángulo que queda del triángulo que está bajo DAE es de CXCIII grados, XVII minutos, siendo CCCLX dos rectos. Luego tambien están dados los lados en unidades, de las que el radio del círculo que circunscribe al triángulo ADE tiene 10.000, AE de 702 unidades, DE de 19.865 unidades; pero de las que DE tenía 8.024 unidades, de éstas AE tiene 283 unidades, de las que tambien tenía EB 1.042 unidades. A la vez tenemos, pues, el triángulo ABE, en el que dos lados, el AE y el EB son dados, y todo el ángulo que está bajo AEB es de CCL grados, XXXVI minutos, siendo CCCLX dos rectos. Por lo tanto, por lo demos-

trado de los triángulos planos, también AB será de 1.227 de las mismas unidades, de las que EB tiene 1.042. Así pues, hemos obtenido la relación entre estas tres líneas, AB, EB y ED, por la que constarán también en unidades, de las que el radio del epiciclo vale 10.000, y de las que la cuerda AB, dado el arco, vale 16.323, ED 106.751, EB 13.853. De donde tambien se da el arco EB de LXXXVII grados, XLI minutos, el cual con BC suma un total EBÇ de CXL grados, LVIII minutos, cuya cuerda CE vale 18.851 unidades y toda la CED 125.602 unidades.

Expóngase ahora el centro del epiciclo, que necesariamente caerá en el segmento EAC como mayor a un semicírculo, y sea F. Tiéndase DIFG en línea recta a través de ambos ápsides, el más bajo I y el más alto G. Es de nuevo evidente que el rectángulo determinado por CDE [CD, DE], es igual al determinado por GDI [GD, DI], y también que el [rectángulo] GDI unido al [cuadrado] procedente de FI, es igual al [cuadrado] construido partiendo de DF. Se conoce también en su longitud DIF de 116.226 unidades, de las que FG tiene 10.000. Puesto que DF es de 100.000 unidades, FG será de 8.604 unidades, concertando lo que encontramos calculando con la mayoría de los predecesores, que desde Ptolomeo nos antecedieron. Levantemos ahora la línea FL, desde el centro F a EC formando ángulos rectos, y extiéndase en línea recta FLM: y cortará en dos a CE en el punto L. Así, puesto que la línea recta ED es de 106.751 unidades y la mitad de CE, esto es, LE, de 9.426 unidades, toda la DEL será de 116.177, de las que FG tiene 10.000, de las que tambien DF tiene 116.226. Por lo tanto, los dos lados DF y DL del triángulo DFL están dados: también se da el ángulo DFL de LXXXVIII grados, XXI minutos, y el que falta FDL de un grado, XXXIX minutos, y el arco IEM de igual modo de LXXXVIII grados, XXI minutos, y MC, la mitad de EBC, de LXX grados, XXIX minutos: IMC completo será de CLVIII grados, L minutos y el arco restante GC será de XXI grados, X minutos.

Y ésta será la distancia de la Luna desde el apogeo del epiciclo o la posición de la anomalía en el tercer eclipse, y GCB en el segundo [eclipse] vale LXXIIII grados, XXVII minutos y GBA completo en el primer [eclipse] reúne CLXXXIII grados, LI minutos. A su vez, en el tercer eclipse el ángulo IDE, como en el centro, es de I grado, XII minutos, que es la prostaféresis sustractiva, y todo el ángulo IDB en el segundo eclipse es de IIII grados, XXXVIII minutos, también la prostaféresis sustractiva; así pues, está constituida a partir del GDC de I grado XXXIX minutos y del CDB de II grados, LIX minutos, y en consecuencia es el ángulo que se resta de todo el ADB de V grados, y es el que quedará ADI de XXII minutos, que se añaden al movimiento regular en el primer eclipse. Por lo cual, la posición del movimiento regular de la Luna en el primer eclipse estaba a XXII grados, III minutos de Aries, pero la posición del movimiento aparente a XXII grados, XXV minutos, y a tantos grados cuantos el Sol ocupaba en la posición opuesta de Libra. Así, tambien en el otro eclipse, la posición media de la Luna era de XXVI grados, L minutos de Piscis, y en el tercero de XIII grados de Piscis, y el movimiento medio lunar, por el que se separa del movimiento anual de la Tierra: en el primer eclipse CLXXVII grados, LI minutos, en el segundo CLXXXII grados LI minutos, en el tercero CLXXIX grados, LVIII minutos.

6. COMPROBACIÓN DE LO QUE SE EXPUSO ACERCA DE LOS MOVIMIENTOS REGULARES DE LA LUNA EN LONGITUD Y ANOMALÍA

Convendría confirmar lo que se ha expuesto acerca de los eclipses lunares para ver si se han considerado con exactitud los movimientos regulares de la Luna. En efecto, se ha indicado que en el segundo de los primeros eclipses [los medidos por Ptolomeo], la separación de la Luna desde el Sol era de CLXXXII grados, XLVII minutos, el [movimiento] de anomalía tenía LXIIII grados, XXXVIII minutos. Pero en el segundo eclipse de nuestro tiempo, el movimiento de la Luna desde el Sol fue de CLXXXII grados, LI minutos, la anomalía de LXXIIII grados, XXVII minutos. Queda claro que en el tiempo transcurrido se completaron XVII CLXVI meses y casi cuatro minutos. También el movimiento de anomalía, desechados los círculos completos, tenía IX grados, XLIX minutos.

Pero el tiempo que pasó desde el año diecinueve de Adriano, en el mes egipcio Chiach, el segundo día y dos horas antes de la medianoche, a la que siguió el día tercero del mes, hasta el año mil quinientos veintidós de Cristo, el día cinco de septiembre, una hora y un tercio despues de medianoche, es de MCCCXIIC años egipcios, CCCII días, tres horas y 1/3, según el tiempo aparente, que habiendo sido corregido, son tres horas, XXXIIII minutos. Según Hiparco y Ptolomeo, en ese tiempo, después de diecisiete mil ciento sesenta y cinco revoluciones completas de meses iguales, habría habido CCCLVIIII grados, XXVIII minutos; pero el de anomalía tendría, según Hiparco, IX grados, XXXVII minutos, en cambio, según Ptolomeo, IX grados, VIIII minutos. Al movimiento lunar le faltan, pues, de unos a otros [eclipses], XXVI minutos, en cuanto al de anomalía los minutos son XXXVIII para Ptolomeo, X para Hiparco: que los nuestros acrecientan y concuerdan con los cálculos que se han expuesto.

7. DE LA POSICIÓN EN LONGITUD Y DE LA ANOMALÍA LUNAR

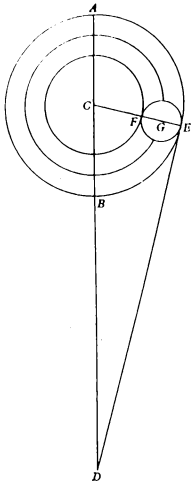
Las posiciones han de buscarse aquí, como antes, referidas a los principios de los años ya establecidos: de las Olimpíadas, de Alejandro, de César, de Cristo, y a cualquier otro que conviniera. Así pues, si consideramos el segundo de los tres eclipses observados en la antigüedad, ocurrido en el año diecinueve de Adriano, en el día dos del mes Chiach de los egipcios, una hora equinoccial de Alejandría antes de la medianoche, pero dos horas antes de medianoche para nosotros bajo el meridiano cracoviano, desde el comienzo de los años de Cristo hasta ese momento encontraremos CXXXIII años egipcios, CCCXXV días, XXII horas a simple vista, pero con exactitud XXI horas, XXXVII minutos. En ese tiempo, el movimiento lunar es, según nuestros cálculos, de CCCXXXII grados, XLIX minutos, el de anomalía de CCXVII grados, XXXII minutos. Y habiendo sido restados éstos de los que se descubrieron en el eclipse, cada uno del suyo correspondiente, queda como posición media lunar a partir del Sol CCIX grados, LVIII minutos; el de anomalía de CCVII grados, VII minutos, al comienzo de los años de Cristo, en la medianoche antes de las calendas de enero. A la vez, hasta el prin-

cipio de los años de Cristo hay ciento noventa y tres Olimpíadas, dos años, CVIC días y medio, que hacen DCCLXXV años egipcios, XII días y medio, y con exactitud XII horas, XI minutos. De igual modo, desde la muerte de Alejandro hasta el nacimiento de Cristo se calculan CCCXXIII años egipcios, CXXX días y medio según el tiempo aparente, con rigor XII horas, XVI minutos. Y desde César hasta Cristo hay XLV años egipcios, XII días, en lo que concuerda la relación entre el tiempo regular y el aparente. Así pues, quitando los movimientos, que conciernen a estas diferencias de tiempos, de las localizaciones de Cristo, restando una a una, tendremos para el mediodía del día primero del mes Hecatombeón de la primera Olimpíada una separación regular de la Luna a partir del Sol de XXXIX grados, XXXXIII minutos, de anomalía de LXVI grados, XX minutos; de los años de Alejandro, para el mediodía del día primero del mes Thoth, la Luna [tenía una separación] a partir del Sol de CCCX grados, XLIIII minutos, de anomalía LXXXV grados, XLI minutos. Y de Julio César, para la medianoche anterior a las calendas de enero, tenemos a la Luna a partir del Sol a CCCL grados, XXXIX minutos, una anomalía de XVII grados, LVIII minutos. Todo ello con respecto al meridiano cracoviense, puesto que Gynaetia, a la que vulgarmente se llama Frauenburg, donde la mayor parte de las veces hicimos nuestras observaciones, situada junto al puerto del río Vístula, está bajo ese meridiano, de tal modo que se nos muestran iguales los eclipses del Sol y de la Luna observados en ambos lugares; en dicho meridiano está tambien Dirraquio en Macedonia, que en la antigüedad se llamó Epidamno.

8. ACERCA DE LA SEGUNDA IRREGULARIDAD DE LA LUNA Y ACERCA DE QUÉ PROPORCIÓN PUEDA HABER ENTRE EL EPICICLO PRIMERO Y EL SEGUNDO

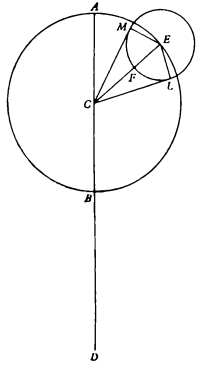
Así pues, ya se han demostrado los movimientos regulares de la Luna junto con su primera irregularidad. Ahora hemos de investigar en qué relación puedan estar el primer epiciclo y el segundo y uno y otro con respecto a la distancia del centro de la Tierra. Se encuentra, según hemos dicho, la máxima diferencia [entre el movimiento regular y el aparente] en los cuartos medios, cuando la mitad de la Luna es creciente o menguante, diferencia que se extiende hasta los VII grados y dos tercios, según conservan las anotaciones de los antiguos.

Pues observaban el tiempo en el que la media Luna estuviera a punto de tocar la distancia media del epiciclo y cerca del contacto de la línea que sale del centro de la Tierra [la tangente], que fácilmente puede percibirse por los cálculos expuestos más arriba. Y estando entonces la Luna cerca del grado noventa de la eclíptica, tomado a partir del orto o del ocaso, evitaban así el error que la paralaje pudiese inferir al movimiento en longitud. Pues, entonces, el círculo que hay a través del vértice del horizonte divide al zodíaco en ángulos rectos y no admite ninguna conmutación en longitud, sino que incide toda en latitud. Después, con la ayuda del instrumento astrolabio, tomaron la posición de la Luna respecto del Sol. Realizado el cálculo, se encontró que la Luna se diferenciaba del movimiento regular, según se ha dicho, en VII grados y dos tercios, en lugar de V grados.



Trácese ahora el epiciclo AB, sea C su centro, y desde el centro de la Tierra que será D, proyéctese la línea recta DBCA; sea A el apogeo del epiciclo, B el perigeo. Dibújese DE tangente al epiciclo y únase CE. Así pues, ya que la prostaféresis máxima está en la tangente, que será en este caso de VII grados, XL minutos, que es también la medida del ángulo BDE, siendo recto el CED, puesto que está en contacto [tangente] con el círculo AB, por lo tanto CE tendrá 1.334 unidades, siendo CD, desde el centro, de 10.000. Pero en la Luna llena y nueva era mucho menos, aproximadamente de 861 unidades. Córtese CE y sea CF de 860 unidades: con el mismo centro F estará recorriendo un círculo en el que se halla la Luna nueva y la llena, y el resto FE de 474 unidades será el diámetro del epiciclo segundo, y cortándola por la mitad en el centro G, toda la línea CFG tendrá 1.097 unidades desde el centro del círculo, al que describió el centro del epiciclo segundo. Y así se manifiesta la relación de CG a GE como de 1.097 a 237, siendo CD de 10.000 unidades.

9. ACERCA DE LA RESTANTE DIFERENCIA POR LA QUE LA LUNA PARECE MOVERSE IRREGULARMENTE DESDE EL ÁPSIDE SUPERIOR DEL EPICICLO



También por esta demostración es posible comprender cómo la Luna en su primer epiciclo se mueve irregularmente y alcanza su máxima diferencia, cuando se curva como en un cuerno o como gibosa, y se muestra semiplena. Sea AB, a su vez, aquel primer epiciclo, el que ha descrito el centro del segundo epiciclo con un movimiento medio, C su centro, A el ápside más alto, B el más bajo. Tómese en la circunferencia, en cualquier parte, el punto E y únase C y E; hágase también CE con respecto a EF en la proporción 1.097 a 237, y con centro en E y radio EF descríbase el segundo epiciclo, y trácense a uno y a otro lado tangentes al mismo las líneas rectas CL, CM. Sea el movimiento del epiciclo pequeño de A hacia E, esto es, desde arriba hacia el oeste, en cambio la Luna partiendo de F hacia L, también hacia el oeste. Así pues, queda patente que siendo regular el movimiento AE, a esta misma regularidad el epiciclo segundo a través de su recorrido FL añade el arco EL y a través de MF lo disminuye.

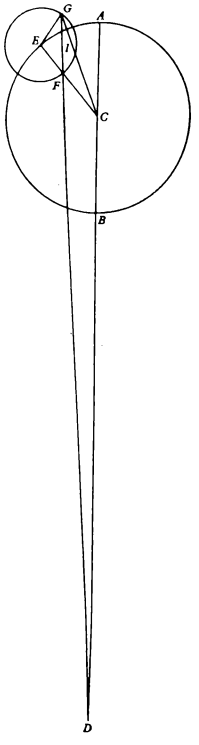
Pero ya que en el triángulo CEL el ángulo en L es recto y EL es de 237 unidades, siendo CE de 1.097 unidades, por lo tanto, si CE fuera de 10.000, EL tendrá 2.160, el cual subtiende al ángulo ECL, según las tablas de XII grados, XXVIII minutos, igual al MCF, siendo los triángulos semejantes e iguales. Y esta diferencia es la máxima con la que la Luna varía desde el ápside superior del primer epiciclo. Esto sucede cuando la Luna en su movimiento medio se coloca a XXXVIII grados, XLVI minutos, por delante y por detrás de la línea del movimiento medio de la Tierra. Así queda suficientemente claro que estas máximas prostaféresis acontecen a una separación media del Sol y de la Luna de XXXVIII grados, XLVI minutos, y otro tanto acontece a una y otra parte de la oposición media.

10. DE QUÉ MODO EL MOVIMIENTO APARENTE DE LA LUNA SE DEMUESTRA A PARTIR DE LOS DATOS DE LOS MOVIMIENTOS REGULARES

Visto ya esto, queremos mostrar de manera práctica de qué modo el movimiento regular y el aparente se apartan de aquellos movimientos regulares de la Luna propuestos, tomando el ejemplo de lo observado por Hiparco, al mismo tiempo que se comprueba la teoría con la experiencia. Así pues, en el año ciento noventa y siete, en el diecisieteavo día del mes Pauni, que es el décimo mes de los egipcios, pasadas nueve y un tercio horas del día, en Rodas, por medio del instrumento astrolábico, Hiparco descubre en la observación del Sol y de la Luna que distan entre sí XLVIII grados y un decimo, estando la Luna al este del Sol. Y como apreciara que el Sol estaba localizado en el grado XI menos una décima de Cáncer, la Luna, consecuentemente, estaría en el grado XXIX de Leo. Y también en ese momento se elevaba el grado XXIX de Scorpio, el X grado de Virgo estaba en la mitad del cielo en Rodas, para la que el polo boreal se eleva a XXXVI grados.

Con este argumento constaba que la Luna, colocada cerca del grado noventa de la eclítica desde el horizonte [meridiano] no admitía ninguna conmutación visual [paralaje] en longitud, o al menos ninguna sensible. Pero ya que esta observación se hizo a las tres horas y un tercio a partir del mediodía de aquel diecisieteavo día, que en Rodas corresponden a cuatro horas equinocciales y que en Cracovia hubieran sido III horas y un sexto de hora equinoccial, debido a la distancia por la que Rodas está más cerca de nosotros un sexto de hora que Alejandría. En consecuencia, desde la muerte de Alejandro habían transcurrido CXCVI años, CCLXXXVI días, III horas simples y una sexta parte a simple vista, regladas III horas con casi un tercio. En ese momento, el Sol, en su movimiento medio, llegó a XII grados, III minutos, de Cáncer, pero en el movimiento aparente a los X grados, XL minutos de Cáncer. De donde parece que la Luna estaba realmente en los XXVIII grados, XXXVII minutos de Leo. Pero el movimiento regular de la Luna, según la revolución mensual, estaba en los XLV grados, V minutos, el de anomalía desde el ápside superior era de CCCXXXIII grados, según nuestro cálculo.

Propuesto este ejemplo, describamos el epiciclo primero AB; su centro C, su diámetro ACB, que es prolongado en línea recta hasta el centro de la Tierra y sea ABD; tómese también en el epiciclo el arco ABE de CCCXXXIII grados y únase C, E, que es cortada en F, de modo que EF sea de 237 unidades, siendo EC de 1.097, y hacien-

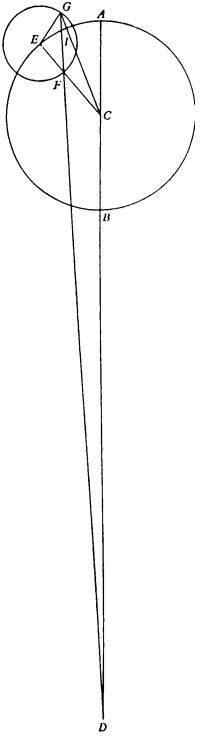


do centro en E, con radio EF, descríbase FG epiciclo del epiciclo. Esté la Luna en el punto G, y sea el arco FG de XC grados, X minutos, en relación doble con el movimiento regular del Sol, que era de XLV grados, IX minutos; y únanse CG, EG, DG. Y ya que del triángulo CEG se dan dos lados, CE de 1.097 unidades y EG de 237, igual a EF, siendo el ángulo GEC de XC grados, XV minutos. Por lo tanto, se dan, según la demostración de los triángulos planos, el otro lado CG de las mismas 1.123 unidades y el ángulo en ECG de XII grados, XI minutos y por lo cual se hace patente el arco EI y la prostaféresis aditiva de la anomalía, y todo el ABEI resulta ser de CCCXLV grados, XI minutos, y el otro ángulo GCA de XIIII grados, XLVIII minutos, es el de la verdadera separación lunar desde el ápside superior del epiciclo AB, y el ángulo BCG de CLXV grados, XI minutos. Por lo tanto, también del triángulo GDC se dan dos lados, GC de 1.123 unidades, y CD de 10.000 y el ángulo GCD de CLXV grados, XI minutos. Según esto, tendremos también el ángulo CDG de I grado, XXVIIII minutos y la prostaféresis, que se añadía al movimiento medio de la Luna, de manera que resultase la verdadera separación de la Luna con respecto al movimiento medio del Sol, de XLVI grados, XXXIIII minutos, y su posición aparente en XXVIII grados, XXXVII minutos de Leo, estando separada de la verdadera posición del Sol en XLVII grados, LVII minutos, a nueve minutos por defecto de la consideración de Hiparco.

Para que nadie sospeche ni que el examen de aquél ni que nuestro cálculo están equivocados, aunque sea en poco, mostraremos, por el contrario, que ni él ni nosotros hemos cometido error, sino que el procedimiento es correcto. Pues si recordamos que el círculo lunar, que ella sigue, es inclinado, aceptaremos también que en la eclíptica se produce alguna diversidad en longitud, sobre todo cerca de la posición media, que son secciones entre los límites boreal y austral y las correspondientes partes de la eclíptica, casi del modo como acontece entre la oblicuidad de la eclíptica y el círculo ecuatorial, tal como se ha expuesto acerca de la irregularidad del día natural. Así también, si trasladamos estas relaciones a la órbita de la Luna, que Ptolomeo mostró que se inclinaba con respecto a la eclíptica, encontraríamos que en aquellos lugares se produce una diferencia de longitud con respecto a la eclíptica de VII minutos, que multiplicada por II serán XIIII: y esto sucede del mismo modo sumando y disminuyendo [la diferencia], puesto que distando el Sol y la Luna un cuadrante de círculo, si el límite de la latitud boreal o austral estuviera en el punto medio entre ellos, entonces el arco del zodíaco interceptado sería mayor que un cuadrante del círculo lunar en XIIII minutos; y al contrario, en los otros cuadrantes, en los que las secciones de la eclíptica dividen por la mitad, los círculos que

pasan por los polos del zodíaco, interceptan arcos menores que un cuadrante. Y así también en el caso presente. Puesto que la Luna gira alrededor del punto medio, que está entre el límite austral y la sección eclíptica ascendente (la que llaman los neotéricos «cabeza de dragón»), y el Sol ya había pasado por la otra sección descendente (que aquéllos llaman «cola»). No es admirable si aquella distancia lunar de XLVII grados, LVII minutos, aumentaba, referida a la eclíptica, en su propia órbita oblicua al menos VII minutos: sin contar con que también el Sol avanzando hacia el ocaso produce un cambio de visión [conmutación] sustractiva, de la que se hablará ampliamente en la explicación de las paralajes. Y así, según Hiparco, aquella distancia de las luminarias, de XLVIII grados, VI minutos, que había apreciado mediante un instrumento, conviene con admirable conformidad y casi como de común acuerdo con nuestro cálculo.

11. EXPOSICIÓN CANÓNICA DE LAS PROSTAFÉRESIS, O SEA, DE LAS «ECUACIONES» LUNARES



Así pues, con este ejemplo pienso que puede entenderse el modo de discernir las trayectorias lunares en general. Puesto que del triángulo CEG los dos lados GE y CE siempre permanecen iguales, por el contrario el ángulo GEC cambia continuamente, aunque también es dado, determinaremos el otro lado GC con el ángulo ECG, que es la prostaféresis para igualar [corregir] la anomalía. Y entonces en el triángulo CDG, habiendo sido calculados dos lados, DC, CG, con el ángulo DEC, del mismo modo queda establecido también el ángulo D alrededor del centro de la Tierra [diferencia angular] entre el movimiento regular y el verdadero. Y para que esto sea más rápido expondremos la tabla de las prostaféresis, que contendrá seis columnas. Así, después de dos columnas con los números comunes del círculo, en tercer lugar estarán las prostaféresis, que en el epiciclo pequeño, de acuerdo con el movimiento bimensual, varían la regularidad de la anomalía primera. Después de un lugar vacío dejado para cálculos futuros, rellenaremos la quinta columna, en la que escribiremos las prostaféresis del primero y mayor epiciclo, que se producen en las conjunciones y oposiciones medias del Sol y la Luna, de las cuales la mayor es de IIII grados, LVI minutos. En penúltimo lugar se colocan los números, en que las prostaféresis que se producen en los cuartos de Luna, exceden a las anteriores; el mayor de los cuales es de II grados, XLIIII minutos.

Pero para que también puedan estimarse los otros excesos se han calculado los minutos proporcionales, cuyo

cálculo es éste. Se tomaron II grados, XLIIII minutos como LX para cualquier otro exceso que se produzca en la tangente al epiciclo [desde el centro de la Tierra]. Así, en el mismo ejemplo donde tuvimos la línea CG de 1.123 unidades, siendo CD de 10.000, que, en total, produce en el punto de contacto [tangente] del epiciclo una prostaféresis de VI grados, XXIX minutos, excediendo a la primera en I grado, XXXIII minutos. Pero como II grados, XLIIII minutos son proporcionales a I grado, XXXIII minutos, así LX son a XXXIII, tenemos por tanto la razón del exceso que se produce en el semicírculo del epiciclo pequeño, con respecto al que en el arco dado es de XC grados, XVIII minutos. Luego escribiremos en la tabla XXXIIII minutos, en la parte correspondiente a los XC grados. De este modo encontraremos los minutos proporcionales a cada uno de los arcos del círculo anotados en la tabla, y hay que exponerlos en el cuarto lugar vacante. Finalmente, en último lugar, añadiremos los grados de latitud boreal y austral, de los que hablaremos más adelante. La comodidad y el ejercicio de la operación nos aconsejó que las expusiéramos en este orden.

Tabla de las protaféresis lunares

Números comunes	*Prosta-féresis del epiciclo* B	*Minutos propor-ciona-les*	*Prosta-féresis del epiciclo* A	*Exceso*	*Grados de latitud norte*
° '	° '		° '	° '	° '
3 357	0 51	0	0 14	0 7	4 59
6 354	1 40	0	0 28	0 14	4 58
9 351	2 28	1	0 43	0 21	4 56
12 348	3 15	1	0 57	0 28	4 53
15 345	4 1	2	1 11	0 35	4 50
18 342	4 47	3	1 24	0 43	4 45
21 339	5 31	3	1 38	0 50	4 40
24 336	6 13	3	1 51	0 56	4 34
27 333	6 54	5	2 5	1 4	4 27
30 330	7 34	5	2 17	1 12	4 20
33 327	8 10	6	2 30	1 18	4 12
36 324	8 44	7	2 42	1 25	4 3
39 321	9 16	8	2 54	1 30	3 53
42 318	9 47	10	3 6	1 37	3 43
45 315	10 14	11	3 17	1 42	3 32
48 312	10 30	12	3 27	1 48	3 20
51 309	11 0	13	3 38	1 52	3 8
54 306	11 21	15	3 47	1 57	2 56

(continuación)

Números comunes		*Prosta-féresis del epiciclo* B		*Minutos proporcionales*	*Prosta-féresis del epiciclo* A		*Exceso*		*Grados de latitud norte*	
°	'	°	'		°	'	°	'	°	'
57	303	11	38	16	3	56	2	2	2	44
60	300	11	50	18	4	5	2	6	2	30
63	297	12	2	19	4	13	2	10	2	16
66	294	12	12	21	4	20	2	15	2	2
69	291	12	18	22	4	27	2	18	1	47
72	288	12	23	24	4	33	2	21	1	33
75	285	12	27	25	4	39	2	25	1	18
78	282	12	28	27	4	43	2	28	1	2
81	279	12	26	28	4	47	2	30	0	47
84	276	12	23	30	4	51	2	34	0	31
87	273	12	17	32	4	53	2	37	0	16
90	270	12	12	34	4	55	2	40	0	0
93	267	12	3	35	4	56	2	42	0	16
96	264	11	53	37	4	56	2	42	0	31
99	261	11	41	38	4	44	2	43	0	47
102	258	11	27	39	4	54	2	43	1	2
105	255	11	10	41	4	51	2	44	1	18
108	252	10	52	42	4	48	2	44	1	33
111	249	10	35	43	4	44	2	43	1	47
114	246	10	17	45	4	39	2	41	2	2
117	243	9	57	46	4	34	2	38	2	16
120	240	9	35	47	4	27	2	35	2	30
123	237	9	13	48	11	20	2	31	2	44
126	234	8	50	49	4	11	2	27	2	56
129	231	8	25	50	4	2	2	22	3	9
132	228	7	59	51	3	53	2	18	3	21
135	225	7	33	52	3	42	2	13	3	32
138	222	7	7	53	3	31	2	8	3	43
141	219	6	38	54	3	19	2	1	3	53
144	216	6	9	55	3	7	1	53	4	3

(continuación)

Números comunes		*Prosta-féresis del epiciclo B*		*Minutos proporcionales*	*Prosta-féresis del epiciclo A*		*Exceso*		*Grados de latitud sur*	
°	'	°	'		°	'	°	'	°	'
147	213	5	40	56	2	53	1	46	4	12
150	210	5	11	57	2	40	1	37	4	20
153	207	4	42	57	2	25	1	28	4	27
156	204	4	11	58	2	10	1	20	4	34
159	201	3	41	58	1	55	1	12	4	40
162	198	3	10	59	1	39	1	4	4	45
165	195	2	39	59	1	23	0	53	4	50
168	192	2	7	59	1	7	0	43	4	53
171	189	1	36	60	0	51	0	33	4	56
174	186	1	4	60	0	34	0	22	4	58
177	183	0	32	60	0	17	0	11	4	59
180	180	0	0	60	0	0	0	0	5	0

12. ACERCA DEL CÁLCULO DEL CURSO LUNAR

Así pues, el modo de calcular el movimiento aparente de la Luna queda claro según las anteriores demostraciones y es éste. Reduciremos a tiempo regular el tiempo propuesto con respecto a la posición de la Luna que buscamos: por este medio deduciremos los movimientos medios de longitud, de anomalía y de latitud, que enseguida delimitaremos también, tal como se ha hecho con el Sol, desde el principio dado de los años de Cristo o desde otro [principio], y confirmaremos las posiciones de cada [movimiento] respecto del tiempo propuesto. Después averiguaremos en la tabla la longitud regular de la Luna, o sea, la doble distancia desde el Sol[1] y la prostaféresis correspondiente en la tercera columna y en la que sigue anotaremos los minutos proporcionales. Así pues, si el número con el que empezamos estuviera en la primera columna o fuera menor de CLXXX grados, añadiremos la prostaféresis a la anomalía lunar; pero si fuera mayor que CLXXX grados o estuviera en la segunda columna, réstese de ella [de la anomalía] y tendremos corregida la anomalía de la Luna y su distancia [angular] verdadera desde el ápside superior, con tal [distancia], volviendo de nuevo a la tabla, tomaremos la prostaféresis correspondiente en la quinta columna y el exceso que se deriva en la sexta co-

1. Porque la luna atraviesa dos veces el pequeño epiciclo durante un mes sinódico, el tiempo de una revolución con respecto al Sol.

lumna, exceso que el epiciclo segundo aumenta sobre el primero. Su parte proporcional [del exceso], tomada según la relación de los minutos encontrados con respecto a los sesenta minutos, se añade siempre a esta prostaféresis: calculado esto, se resta del movimiento medio de longitud y latitud, en el caso en que la anomalía corregida fuera menor de CLXXX grados, o sea, un semicírculo, y se suma si la anomalía fuera mayor. Y de este modo tendremos la verdadera distancia de la Luna desde la posición media del Sol y corregido el movimiento de latitud. Con lo que no se ignorará la verdadera posición de la Luna, ya sea con respecto al movimiento simple del Sol, partiendo de la primera estrella de Aries, o bien con respecto al compuesto, partiendo del equinoccio de primavera o de la suma de su precesión. Finalmente, por medio del movimiento de latitud corregido, tendremos en la sexta y última columna de la tabla los grados de latitud que dista la Luna del círculo medio de la eclíptica. Esta latitud será boreal, cuando el movimiento de latitud aparece en la primera parte de la tabla, esto es, si es menor de XC o mayor de CCLXX grados: en caso contrario se deriva una latitud austral. Y por tanto, desde el septentrión la Luna será descendente hasta los CLXXX grados y desde allí, desde el límite austral, será ascendente, hasta que haya completado los demás grados del círculo. Y de este modo la trayectoria aparente de la Luna tiene relación con el centro de la Tierra, de igual modo que la Tierra la tiene con respecto al Sol.

13. SOBRE EL MODO CÓMO SE EXAMINA Y SE DEMUESTRA EL MOVIMIENTO DE LATITUD LUNAR

Ahora también hay que dar razón del movimiento de latitud lunar. Pero esto parece más difícil de descubrir, porque está impedido por muchas circunstancias. Pues (como se ha dicho antes), si dos eclipses de Luna hubieran sido en todo semejantes e iguales, esto es, eclipsándose sus áreas en la misma posición boreal o austral y alrededor de la misma sección eclíptica ascendente o descendente, la distancia desde la Tierra o desde el ápside superior sería igual. Pues, coincidiendo así estas cosas, se entiende que la Luna ha completado círculos completos de su latitud con movimiento real. Puesto que la sombra de la Tierra es cónica, y si se corta un cono recto con un plano paralelo a la base, la sección en un círculo menor o mayor, según sea mayor o menor la distancia a la base, y por tanto será igual a igual distancia. De igual modo, también la Luna a distancias iguales desde la Tierra atraviesa círculos iguales de sombra y presenta a nuestras miradas discos de sí misma iguales. De aquí que elevándose la Luna mediante partes iguales hacia una idéntica posición a una distancia igual desde el centro de la sombra nos asegura latitudes equivalentes, partiendo de las cuales es necesario deducir que, en intervalos iguales, vuelve al primer lugar de latitud, incluso equidista del mismo punto de conexión en la eclíptica, pero sobre todo si también la posición coincide en uno y otro caso. Pues la proximidad o alejamiento de la Luna o de la Tierra cambia por completo la magnitud de la sombra, pero en tan pequeña cantidad, que apenas es asequible.

Por lo tanto, cuanto mayor tiempo haya pasado entre uno y otro [eclipse], con tanta mayor exactitud podemos determinar el movimiento de latitud de la Luna, tal como se ha dicho respecto del Sol. Pero, puesto que es raro que dos eclipses acontezcan concordando con estas condiciones (a nosotros, en realidad, no se nos han presentado hasta el momento), advertiremos que también hay otra manera por la que este resultado puede

obtenerse. Manteniendo las demás condiciones, si la Luna en porciones diversas y en secciones opuestas se eclipsara, entonces significará que la Luna en el segundo eclipse ha llegado a la posición opuesta con respecto al diámetro del primero y ha descrito, además de circunferencias completas, un semicírculo, lo cual parece satisfacer lo que investigamos. Así pues, encontramos de este modo dos eclipses casi afines.

El primero en el año séptimo de Ptolomeo Filadelfo, que era el año ciento cincuenta de Alejandro, transcurridos, según dijo Claudio, XXVII días del mes Phamenot, el séptimo de los meses egipcios, en la noche a la que seguía el día XXVIII. Y la Luna se eclipsó desde el principio de la octava hasta el fin de la hora décima, en horas nocturnas de la estación correspondiente de Alejandría, hasta un máximo de siete dígitos de diámetro lunar desde el norte, hacia alrededor de la sección descendente. Así pues, el tiempo medio del eclipse era, según se ha dicho, de dos horas estacionales a partir de la medianoche, que hacen dos horas y un tercio equinocciales, puesto que el Sol estaba en el sexto grado de Tauro. Pero en Cracovia hubiera sido una hora y un tercio.

Tomamos el segundo en el mismo meridiano cracoviense, en el año MDIX de Cristo, en el día cuarto antes de las nonas de junio, estando el Sol en los XXI grados de Géminis, cuyo tiempo medio fue de XI horas equinocciales de aquella fecha y tres quintos de hora, en el cual se eclipsaron aproximadamente ocho dígitos desde la zona austral hacia la sección ascendente. Pasaron, pues, [hasta el primer eclipse] desde el comienzo de los años de Alejandro CXLIX años egipcios, CCVI días, XVII horas y un tercio en Alejandría, pero en Cracovia XIII horas con un tercio según las apariencias, pero con exactitud XIII horas y media. En este tiempo la posición de la anomalía, según nuestro cálculo que coincide casi con el de Ptolomeo, era de CLXIII grados, XXXIII minutos de movimiento regular, y la prostaféresis de I grado, XXIII minutos, en los que la verdadera posición de la Luna era menor a la regular. Pero desde el mismo comienzo establecido de Alejandro hasta el segundo eclipse, pasaron MDCCCXXXII años egipcios, CCVC días, XI horas, XLV minutos, en tiempo aparente, pero en tiempo regular XI horas, LV minutos. Por lo tanto, el movimiento regular de la Luna era de CLXXXII grados, XVIII minutos; la posición de anomalía de CLIX grados, LV minutos, pero corregido de CLXI grados, XIII minutos, la prostaféresis, en la que el movimiento regular era menor que el aparente, de un solo grado, XLIIII minutos. Es evidente, por lo tanto, que en uno y otro eclipse hubo la misma distancia desde la Tierra a la Luna y que en ambos el Sol estaba casi en el apogeo; pero hubo una diferencia de un dígito [1/12] entre los eclipses.

Pero ya que el diámetro de la Luna acostumbra a ocupar casi medio grado (tal como expondremos después), su duodécima parte será de un solo dígito, II minutos y medio, con los que coincide el casi medio grado en la órbita oblicua de la Luna alrededor de las secciones con la eclíptica, en dicha cantidad en el segundo eclipse la Luna estaría más alejada de la sección ascendente que en la primera de la descendente: por lo que está clarísimo que el verdadero movimiento de latitud de la Luna, después de revoluciones completas, fue de CLXXIX grados y medio. Mas la anomalía lunar añade al movimiento regular entre el primero y el segundo eclipse XXI minutos, que es la diferencia entre sí de las prostaféresis. Así pues, tendremos un movimiento regular de latitud de la Luna de CLXXIX grados, LI minutos, después de círculos completos. Pero el tiempo transcurrido entre uno y otro eclipse era de MDCLXXXIII años, LXXXVIII días, XXII horas, XXXV minutos según el tiempo aparente, que coincidía con el regular. En este tiempo, completadas veintidós mil quinientas setenta y siete revoluciones

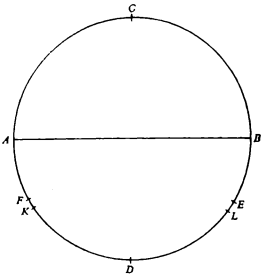
regulares, hay CLXXIX grados, LI minutos. Lo que concuerda con nuestros cálculos ya expuestos.

14. DE LAS POSICIONES DE LA ANOMALÍA LUNAR EN LATITUD

También para determinar las posiciones de esta trayectoria con respecto a los principios [de los calendarios] preestablecidos, tomaremos aquí dos eclipses lunares, no referentes a la misma sección, ni a partes opuestas del diámetro, como en los casos precedentes, sino a las mismas [distancias], norte o sur (respetadas todas las demás condiciones, según se ha dicho), a tenor del precepto ptolomaico, con las que obtendremos nuestro propósito libres de error. Así pues, el primer eclipse que ya hemos utilizado para investigar otros movimientos de la Luna, era el que hemos dicho observado por C. Ptolomeo en el año diecinueve de Adriano, pasados dos días del mes Chiach, una hora equinoccial antes de la medianoche en Alejandría, pero en Cracovia dos horas antes de la medianoche, a la que seguía el día tercero; y se eclipsó la Luna en el tiempo medio del eclipse en diez doceavas partes de su diámetro, esto es, diez dígitos a partir del norte, estando el Sol a XXV grados, X minutos de Libra, y la posición de la anomalía lunar era de LXIIII grados, XXXVIII minutos, y su prostaféresis sustractiva de IIII grados, XX minutos, hacia la sección descendente. El otro, también con la máxima diligencia, lo observamos en Roma, en el año mil quinientos de Cristo después de las nonas de noviembre, pasadas dos horas de la medianoche, tras la que amanecía el día VIII antes de los idus de diciembre. Pero en Cracovia, que está V grados al este, eran dos horas y un tercio después de medianoche, estando el Sol a XXIII grados, XVI minutos de Scorpio, y se eclipsaron también diez dígitos desde el norte. Pasaron, pues, a partir de la muerte de Alejandro MDCCCXXIIII años egipcios, LXXXIIII días, XIIII horas, XX minutos, en tiempo aparente, pero en el regular XIIII horas, XVI minutos. Estaba, por lo tanto, el movimiento medio de la Luna a CLXXIIII grados, XIII minutos, la anomalía lunar era de CCXCIIII grados, XLIIII minutos, la corregida de CCXCI grados, XXXV minutos, la prostaféresis aditiva de IIII grados, XXVIII minutos.

Así pues, es evidente que la Luna en estos dos eclipses mantenía una distancia casi igual desde su ápside superior, y el Sol estaba en ambos alrededor de su ápside medio, y que la magnitud de la sombra era igual, que ponen de manifiesto la latitud austral de la Luna y de ahí que la Luna mantuviera distancias iguales desde las secciones, pero en éste [el segundo] ascendente, en aquél [el primero] descendente. Hay, pues, entre ambos eclipses MCCCLVI años egipcios, CCCLVIII días, IIII horas, XX minutos de tiempo aparente, pero del regular IIII horas, XXVII minutos. En los cuales el movimiento de latitud es de CLIX grados, LV minutos.

Sea, ahora, el círculo oblicuo de la Luna, cuyo diámetro AB forme una sección común con la eclíptica, y sea C el límite boreal, D el austral, A la sección eclíptica descendente, B la ascendente. Tómense dos arcos iguales AF, BE, con respecto a las partes australes, de modo que el primer eclipse ocurriera en el punto F, el segundo en E. Y a su vez sea FK la prostaféresis sustractiva en el primer eclipse, EL la aditiva en el segundo. Así pues, ya que el arco es de CLIX grados, LVI minutos, si a éste se le añade FK, que era de IIII grados, XX minutos, y EL de IIII grados, XXVIII minutos, FKLE completo



será de CLXVIII grados XLII minutos y lo que falta para un semicírculo será de XI grados, XVIII minutos. La mitad de éste es de V grados, XXXIX minutos, igual a AF y BE, distancias verdaderas de la Luna desde el segmento AB, y por tanto AFK es de IX grados, LIX minutos. De aquí también consta la posición de latitud media desde el límite boreal, esto es, CAFK, de XCIX grados, LIX minutos. Y pasaron desde la muerte de Alejandro hasta esta posición y tiempo de la observación ptolomaica, CDLVII años egipcios, XCI días, X horas según la apariencia, en cambio según el tiempo regular IX horas, LIIII minutos, en los que el movimiento medio de latitud es de L grados, LIX minutos, que habiendo sido restados a los IC grados, LIX minutos, quedan XLIX grados al mediodía del primer día del mes primero Thoth, según los egipcios, al principio de los años de Alejandro, pero sobre el meridiano cracoviense.

A partir de aquí, se dan también para los demás principios [de las diversas cronologías] las posiciones de la trayectoria de la latitud lunar, según las diferencias de tiempos, tomadas desde el límite boreal, desde donde deducimos el movimiento. A partir de la primera Olimpíada hasta la muerte de Alejandro transcurrieron CDLI años egipcios, CCXLVII días, en los cuales según la corrección del tiempo se restan VII minutos de una hora, en dicho tiempo la trayectoria de latitud es de CXXXVI grados, LVII minutos. A la vez, desde la primera Olimpíada hasta César hay DCCXXX años egipcios, XII horas, pero en la corrección se añaden X minutos de una hora, tiempo en el que el movimiento es de CCVI grados, LIII minutos. Desde entonces hasta Cristo hay XLV años, XII días. Por tanto, si a los XLIX grados se restan XXXVI grados, VII minutos, adaptados los CL del círculo, quedan CCLXXII grados, III minutos para el mediodía del primer día del mes Hecatombeón de la primera Olimpíada. Si a éstos se suman CCVI grados, LIII minutos, resultan CXVIII grados, LVI minutos para la medianoche antes de las calendas de enero de los años julianos. Añadidos finalmente X grados, XLIX minutos, se obtiene similarmente la posición en el principio de los años de Cristo en CXXIX grados, XLV minutos, para la medianoche antes de las calendas de enero.

15. CONSTRUCCIÓN DE UN INSTRUMENTO PARALÁCTICO

Por el impedimento de las conmutaciones lunares [paralajes], la suerte no nos brindó, como a C. Ptolomeo, la ocasión de experimentar que la máxima latitud de la Luna, según el ángulo de sección de la propia órbita y de la eclíptica, es de cinco grados, siendo el círculo de CCCLX. En cambio aquél, en Alejandría, cuyo polo boreal se eleva a XXX grados, LVIII minutos, esperaba hasta que la Luna se acercara lo más posible hasta el vértice del horizonte, es decir, cuando estuviera en el principio de Cáncer y en el límite boreal, lo que ya podía predecir con números. Por medio de cierto instrumento, al que llama paraláctico, fabricado para aprehender las conmutaciones de la Luna, descubre entonces que la mínima distancia desde el vértice es sólo de II grados y un oc-

tavo, distancia con respecto a la cual, si sucediese alguna paralaje, era necesario que hubiera sido pequeñísima en tan breve intervalo. Por tanto, restados los II grados y un octavo de XXX grados, LVIII minutos,[1] quedan XXVIII grados, LI minutos y medio, que exceden a la máxima oblicuidad de la eclíptica (que era entonces de XXIII grados, LI minutos, XX segundos) en casi V grados completos, y se descubre que esta latitud de la Luna coincide por completo con las otras particulares.

El instrumento paralláctico consta de tres reglas, de las cuales dos son iguales en longitud, al menos de cuatro codos, y la tercera un poco más larga. Ésta y una de las primeras se unen a los dos extremos de la tercera con una hábil perforación y ejes o estaquillas que coincidan en éstos, de modo que aunque móviles en la superficie oscilen lo mínimo por aquellas junturas. En la regla más larga, desde el centro de juntura, se traza una línea recta a través de toda su longitud, y en ella se toma una distancia igual a la que hay entre las dos juntas, que se ha tomado exactísimamente. Ésta [distancia] se divide en mil partecillas iguales o en más, si puede hacerse: tal división se extiende al resto [de la regla], a tenor de las mismas partes, hasta que se llegue a 1.414 partes [unidades], que subtienden el lado del cuadrado inscrito en un círculo, cuyo radio fuera de 1.000 unidades. El resto que quede de esta regla, se podrá cortar como superfluo. En la otra regla descríbase también una línea desde el centro de la juntura, o sea, la [distancia] que existe entre los centros de las junturas, y que tenga espejillos fijos a la misma en un lado, como ocurre en las dioptras, por los que se pueda mirar, que se desvíen lo menos posible del recorrido de la línea antes señalada en la longitud de la regla, y que estén a la misma distancia: estará previsto también que la línea, con su extremo lanzado hacia la regla más larga, pueda tocar la línea graduada y se produzca de este modo, con ayuda de las reglas, un triángulo isósceles, cuya base estará en la línea dividida en partes. Después, se pondrá derecho y se afianzará un trozo de madera perfectamente cortado y alisado, al cual se une este instrumento por la parte de la regla en la que están las dos uniones, [se une] con unos goznes, por medio de los cuales, como corresponde a una puerta, pueda girar, pero de tal modo que la línea recta que pasa por los centros de las junturas de la regla corresponda siempre con la perpendicular y se levante con respecto al vértice del horizonte como su eje. Por lo tanto, al buscar la distancia de alguna estrella al vértice del horizonte, teniendo en la visual dicha estrella por medio de los espejillos de la regla, mantenida debajo la regla con la línea dividida, se percibe cuántas unidades subtienden el ángulo que hay entre lo visto y el eje del horizonte, siendo de 20.000 unidades el diámetro del círculo, y obtendrá por medio de la tabla el arco buscado del círculo máximo entre la estrella y el vértice [del horizonte].

16. DE CÓMO SE OBTIENEN LAS CONMUTACIONES DE LA LUNA

Con este instrumento (como hemos dicho) Ptolomeo determinó que la latitud máxima de la Luna era de V grados. Después, vuelve a determinar la conmutación [paralaje], y dice que él ha encontrado que ésta es en Alejandría de I grado, VII minutos, estando el

1. La elevación del polo Norte por encima del horizonte es igual a la declinación del vértice del horizonte desde el ecuador.

Sol en V grados, XXVIII minutos de Libra; y el movimiento medio de la Luna con respecto al Sol de LXXVIII grados, XIII minutos, la anomalía regular de CCLII grados, XX minutos; el movimiento de latitud de CCCLIIII grados, XL minutos; la prostaféresis aditiva VII grados, XXVI minutos. Y, por lo tanto, la posición de la Luna a III grados, IX minutos de Capricornio; el movimiento de latitud corregido de II grados, VI minutos; su declinación desde el círculo equinoccial de XXIII grados, XLIX minutos. La latitud alejandrina de XXX grados, LVIII minutos. Dijo que la Luna había sido vista por medio del instrumento casi en el círculo meridiano, a L grados, LV minutos desde el vértice del horizonte, esto es, a más de I grado y VII minutos de lo que exigía el cálculo. Por lo cual, según el modo de pensar de los antiguos, partiendo del excéntrico y del epiciclo, se demuestra que entonces la distancia de la Luna desde el centro de la Tierra era de XXXIX unidades, XLV minutos [de esas unidades], de las cuales una unidad corresponde al radio de la Tierra, y de lo que se sigue la proporción de los círculos: en cuanto a esto se evidencia que la Luna en su máxima distancia de la Tierra (que se produce, según dicen, en el apogeo del epiciclo en la Luna nueva y plena) posee LXIIII unidades, X minutos, o sea, un sexto de la unidad, en cambio en la mínima (que se produce en las cuadraturas) y estando la Luna partida en los perigeos, mide XXXIII unidades, XXXIII minutos. Partiendo de aquí calculó incluso las paralajes que acontecen alrededor de los XC grados a partir del vértice: la menor de LIII minutos, XXXIII segundos, en cambio la mayor a I grado, XLIII minutos (como puede apreciarse con más amplitud en lo que sobre esto elaboró).

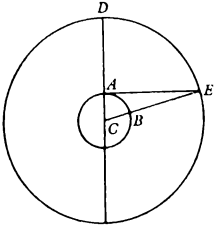
Pero está ya a la vista de todos el considerar, para los que piensan estas cosas, que acontecen de manera muy distinta, por lo que en múltiples ocasiones experimentamos. Sin embargó, volveremos a considerar dos observaciones, con las que se pone de manifiesto de nuevo que nuestras hipótesis acerca de la Luna son más ciertas que aquéllas [las de Ptolomeo], en cuanto se halla que coinciden con las apariencias y no dejan lugar a duda. Diré que, en el año MDXXII después de Cristo, en el quinto día antes de las calendas de octubre, transcurridas cinco horas y dos tercios de hora desde el mediodía y cerca de la puesta del Sol en Gynopolis [Frauenburg], encontramos por medio del instrumento paraláctico el centro de la Luna en el círculo meridiano, a partir del vértice del horizonte hallamos su distancia de LXXXII grados, L minutos. Por lo tanto, habían pasado desde el principio de los años de Cristo hasta esa hora MDXXII años egipcios, CCILXXXIIII días, XVII horas y dos tercios de hora según la apariencia, pero según el tiempo regular XVII horas, XXIIII minutos. Por lo que la posición aparente del Sol según el cálculo estaba en el grado XIII, XXIX minutos de Libra, la distancia regular de la Luna desde el Sol era de LXXXVII grados, VI minutos, la anomalía regular era de CCCLVII grados, XII. minutos, la real de CCCLVIII grados, XXX minutos, añadiendo VII minutos. Y así la posición real de la Luna estaba en los XII grados, XXXII minutos de Capricornio. El movimiento medio de latitud desde el límite boreal era de CXCVII grados, I minuto, el real de IIICC grados, VIII minutos. La latitud austral era de IIII grados, IIIL minutos, declinando desde el círculo equinoccial XXVII grados, XLI minutos, la latitud del lugar de nuestra observación de LIIII grados, XIX minutos, la cual [sumada] con la declinación lunar proporciona la verdadera distancia desde el polo del horizonte de LXXXII grados. Así pues, los L minutos que sobran eran de conmutación, que según la tradición de Ptolomeo debía ser de I grado, XVII minutos.

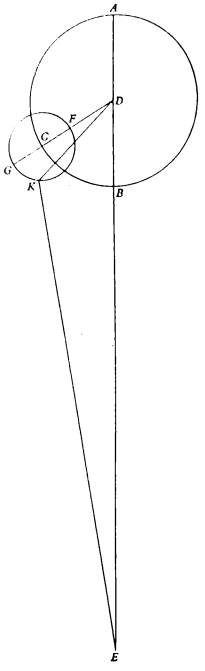
De nuevo realizamos otra observación en el mismo lugar, en el año mil quinientos veinticuatro de Cristo, siete días antes de los idus de agosto, transcurridas seis horas

desde el mediodía, y vimos por medio del mismo instrumento a la Luna en el grado LXXXII desde el vértice del horizonte. Habían pasado desde el principio de los años de Cristo hasta dicha hora MDXXIIII años egipcios, CCXXXIIII días, XVIII horas [aparentes], y también XVIII horas exactas. Puesto que la posición del Sol según el cálculo estaba a XXVII grados, XVII minutos, de Leo, el movimiento medio de la Luna a partir del Sol de IIIC grados, V minutos, la anomalía regular de CCXLII grados, X minutos, la corregida de CCXXXIX grados, XXXVIII minutos, añadiendo casi VII grados al movimiento medio: por lo tanto, la posición real de la Luna estaba a IX grados, XXXIX minutos de Sagitario, el movimiento medio de latitud de VIICC grados, XIX minutos, el real de CC grados, IIIXX minutos, la latitud austral de la Luna IIII grados, XLI minutos, la declinación austral XXVI grados, XXXVI minutos, que [sumada] con la latitud del lugar de observación de LIIII grados, XIX minutos, proporciona una distancia de la Luna de LXXX grados, LV minutos, desde el polo del horizonte. Pero aparecían LXXXII grados. Así pues, I grado y los V minutos que excedían pasaron a la paralaje lunar, la que según Ptolomeo convenía que fuese de I grado, XXXVIII minutos, y según la opinión de los antiguos, lo cual, en razón de la armonía que se desprende de su hipótesis, se nos obligó a aceptar.

17. DEMOSTRACIÓN DE LA DISTANCIA DE LA LUNA A LA TIERRA Y LA MEDIDA QUE TENGA EN UNIDADES, DE LAS CUALES UNA CORRESPONDE A LA DISTANCIA DEL CENTRO DE LA TIERRA A SU SUPERFICIE [RADIO]

A partir de esto se mostrará cuánta distancia hay de la Luna a la Tierra, sin la cual no puede establecerse una medida segura de las conmutaciones [paralajes], pues están implicadas, y se determinará de este modo. Sea AB el círculo máximo de la Tierra, su centro C, y desde el cual descríbase otro círculo, con respecto a éste el de la Tierra se considera de una magnitud muy grande, y ese círculo sea DE y D el polo del horizonte y éste en E el centro de la Luna, de modo que la distancia DE desde el vértice sea conocida. Así, puesto que el ángulo DAE en la primera observación tenía LXXXII grados, L minutos y ACE según el cálculo es de LXXXII grados, por tanto la diferencia entre estos AEC es de L minutos, que eran los de la conmutación, tendremos el triángulo ACE de ángulos dados y por tanto de lados conocidos. En efecto, por el ángulo CAE será conocido el lado CE de 99.219 unidades, de las que el diámetro del círculo que circunscribe el triángulo AEC ha sido de 100.000, y AC de 1.454 de tales unidades, que tienen en CE casi 68 unidades: de las cuales AC, que parte del centro de la Tierra [radio], valdría una unidad. Y ésta era en la primera observación la distancia de la Luna desde el centro de la Tierra. En cambio, en la segunda, el ángulo DAE correspondía a un movimiento aparente de LXXXII gra-





dos, y por cálculo ACE era de LXXX grados, LV minutos, y por sustracción el que está bajo AEC de LXV minutos. Así pues, el lado EC era de 99.027 unidades y AC de 1.891, de las que el diámetro del círculo que circunscribe al triángulo ha sido de 100.000, y así la distancia CE de la Luna era de 56 unidades, 42 minutos, de las cuales AC que parte del centro de la Tierra valdría una unidad.

Sea ahora el epiciclo mayor de la Luna ABC, cuyo centro esté en D, y tómese E como centro de la Tierra, desde el cual trácese la línea recta EBDA, de tal modo que A sea el apogeo y B el perigeo. Tómese también el arco ABC de CCXLII grados, X minutos, según la calculada regularidad de la anomalía lunar: y con centro en C descríbase el epiciclo segundo FGK, cuyo arco FGK sea de VICC grados, X minutos, doble distancia de la Luna desde el Sol, y únase DK, que al sustraer a la anomalía II grados XXVII minutos, dejará un ángulo KDB de anomalía corregida de LIX grados, XLIII minutos, siendo CDB completo de LXII grados, X minutos, en los que excede al semicírculo, y el ángulo BEK era de VII grados. Por tanto, los ángulos del triángulo KDE se dan en grados, en los que CLXXX valen dos rectos, y se da también la proporción de los lados, DE de 91.856 unidades y EK de 86.354 unidades, de las que el diámetro del círculo que circunscribe al triángulo KDE valdría 100.000; pero siendo DE de 100.000, KE valdrá 94.010 unidades. Y según se ha demostrado más arriba, siendo DF de 8.600 unidades, DFG completa será de 13.340. Así pues, para esta proporción conocida, siendo EK de 56 unidades, 42 minutos (según se demostró), de las cuales la que parte del centro de la Tierra vale una unidad [el radio de la Tierra], se sigue que DE valga 60 de las mismas unidades, 18 minutos y DF, 5 unidades, 11 minutos, DFG 8 unidades, 2 minutos, y EDG completa, como extendida en una línea recta, vale 68 unidades con un tercio, altitud máxima de los cuartos de Luna. Restada también DG de ED que dan 52 unidades, 17 minutos de distancia mínima de aquélla. Y así toda EDF, altitud que coincide en la Luna plena y brillante, será la altitud [distancia] máxima de 65 unidades y media, y deducida DF será la mínima, de 55 unidades, 8 minutos. Y no debe inmutarnos que otros estimaran la distancia máxima de la Luna llena y nueva de 64 unidades, 10 minutos, sobre todo aquellos que no pudieron conocer, a no ser en parte, las conmutaciones de la Luna por la disposición de sus emplazamientos. A nosotros nos fue concedido percibirlas con más plenitud, por la mayor cercanía de la Luna con respecto al horizonte, alrededor del cual consta que se completan las paralajes, y sin embargo no hallamos, por esta desemejanza, que las conmutaciones se diferencien en más de un minuto.

18. ACERCA DEL DIÁMETRO DE LA LUNA Y DE LA SOMBRA TERRESTRE EN EL LUGAR DE TRÁNSITO DE LA LUNA

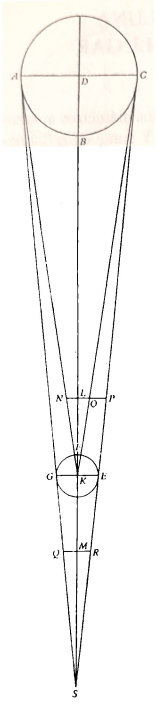
A causa también de la distancia de la Luna desde la Tierra varían los diámetros aparentes de la Luna y de la sombra, por lo que conviene hablar de esto. Y aunque los diámetros del Sol y de la Luna se determinan correctamente por medio de la dioptra de Hiparco, sin embargo se considera que, en el caso de la Luna, esto se realiza con mucha más eficacia por medio de algunos eclipses peculiares de la Luna, en los cuales dista por igual del ápside superior e inferior, sobre todo si entonces también el Sol se ha situado de la misma manera, de modo que el círculo de sombra que la Luna atraviesa por uno y otro lado permanezca igual, a no ser que los eclipses se produzcan en partes [de extensión] desiguales.

Es evidente que la diferencia confrontada recíprocamente entre las partes eclipsadas y la latitud lunar muestra qué cantidad de arco alrededor del centro de la Tierra distiende el diámetro de la Luna. Realizado esto, enseguida se conoce el semidiámetro de la sombra, lo que se verá más claro con un ejemplo. De este modo, si en la mitad del primer eclipse se ocultaron tres dígitos o tres doceavas partes del diámetro de la Luna, que tenía una latitud de XLVII minutos, LIIII segundos, en el otro diez dígitos con una latitud de XXIX minutos, XXXVII segundos. Hay, pues, una diferencia en las partes oscurecidas de VII dígitos, en latitud de XVIII minutos, XVII segundos, por los que son proporcionales XII dígitos a XXXI minutos, XX segundos, que subtiende el diámetro de la Luna.

Así pues, es patente que el centro de la Luna, en la mitad del primer eclipse excede a la sombra en un cuarto de su diámetro, en el que hay VII minutos, L segundos, de latitud, que si se restan de los XLVII minutos, LIIII segundos de la latitud total dan XXXX minutos, IIII segundos de semidiámetro de la sombra: como en el otro eclipse, en el cual, por encima de la latitud de la Luna, la sombra ocupó X minutos, XXVII segundos, por un tercio del diámetro lunar, si se le suman XXIX minutos, XXXVII segundos, se obtiene asimismo XL minutos, IIII segundos, semidiámetro de la sombra. Y así, según la opinión de Ptolomeo, estando el Sol y la Luna en conjunción o en oposición en la distancia máxima desde la Tierra, el diámetro de la Luna es de XXXI minutos con un tercio, el mismo que también del Sol confesó haber encontrado por medio de la dioptra de Hiparco, pero el de la sombra es de I grado, XXI minutos y un tercio, y pensó que éstos estaban mutuamente como XIII a V, esto es, como el doble añadiendo tres quintos.

19. DE CÓMO SE DEMUESTRAN AL MISMO TIEMPO LA DISTANCIA DEL SOL Y DE LA LUNA DESDE LA TIERRA, SUS DIÁMETROS Y EL DE LA SOMBRA EN LA POSICIÓN DEL TRÁNSITO DE LA LUNA Y EL EJE DE LA SOMBRA

Puesto que el Sol tiene también alguna paralaje, que por ser muy pequeña no se percibe fácilmente, a no ser que coincidan entre sí la distancia del Sol y de la Luna desde la



Tierra y sus diámetros y el de la sombra en la posición de tránsito de la Luna y el eje de la sombra, que por otra parte se deducen mutuamente mediante demostraciones analíticas; primero estudiaremos las opiniones de Ptolomeo acerca de estas cosas y cómo las ha demostrado, y elegiremos de ellas lo que nos parezca más verdadero.

Aquél atribuyó al diámetro aparente del Sol XXXI minutos y un tercio, que usa sin discriminación: pero el mismo diámetro [atribuye] a la Luna llena y nueva, mientras estuviera en el apogeo, y dijo que estaba a la distancia de 64 unidades, 10 minutos, de las que la mitad del diámetro de la Tierra es una unidad. Partiendo de ello, el resto lo demostró así. Sea ABC el círculo del globo solar con su centro D, y EFG el terrestre en su máxima distancia desde el Sol con su [centro] que será K; las líneas rectas AG, CE, tangentes a uno y otro círculo, prolongadas las cuales coincidirán en el vértice de la sombra que está en el punto S, y trácese también por el centro del Sol y de la Tierra DKS; constrúyase también AK, KC, y únanse AC, GE, que conviene difieran lo mínimo de los diámetros a causa de su gran distancia. Tómense también en DKS, con distancias iguales LK, KM, a las que origina en el apogeo la Luna llena y nueva, según la opinión de aquél [Ptolomeo] de 64 unidades, 10 minutos, de los que EK es una unidad, y QMR el diámetro de la sombra en el lugar de paso de la Luna, y NOL el diámetro de la Luna en ángulos rectos con DK, y prolónguese LOP. El primer propósito es encontrar cuál sea la proporción de DK con respecto a KE. Siendo el ángulo NKO de XXXI minutos y un tercio, de los que IIII rectos valen CCCLX grados, su mitad LKO será de XV minutos y dos tercios, y el ángulo en L, recto. Así pues, en el triángulo LKO de ángulos conocidos se da la proporción del lado KL con respecto a LO, y LO tiene en longitud XVII minutos de unidad, XXXIII segundos, de los que LK tiene LXIIII unidades, X minutos, si KE vale una unidad; y dado que LO es a MR como V a XIII, MR valdrá XLV minutos, XXXVIII segundos de las mismas unidades. Pero como LOP y MR son paralelas a KE con intervalos iguales, por lo tanto LOP, MR conjuntamente serán el doble de KE, restados del cual MR y LO quedará OP de LVI minutos de unidad, XLIX segundos. Pero según la proposición II del libro VI de Euclides son proporcionales EC a PC, KC a OC y KD a LD en la razón en que lo es KE a OP, esto es, LX minutos de unidad a LVI minutos, XLVIIII segundos. Por lo mismo, se conoce LD como de LVI minutos de unidad, XLIX segundos, siendo toda la DLK una unidad, y, por tanto, la KL restante de III minutos, XI segundos. Pero, puesto que si KL es de 64 unidades, 10 minutos, de los que FK es una unidad, toda KD será de 1.210 unidades. Y ya quedó también claro que MR vale XLV de tales minutos, XXXVIII segundos, con lo que consta la proporción de KE a MR y de KMS a MS; y de toda la KMS, la KM valdrá XIIII minutos de unidad, XXII segundos, y de un modo separado, de las [unidades] que KM tuviera 64 unidades, 10 minutos, toda KMS será de 268 unidades, eje de la sombra. Así según Ptolomeo.

Pero otros, después de Ptolomeo, concluyeron de distinta manera, porque encontraron que estas cosas no coincidían suficientemente con las apariencias. No obstante, suponen que la distancia máxima de la Luna llena y nueva desde la Tierra es de 64 grados, 10 minutos, y que el diámetro aparente del Sol en su apogeo es de XXXI minutos y un tercio. También conceden que el diámetro de la sombra en el lugar del tránsito de la Luna es como XIII a V, al igual que Ptolomeo. Pero, por el contrario, niegan que el diámetro aparente de la Luna sea en ese momento mayor a XXIX minutos y medio y, por tanto, casi ponen el diámetro de la sombra como de I grado y XVI minutos con tres cuartos, de ahí consideran que se deduce la distancia del apogeo solar desde la Tierra como de 1.146 unidades y el eje de la sombra de 254, de las cuales la distancia que parte del centro de la Tierra [el radio] es una, atribuyendo esto al filósofo Arateo como su descubridor, lo que, sin embargo, no pueden colegir con razón alguna.

Nosotros hemos pensado ajustarlo y corregirlo de esta manera: atribuyendo un diámetro aparente del Sol en el apogeo de XXXI minutos, XL segundos (conviene que ahora sea algo mayor que antes de Ptolomeo), el de la Luna llena y plena, y en su ápside máximo, de XXX minutos, y el diámetro de la sombra en el lugar de tránsito de aquélla de LXXX minutos y tres quintos, conviene que entre ellos la proporción sea un poco mayor que la de 5 a 13, sino como de 150 a 403; en efecto, todo el Sol no es cubierto por la Luna, a no ser que ella tenga una distancia desde la Tierra menor a 62 unidades, siendo una unidad la que parte del centro de la Tierra [el radio]. Puestas así las cosas, parecen ser más coherentes con una proporción segura, tanto entre sí como con las demás, y coincidentes con los eclipses aparentes del Sol y de la Luna. Tendremos, pues, según la precedente demostración en unidades y minutos de las que una parte es la distancia desde el centro de la Tierra, que es KE, LO será de XVII minutos de esa clase, VIII segundos, y, por tanto, MR como de XLVI minutos, I segundo y OP de LVI minutos, LI segundos. Y toda DLK de 1.179 unidades, distancia del apogeo del Sol desde la Tierra, y KMS, eje de la sombra, de 265 unidades.

20. DE LA MAGNITUD DE ESTOS TRES ASTROS, EL SOL, LA LUNA Y LA TIERRA Y DE SU COMPARACIÓN MUTUA

Por lo tanto, es también patente que KL es la dieciochoava parte de KD y en esa proporción está LO con respecto a DC. De dieciocho LO se obtiene como resultado 5 unidades, casi 27 minutos, siendo KE una unidad: o sea que SK es a KE, como 265 es a 1, igual que todo SKD, 1.444 unidades, es a DC de 5 unidades semejantes, 27 minutos; las proporciones son siempre las mismas; ésta será la proporción entre los diámetros del Sol y de la Tierra.

Pero, puesto que las esferas están en razón cúbica de sus diámetros,[1] luego después de multiplicar el quíntuplo con XXVII minutos, resultarán 162 unidades menos un octavo de esta unidad, en los que el Sol es mayor que el globo terráqueo. A su vez, por tanto, el diámetro de la Luna es de XVII minutos, IX segundos, de los que KE es una

1. Literalmente, en razón triple.

unidad. Y, por lo tanto, el diámetro de la Tierra es al diámetro de la Luna como 7 es a 2, esto es, en una relación triple más dos tercios: al cubo,[1] se muestra que la Tierra es cuarenta y tres veces mayor que la Luna menos una octava parte de la Luna. Y, por lo tanto, el Sol será mayor que la Luna en siete mil veces, menos sesenta y tres.

21. DEL DIÁMETRO APARENTE DEL SOL Y DE SUS CONMUTACIONES

Pero puesto que las mismas magnitudes cuando están más lejanas parecen menores (que las mismas cuando están más cerca), por eso acontece que el Sol, la Luna y la sombra de la Tierra varíen por sus desiguales distancias desde la Tierra, no menos que las paralajes. Todo lo cual puede deducirse fácilmente de lo ya dicho con respecto a cualquier otra elongación. Esto se manifiesta en primer lugar en el Sol. Habiendo demostrado, en efecto, que la Tierra está lo más lejos de él a 10.322 unidades, de las que desde el centro de la órbita de revolución anual serían 10.000, y lo más cercana a 9.678 unidades de la otra parte del diámetro. Así pues, de estas unidades el ápside superior es de 1.179, de las que es una la distancia desde el centro de la Tierra [radio], el inferior será de 1.105 de las mismas unidades, y, por tanto, el medio de 1.142 unidades. Dividiendo 1.000.000 por 1.179 tendremos 848[2] unidades que subtienden, en el triángulo rectángulo,[3] un ángulo mínimo de II minutos, LV segundos de conmutación máxima, que acontece alrededor del horizonte. Del mismo modo, divididos 1.000.000 por 1.105 unidades de la distancia mínima se obtienen 905[4] unidades que subtienden el ángulo de III minutos, VII segundos, de la máxima conmutación del ápside inferior.

Es, pues, ostensible que el diámetro del Sol mide 5 unidades, 27 minutos, siendo una unidad el diámetro de la Tierra, y que aparece en el ápside superior como de XXXI minutos, XLVIII segundos. Por lo tanto, 1.179 unidades son proporcionales a 5 unidades, 27 minutos, como 2.000.000 del diámetro del círculo a 9.245, que subtienden XXXI minutos, XLVIII segundos. Se sigue que en la distancia mínima de 1.105 unidades hay [un diámetro aparente de] XXXIII minutos, LIIII segundos. Luego, la diferencia entre éstos es de II minutos, VI segundos, pero entre las conmutaciones hay sólo XII segundos [de diferencia]. Ptolomeo consideró que una y otra [diferencia] deberían ser despreciadas por su pequeñez, en cuanto un minuto o dos no son fácilmente percibidos por los sentidos: tanto menos posible es que se haga esto con los segundos. Por tanto, si mantenemos la paralaje máxima del Sol en III minutos, no parecerá que hemos cometido ningún error. También obtendremos los diámetros medios aparentes del Sol por sus distancias medias, o (como algunos) por el movimiento horario aparente del Sol, que estiman está con respecto a su diámetro como 5 es a 66 o como 1 es a 14 y un quinto. Pues dicho movimiento horario es casi proporcional a su distancia.

1. Literalmente, el triple.

2. Es decir, el triángulo rectángulo formado por la línea que une los centros del Sol y de la Tierra, la tangente desde el centro del Sol a la superficie de la Tierra, y el radio de la Tierra que pasa por dicho punto de tangencia.

3. Es decir, cuando el ápside más alto = 1179u, 1u = 848 donde radio del círculo = 1.000.000.

4. Análogamente, cuando el ápside más bajo = 1105u, 1u = 905 donde radio del círculo = 1.000.000.

22. DEL DIÁMETRO DESIGUALMENTE APARENTE DE LA LUNA Y DE SUS CONMUTACIONES

Una mayor diversidad entre uno y otro [diámetro y paralaje] aparece en la Luna por ser el astro más cercano. Pues siendo su alejamiento máximo de la Tierra de 65 y medio unidades en la Luña nueva y llena, el mínimo, según lo demostrado más arriba, será de 55 unidades, 8 minutos, en los cuartos, y la elongación máxima de 69 unidades, 21 minutos, y la mínima de 52 unidades, 17 minutos. Así pues, entre esos cuatro límites tendremos las paralajes de la Luna naciente y poniente, dividiendo el semidiámetro del círculo por las distancias de la Luna a la Tierra, las más remotas, los cuartos lunares, de L minutos, XVII segundos, la de la llena y nueva de LII minutos, XXIIII segundos, la de la inferior de LXII minutos, XXI segundos, y la del cuarto inferior de LXV minutos, XLV segundos.

A partir de estos datos se patentizan también los diámetros de la Luna. Pues ha quedado de manifiesto que el diámetro de la Tierra es al diámetro de la Luna como 7 es a 2, y la distancia que hay desde el centro de la Tierra [radio] al semidiámetro de la Luna como de 7 a 4, proporción en la que están también las paralajes con respecto a los diámetros que se ven de la Luna. Por ello, las líneas rectas que comprenden ángulos de conmutaciones mayores y de diámetros aparentes no se diferencian en la trayectoria de la Luna, y los ángulos son casi análogos a las líneas rectas que los subtienden y la diferencia entre éstos no se hace sensible. Con este resumen se manifiesta que, en el primer límite de las conmutaciones ya expuestas, el diámetro aparente de la Luna será de XXVIII minutos y tres cuartos, en el segundo de casi XXX minutos, en el tercero de XXXV minutos, XXXVIII segundos, en el último de XXXVII minutos, XXXIIII segundos. Según la hipótesis de Ptolomeo y de otros, convenía que éstas fueran casi de I grado y así debía de ser, puesto que entonces el cuarto lunar proyecta sobre la Tierra tanta luz como la Luna llena.

23. CÓMO SE EXPLICA LA DIVERSIDAD DE LA SOMBRA DE LA TIERRA

Ya se ha atestiguado también que el diámetro de la sombra es al diámetro de la Luna como 403 a 150, la cual [la sombra] por eso en la Luna llena y en la nueva, mientras el Sol está en el apogeo, aparece con una magnitud mínima de LXXX minutos, XXXVI segundos, y con una máxima de XCV minutos, XLIIII segundos, y se produce una diferencia máxima de XIIII minutos, VIII segundos. También varía la sombra de la Tierra, incluso en el momento de atravesarla la Luna, por su desigual distancia al Sol, de este modo. Vuélvase a trazar, pues, como en la figura anterior, la línea recta DKS por los centros del Sol y de la Tierra, y las tangentes CES, unidos DC, KE. Puesto que, como se ha demostrado, mientras la distancia DK sea de 1.179 unidades, siendo KE una unidad, y KM 62 de las mismas unidades, el radio de la sombra MR era de XLVI minutos, I segundo, de la misma unidad KE, y, unidos K, R, el ángulo de apariencia MKR de XLII minutos, XXXII segundos, y el eje de la sombra KMS de 265 unidades.

Estando la Tierra próxima al Sol, siendo DK de 1.105 unidades, calcularemos la sombra de la Tierra en el momento de atravesarla la Luna, de este modo. Trácese EZ

[paralela] a DK y serán proporcionales CZ a ZE como EK a KS. Pero CZ vale IIII grados, XXVII minutos y ZE 1.105 unidades. Como ZE y la restante DZ son iguales a DK, KE, siendo KZ un paralelogramo. Por lo tanto, KS será de 248 de las mismas unidades, 19 minutos, de las que KE es una. Y KM era de 62 unidades y, por tanto, la restante MS tendrá 186 unidades, 19 minutos. Pero ya que también son proporcionales SM a MR y SK a KE, luego se conoce MR como de XLV minutos, I segundo, siendo KE la unidad, y, por tanto, el ángulo de la apariencia, que está en MKR, tendrá XLI minutos, XXXV segundos. Y sucede en el momento de atravesarla la Luna, y a causa del acercamiento y alejamiento del Sol y la Tierra, con una diferencia máxima en el diámetro de la sombra de I minuto, de los cuales EK es la unidad, según la visual [el ángulo de visión] de LVII segundos, de los que 360 unidades valen cuatro rectos. Además, el diámetro de la sombra con respecto al diámetro de la Luna estaba allí [en el primer caso] en una proporción mayor a la de 8 a 5, pero aquí [en el segundo caso] menor, como siendo [la proporción de 13 a 5] la media. Por lo cual cometeremos sólo un pequeño error si hacemos uso de la misma, ahorrándonos trabajo y siguiendo el sentir de los antiguos.

24. EXPOSICIÓN CANÓNICA DE LAS CONMUTACIONES DEL SOL Y DE LA LUNA EN EL CÍRCULO QUE PASA POR LOS POLOS DEL HORIZONTE

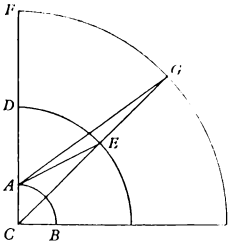
Ahora ya no será ambiguo el determinar cada una de las paralajes del Sol y de la Luna. Trácese, pues, el círculo terrestre AB, con centro en C, y que pase por el vértice del horizonte, y en la misma superficie el círculo de la Luna DE, el del Sol FG, la línea CDF por el vértice del horizonte y CEG, en la que se consideran las verdaderas posiciones del Sol y de la Luna, a las que se unirán AG, AE. Por lo tanto, las paralajes del Sol se dan en el ángulo AGC, las de la Luna en cambio por el AEC: también una conmutación entre el Sol y la Luna se mide por el ángulo GAE, diferencia de AGC y AEC.

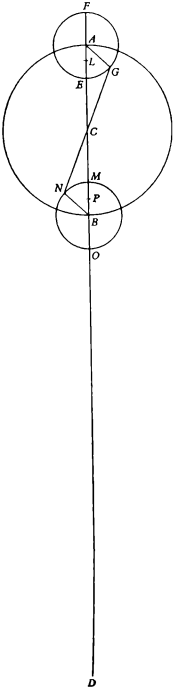
Tomemos ahora el ángulo ACG, con el que queremos comparar aquéllos. Y sea, por ejemplo, de XXX grados: es patente por la demostración de los triángulos planos, que si disponemos la línea CG de 1.142 unidades, de las que AC sería una, el ángulo AGC, en que difiere la altitud real de Sol de la que se ve, tendrá un solo minuto y medio. Y siendo el ángulo ACG de LX grados, AGC será de II minutos, XXXVI segundos. Del mismo modo se patentizará en los restantes [ángulos]. En cambio, con respecto a la Luna se determinarán en sus cuatro [puntos] límites. Puesto que si en su máxima distancia desde la Tierra, que sería CE, de 68 unidades, 21 minutos (como hemos dicho), siendo CA una unidad, tomamos el ángulo DCE, o sea, DE arco de XXX grados, de los que CCCLX son cuatro rectos, tendremos el triángulo ACE, en el que se conocen dos lados AC, CE, con el ángulo ACE, a partir de los cuales hallaremos AEC, ángulo de conmutación, de XXV minutos, XXVIII segundos. Y cuando CE fuera de 65 unidades y media, el ángulo en AEC será de XXVI minutos, XXXVI segundos. Del mismo

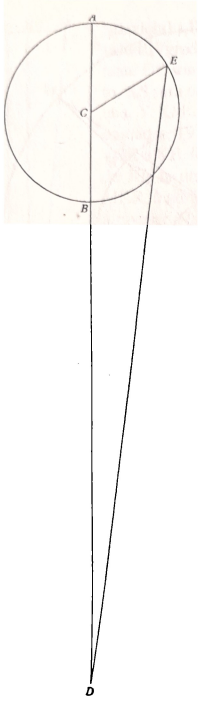
modo, en la tercera posición, cuando CE sea de 55 unidades, 8 minutos, el ángulo de conmutación AEC será de XXXI minutos, XLII segundos. Finalmente, en la distancia mínima, teniendo entonces CE de 52 unidades, 17 minutos, AEC resultará un ángulo de XXXIII minutos, XXVII segundos, A su vez, cuando el arco DE sume LX grados del círculo, en ese mismo orden la paralaje primera será de XLIII minutos, LV segundos, la segunda de XLV minutos, LI segundos, la tercera de LIIII minutos y medio, la cuarta de LVII minutos y medio. Todas estas cosas las inscribimos en el orden de la tabla adjunta, que para un uso más cómodo, al modo de las otras, extendemos en una serie de treinta filas, pero de seis en seis grados, con lo que se alcanza un número doble [180°] al que hay desde el vértice del horizonte hasta un máximo de noventa.

Hemos dividido la misma tabla en nueve columnas. Así, en la primera y segunda estarán los números comunes del círculo; en la tercera pondremos las paralajes del Sol, después las conmutaciones lunares y en cuarto lugar las diferencias, con las que las paralajes menores, que suceden en el cuarto y apogeo lunares, difieren de las que siguen en la plena y nueva. El sexto lugar contendrá las conmutaciones que produce en el perigeo la Luna llena o nueva, y los minutos que siguen son las diferencias que producen paralajes estando la Luna en cuarto y próxima a nosotros y con las que exceden a aquéllas. Después, los dos restantes espacios que quedan se conservan para los minutos de las proporciones con las que podrán ser calculadas las paralajes entre estos cuatro puntos límite.

Expondremos primero las que están en relación con el apogeo y que se dan entre los primeros límites, de este modo. Sea el círculo AB el primer epiciclo de la Luna, cuyo centro sea C, y tomado D como centro de la Tierra trácese la línea recta DBCA, y con centro en el apogeo A descríbase el epiciclo segundo EFG: tómese también el arco EG de LX grados y únanse AG, CG. Luego, como precedentemente se ha demostrado, la línea CE vale 5 unidades, 11 minutos, de las que el radio de la Tierra es una unidad, y de las que DC tiene 60 unidades, 18 minutos, y EF 2 de las mismas unidades, 51 minutos, por tanto en el triángulo ACG se conocen los lados GA de 1 unidad, 25 minutos y AC de 6 unidades,







36 minutos, con el ángulo CAG comprendido entre ellos. Luego, por la demostración de los triángulos planos, el tercer lado CG será de 6 de las mismas unidades, 7 minutos. Luego toda la DCG, representada como en línea recta o su igual DCL, será de 66 unidades, 25 minutos. Pero DCE era 65 unidades y media, por lo tanto queda EL, como exceso, de LV y medio minutos de unidad. Y dada esta proporción, cuando DCE sea de 60 unidades, EF será de 2 de las mismas unidades, 37 minutos, EL de XLVI minutos. Y en tanto EF sea de LX minutos, el exceso EL será de casi XVIII. Esto lo anotaremos en la tabla en séptimo lugar a partir de la zona de los LX grados.

Del mismo modo lo mostraremos con respecto al perigeo B, en el que se repite el segundo epiciclo MNO, con el ángulo MBN de LX grados. Será, pues, el triángulo BCN, como antes, de lados y ángulos conocidos, e igualmente el exceso MP de casi LV y medio minutos, siendo el radio de la Tierra de una unidad. Pero puesto que DBM es de 55 de las mismas unidades, 8 minutos: si la establecemos de 60 unidades, MBO será de 3 de tales unidades, 7 minutos, y el exceso MP de LV minutos. Y así como 3 unidades y 7 minutos es a LV minutos, así 60 a casi XVIII, lo mismo que antes; sin embargo, se diferencian en unos pocos segundos. De esta manera obraremos también en los demás casos, con lo que cubriremos la octava columna de la tabla. Porque si en lugar de éstos usáramos los que [minutos proporcionales] se exponen en la tabla de las prostaféresis, no cometeremos error alguno; pues son casi las mismas [proporciones], y se trata de mínimas [cantidades].

Quedan los minutos de las proporciones que se dan en los términos medios, como entre el segundo y el tercero. Sea AB el primer epiciclo ya trazado en la Luna llena y nueva, cuyo centro sea C, tómese D como centro de la Tierra y extiéndase la línea recta, DBCA. Tómese también desde el apogeo A un cierto arco, por ejemplo AE, de LX grados y conéctese DC, CE; tendremos, pues, el triángulo DCE, del cual nos son conocidos dos lados, CD de 60 unidades, 19 minutos, y CE de 5 unidades, 11 minutos, y también el ángulo interior DCE de dos rectos menos el ACE. Luego, por lo demostrado sobre los triángulos, DE será de 63 de las mismas unidades, 4 minutos. Pero toda DBA era de 65 unidades y media, excediendo al ED en 2 unidades, 27 minutos. Y como AB, esto es, 10 unidades, 22 minutos, es a 2 unidades, 28 minutos, así LX minutos es a XIIII, que se anotan en la tabla opuestos a los LX grados. Con este ejemplo hemos completado el resto y llenamos la tabla que sigue, y añadiremos otra sobre los diámetros del Sol, de la Luna y de la sombra de la Tierra, para que en cuanto sea posible los tengamos a la vista.

Tabla de paralajes del Sol y la Luna

Números comunes		*Paralaje del Sol*		*Diferencia del primer y segundo límite en la Luna menguante*		*Paralaje del segundo límite de la Luna*		*Paralaje del tercer límite de la Luna*		*Diferencia a añadir del tercer y cuarto límite*		*Minutos proporcionales del epiciclo*	
												B	*A*
°	°	'	"	'	"	'	"	'	"	'	"	'	'
6	354	0	10	0	7	2	46	3	18	0	12	0	0
12	348	0	19	0	14	5	33	6	36	0	23	1	0
18	342	0	29	0	21	8	19	9	53	0	34	3	1
24	336	0	38	0	28	11	4	13	10	0	45	4	2
30	330	0	47	0	35	13	49	16	26	0	56	5	3
36	324	0	56	0	42	16	32	19	40	1	6	7	5
42	318	1	5	0	48	19	5	22	47	1	16	10	7
48	312	1	13	0	55	21	39	25	47	1	26	12	9
54	306	1	22	1	1	24	9	28	49	1	35	15	12
60	300	1	31	1	8	26	36	31	42	1	45	18	14
66	294	1	39	1	14	28	57	34	31	1	54	21	17
72	288	1	46	1	19	31	14	37	14	2	3	24	20
78	282	1	53	1	24	33	25	39	50	2	11	27	23
84	276	2	0	1	29	35	31	42	19	2	19	30	26
90	270	2	7	1	34	37	31	44	40	2	26	34	29
96	264	2	13	1	39	39	24	46	54	2	33	37	32
102	258	2	20	1	44	41	10	49	0	2	40	39	35
108	252	2	26	1	48	42	50	50	59	2	46	42	38
114	246	2	31	1	52	44	24	52	49	2	53	45	41
120	240	2	36	1	56	45	51	54	30	3	0	47	44
126	234	2	40	2	0	47	8	56	2	3	6	49	47
144	216	2	52	2	4	50	10	59	39	3	17	55	54
150	210	2	54	2	4	50	55	60	31	3	20	57	56
156	204	2	56	2	5	51	29	61	12	3	22	58	57
162	198	2	58	2	5	51	56	61	47	3	23	59	58
168	192	2	59	2	6	52	13	62	9	3	23	59	59
174	186	0	2	6	52	22	62	19	3	24	60	60	60
180	180	3	0	2	6	52	24	62	21	3	24	60	60

Tabla de los semidiámetros (radios) del Sol, la Luna y la sombra (de la Tierra)

Números comunes		*Semidiámetro del Sol*		*Semidiámetro de la Luna*		*Semidiámetro de la sombra*		*Variación de la sombra*
°	°	'	"	'	"	'	"	'
6	354	15	50	15	0	40	18	0
12	348	15	50	15	1	40	21	0
18	342	15	51	15	3	40	26	1
24	336	15	52	15	6	40	34	2
30	330	15	53	15	9	40	42	3
36	324	15	55	15	14	40	56	4
42	318	15	57	15	19	41	10	6
48	312	16	0	15	25	41	26	9
54	306	16	3	15	32	41	44	11
60	300	16	6	15	39	42	2	14
66	294	16	9	15	47	42	24	16
72	288	16	12	15	56	42	40	19
78	282	16	15	16	5	43	13	22
84	276	16	19	16	13	43	34	25
90	270	16	22	16	22	43	58	27
96	264	16	26	16	30	44	20	31
102	258	16	29	16	39	44	44	33
108	252	16	32	16	47	45	6	36
114	246	16	36	16	55	45	20	39
120	240	16	39	17	4	45	52	42
126	234	16	42	17	12	46	13	45
132	228	16	45	17	19	46	32	47
138	222	16	48	17	26	46	51	49
144	216	16	50	17	32	47	7	51
150	210	16	53	17	38	47	23	53
156	204	16	54	17	41	47	31	54
162	198	16	55	17	44	47	39	55
168	192	16	56	17	46	47	44	56
174	186	16	57	17	48	47	49	56
180	180	16	57	17	49	47	52	57

25. SOBRE EL CÁLCULO DE LA PARALAJE DEL SOL Y DE LA LUNA

Expondremos también brevemente por medio de la tabla el modo de calcular las paralajes del Sol y la Luna. Si con distancia del Sol o del doble de la Luna, desde el vértice del horizonte, tomamos en las tablas las paralajes correspondientes, la del Sol lo será simplemente, la de la Luna en cambio en sus cuatro puntos límites. Y si tomamos los primeros minutos de las proporciones correspondientes al movimiento [doble] de la Luna o a su distancia del Sol duplicada, con los cuales determinaremos los excesos del primero y último término como partes proporcionales a LX, las cuales restaremos siempre de la conmutación siguiente próxima, y añadiremos siempre las partes posteriores a la [paralaje] que está en el penúltimo límite: y así tendremos dos paralajes de la Luna corregidas, en el apogeo y perigeo, a las que incrementa o disminuye el epiciclo menor. Después, tomando los últimos minutos de las proporciones correspondientes a la anomalía lunar, determinaremos con ellos también la parte proporcional a partir de la diferencia entre las paralajes más próximamente encontradas, la cual añadiremos siempre a la primera paralaje examinada, la que está en el apogeo, y proporcionará la paralaje de la Luna buscada según el lugar y el tiempo, como en el ejemplo.

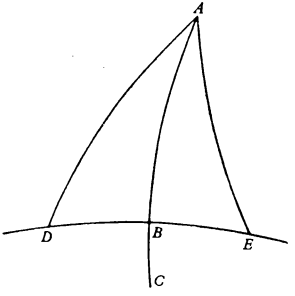
Sean LIIII grados la distancia de la Luna desde el vértice [del horizonte], el movimiento medio de la Luna de XV grados, C grados de anomalía corregida. Quiero encontrar la paralaje lunar por medio de la tabla partiendo de esos datos. Duplico los grados de distancia: hacen CVIII, a los que en la tabla corresponde una diferencia entre el primer y segundo límite de I minuto, XLVIII segundos; la paralaje del segundo término de XLII minutos, L segundos; la paralaje del tercer límite de L minutos, LIX segundos, la diferencia entre el tercero y el cuarto de II minutos, XLVI segundos, que anotaré por separado.

El movimiento duplicado de la Luna resulta de XXX grados: encuentro V minutos primeros de las proporciones correspondientes a él, de los cuales tomo la parte proporcional a LX, y son de IX segundos a partir de la primera diferencia. Estos los restos de los XLII minutos, L segundos, de la conmutación: quedan XLII minutos, XXXI segundos. De igual modo en la segunda diferencia, que era de II minutos, XLVI segundos, la parte proporcional es de XIIII segundos, que sumo a los L minutos, XLVIIII segundos, de la segunda conmutación: hacen LI minutos, XIII segundos. Realmente la diferencia entre estas paralajes es de VIII minutos, XXXII segundos. Después de esto tomo los últimos minutos de las proporciones correspondientes a los grados de la anomalía corregida, que son XXXIIII y por ellas tomo la diferencia de VIII minutos, XXXI segundos, como parte proporcional, y que es de IIII minutos, XXXI segundos; que añado a la primera paralaje corregida y suman XLVII minutos, XXXI segundos.

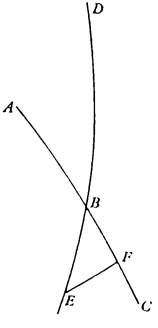
Y esta será la paralaje de la Luna buscada en el círculo de altitud. Pero como cualquier otra conmutación de la Luna dista tan poco de aquellas que se producen en la Luna llena y nueva, parece que sería suficiente si nos contentáramos con los límites medios, de los que necesitaremos muchísimo a causa de las predicciones de los eclipses. No se precisa un examen tan riguroso de las demás, de las que quizá se juzgue que tienen menos utilidad que curiosidad.

26. DE CÓMO SE DISTINGUEN LAS PARALAJES DE LONGITUD Y DE LATITUD

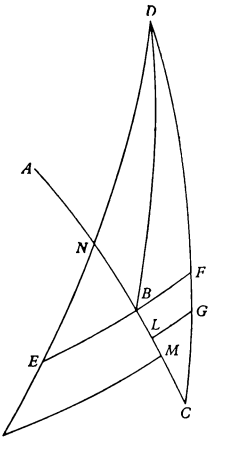
Ahora la paralaje se diferencia simplemente en longitud y en latitud, o sea la [distancia] entre el Sol y la Luna [se distingue] por los arcos y ángulos de los círculos que se cortan entre sí, la eclíptica y el que pasa por los polos del horizonte. Puesto que ha quedado de manifiesto que este círculo, al cortar en ángulos rectos a la eclíptica, no realiza ninguna paralaje de longitud, sino que pasa completamente a latitud, siendo el mismo círculo el de longitud y latitud. Pero, por el contrario, donde acontece que la eclíptica incide rectamente sobre el horizonte y él mismo pasa a ser como un círculo de altitud, entonces la Luna, aunque esté desprovista de latitud, no admite otra paralaje que la de longitud; sin embargo, desviada hacia la latitud, no se sustrae a ninguna conmutación de longitud. Así, sea ABC el círculo de la eclíptica, que incide en ángulo recto sobre el horizonte, y sea A el polo del horizonte: por lo tanto, la órbita ABC será la misma que el círculo de altitud de la Luna que carece de latitud, cuyo lugar sería B y toda BC será su conmutación en longitud.



Pero cuando tenga también latitud, una vez descrito el círculo DBE por los polos de la eclíptica y determinada como DB o BE la latitud de la Luna, es evidente que el lado AD o el AE no será igual al AB, ni el ángulo en D o E será recto, puesto que DA, AE no son círculos que pasen por los polos de DBE, y la conmutación participará en cierta latitud, tanto más cuanto más cercana esté la Luna del vértice. Pues manteniendo la misma base DE del triángulo ADE, los lados AD, AE, cuanto más cortos, formarán ángulos más agudos con respecto a la base. Y cuanto más alejada esté la Luna del vértice, los ángulos se asemejarán más a los rectos.



Tómese ahora, con respecto a la eclíptica ABC, el círculo oblicuo DBE expresivo de la altitud de la Luna que no tiene latitud, cortando a la eclíptica en el punto B, y sea BE la paralaje en el círculo de altitud; y trácese EF arco de un círculo que pasa por los polos de ABC. En consecuencia, puesto que se conoce el ángulo EBF del triángulo BEF (como se ha demostrado con anterioridad), el ángulo en F es recto, y el lado BE también se conoce: por lo tanto, por la demostración de los triángulos esféricos, se dan los restantes lados BF, FE (éste de latitud, aquél de longitud), en concordancia con la paralaje BE. Pero, puesto que BE, EF, FB, por su pequeñez difieren muy poco e imperceptiblemente de líneas rectas, no erraremos si utilizamos dicho triángulo rectángulo como rectilíneo, y con ello el razonamiento se hará más fácil.



Es más difícil cuando la Luna tiene latitud. Repítase ABC como eclíptica, sobre la que incide oblicuamente el círculo DB que pasa por los polos del horizonte, y sea B la posición en longitud de la Luna, FB la latitud boreal, y BE la austral. Desde el vértice del horizonte, que está en D, desciendan sobre la Luna los círculos de altitud DEK, DFC, en los que están las conmutaciones EK, FG. La verdadera posición de la Luna en longitud y latitud estará en los puntos E, F, pero son vistos en K, G, desde los cuales se trazarán KM, LG, arcos en ángulos rectos a la eclíptica ABC. En consecuencia, habiendo sido establecida la longitud y la latitud de la Luna junto con la latitud de la región, en el triángulo DEB serán conocidos dos lados DB, BE, y el ángulo de sección ABD, que junto con un recto dará DBE, y por tanto se obtendrá el otro lado DE con el ángulo DEB. De igual modo en el triángulo DBF, habiendo sido dados los lados DB, BF, junto con el ángulo DBF, que es lo que le falta al ABD para valer un recto, también se dará DF con el ángulo DFB. Así, por la tabla, se da la paralaje EK y FG de los otros arcos DE, DF y DE o DF distancia real de la Luna desde el vértice, del mismo modo también se da la distancia aparente DEK o DFG. Pero en el triángulo EBN, en el que se realiza la intersección de DE con la eclíptica en el punto N, se da el ángulo NEB y el ángulo recto NBE con base BE: también se conocerá el ángulo restante BNE junto con los otros lados BN, NE. Del mismo modo en todo el triángulo NW, a partir de los ángulos conocidos en M y N, y de todo el lado KEN, se tendrá constancia de la base KM. Y esta misma [KM] es la latitud aparente austral de la Luna, cuyo exceso sobre EB es la paralaje de latitud, y también se conoce el otro lado NBM, descontado del cual NB quedará BM, conmutación de longitud.

Así también, en el triángulo boreal BFC al ser conocidos el lado BF junto con el ángulo BFC y el recto en B, se dan los restantes lados BLC y FCG con el otro ángulo en C, y restando FG de FGC queda GC, lado dado en el triángulo GLC, junto con dos ángulos el LCG y el recto CLG, por lo cual se dan los restantes lados GL, LC y, por lo tanto, lo que queda de BC es BL conmutación en longitud y GL la latitud aparente, cuya paralaje es BF exceso de la latitud verdadera. Pero (como se ve) este cálculo, que se relaciona con datos tan pequeños, produce más trabajo que fruto. Será, pues, suficiente si utilizamos el ángulo ABD en lugar del DCB y DBF en lugar de DEB, y simplemente, como antes, utilizamos la media DB en lugar de los arcos DE, EF, despreciando la latitud lunar: y no aparecerá error por ello, sobre todo en regiones septentrionales de la Tierra, pero en las zonas australes, donde B toca el vértice del horizonte con una latitud máxima de V grados, y estando la Luna próxima a la Tierra, la diferencia es de casi VI minutos. Sin embargo, en las conjunciones eclípticas con el Sol, en las que la latitud de la Luna no puede exceder de medio grado, tal diferencia puede ser sólo de I minuto y tres cuartos.

Así pues, de todo esto se evidencia que la conmutación en longitud se añade siempre a la posición verdadera de la Luna en el cuadrante oriental de la eclíptica, y se res-

ta siempre en el otro cuadrante para obtener la longitud aparente de la Luna y la latitud aparente por conmutación de latitud. Puesto que si están en la misma dirección se suman, si en opuesta, se resta de la mayor la menor y lo que queda es la latitud aparente de la parte hacia la que la mayor declina.

27. CONFIRMACIÓN DE LO QUE SE HA EXPUESTO RESPECTO DE LAS PARALAJES DE LA LUNA

El hecho de que las paralajes de la Luna así expuestas están de acuerdo con las apariencias, podemos confirmarlo con otros muchos experimentos: como este que realizamos en Bolonia el séptimo día antes de los idus de marzo, después de la puesta del Sol, en el año de Cristo MIIID. Examinamos que la Luna estaba a punto de ocultar a una estrella brillante de las Hyades, a la que los romanos llaman Palilicio. Observado esto, vimos la estrella en contacto con la parte tenebrosa del cuerpo lunar y ya perdiendo luz entre los cuernos de la Luna, hacia el final de la hora quinta de la noche, y más cercana al cuerno austral en casi un tercio de la latitud [anchura], o sea, del diámetro de la Luna. Y puesto que la estrella estaba, según los cálculos, en II grados, LII minutos, de Géminis, con una latitud austral de V grados y un sexto, estaba claro que el centro de la Luna según la visual precedía a la estrella en la mitad del diámetro y, por tanto, su posición aparente en longitud era de II grados, XXXVI minutos, en latitud de V grados y casi VI minutos.

Pues bien, desde el principio de los años de Cristo habían transcurrido MIIID años egipcios, LXXVI días, XXIII horas en Bolonia; en cambio en Cracovia, que está casi IX grados más hacia oriente, XXIII horas, XXXVI minutos, a los que la regularidad añade IIII minutos. Estaba, pues, el Sol en los XXVIII y medio grados de Piscis, y por tanto el movimiento regular de la Luna con respecto al Sol era de LXXIIII grados, la anomalía regular de CXI grados X minutos, la posición verdadera de la Luna en los III grados, XXIIII minutos de Géminis, la latitud austral de IIII grados, XXXV minutos. En cuanto al movimiento real en latitud era de CCIII grados, XLI minutos. Entonces también en Bolonia ascendían los XXVI grados de Scorpio con un ángulo de LIX y medio grados, y la Luna estaba desde el vértice del horizonte a LXXXLIII grados y el ángulo de sección entre el círculo de altitud y la eclíptica de casi XXIX grados, la paralaje de la Luna en longitud I grado, LI minutos, de latitud XXX minutos, que coinciden perfectamente con la observación: por lo tanto, menos pueden dudar algunos de nuestras hipótesis y de que es correcto lo que de ellas se deduce.

28. DE LAS CONJUNCIONES Y OPOSICIONES MEDIAS DEL SOL Y DE LA LUNA

Lo dicho hasta ahora acerca del movimiento de la Luna y el Sol facilita el modo de investigar sus conjunciones y oposiciones. Pues para un tiempo cercano, en el que hemos pensado que acontecerá una u otra, buscamos el movimiento regular de la Luna: si hubiéramos encontrado que éste completó ya un círculo, apreciamos una conjunción; plena [en posición] en el semicírculo. Pero, como esto acontece raramente, ha de considerarse la distancia entre ellos [el Sol y la Luna]; dividida ésta por el movimiento diario

de la Luna, sabremos en cuánto tiempo uno precederá al otro, o sucederá, según tengamos más o menos [distancia] en el movimiento. Por tanto, con respecto a este tiempo buscaremos movimientos y posiciones, con los cuales calcularemos los novilunios verdaderos y las lunaciones llenas, y discerniremos sus conjunciones eclípticas partiendo de las otras, como indicaremos más abajo. Cuando hayamos establecido esto, será posible extenderlo para algunos meses y continuarlo durante algunos años, según la tabla que contiene los tiempos de los doce meses y los movimientos regulares de la anomalía del Sol y de la Luna y los de la latitud de la Luna, uniendo uno a uno los movimientos regulares ya encontrados. Pero pondremos como verdadera la anomalía del Sol, para que de inmediato tengamos la adecuada; pues, no se sentirá su diferencia en uno sino en varios años por la lentitud en su principio, esto es, en su ápside superior.

Tabla de conjunción y oposición del Sol y la Luna

	Períodos de tiempo				*Movimiento de anomalía lunar*				*Movimiento de latitud de la Luna*			
Meses	Días	Min.	Seg.	Ter.	60°	°	'	"	60°	°	'	"
1	29	31	50	9	0	25	49	0	0	30	40	14
2	59	3	40	18	0	51	38	0	1	1	20	28
3	88	35	30	27	1	17	27	1	1	32	0	42
4	118	7	20	36	1	43	16	1	2	2	40	56
5	147	39	10	45	2	9	5	2	2	33	21	10
6	177	11	0	54	2	34	54	2	3	4	1	24
7	206	42	51	3	3	0	43	2	3	34	41	38
8	236	14	41	12	3	26	32	3	4	5	21	52
9	265	46	31	21	3	52	21	3	4	36	2	6
10	295	18	21	30	4	18	10	3	5	6	42	20
11	324	50	11	39	4	43	59	4	5	37	22	34
12	354	22	1	48	5	9	48	4	0	8	2	48
Para medio mes entre la Luna Llena y la Luna Nueva												
	14	45	55	4½	3	12	54	30	3	15	20	7

Movimiento de anomalía solar

Meses	60°	°	'	"	Meses	60°	°	'	"
1	0	29	6	18	7	3	23	44	7
2	0	58	12	36	8	3	52	50	25
3	1	27	18	54	9	4	21	56	43
4	1	56	25	12	10	4	51	3	11
5	2	25	31	31	11	5	20	9	20
6	2	54	37	49	12	5	49	15	38
Para medio mes									
					½	0	14	33	9

29. SOBRE LA INDAGACIÓN DE LAS CONJUNCIONES Y OPOSICIONES REALES DEL SOL Y LA LUNA

Teniendo (como se ha dicho) el tiempo de la conjunción media o de la oposición de estos astros con sus movimientos, es necesario para encontrar las verdaderas, la distancia real con la que le precede o le sigue. Por ejemplo, si la Luna estuviera antes que el Sol en su conjunción u oposición, es claro que la [conjunción u oposición] real sucedería después; si el Sol [ha sido anterior], entonces ya ha pasado la [conjunción u oposición] real que buscamos. Esto se clarifica por la prostaféresis de ambos astros. Puesto que si no las hay o son iguales y de la misma manera de ser, es decir, si ambas son aditivas o sustractivas, es patente que en ese mismo momento coinciden las conjunciones u oposiciones reales con las medias. Pero si son desiguales, la diferencia indica la separación entre ellos y precede o sigue el astro cuyo exceso es sumado o restado. Pero estando en lugares diferentes, tanto más precede aquel [astro] cuya prostaféresis fuera sustractiva; las cuales, en el mismo tiempo, juntas dan como resultado la distancia entre ellos.

Sobre esto calcularemos cuántas horas enteras puede atravesar la Luna, tomando dos horas por cada grado de separación: de manera que si estuvieran con una separación de alrededor de VI grados, tomaremos en lugar de ellos XII horas. Luego, con respecto a este intervalo de tiempo así establecido, buscaremos la real elevación de la Luna a partir del Sol: esto lo realizaremos fácilmente, una vez conocido que el movimiento medio de la Luna es de un solo grado y un minuto por cada dos horas: y que el movimiento horario de anomalía y el suyo real alrededor de la Luna llena y nueva es de casi L minutos, que en seis horas acumulan un movimiento regular de III grados y otros tantos minutos y una marcha real de anomalía de V grados, con los cuales en la tabla de las prostaféresis lunares consideraremos las diferencias entre las prostaféresis, diferencia que añadiremos al movimiento medio si ocurriera la anomalía en la parte inferior del círculo, y la restaremos si es en la superior; porque el resultado de la suma o de la resta es el movimiento real de la Luna en las horas tomadas. Luego este movimiento es suficiente si fuera igual a la distancia antes determinada. De lo contrario, la distancia multiplicada por el número de horas estimada la dividiremos por este movimiento, o bien dividiremos la verdadera distancia simple por el movimiento horario registrado; resultará, pues, la diferencia real de tiempo en horas y minutos entre la conjunción u oposición media y la verdadera. Añadiremos ésta al tiempo medio de conjunción u oposición, si la Luna estuviera antes que el Sol o su posición diametralmente opuesta al Sol, o bien la restaremos si está después, y así tendremos el tiempo de la conjunción u oposición real. Aunque confesamos que también la irregularidad del Sol añade o disminuye algo, sin embargo hay que despreciarlo con pleno derecho, ya que en todo el recorrido e incluso en la máxima elongación, que se extiende más allá de VII grados, no puede completar ni un solo minuto. Y éste es el modo más seguro de calcular las lunaciones. Quienes sólo se fijan en el movimiento horario de la Luna, al que llaman superación horaria, se equivocan algunas veces y se ven obligados más a menudo a la repetición del cálculo. Porque la Luna cambia por horas y no permanece igual a sí misma. Así pues, para [determinar] el tiempo de la verdadera unión u oposición ajustaremos el verdadero movimiento de latitud, para predecir la latitud real de la Luna, y la posición real del Sol con respecto al equinoccio de primavera, es decir, con respecto a los signos: allí donde se conoce que la posición de la Luna es la misma o la opuesta. Y de esta

manera el tiempo se conoce como tiempo medio y regular para el meridiano de Cracovia, lo reduciremos al tiempo aparente según el método arriba indicado. En cuanto a si quisiéramos determinarlo con respecto a otro lugar distinto de Cracovia, consideraremos su longitud y por cada grado de su longitud tomaremos IIII minutos de hora, y por cada minuto de longitud IIII segundos de hora, lo que añadiremos al tiempo de Cracovia si el otro lugar fuera más oriental y lo restaremos si es más occidental: y el resto o la suma será el tiempo de conjunción u oposición del Sol y la Luna.

30. DE CÓMO SE DISTINGUEN LAS CONJUNCIONES Y OPOSICIONES ECLÍPTICAS DEL SOL Y DE LA LUNA DE LAS OTRAS

En la Luna se distingue fácilmente si hay eclipses o no. Puesto que si su latitud fuera menor que la mitad de los diámetros de la Luna y de la sombra, la Luna producirá un eclipse: si es mayor no lo produce. Pero con respecto al Sol la cuestión es más complicada, mezclándose la paralaje de ambos, por lo cual muchas conjunciones aparentes difieren de las reales. En consecuencia, habiendo observado cuál es la conmutación entre el Sol y la Luna según la longitud en el momento de la conjunción real, del mismo modo buscaremos en el cuadrante oriental de la eclíptica durante el espacio de tiempo de una hora que precede a la conjunción verdadera, o durante una hora después en el cuadrante occidental, la longitud que se aprecia de la Luna con respecto al Sol para entender cuánto se aleja la Luna del Sol en una hora según la apreciación visual.

Luego, habiendo dividido aquella conmutación en longitud por este movimiento horario, tendremos la diferencia de tiempo entre la unión real y la aparente. Ésta [diferencia], cuando se resta del tiempo de la conjunción real en la parte de oriente de la eclíptica o se añade en la occidental (pues allí la conjunción aparente precede a la real, aquí le sigue), proporcionará el tiempo buscado de la conjunción real. En relación con este tiempo calcularemos la latitud aparente de la Luna con respecto al Sol, o sea, la distancia de los centros del Sol y la Luna, restada la paralaje del Sol de la conjunción visible. Si esta latitud fuera mayor que la mitad de los diámetros del Sol y la Luna, el Sol no sufrirá eclipse: pero si es menor lo sufrirá. Y de estas cosas se evidencia que, si la Luna en el momento de la conjunción real no hubiera ocasionado ninguna paralaje en longitud, serán las mismas la conjunción aparente y la real, y esta unión acontecerá alrededor de los XC grados de la eclíptica, tomados desde el oriente o desde el occidente.

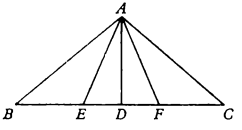
31. CUÁN GRANDE PUEDE SER UN ECLIPSE DE SOL O DE LUNA

Después de que hayamos reconocido que va a eclipsarse el Sol o la Luna, fácilmente sabremos cuán grande será su eclipse: en el Sol por la latitud aparente que hay entre el Sol y la Luna en el momento de la unión visible. Pues si la restáramos de la mitad de los diámetros del Sol y de la Luna, queda lo que se eclipsará del Sol a lo largo de su diámetro. Si esto lo multiplicamos por doce y dividimos el producto por el diámetro del

Sol, tendremos el número de dígitos del eclipse. Pero si entre el Sol y la Luna no hubiera ninguna latitud, se eclipsaría todo el Sol, o tanto cuanto la Luna pudiera tapar.

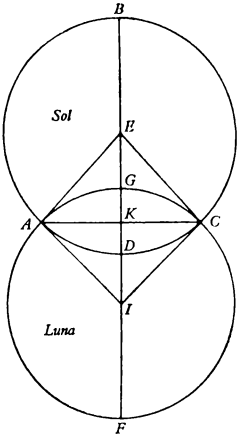
Casi del mismo modo en el eclipse lunar, a no ser porque en lugar de la latitud aparente utilizamos la simple, la cual descontada de la mitad de los diámetros de la Luna y de la sombra, proporciona la parte de la Luna que se eclipsa, siempre que la latitud de la Luna no fuera menor que la mitad de los diámetros tomada sobre el diámetro de la Luna: pues entonces se eclipsará completamente y, además, la menor latitud añade cierta demora en las tinieblas, que será máxima cuando no haya ninguna latitud, lo que pienso que es clarísimo para quienes lo consideren. Por tanto, en un eclipse determinado de Luna, multiplicando la parte eclipsada por doce y dividiendo el producto por el diámetro de la Luna, obtendremos el número eclipsado de dígitos, no de otra manera a como se ha dicho en el caso del Sol.

32. CÓMO CONOCER DE ANTEMANO CUÁNTO DURARÁ UN ECLIPSE

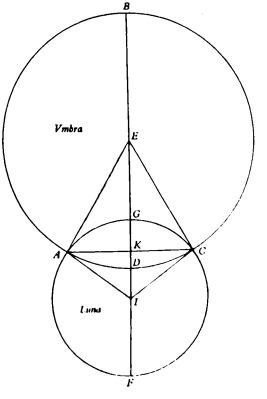


Queda por ver cuanto durará un eclipse. Pero aquí ha de señalarse que utilizaremos los arcos que hay entre el Sol, la Luna y la sombra, como líneas rectas por su pequeñez, por la cual no parecen diferenciarse de la recta. Por tanto, hemos tomado el centro del Sol o de la sombra en el punto A y la línea BC como el paso del disco lunar, cuyo centro esta en B en el momento de contacto con el Sol o con la sombra C al principio del incidente, y en C al final del recorrido, únanse AB, AC, y trácese AD perpendicular a BC. Es evidente que estando el centro de la Luna en D, será el momento medio del eclipse: pues AD es la más corta de las líneas que descienden desde A, y BD es igual a DC, puesto que también AB y AC son iguales: y éstas, una y otra, están constituidas por la mitad de los diámetros del Sol y de la Luna en el eclipse solar, y de la Luna y de la sombra en el lunar, y AD es la latitud real de la Luna, o sea, la [apreciada por la] vista en la mitad del eclipse. Así pues, restando el cuadrado de AD del cuadrado de AB, queda el de BD: luego se da la longitud de BD. Dividiendo éste por el movimiento horario real de la Luna en su eclipse, o por el visible en el eclipse solar, tendremos el tiempo de la mitad de la duración. Pero ya que la Luna en muchas ocasiones se retrasa en medio de las tinieblas, lo que sucede cuando la mitad de la suma de los diámetros de la Luna y de la sombra excede la latitud de la Luna en más de lo que es su diámetro (como se ha dicho), por tanto, poniendo E como centro de la Luna en el principio del oscurecimiento total, cuando la Luna toca por dentro a la parte cóncava de la sombra, y F en el otro punto de contacto, cuando la Luna empieza a emerger, trazadas AE, AF, se demostrará a la manera anterior que ED, DF son la mitad del retraso en las tinieblas, porque AD es la latitud conocida de la Luna y AE o AF es en lo que la mitad del diámetro de la sombra es mayor que la mitad del diámetro de la Luna. En consecuencia, serán conocidos ED o DF, de donde, a la vez, dividida [esa cantidad] por el movimiento horario real de la Luna, tendremos el tiempo medio de retraso, que es lo que se buscaba. Hay que advertir, sin embargo,

que, como la Luna se mueve en su órbita, no corta (mediante círculos que pasan por los polos de la eclíptica) porciones longitudinales del círculo zodiacal completamente iguales a las de su propia órbita. Sin embargo, la diferencia es tan pequeña que en la distancia total de XII grados en la sección eclíptica, entre cuyos extremos esta casi el límite de los eclipses de Sol y de Luna, no exceden entre sí los arcos de tales órbitas en dos minutos, que harían la quinceava parte de una hora. Por eso usamos a menudo uno por otro, como si de los mismos se tratara. También utilizamos la misma latitud de la Luna en los puntos extremos del eclipse que en la parte central, aunque tal latitud de la Luna siempre crece o decrece y se producen además espacios de incidencia y de tránsito no exactamente iguales, pero con diferencias tan pequeñas que parecería desperdiciar en vano el tiempo el investigarlo con más exactitud. Así, los tiempos, duraciones y magnitudes de los eclipses han sido explicados por los diámetros.



Pero puesto que muchos opinan que no conviene distinguir las partes eclipsadas con respecto a los diámetros, sino a las superficies (pues no se eclipsan las líneas sino las superficies), por lo tanto, sea ABCD el círculo del Sol o de la sombra, cuyo centro sea E, y el círculo lunar AFCG, cuyo centro sea I, los cuales se cortan mutuamente en los puntos A, C, y trácese a través de uno y otro centro la recta BEIF y únanse AE, EC, IA, IC y AKC formando ángulos rectos con BF. A partir de aquí queremos averiguar cuánta será la superficie oscurecida ADCG, o cuántos doceavos de toda la superficie del disco solar o lunar hay en la parte eclipsada. Así pues, ya que por lo anterior se conocen los semidiámetros AE, AI de uno y otro círculo, y también la distancia entre los centros, o sea, la latitud lunar EI, tenemos el triángulo AEI de lados conocidos y, por lo tanto, de ángulos conocidos, según lo demostrado antes, al cual es semejante e igual EIC.



En consecuencia, ADC y AGC serán arcos dados en grados, de los cuales el círculo vale CCCLX. Además, Arquímedes de Siracusa, en las mediciones del círculo demuestra que la circunferencia admite con respecto al diámetro una relación menor a III un séptimo y mayor a III diez setentaiunavo [3,10/71]. Ptolomeo toma una cantidad media entre éstas, como III, VIII minutos, XXX segundos, es a I. Con esta proporción los arcos AGC y ADC también aparecen con los mismos grados que sus diámetros, o AE y AI, y

lo contenido por EA, AD y por IA, AG es igual a los sectores AEC y AIC, respectivamente.

Pero también se conoce la base AKC común a los triángulos isósceles AEC y AIC, y las perpendiculares EK, KI. Por tanto, se conoce lo que está bajo AK, KE, que es la superficie del triángulo AEC, del mismo modo lo que está AK, KI, superficie del triángulo ACI. Restando estos triángulos de sus sectores, quedarán los segmentos de círculos AGC y ACD: con los que está constituida toda la ADCG que se buscaba. Y además, se conoce toda la superficie del círculo, la que está bajo BE y BAD es contenida por el eclipse de Sol, o la que está bajo FI y FAG en el eclipse de Luna. En consecuencia, quedará aclarado cuántos doceavos de todo el círculo del Sol o de la Luna están eclipsados en ADCG.

Con respecto a la Luna es ya suficiente con esto, que por otros ha sido tratado más ampliamente: pues nos dirigimos rápidamente a las revoluciones de los otros cinco astros, de los que se hablará a continuación.

LIBRO QUINTO

Hasta aquí terminamos, según nuestras fuerzas, la exposición de las revoluciones de la Tierra alrededor del Sol, y de la Luna alrededor de la Tierra. Ahora nos acercamos al movimiento de cinco estrellas errantes, cuyo orden y magnitud de las órbitas la misma movilidad de la Tierra enlaza, con acuerdo maravilloso y segura simetría, tal como hemos reseñado sumariamente en el libro primero, cuando hemos mostrado que las órbitas tenían sus centros no con respecto a la Tierra, sino más bien alrededor del Sol. Resta, pues, demostrar todo este particular y más evidentemente y hacer realidad las promesas con suficiencia, en cuanto nos sea posible, presentando las experiencias que sean claras, tanto las que recibimos de los tiempos antiguos, como las nuestras, y con las que se tendrá mayor certeza sobre el cálculo de sus movimientos. Estos cinco astros, en el Timeo de Platón, son denominados según el aspecto de cada uno: Saturno, Phaenon, como si dijeras brillante y surgiente, pues se oculta menos que los demás, y ocultado por el Sol emerge más rápidamente; Júpiter, por su esplendor Phaethon Marte, Pyrois por su resplandor ígneo; Venus, a veces φωσφόρος, a veces ἕσπερος, esto es, Lucifer y Véspero, según que luzca por la mañana o por la tarde; y finalmente Mercurio, Stilbon por su luz resplandeciente y brillante. Ellos son arrastrados en longitud y latitud con una diferencia mayor que la Luna.

1. ACERCA DE SUS REVOLUCIONES Y MOVIMIENTOS MEDIOS

Dos movimientos en longitud muy diferentes aparecen en ellos. Uno es a causa del movimiento de la Tierra, del que ya hablamos, el otro propio de cada uno. Al primero, no sin razón, pareció bien llamarle movimiento de conmutación, siendo el que hace aparecer en todos ellos estacionamientos, progresiones y regresiones, no porque el planeta, que avanza siempre con su propio movimiento sea así desviado, sino que así aparece a causa de la conmutación, la cual produce el movimiento de la Tierra según la diferencia y magnitud de sus órbitas.

Así pues, es claro que las posiciones verdaderas de Saturno, Júpiter y Marte tan sólo se nos hacen visibles cuando están en posición acrónica, lo que sucede aproxi-

madamente en medio de las retrogradaciones: pues entonces, coincidiendo con la posición media del Sol en línea recta, están exentos de aquella conmutación. En cambio, en Venus y Mercurio la razón es otra. Pues entonces se ocultan al máximo estando en conjunción con el Sol, y muestran únicamente la desviación que realizan con respecto al Sol, de modo que nunca son hallados sin tal conmutación. Luego es privativo de cada planeta su revolución de conmutación (hablo del movimiento de la Tierra con respecto al planeta), que se explica por medio de ambos [la Tierra y el planeta]. Pues afirmamos que el movimiento de conmutación [la paralaje] no es otra cosa sino aquel en que el movimiento regular de la Tierra excede al movimiento de aquellos planetas, como en Saturno, Júpiter, Marte, o es excedido, como en Venus y Mercurio. Pero, puesto que tales períodos de conmutaciones se hallaron desiguales con una clara diferencia, los antiguos advirtieron que también eran desiguales los movimientos de aquellas estrellas, y tenían ápsides de círculos, a partir de los cuales su irregularidad volvía a empezar: y pensaron que éstos [ápsides] tenían sede perpetua en la esfera de las estrellas no errantes. Con este argumento se inició el aprendizaje de sus movimientos medios y períodos regulares. Como tenían claro en la memoria la posición de alguno con respecto a una distancia fija a partir del Sol y una estrella fija, y averiguaron que después de un intervalo de tiempo la estrella llegaba al mismo lugar con idéntica distancia del Sol, les pareció que el planeta había recorrido todo el movimiento irregular y de nuevo volvía a la primera posición en relación con la Tierra. Y así, por el tiempo que transcurrió, calcularon el número de revoluciones íntegras e iguales, y mediante ellas los movimientos particulares de la estrella [el planeta].

Ptolomeo reseñó estos circuitos por el número de años solares, que tomó de Hiparco, según confiesa. Y quieren que se entiendan como años solares los que se miden a partir de un equinoccio o un solsticio. Pero ya quedó patente que tales años no son completamente iguales; por lo tanto, utilizaremos los que se miden con respecto a las estrellas fijas; por medio de los cuales restablecimos los movimientos de estas cinco estrellas con mayor corrección, de acuerdo con los excesos o defectos que encontramos en nuestro tiempo, de esta manera:

Con respecto a Saturno, la Tierra da la vuelta cincuenta y siete veces, movimiento al que llamamos de conmutación, en LIX de nuestros años solares, I día, VI minutos, y casi XLVIII segundos: en cuyo tiempo la estrella [el planeta] por su propio movimiento da dos veces la vuelta, añadiendo un solo grado, VI minutos, VI segundos. Júpiter es superado sesenta y cinco veces por la Tierra en LXXI años solares, a los que faltan V días, XLV minutos, XXVII segundos: en los que la estrella da la vuelta por su movimiento seis veces, faltándole V grados, XLI minutos, II segundos y medio. Las revoluciones de conmutación de Marte son XXXVII en LXXIX años solares, II días, XXVII minutos, III segundos, en cuyo tiempo la estrella por su movimiento completa cuarenta y dos períodos, y añade II grados, XXIIII minutos, LVI segundos. Venus supera cinco veces el movimiento de la Tierra en VIII años solares, menos II días, XXVI minutos, XLVI segundos. Y con seguridad durante este tiempo circundó al Sol tres veces, menos II grados, XXIV minutos, XL segundos. Mercurio, a su vez, realiza CXLV períodos de conmutación en XLVI años solares, añadiendo XXXIIII minutos de día, XXIII segundos, con los cuales también supera al movimiento de la Tierra, por lo que alrededor del Sol da la vuelta ciento noventa y una veces, añadiendo XXXIIII minutos de día, y casi XXIII segundos.

Por lo tanto, los circuitos de las conmutaciones son privativos de cada uno: el de Saturno en CCCLXXVIII días, V minutos, XXXII segundos, XI terceros. El de Júpiter en CCCIIC días, XXIII minutos, II segundos, 56 terceros. El de Marte en DCCLXXIX días, LVI minutos, IXX segundos, VII terceros. El de Venus, en DLXXXIII días, LV minutos, XVII segundos, XXIIII terceros. El de Mercurio, en CXV días, LII minutos, XLII segundos, XII terceros. Los cuales reducidos a grados de círculo y multiplicados por CCCLXV, repartidos según su número de días y minutos, tendremos el movimiento anual de Saturno de CCCXLVII grados, XXXII minutos, II segundos, LIIII terceros, XII cuartos. De Júpiter, CCCXXIX grados, XXV, VIII, XV, VI. De Marte, CLXVIII grados, XXVIII minutos, XXIX, XIII, XII. De Venus, CCXXV grados, I minuto, XLVIII, LIIII, XXX. El de Mercurio después de tres revoluciones, LIII grados, LVI minutos, XLVI, LIIII, XL. La trescientas sesenta y cincoava parte de éstos será el movimiento diurno de Saturno de LVII minutos, VII, XLVII, Júpiter, de LIIII minutos, IX, III, IL. Marte, de XXVII minutos, XLI, XL, VIII. Venus, de XXXVI minutos, IL, XXVIII, XXXV. Mercurio, III grados, VI minutos, XXIIII, VII, XLIII, según son expuestos en las tablas que siguen (parecidas a los movimientos medios del Sol y de la Luna).

En cambio, pensamos que era superfluo extenderse también con respecto a sus movimientos propios. Pues constan restando éstos del movimiento medio del Sol, al que ellos componen (como se ha dicho). Pero cualquiera no contento con esto, puede hacerlo por su gusto. Ya que el movimiento propio y anual de Saturno con respecto a la esfera de las estrellas no errantes es de XII grados, XII minutos, XLVI, XII, LII. El de Júpiter de XXX grados, XIX minutos, XL, LI, LVIII. El de Marte, de CLXXXXI grados, XVI minutos, XIX, LXXX, LII. En cambio, con respecto a Venus y Mercurio, puesto que no se nos muestran,[1] el movimiento del Sol se utiliza y suple en lugar de ellos, mediante el cual sus apariencias se conocen y demuestran, como veremos a continuación:

1. Los movimientos propios de Venus y de Mercurio no nos resultan aparentes por el hecho de que nunca vemos sus posiciones sin paralaje.

Movimiento de conmutación de Saturno en años y períodos de sesenta años

Años egipcios	60°	*Movimiento* °	'	"	"'	*Años egipcios*	60°	*Movimiento* °	'	"	"'
1	5	47	32	3	9	31	5	33	33	37	59
2	5	35	4	6	19	32	5	21	5	41	9
3	5	22	36	9	29	33	5	8	37	44	19
4	5	10	8	12	38	34	4	56	9	47	28
5	4	57	40	15	48	35	4	43	41	50	38
6	4	45	12	18	58	36	4	31	12	53	48
7	4	32	44	22	7	37	4	18	45	56	57
8	4	20	16	25	17	38	4	6	18	0	7
9	4	7	48	28	27	39	3	53	50	3	17
10	3	55	20	31	36	40	3	41	22	6	26
11	3	42	52	34	46	41	3	28	54	9	36
12	3	30	24	37	56	42	3	16	26	12	46
13	3	17	56	41	5	43	3	3	58	15	55
14	3	5	28	44	15	44	2	51	30	19	5
15	2	53	0	47	25	45	2	39	2	22	15
16	2	40	32	50	34	46	2	26	34	25	24
17	2	28	4	53	44	47	2	14	6	28	34
18	2	15	36	56	54	48	2	1	38	31	44
19	2	3	9	0	3	49	1	49	10	34	53
20	1	50	41	3	13	50	1	36	42	38	3
21	1	38	13	6	23	51	1	24	14	41	13
22	1	25	45	9	32	52	1	11	46	44	22
23	1	13	17	12	42	53	0	59	18	47	32
24	1	0	49	15	52	54	0	46	50	50	42
25	0	48	21	19	1	55	0	44	22	53	51
26	0	35	53	22	11	56	0	21	54	57	1
27	0	23	25	25	21	57	0	9	27	0	11
28	0	10	57	28	30	58	5	56	59	3	20
29	5	58	29	31	40	59	5	44	31	6	30
30	5	46	1	34	50	60	5	32	3	9	40

Movimiento de conmutación de Saturno en días, grupos de sesenta y fracciones de día

Días	*Movimiento*					*Días*	*Movimiento*				
	60°	°	'	"	'''		60°	°	'	"	'''
1	0	0	57	7	44	31	0	29	30	59	46
2	0	1	54	15	28	32	0	30	28	7	30
3	0	2	51	23	12	33	0	31	25	15	14
4	0	3	48	30	56	34	0	32	22	22	58
5	0	4	45	38	40	35	0	33	19	30	42
6	0	5	42	46	24	36	0	34	16	38	26
7	0	6	39	54	8	37	0	35	13	46	1
8	0	7	37	1	52	38	0	36	10	53	55
9	0	8	34	9	36	39	0	37	8	1	39
10	0	9	31	7	20	40	0	38	5	9	23
11	0	10	28	25	4	41	0	39	2	17	7
12	0	11	25	32	49	42	0	39	59	24	51
13	0	12	22	40	33	43	0	40	56	32	35
14	0	13	19	48	17	44	0	41	53	40	19
15	0	14	16	56	1	45	0	42	50	48	3
16	0	15	14	3	45	46	0	43	47	55	47
17	0	16	11	11	29	47	0	44	45	3	31
18	0	17	8	19	13	48	0	45	42	11	16
19	0	18	5	26	37	49	0	46	39	19	0
20	0	19	2	34	41	50	0	47	36	36	44
21	0		59	42	25	51	0	48	33	34	28
22	0	20	56	50	9	52	0	49	30	42	12
23	0	21	53	57	53	53	0	50	27	49	56
21	0	22	51	5	38	54	0	51	24	57	40
25	0	23	48	13	22	55	0	52	22	5	24
26	0	24	45	21	6	56	0	53	19	13	8
27	0	12	42	28	50	57	0	54	16	20	52
28	0	26	39	36	34	58	0	55	13	28	36
29	0	27	36	44	18	59	0	56	10	36	20
30	0	28	33	52	2	60	0	57	7	44	5

Movimiento de conmutación de Júpiter en años y períodos de sesenta años

Años egipcios	60°	*Movimiento* °	'	"	'''	*Años egipcios*	60°	*Movimiento* °	'	"	'''
1	5	29	25	8	15	31	2	11	59	15	48
2	4	58	50	16	30	32	1	41	24	24	3
3	4	28	15	24	45	33	1	10	49	32	18
4	3	57	40	33	0	34	0	40	14	40	33
5	3	27	5	41	15	35	0	9	39	48	48
6	2	56	30	49	30	36	5	39	4	57	3
7	2	25	55	57	45	37	5	8	30	5	18
8	1	55	21	6	0	38	4	37	55	13	33
9	1	24	46	14	15	39	4	7	20	21	48
10	0	54	11	22	31	40	3	36	45	30	4
11	0	23	36	30	46	41	3	6	10	38	19
12	5	53	1	39	1	42	2	35	35	46	34
13	5	22	26	47	16	43	2	5	0	54	49
14	4	51	51	55	31	44	1	34	26	3	4
15	4	21	17	3	46	45	1	3	51	11	19
16	3	50	42	12	1	46	0	33	16	19	34
17	3	20	7	20	16	47	0	2	41	27	49
18	2	49	32	28	31	48	5	32	5	36	4
19	2	18	57	36	46	49	5	1	31	44	19
20	1	48	22	45	2	50	4	30	56	52	34
21	1	17	47	53	17	51	4	0	22	0	50
22	0	47	13	1	32	52	3	29	47	9	5
23	0	16	38	9	47	53	2	59	12	17	20
24	5	46	3	18	2	54	2	28	37	25	35
25	5	15	28	26	17	55	1	58	2	33	50
26	4	44	53	34	32	56	1	27	27	42	5
27	4	14	18	42	47	57	0	56	52	50	20
28	3	43	43	51	2	58	0	26	17	58	35
29	3	13	8	59	17	59	5	55	43	6	50
30	2	42	34	7	33	60	5	25	8	15	6

Movimiento de conmutación de Júpiter en días, grupos de sesenta y fracciones de día

Días		*Movimiento*				*Días*		*Movimiento*			
	60°	°	'	"	"'		60°	°	'	"	"'
1	0	0	54	9	3	31	0	27	58	40	58
2	0	1	48	18	7	32	0	28	52	50	2
3	0	2	42	27	11	33	0	29	46	59	5
4	0	3	36	36	15	34	0	30	41	8	9
5	0	4	30	45	19	35	0	31	35	17	13
6	0	5	24	54	22	36	0	32	29	26	17
7	0	6	19	3	26	37	0	33	23	35	21
8	0	7	13	12	30	38	0	34	17	44	25
9	0	8	7	21	34	39	0	35	11	53	29
10	0	9	1	30	38	40	0	36	6	2	32
11	0	9	55	39	41	41	0	37	0	11	36
12	0	10	49	48	45	42	0	37	54	20	40
13	0	11	43	57	49	43	0	38	48	29	44
14	0	12	38	6	53	44	0	39	42	38	47
15	0	13	32	15	57	45	0	40	36	47	51
16	0	14	26	25	1	46	0	41	30	56	55
17	0	15	20	34	4	47	0	42	25	5	59
18	0	16	14	43	8	48	0	43	19	15	3
19	0	17	8	52	12	49	0	44	13	24	6
20	0	18	3	1	26	50	0	45	7	33	10
21	0	18	57	10	20	51	0	46	1	42	14
22	0	19	51	19	23	52	0	46	55	51	18
23	0	20	45	28	27	53	0	47	50	0	22
24	0	21	39	37	31	54	0	48	44	9	26
25	0	22	33	46	35	55	0	49	38	18	29
26	0	23	27	55	39	56	0	50	32	27	33
27	0	24	22	4	43	57	0	51	26	36	37
28	0	25	16	13	46	58	0	52	20	45	41
29	0	26	10	22	50	59	0	53	14	54	45
30	0	27	4	31	54	60	0	54	9	3	49

Movimiento de conmutación de Marte en años y períodos de sesenta años

Años egipcios	60°	*Movimiento* °	'	"	'''	*Años egipcios*	60°	*Movimiento* °	'	"	'''
1	2	48	28	30	36	31	3	2	43	48	38
2	5	36	57	1	12	32	5	51	12	19	14
3	2	25	25	31	48	33	2	39	40	49	50
4	5	13	54	2	24	34	5	28	9	20	26
5	2	2	22	33	0	35	2	16	37	51	2
6	4	50	51	3	36	36	5	5	6	21	38
7	1	39	19	34	12	37	1	53	34	52	14
8	4	27	48	4	48	38	4	42	3	22	50
9	1	16	16	35	24	39	1	30	31	53	26
10	4	4	45	6	0	40	4	19	0	24	2
11	0	53	13	36	36	41	1	7	28	54	38
12	3	41	42	7	12	42	3	55	57	25	14
13	0	30	10	37	48	43	0	44	25	55	50
14	3	18	39	8	24	44	3	32	54	26	26
15	0	7	7	39	1	45	0	21	22	57	3
16	2	55	39	9	37	46	3	9	51	27	39
17	5	44	4	40	13	47	5	58	19	58	15
18	2	32	33	10	49	48	2	46	48	28	51
19	5	21	1	41	25	49	5	35	16	59	27
20	2	9	30	12	1	50	2	23	45	30	3
21	4	57	58	42	37	51	5	12	14	0	39
22	1	46	27	13	13	52	2	0	42	31	15
23	4	34	55	43	49	53	4	49	11	1	51
24	1	23	24	14	25	54	1	37	39	32	27
25	4	11	52	45	1	55	4	26	8	3	3
26	1	0	21	15	37	56	1	14	36	33	39
27	3	48	49	46	13	57	4	3	5	4	15
28	0	37	18	16	49	58	0	51	33	34	51
29	3	25	46	47	25	59	3	40	2	5	27
30	0	14	15	18	2	60	0	28	30	36	4

Movimiento de conmutación de Marte en días, grupos de sesenta y fracciones de día

Días	*Movimiento*					*Días*	*Movimiento*				
	60°	°	'	"	'''		60°	°	'	"	'''
1	0	0	27	41	40	31	0	14	18	31	51
2	0	0	55	23	20	32	0	14	46	13	31
3	0	1	23	5	1	33	0	15	14	55	12
4	0	1	50	46	41	34	0	15	41	36	52
5	0	2	18	28	21	35	0	16	9	18	32
6	0	2	46	10	2	36	0	16	37	0	13
7	0	3	13	51	42	37	0	17	4	41	53
8	0	3	41	33	22	38	0	17	32	23	33
9	0	4	9	15	3	39	0	18	0	5	14
10	0	4	36	56	43	40	0	18	27	46	54
11	0	5	4	38	24	41	0	18	55	28	35
12	0	5	32	20	4	42	0	19	23	10	15
13	0	6	0	1	24	43	0	19	50	51	55
14	0	6	27	43	44	44	0	20	18	33	36
15	0	6	55	25	25	45	0	20	46	15	16
16	0	7	23	61	45	46	0	21	13	56	56
17	0	7	50	48	26	47	0	21	41	38	37
18	0	8	18	30	6	48	0	22	9	20	17
19	0	8	46	11	47	49	0	22	37	1	57
20	0	9	13	53	27	50	0	23	4	43	38
21	0	9	41	35	7	51	0	23	32	25	18
22	0	10	9	16	48	52	0	24	0	6	59
23	0	10	36	58	28	53	0	24	27	48	39
24	0	11	4	40	8	54	0	24	55	30	19
25	0	11	32	21	49	55	0	25	23	12	0
26	0	12	0	3	29	56	0	25	50	53	40
27	0	12	27	45	9	57	0	26	18	35	20
28	0	12	55	26	49	58	0	26	46	17	1
29	0	13	23	8	30	59	0	27	13	58	41
30	0	13	50	50	1	60	0	27	41	40	22

Movimiento de conmutación de Venus en años y períodos de sesenta años

Años egipcios	60°	*Movimiento* °	'	"	"'	*Años egipcios*	60°	*Movimiento* °	'	"	"'
1	3	45	1	45	3	31	2	15	54	16	53
2	1	30	3	30	7	32	0	0	56	1	57
3	5	15	5	15	11	33	3	45	57	47	1
4	3	0	7	0	44	34	1	30	59	32	4
5	0	45	8	45	18	35	5	16	1	17	8
6	4	30	10	30	22	36	3	1	3	2	12
7	2	15	12	15	25	37	0	46	4	47	15
8	0	0	14	0	29	38	4	31	6	32	19
9	3	45	15	45	33	39	2	16	8	17	23
10	1	30	17	30	36	40	0	1	10	2	26
11	5	15	19	15	40	41	3	46	11	47	30
12	3	0	21	0	44	42	1	31	13	32	34
13	0	45	22	45	47	43	5	16	15	17	37
14	4	30	24	30	51	44	3	1	17	2	41
15	2	15	26	15	55	45	0	46	18	47	45
16	0	0	28	0	58	46	4	31	20	32	48
17	3	45	29	46	2	47	2	16	22	17	52
18	1	30	31	31	6	48	0	1	24	2	56
19	5	15	33	16	9	49	3	46	25	47	59
20	3	0	35	1	13	50	1	31	27	33	3
21	0	45	36	46	17	51	5	16	29	18	7
22	4	30	38	31	20	52	3	1	31	3	10
23	2	15	40	16	24	53	0	46	32	48	14
24	0	0	42	1	28	54	4	31	34	33	18
25	3	45	43	46	31	55	2	16	36	18	21
26	1	30	45	31	35	56	0	1	38	3	25
27	5	15	47	16	39	57	3	46	39	48	29
28	3	0	49	1	42	58	1	31	41	33	32
29	0	45	50	46	46	59	5	16	43	18	36
30	4	30	52	31	50	60	3	1	45	3	40

Movimiento de conmutación de Venus en días, grupos de sesenta y fracciones de día

Días		*Movimiento*				*Días*		*Movimiento*			
	60°	°	'	"	'''		60°	°	'	"	'''
1	0	0	36	59	28	31	0	19	6	43	46
2	0	1	13	58	57	32	0	19	43	43	14
3	0	1	50	58	25	33	0	20	20	42	43
4	0	2	27	57	54	34	0	20	57	42	11
5	0	3	4	57	22	35	0	21	34	41	40
6	0	3	41	56	51	36	0	22	11	41	9
7	0	4	18	56	20	37	0	22	48	40	37
8	0	4	55	55	48	38	0	23	25	40	6
9	0	5	32	55	17	39	0	24	2	39	34
10	0	6	9	54	45	40	0	24	39	39	3
11	0	6	26	54	14	41	0	25	16	38	31
12	0	7	23	53	43	42	0	25	53	38	0
13	0	8	0	53	11	43	0	26	30	37	29
14	0	8	37	52	40	44	0	27	7	36	57
15	0	9	14	52	8	45	0	27	44	36	26
16	0	9	51	51	37	46	0	28	21	35	54
17	0	10	28	51	5	47	0	28	58	35	23
18	0	11	5	50	34	48	0	29	35	34	52
19	0	11	42	50	2	49	0	30	12	34	20
20	0	12	19	49	31	50	0	30	49	33	49
21	0	12	56	48	59	51	0	31	26	33	17
22	0	13	33	48	28	52	0	32	13	32	46
23	0	13	10	47	57	53	0	32	40	32	14
24	0	14	47	47	26	54	0	33	17	31	43
25	0	15	24	46	54	55	0	33	54	31	12
26	0	16	1	46	23	56	0	34	31	30	40
27	0	16	38	45	51	57	0	35	8	30	9
28	0	17	15	45	20	58	0	35	45	29	37
29	0	17	52	44	48	59	0	36	22	29	6
30	0	18	29	44	17	60	0	36	59	28	35

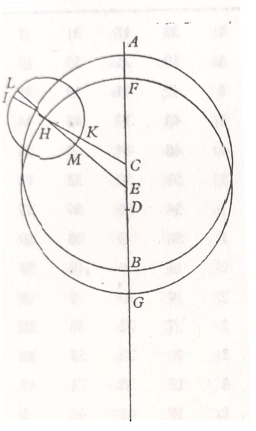
Movimiento de conmutación de Mercurio en años y períodos de sesenta años

Años egipcios	60°	*Movimiento* °	'	"	'''	*Años egipcios*	60°	*Movimiento* °	'	"	'''
1	0	53	57	23	6	31	3	52	38	56	21
2	1	47	54	46	13	32	4	46	36	19	28
3	2	41	52	9	19	33	5	40	33	42	34
4	3	35	49	32	26	34	0	34	31	5	41
5	4	29	46	55	32	35	1	28	28	28	47
6	5	23	44	18	39	36	2	22	25	51	54
7	0	17	41	41	45	37	3	16	23	15	0
8	1	11	39	4	52	38	4	10	20	38	7
9	2	5	36	27	58	39	5	4	18	1	13
10	2	59	33	51	5	40	5	58	15	24	20
11	3	53	31	14	11	41	0	52	12	47	26
12	4	47	28	37	18	42	1	46	10	10	33
13	5	41	26	0	24	43	2	40	7	33	39
14	0	35	23	23	31	44	3	34	4	56	46
15	1	29	20	46	37	45	4	28	2	19	52
16	2	23	18	9	44	46	5	21	59	42	59
17	3	17	15	32	50	47	0	15	57	6	5
18	4	11	12	55	57	48	1	9	54	29	12
19	5	5	10	19	3	49	2	3	51	52	18
20	5	59	7	42	10	50	2	57	49	15	25
21	0	53	5	5	16	51	3	51	46	38	31
22	1	47	2	28	23	52	4	45	44	1	38
23	2	40	59	51	29	53	5	39	41	24	44
24	3	34	57	14	36	54	0	33	38	47	51
25	4	38	54	37	42	55	1	27	36	10	57
26	5	22	52	0	49	56	2	21	33	34	4
27	0	16	49	23	55	57	3	15	30	57	10
28	1	10	46	47	2	58	4	9	28	20	17
29	2	4	44	10	8	59	5	3	25	43	23
30	2	58	41	33	15	60	5	57	23	6	30

Movimiento de conmutación de Mercurio en días, grupos de sesenta y fracciones de día

Días		*Movimiento*				*Días*		*Movimiento*			
	60°	°	'	"	"'		60°	°	'	"	"'
1	0	3	6	24	13	31	1	36	18	31	3
2	0	6	12	48	27	32	1	39	21	55	17
3	0	9	19	12	41	33	1	42	31	19	31
4	0	12	25	36	54	34	1	45	37	43	44
5	0	15	32	1	8	35	1	48	44	7	58
6	0	18	38	25	22	36	1	51	50	32	12
7	0	21	44	49	35	37	1	54	56	56	25
8	0	24	51	13	49	38	1	58	3	20	39
9	0	27	57	38	3	39	2	1	9	44	53
10	0	31	4	2	16	40	2	4	16	9	6
11	0	34	10	26	30	41	2	7	22	33	20
12	0	37	16	50	44	42	2	10	28	57	34
13	0	40	23	14	57	43	2	13	35	21	47
14	0	43	29	39	11	44	2	16	41	46	1
15	0	46	36	3	25	45	2	19	48	10	15
16	0	49	42	27	38	46	2	22	54	34	28
17	0	52	48	51	52	47	2	26	0	58	42
18	0	55	55	16	6	38	2	29	7	22	56
19	0	59	1	40	19	49	2	32	13	47	9
20	1	2	8	4	33	50	2	35	20	11	23
21	1	5	14	28	47	51	2	38	26	35	37
22	1	8	20	53	0	52	2	41	32	59	50
23	1	11	27	17	14	53	2	44	39	24	4
24	1	14	33	41	28	54	2	47	45	48	18
25	1	17	40	5	41	55	2	50	52	12	31
26	1	20	46	29	55	56	2	53	58	36	45
27	1	23	52	54	9	57	2	57	5	0	59
28	1	26	59	18	22	58	3	0	11	25	12
29	1	30	5	42	36	59	3	3	17	49	26
30	1	33	12	6	50	60	3	6	24	13	40

2. DEMOSTRACIÓN DE LA REGULARIDAD Y DE LA APARIENCIA DE ESTAS ESTRELLAS, SEGÚN LA OPINIÓN DE LOS ANTIGUOS



En consecuencia, el movimiento medio de éstos [planetas] se encuentra del siguiente modo. Ahora atendamos a la irregularidad aparente. Los matemáticos antiguos, que consideraban la Tierra inmóvil, imaginaron en el caso de Saturno, Júpiter, Marte y Venus epiciclos excéntricos y además otro excéntrico, con respecto al cual se moviese el epiciclo con regularidad, y el planeta en el epiciclo. Del mismo modo como si AB fuera el círculo excéntrico, cuyo centro está en C, y su diámetro ACB, en el cual estuviera el centro de la Tierra D, su apogeo en A, el perigeo en B, y también DC está cortada por la mitad en el punto E, haciendo centro en el cual descríbase otro excéntrico FG igual al anterior, en el que tomando como centro H dibújese el epiciclo IK, y trácese por su centro la línea recta IKC, y del mismo modo LHME. Entiéndase también que los excéntricos están inclinados con respecto al plano de la eclíptica, y el epiciclo con respecto al plano del excéntrico, a causa de las latitudes propias del planeta, pero aquí están como en un solo plano para comodidad de la demostración.

Así pues, dicen que todo este plano con los puntos E, C, se mueve alrededor del centro D de la órbita de la eclíptica, en relación con el movimiento de las estrellas fijas: por lo cual quieren que se entienda que estas posiciones inamovibles con respecto a la esfera de las estrellas no errantes tienen también un epiciclo que se mueve hacia el este en el círculo FHG, pero de acuerdo con la línea IHC, también con respecto a la que se mueve la estrella [el planeta] con regularidad en el epiciclo IK.

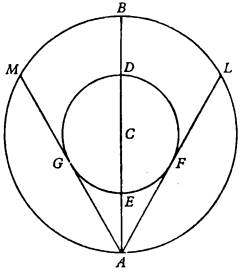
Por otra parte, consta que la regularidad del epiciclo debió producirse en relación con el centro E de su deferente[1] y la revolución del planeta con respecto a la línea LME. Así pues, conceden que en estas circunstancias la regularidad del movimiento circular puede realizarse alrededor de un centro ajeno y no del propio. Del mismo modo, e incluso más, sucede con Mercurio. Pero ya se refutó esto suficientemente, según creo, con respecto a la Luna. Estos y otros problemas semejantes nos proporcionaron la ocasión de pensar sobre la movilidad de la Tierra y en otros métodos con los que se mantendría la regularidad y los principios del arte, y transformar en más constante la razón de la irregularidad aparente.

1. El deferente de un epiciclo es el círculo sobre cuya circunferencia se desplaza el centro del epiciclo.

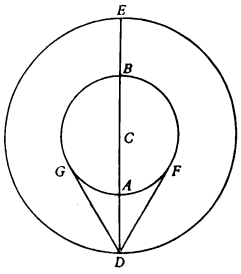
3. DEMOSTRACIÓN GENERAL DE LA IRREGULARIDAD APARENTE A CAUSA DEL MOVIMIENTO DE LA TIERRA

Por lo tanto, dos son las causas por las que el movimiento regular del planeta aparece como irregular, tanto por el movimiento de la Tierra como también por el propio movimiento: estudiaremos en general a ambos y por separado con demostración visual, para que se distingan mejor entre sí, empezando por aquel que se encuentra en todos ellos, por el movimiento de la Tierra. Y en primer lugar lo referente a Venus y Mercurio, que están comprendidos dentro del círculo de la Tierra.

Sea, pues, el círculo AB excéntrico con respecto al Sol, círculo que ha descrito el centro de la Tierra en su circuito anual, según como se ha expuesto anteriormente; el centro sea C. Ahora supongamos que el planeta no tiene ninguna otra irregularidad excepto ésta, lo cual sucederá si hacemos a DE, [círculo] bien de Venus o bien de Mercurio, homocéntrico al AB, el cual en cuanto a la latitud conviene que esté inclinado en relación con el AB. Pero se consideran como si estuviesen en el mismo plano, para una demostración más cómoda, y se considera que la Tierra está en el punto A, desde el que se elevan las visuales AFL y AGM, tangentes al círculo del planeta en los puntos F, G, y sea ACB el diámetro común a ambos [círculos].



Sea también el movimiento de uno y otro, me refiero al de la Tierra y el planeta, en la misma dirección, esto es, hacia el este, pero siendo el planeta más rápido que la Tierra. Por consiguiente, puesto el ojo en A, C y la línea ACB parecerá avanzar según el movimiento medio del Sol, en cambio el astro en el círculo DFG, como en un epiciclo, recorrerá en mayor tiempo el arco FDG, hacia el este, que el restante GEF hacia el oeste, y allí añade todo el ángulo FAG al movimiento medio del Sol, y aquí le resta lo mismo. Pero cuando el movimiento sustractivo de la estrella, principalmente alrededor del perigeo E, fuera mayor que el aditivo del C, le parece al A que retrocede a tenor del exceso, cosa que sucede en estos astros; en los que estaría en una razón mayor la línea CE con respecto a la AE que el movimiento de A con respecto al curso del planeta, según la demostración de Apolonio de Perga (como se dirá después). Pero cuando el movimiento aditivo fuera igual al sustractivo (compensados entre sí), parecerá detenerse; todo lo cual corresponde a las apariencias. En consecuencia, si no hubiera ninguna otra diferencia [irregularidad] en el movimiento de la estrella, como opinaba Apolonio, éstas podrían bastar. Pero las máximas elongaciones matutinas y vespertinas de estos astros desde la posición media del Sol, que se entienden por los ángulos FAE y GAE, no se encuentran iguales en todas partes, ni existe una conjetura para cada uno que sea evidente, ni en conjunto ni singularmente, porque los cursos de éstos no son homocéntricos con el círculo terrestre, sino en algunos otros, por lo que tiene la segunda diversidad [irregularidad].



Esto mismo se demuestra también en los tres [planetas] superiores, Saturno, Júpiter, Marte, que giran alrededor de la Tierra por todas partes. Repetido, pues, el círculo anterior de la Tierra, añádase [el círculo] DE homocéntrico exterior en el mismo plano, en el que se toma la posición del planeta como en el punto D, desde el que se trazan las líneas rectas DF, DG, tangentes a la órbita de la Tierra en los puntos F, G, y DACBE sea un diámetro común. Es evidente que desde A aparecerá tan sólo la verdadera posición del planeta en la línea DE del movimiento medio del Sol, cuando está en posición acrónica y próximo a la Tierra. Pero desde el punto opuesto, aunque en la misma línea, cuando la Tierra está en B, aparecerá en conjunción con el Sol, producida por la proximidad del Sol al punto C. Pero siendo el curso de la Tierra más rápido, en cuanto sobrepasa al movimiento del planeta, parecerá a lo largo del arco del apogeo que añade al movimiento de la estrella todo el ángulo GDF, y a lo largo del arco restante FAG restarle el mismo [ángulo], pero en un tiempo más corto en consonancia con el arco menor FAG. Y cuando el movimiento sustractivo de la Tierra haya superado al movimiento aditivo de la estrella (sobre todo alrededor de A), parecerá que ésta se separa de la Tierra y que se mueve hacia el oeste, y parecerá que se define allí donde sea mínima la diferencia entre ambos movimientos contrarios, según lo apreciado por la vista. Y así se evidencia de nuevo, que todas estas cosas acontecen a causa de un único movimiento de la Tierra, lo cual investigaron los antiguos por medio de los epiciclos de cada uno [de los planetas]. Pero, puesto que no se descubre el movimiento de la estrella como regular, contra la opinión de Apolonio y de los antiguos (transmitiendo esta irregularidad el movimiento de la Tierra a la estrella), por tanto, los planetas no se mueven a lo largo, de un círculo homocéntrico, sino de otro modo, que también demostraremos más adelante.

4. DE QUÉ MODO APARECEN COMO IRREGULARES LOS MOVIMIENTOS PROPIOS DE LAS ESTRELLAS ERRANTES

Puesto que sus movimientos propios, según la longitud, poseen casi la misma disposición, excepto Mercurio, que parece diferir de ellos, por ello trataremos conjuntamente a los cuatro, y se asignará otro lugar para Mercurio. Así pues, donde los antiguos colocaron un solo movimiento en dos excéntricos (como se ha señalado), nosotros pensamos que hay dos movimientos regulares, de los cuales se compone la irregularidad de la apariencia, o por un excéntrico de un excéntrico, o por un epiciclo de un epiciclo, o también de una manera mixta por un excentro-epiciclo, que pueden originar la misma irregularidad, según se ha demostrado más arriba respecto al Sol y la Luna.

Sea, por lo tanto, el círculo excéntrico AB alrededor del centro C, el diámetro ACB, en la línea media de la posición del Sol pasando por los ápsides superior e inferior del planeta, en tal diámetro el centro de la órbita de la Tierra está en D, y tomando como

centro el punto A en el ápside superior, y con una distancia de la tercera parte de CD, descríbase el epiciclo EF, en el perigeo del cual, que es F, colóquese el planeta. Y el movimiento del epiciclo a través del excéntrico AB se dirige hacia el este, y el movimiento del planeta en el arco superior del epiciclo de igual modo hacia el este, en el restante [arco BA] hacia el oeste, y las revoluciones de uno y otro, es decir, del epiciclo y del planeta, proporcionales entre sí. Además acontece que cuando el epiciclo está en el ápside superior del excéntrico y el planeta por el contrario en el perigeo del epiciclo,[1] se invierten mutuamente en direcciones contrarias, cuando uno y otro recorre su hemiciclo. Pero en ambos cuadrantes medios, uno y otro [círculo] tendrá su ápside medio, y entonces sólo [en el primer caso] el diámetro[2] del epiciclo será [paralelo] a la línea AB y en las posiciones contrarias estos diámetros son perpendiculares a AB, en el resto [del recorrido] estará siempre aproximándose o alejándose [de la perpendicular]: todo lo cual se sigue fácilmente como consecuencia de estos movimientos.

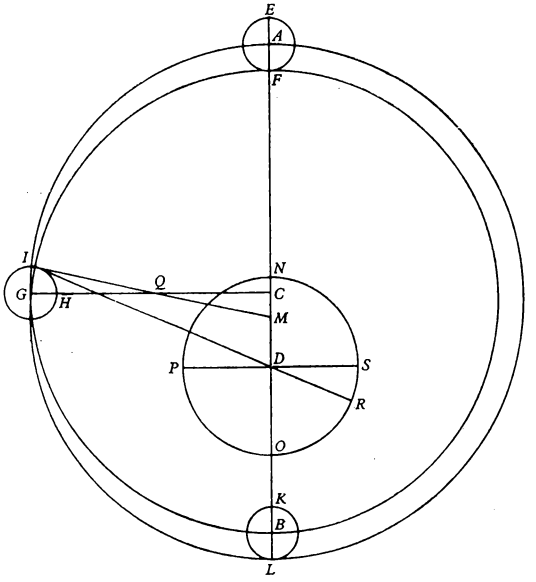
A partir de aquí también se demuestra que, a causa de este movimiento compuesto, el astro no describe un círculo perfecto según la opinión de los matemáticos antiguos, sin embargo, la diferencia es insensible. Vuélvase a trazar el mismo epiciclo KL con centro en B, y tomando AG como cuadrante del círculo, HI un epiciclo en el mismo punto G y cortada CD en tres partes, sea CM una tercera parte igual a GI, y únanse GC, IM que se cortan en Q. Así pues, el arco AG es igual según lo prescrito al arco HI y el ángulo ACG es recto, resto es, pues, también el ángulo HGI y los que tienen como vértice a Q también son iguales: luego los triángulos GIQ y QCM son equiángulos, y también de iguales lados uno y otro, porque la base GI se ha establecido igual a la base CM; y la subtensa QI es mayor que GQ, y también QM mayor que QC. Luego la recta total IQM es mayor que la total GQC. Pero FM, ML, AC, CG son iguales entre sí. Por lo tanto, un círculo descrito con centro en M por los puntos F, L, y en consecuencia igual al círculo AB, cortará a la línea IM. Del mismo modo se demostrará en el cuadrante opuesto, u otro. Consiguientemente el planeta, a causa de los movimiento regulares del epiciclo en el excéntrico y de él mismo en el epiciclo, no describe un círculo perfecto, sino casi perfecto: que era lo que se trataba de demostrar.[3]

Descríbase ahora, con centro en D, la órbita anual de la Tierra, que sea NO, y prolónguese IDR, y además PDS paralelo [diámetro] a CG: por lo tanto, IDR será la línea recta del movimiento real del planeta, GC la de los movimientos medio y regular, y en R estará el verdadero apogeo de la Tierra con respecto al planeta, en S el [apogeo] medio. Por tanto, el ángulo RDS o el IDP es la diferencia de uno y otro movimiento, o sea, la diferencia entre el movimiento regular y el aparente, es decir, entre el ángulo ACG y

1. Es decir, durante el hemiciclo del movimiento donde el epiciclo pasa del ápside inferior al superior del círculo excéntrico y el planeta pasa del apogeo al perigeo del epiciclo, el movimiento sobre el epiciclo se suma al movimiento sobre el círculo excéntrico; pero durante el hemiciclo en que el epiciclo pasa del ápside superior al inferior, el movimiento sobre el epiciclo se resta del movimiento sobre el círculo excéntrico.

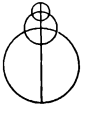
2. En este pasaje, Copérnico habla como si el planeta fuera arrastrado alrededor del epiciclo por el diámetro que gira, aunque habitualmente habla como si el diámetro del epiciclo apuntara siempre al centro del círculo concéntrico.

3. Tal como hemos hecho notar, si en el diagrama adjunto consideramos un punto X situado en un semidiámetro CA de tal manera que CX sea igual a GI (y, por consiguiente, DM igual a MX), entonces, como el planeta para llegar al punto I ha pasado la cuarta parte de su período y ha recorrido un cuarto de una revolución completa alrededor del punto X, evidentemente dicho punto X es análogo al centro de un ecuante ptolemaico, el punto M (el centro del cuasicírculo) es análogo al centro del deferente ptolemaico, y el punto D (el centro del Sol para Copérnico) es análogo al centro de la Tierra.



el CDI. Como si en lugar del excéntrico AB tomáramos un homocéntrico igual al mismo [AB] alrededor del punto D, como deferente de un epiciclo, cuyo radio [el de este epiciclo] fuera igual a CD, y sobre éste, también otro epiciclo, cuyo diámetro sea la mitad de CD.[1] Y muévase el primer epiciclo hacia el este, en cambio el segundo al contrario, en éste además el planeta retrocede a causa del doble movimiento: sucede lo mismo, como ya se ha dicho, y no de otra manera muy distinta a como con la Luna o cualquiera de los modos anteriormente dichos. Pero elegimos este excéntrico-epiciclo, porque permaneciendo siempre entre el Sol y el centro C, parece entretanto D haber cambiado, como se ha mostrado en las apariencias solares. Para los que no se pliegan igualmente a esta mutación, es necesario que haya en ellos alguna diferencia, que aunque sea muy pequeña, se advierte, sin embargo, en Venus y Marte, según se verá en su lugar.

1. Tal como se muestra en el diagrama adjunto.

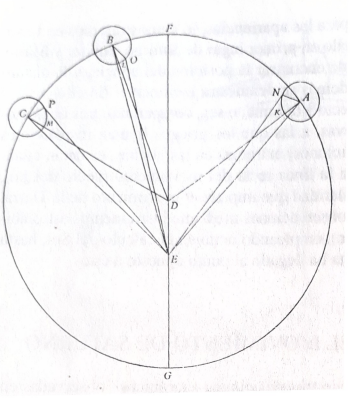


Que estas hipótesis son suficientes para las apariencias, lo demostraremos en lo sucesivo a partir de las observaciones. Y ello en primer lugar de Saturno, Júpiter y Marte, en los que es muy importante y difícil de encontrar la posición del apogeo y la distancia CD, puesto que a partir de aquí lo demás se demuestra fácilmente. En ellos usaremos el método que utilizamos con respecto a la Luna, o sea, comparando tres oposiciones solares antiguas a otras tantas nuevas, a las que los griegos llaman resplandores acrónicos de las mismas, nosotros [posiciones] extremas en las noches, es decir, cuando el planeta, opuesto al Sol, incide en la línea recta del movimiento medio del Sol, donde se despoja de toda aquella irregularidad que impone el movimiento de la Tierra. Tales posiciones son determinadas por observaciones mediante instrumentos astrolábicos (como se ha expuesto anteriormente), empleando también el cálculo del Sol, hasta que se tenga constancia de que el planeta ha llegado al punto opuesto a éste.

5. DEMOSTRACIONES DEL MOVIMIENTO DE SATURNO

Empecemos, pues, por Saturno, tomando tres posiciones «acrónicas» observadas en otro tiempo por Ptolomeo. La primera de éstas fue en el año undécimo de Adriano, en el día séptimo del mes Mechyr, en la primera hora de la noche, en el año CXXVII de Cristo, el día séptimo antes de las calendas de abril, transcurridas XVII horas iguales desde la medianoche en relación con el meridiano de Cracovia, que encontramos dista una hora de Alejandría. Se halló la posición de la estrella a CLXXIII grados, y casi XL minutos con respecto a la esfera de las estrellas fijas, a la que referimos todas estas cosas como punto de partida de los movimientos regulares, mientras tanto el Sol, en su movimiento simple, estaba entonces en la posición opuesta, a CCCLIIII grados, XL minutos, tomado el origen a partir del cuerpo de Aries. La segunda se realizó en el año XVII de Adriano en el día XVIII del mes Epiphi, según los egipcios, pero según los romanos en el año CXXXIII de Cristo, en el día tercero antes de las nonas de junio, once horas equinocciales a partir de medianoche y encuentra la estrella a CCXLIII grados, III minutos, estando el Sol, en su movimiento medio, a LXIII grados, III minutos, a las XV horas a partir de la medianoche. Después refiere la tercera en el año vigésimo de Adriano, en el mes Mezori según los egipcios, en el día XXIIII del mes, que era el año CXXXVI de Cristo, en el día octavo antes de los idus de julio, a las XI horas desde la medianoche, e igualmente según el meridiano de Cracovia a CCLXXVII grados, XXXVII minutos, mientras el Sol estaba en su movimiento medio IIIC grados, XXXVII minutos.

Por lo tanto, en el primer intervalo hay VI años, LXX días, LV minutos, durante los cuales la estrella se movió según percibió la vista LVIII grados, XXIII minutos, el movimiento medio de la Tierra con referencia a la estrella, esto es, el de conmutación, de CCCLII grados, XLIIII minutos. En consecuencia, los VII grados, XVI minutos que faltan para un círculo, se añaden al movimiento medio de la estrella, de modo que será de LXXV grados, XXXIX minutos. En el segundo intervalo hay tres años egipcios, XXXV días, L minutos; el movimiento aparente del planeta es de XXXIIII grados, XXXIIII minutos, el de conmutación de CCCLVI grados, XLIII minutos, y los III grados, XVII minutos que faltan para el círculo se añaden al movimiento aparente de la estrella, para que su movimiento medio sea de XXXVII grados, LI minutos.



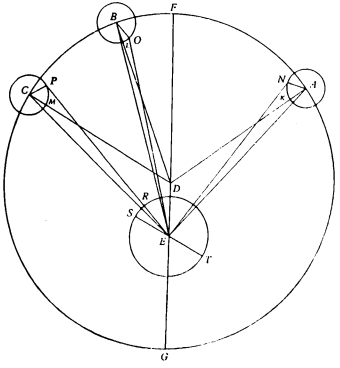
Examinados así estos datos, descríbase el círculo excéntrico del planeta ABC, cuyo centro sea D, un diámetro FDG, en el que esté E centro de la gran órbita de la Tierra, Y sea A el centro del epiciclo en la primera posición de la noche, B en la segunda, C en la tercera. Alrededor de los cuales se describirá el epiciclo a tenor de la tercera parte de la distancia de DE; únanse los centros A, B, C, con D, E, mediante líneas rectas, que cortarán la circunferencia del epiciclo en los puntos K, L, M, y tómense los arcos KN igual a AF, LO a BF y MP a FBC, y conéctese EN, EO, EP. Según el cálculo, el arco AB es de LXXV grados, XXXIX minutos, BC de XXXVII grados, LI minutos. El ángulo del movimiento aparente NEO de LXVIII grados, XXIII minutos y el OEP de XXXIIII grados, XXXIIII minutos. Primeramente se propone el examinar la posición del ápside superior e inferior, esto es, de F, G, junto con la distancia entre los centros D, E, sin los cuales no hay modo de discernir el movimiento regular y el aparente.

Pero se presenta aquí una dificultad no menor a la que se le presentó a Ptolomeo en este mismo lugar. Porque si el ángulo dado NEO comprendiera al arco dado AB, y el OEP al BC, quedaría claro el camino para demostrar lo que buscamos. Pero el arco conocido AB subtiende al ángulo desconocido AEB, y de igual modo, bajo el arco conocido BC está el ángulo desconocido BEC: convenía conocer ambos. Pero no pueden percibirse las diferencias entre los ángulos AEN, BEO y CEP, si antes no se han fijado los arcos AF, FB y FBC semejantes a los del epiciclo y por tanto dependientes entre sí, de manera que se conocen o se desconocen a la vez. Por eso quienes estaban apartados de los medios de demostración se apoyaron en [métodos] *a posteriori* y en rodeos, donde no se les mostró un acceso directo y *a priori*. Así Ptolomeo, en estas investigaciones, se extendió en una ingente multitud de números con un razonamiento prolijo, que considero molesto y superfluo detallar, sobre todo porque en nuestros cálculos que siguen a continuación tendremos que imitar casi el mismo método. Finalmente en la revisión de sus cálculos encuentra que el arco AF tiene LVII grados, I minuto, FB XVIII grados, XXXVII minutos, FBC de LVI grados y medio, la distancia DE entre los centros tiene 6 unidades, 50 minutos, teniendo DF LX; pero son 1.016, siendo en nuestros cálculos DF de 10.000. De aquéllas [1.016] tomamos las tres cuartas partes, o sea, DE de 854, y la cuarta parte restante, 285, se las damos al epiciclo, tomando éstos [cálculos] y prestándoselos a nuestra hipótesis demostraremos que son congruentes con las apariencias observadas. Porque en la primera posición acrónica el lado AD del triángulo ADE vale 10.000 y DE vale 854 de las mismas unidades, siendo el ángulo ADE suplementario del ADF [ADE + ADF = 180°], de donde según lo demostrado en los triángulos planos AE consta de 10.489 partes semejantes, y los res-

tantes ángulos DEA de LIII grados, VI minutos, DAE de III grados, LV minutos, de los que cuatro rectos son CCCLX grados; pero el ángulo KAM es igual al ADF de LVII grados, I minuto: luego todo el NAE será de LX grados, LVI minutos. Así pues, en el triángulo NAE se dan dos lados, el AE de 10.489 unidades y el NA de 285 unidades, de las que AD valía 10.000, con el ángulo NAE: se dará también el AEN que es de I grado, XXII minutos; y restando, el NED de LI grados, XLIIII minutos, de los que cuatro rectos son CCCLX grados.

De modo semejante en la segunda posición acrónica. Pues en el triángulo BDE se da el lado DE de 854 unidades, siendo BD de 10.000, con el ángulo BDE suplementario del BDF, resultará de CLXI grados, XXII minutos, y dados los lados y los ángulos, el lado BE de 10.812 unidades, siendo BD de 10.000, y el ángulo DBE de I grado XXVII minutos, y el restante BED de XVII grados, XI minutos. Pero también el ángulo OBL, igual al BDF que tenía XVIII grados, XXXVI minutos; luego todo el EBO es de los mismos XX grados, V minutos. Así pues, en el triángulo EBO se dan dos lados, el BE de 10.812 unidades y el BO de 285 unidades, junto con el ángulo EBO: se da por la demostración de los triángulos planos el restante, el BEO de XXXII minutos. En consecuencia, queda BED de XVI grados, XXXIX minutos.

También en la tercera posición acrónica se conocen dos lados, el CD y el DE, del triángulo CDE, como antes, y el ángulo CDE de LVI grados, XXIX minutos; por el cuarto precepto de los triángulos planos, se conoce la base CE de 10.512 unidades, siendo CD de 10.000 y el ángulo DCE de III grados, LIII minutos, con el restante ángulo CED de LII grados, XXXVI minutos. Luego todo el EPC de LX grados, XXII minutos, siendo IIII rectos de CCCLX. Así también se conocen del triángulo ECP dos lados con el ángulo ECP: luego también se da el ángulo CEP que es de I grado XXII minutos, de donde también el restante PED de LI grados, XVII minutos. De ahí se calcula todo el ángulo de apariencia OEN de LXVIII grados, XXIII minutos y el OEP de XXXVII grados, XXXV minutos, que coinciden con lo observado. Y F, posición del ápside superior del excéntrico, alcanza los CCXXVI grados, XX minutos, desde la cabeza de Aries; a los que si se suman los VI grados, XL minutos, de la precesión del equinoccio de primavera entonces existente, se llegará al grado XXIII de Scorpio según la opinión de Ptolomeo. Pues la posición aparente de la estrella en este tercer acronicio [oposición solar] (según se ha dicho) era de CCLXXVII grados, XVII minutos, si a éstos se les resta los LI grados, XIIII minutos, según el ángulo de apariencia, como se ha demostrado, quedará la posición del ápside superior del excéntrico en CCXXVI grados, XXIII minutos.



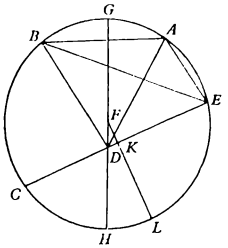
Se traza ahora también la órbita anual de la Tierra RST, que cortará la línea PE en el punto R, y se dibuja el diámetro SET, según [paralelo a] CD

línea del movimiento medio del planeta. En consecuencia, siendo iguales los ángulos SED y CDF, el ángulo SER será la diferencia y prostaféresis entre el movimiento aparente y el medio, esto es, entre los ángulos CDF y PED, y valdrá V grados, XVI minutos, y la misma [diferencia] hay entre el movimiento de conmutación medio y el verdadero, que restada del semicírculo, queda el arco RT de CLXXIIII grados, XLIIII minutos, que es el movimiento regular de conmutación, tomando T como punto de partida, esto es, desde la conjunción media del Sol y la estrella hasta la última oposición de la noche, o sea, la oposición verdadera de la Tierra y la estrella. Tenemos, pues, que en el momento de esta observación, es decir, en el año veinteavo del mandato de Adriano, en el CXXXVI de Cristo, el día octavo antes de los idus de julio, XI horas después de la medianoche, la anomalía de Saturno desde el ápside superior de su excéntrico es de LVI grados y medio, y el movimiento medio de conmutación de CLXXIIII grados, XLIIII, minutos: ha sido oportuno que se demostrase esto por lo que sigue.

6. ACERCA DE OTRAS TRES POSICIONES ACRÓNICAS MÁS RECIENTES CON RESPECTO A SATURNO

Al discrepar no poco el cálculo del movimiento de Saturno legado por Ptolomeo del de nuestro tiempo, y no poder entenderse de inmediato en qué parte se oculta el error, nos hemos visto obligados a presentar nuevas observaciones, de las que tomamos otra vez tres oposiciones nocturnas de él [Saturno]. La primera en el año de Cristo MDXIIII, el día tercero antes de las nonas de mayo, una hora y un quinto antes de medianoche, momento en el que Saturno se hallaba a CCV grados, XXIIII minutos. La otra en el año MDXX de Cristo, en el tercer día antes de los idus de julio, al mediodía, encontrándose a CCLXXIII grados, XXV minutos. La tercera en el año MDXXVII también de Cristo, el día VI antes de los idus de octubre, VI horas y dos quintos después de medianoche y Saturno apareció en el séptimo minuto del grado primero después del cuerno de Aries. Hay, pues, entre la primera y la segunda [oposición] VI años egipcios, LXX días, XXXIII minutos, en los cuales el movimiento aparente de Saturno fue de LXVIII grados, I minuto. De la segunda a la tercera hay VII años egipcios, LXXXIX días, XLVI minutos, y el movimiento aparente de la estrella de LXXXVI, XLII minutos, y el movimiento medio durante el primer intervalo fue de LXXV grados, XXXIX minutos, en el segundo de LXXXVIII grados, XXIX minutos. Por lo tanto, en la búsqueda del ápside superior y de la excentricidad hay que proceder según la primera regla de Ptolomeo, como si la estrella se moviera en un excéntrico simple. Y aunque no sea suficiente, sin embargo, conducidos con rectitud llegaremos más fácilmente a la verdad.

Sea, pues, ABC el círculo en el que se mueve el planeta con regularidad. Y esté en el punto A el primer acronicio, en B el segundo, en C el tercero, y en el mismo tómese a D como centro de la órbita de la Tierra, al cual se unen AD, BD, CD, y uno cualquiera de éstos [acronicios] extiéndase en línea recta hasta la parte opuesta de la circunferencia, por ejemplo CDE, y únanse AE, BE. Puesto que es dado el ángulo BDC de LXXXVI grados, XLII minutos, siendo dos rectos de CLXXX, el ángulo restante [suplementario] BDE será de XCIII grados, XVIII minutos; pero siendo dos rectos igual a CCCLX, valdrá CLXXXVI grados, XXXVI minutos y el BED, correspondiente al arco BC, de



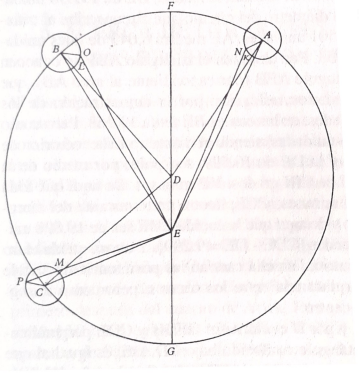
LXXXVIII grados, XXIX minutos, y, por tanto, el ángulo restante DBE de LXXXIIII grados, LV minutos. Así pues, conocidos los ángulos del triángulo BDE se dan los lados por la tabla, BE de 19.953 unidades y DE de 13.501 unidades, siendo el diámetro [de la circunferencia] que circunscribe al triángulo de 20.000.

De igual modo en el triángulo ADE, ya que se conoce el ángulo ADC de CLIIII grados, XLIII minutos, siendo dos rectos CLXXX, y el restante [suplementario] ADE de XXV grados, XVII minutos, pero valiendo dos rectos CCCLX, será de L grados, XXXIIII minutos, de los cuales también el AED, correspondiente al arco ABC, es de CLXIIII grados, VIII minutos, y el restante DAE de CXLV grados, XVIII minutos: además también constan los lados, DE de 19.090 unidades y AE de 8.542 unidades, midiendo el diámetro del círculo que circunscribe al triángulo ADE 20.000. Pero si DE medía 13.501 unidades, AE medirá 6.043 de tales unidades, puesto que también BE medía 19.953. Por tanto, en el triángulo ABF se conocen estos dos lados, el BE y el EA, con el ángulo AEB (correspondiente al arco AB), que consta de LXXV grados, XXXVIIII minutos; así, pues, por la demostración de los triángulos planos, AB mide 15.647 unidades, de las cuales BE tenía 19.968. Pero como es dada la cuerda del arco AB de 12.266 unidades, siendo el diámetro del excéntrico de 20.000, la EB será de 15.664 unidades y la DE de 10.599. Así pues, por medio de la cuerda BE se conoce ahora el arco BAE de CIII grados, VII minutos. De aquí que toda la EABC sea de CXCI grados, XXXVI minutos, y CE, la otra parte restante del círculo, de CLXVIII grados, XXIIII minutos, y de aquí que la cuerda CDE sea de 19.898 unidades: y la diferencia CD de 9.299 unidades [CDE - DE = 9.299]. Y ahora queda claro que si CDE fuera el diámetro del excéntrico, en ella caerían las posiciones del ápside superior e inferior y se manifestaría la distancia entre los centros, pero como el segmento EABC es mayor, en él estará el centro.

Sea [el centro] F y trácese por éste y por D el diámetro GFDH y CDE perpendicular a FKL. Pero es evidente que el rectángulo contenido bajo CD, DE, es igual al que está bajo GD, DH. Pero el GD, DH con el cuadrado de FD es igual al [cuadrado] de la mitad del GDH, que es FDH. En consecuencia, restando del cuadrado de la mitad del diámetro, el rectángulo GD, DH, o su igual CD, DE, quedará el cuadrado de FD. Luego, en longitud, tendremos FD de 1.200 unidades, siendo la distancia desde el centro GF de 10.000; en cambio, midiendo FG 60 unidades, FD mediría 7 unidades, 12 minutos, que difieren poco de Ptolomeo. Pero, puesto que CDK es la mitad de todo CDE, medirá 9.949 unidades y ha quedado demostrado que CD medía 9.299 unidades, por lo tanto la diferencia DK vale 650 unidades, suponiendo a GF de 10.000 y a FD de 1.200; pero midiendo FD 10.000 DK medirá 5.411, que es la mitad de la cuerda del doble del ángulo DFK: y este mismo ángulo vale XXXII grados, XLV minutos, valiendo cuatro rectos CCCLX, y por estar en el centro del círculo subtiende [cantidades] semejantes en el arco HL. Pero todo el CHL, mitad del CLE, vale LXXXIIII grados, XIII minutos; luego la diferencia CH [CHL- HL], desde la tercera posición acrónica al perigeo, vale LI grados, XXVIII minutos, que restados del semicírculo queda el arco CBG de CXXVIII grados, XXXII minutos, desde el ápside superior hasta la tercera posición acrónica.

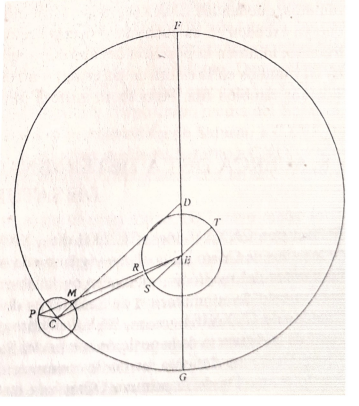
Y el arco CB midiendo LXXXVIII grados, XXIX minutos, el resto BF será de XL grados, III minutos, desde el ápside superior a la posición acrónica segunda. Después, el arco que sigue, BFA, mide LXXV grados, XXXIX minutos, y completa al AF, que desde la primera posición acrónica hasta el apogeo F mide XXXV grados, XXXVI minutos.

Sea ahora el círculo ABC, su diámetro FDEG, su centro D, su apogeo F, perigeo G, el arco AF de XXXV grados, XXXVI minutos, el FB de XL grados, III minutos, el FBC de CXXVIII grados, XXXII minutos. Y se toma la distancia DE, las tres cuartas partes, o sea, 900 unidades de la ya demostrada entre los centros, y la cuarta parte que queda es de 300 unidades: siendo el radio FD de 10.000, y con tal cuarta parte descríbase el epiciclo en los centros A, B, C, y se completa la figura según la hipótesis ya propuesta. Dispuesto esto así, si quisiéramos hallar las posiciones de Saturno observadas por el método antes expuesto, y que después habrá que repetir, encontramos alguna discrepancia. Y para resumir, y no cargar al lector con muchos datos y no dar la sensación de que se trabaja más en indicar errores que en mostrar inmediatamente el camino recto, todo esto conduce necesariamente, según las demostraciones de los triángulos planos, al ángulo NEO de LXVIII grados, XXXV minutos, y al otro, OEM, de LXXXVII grados, XII minutos, aunque éste es mayor que el ángulo aparente en medio grado y aquél menor en XXVI minutos. Y entonces podremos cuadrar unos y otros sólo si, movido un poco el apogeo, consideramos AF igual a XXXVIII grados, L minutos, y en consecuencia el arco FB de XXXVI grados, IL minutos, y el FBC de CXXV grados, XVIII minutos. Y también la distancia DE entre los centros medirá 854, y el radio del epiciclo 285 unidades, midiendo FD 10.000, todo lo cual aproximadamente coincide con Ptolomeo, como se ha expuesto más arriba. A partir de aquí quedará claro que estas cantidades coinciden con las apariencias, manifestaciones [oposiciones solares] nocturnas observadas, puesto que bajo la primera posición acrónica en el triángulo ADE se conoce el lado DE que mide 854 unidades, siendo AD de 10.000, y el ángulo ADE de CXLI grados, X minutos, sumando con el ADF dos rectos alrededor del centro. Partiendo de ello se demuestra: el otro lado AE mide 10.679 unidades, siendo el radio FD de 10.000 y los otros ángulos el DAE de II grados, LII minutos y el DEA de XXXV grados, LVIII minutos. De modo semejante en el triángulo AEN, puesto que el KAN es igual al ADF todo el EAN medirá XLI grados, XLII minutos, y el lado AN 285 unidades, de las que AE tenía 10.679; de ahí se demuestra el ángulo AEN como de I grado, III minutos; pero todo el DEA consta de XXXV grados, LVIII minutos: luego, el resto, DEN, será de XXXVII grados, LV minutos.



También en la otra manifestación [oposición solar] en el punto culminante de la noche, tenemos el triángulo BED de dos lados conocidos (pues DE mide 854 unidades, teniendo BD, 10.000) con el ángulo BDE: por tanto, tendrá BE 10.697 de aquellas unidades, el ángulo DBE de II grados, XLV minutos, y el otro BED de XXXIV grados, IIII minutos. Pero el LBO es igual al BDF: luego todo el EBO desde el centro medirá XXXIX grados, XXXIV minutos. Pero éste es comprendido por los lados conocidos BO de 285 unidades y el BE de 10.697 unidades, con lo que se demuestra que el BEO mide LIX minutos: restado éste del ángulo BED, resulta el OED de XXXIII grados, V minutos. Pero ya se ha demostrado en la primera manifestación [oposición solar] que el ángulo DEN medía XXXIIII grados, LV minutos: luego todo el ángulo OEN medirá LXVIII grados, por medio del cual se muestra la distancia de la primera manifestación [oposición solar] a la segunda, y que coincide con las observaciones.

De igual modo se hará patente con respecto a la tercera posición acrónica. Puesto que en el triángulo CDE se conoce el ángulo CDE de LIIII grados, XLII minutos, y los lados CD, DE (según lo anterior), con lo que se demuestra que el tercer lado EC tiene 9.532 de las mismas unidades, y los ángulos restantes el CED de CXXI grados, V minutos, el DCE de IIII grados, XIII minutos: luego todo el PCE mide CXXIX grados, XXXI minutos. Así, de nuevo, se conocen del triángulo EPC dos lados PC, CE, con el ángulo PCE, con los que se hace patente el ángulo PEC de I grado XVIII minutos, que restado del CED dará el ángulo PED de CXIX grados, XLVII minutos, desde el ápside superior del excéntrico a la posición del planeta en el tercer acronicio. Pero quedó claro que en el segundo eran XXXIII grados, V minutos: luego entre el segundo y tercer acronicio del punto culminante de la noche de Saturno quedan LXXXVI grados, XLII minutos, congruentes con los que se estipulan según las observaciones. La posición, por tanto, de Saturno se había hallado en aquel tiempo por medio de esa consideración a ocho minutos de un solo grado a partir de la primera estrella de Aries, tomada como punto de partida, y desde el mismo hasta el ápside inferior del excéntrico se puso de manifiesto que había LX grados, XIII minutos: por tanto, el ápside inferior alcanza hasta el grado LX y casi un tercio, y la posición del ápside superior, diametralmente opuesta, llega hasta el grado CCXL y un tercio.



Trácese ahora la gran órbita de la Tierra RST con su centro en E, el diámetro SET es paralelo a la línea del movimiento medio CD (haciendo los ángulos FDC y DES iguales entre sí). Luego la Tierra y nuestro punto de mira estará en la línea PE, exactamente en el punto R, pero el ángulo PES, o sea, el arco RS, en lo que difiere el ángulo FDC (movimiento regular) del DEP (movimiento aparente), se demostró que mide V grados, XXXI minutos, los cuales restándolos del semicírculo proporcionan el arco RT de CLXXIIII grados, XXIX

minutos, distancia de la estrella desde el apogeo de la órbita que está en T, igual que desde la posición media del Sol. Y así tenemos demostrado que en el año MDXXVII de Cristo, en el día sexto antes de los idus de octubre, en la hora sexta y dos quintos después de medianoche, el movimiento de anomalía de Saturno desde el ápside superior del excéntrico era de CXXV grados, XVIII minutos, el movimiento de conmutación [paralaje] de CLXXIIII grados, XXIX minutos, y la posición del ápside superior en los CCXL grados, XXI minutos a partir de la primera estrella de Aries en la esfera de las estrellas fijas.

7. SOBRE EL EXAMEN DEL MOVIMIENTO DE SATURNO

Se ha demostrado, pues, que Saturno, en el tiempo de la última de las tres observaciones de Ptolomeo, estaba con respecto al movimiento de su conmutación en los CLXXIIII grados, XLVII minutos, y la posición del ápside superior de su excéntrico estaba en los CCXXVI grados, XXIII minutos, desde la cabeza de la constelación de Aries. Por lo tanto, es patente que en el tiempo entre una y otra observación, Saturno ha completado MCCCXLIIII revoluciones, menos un cuarto de grado, de sus conmutaciones regulares. Así pues, hay MCCCXCII años egipcios, LXXV días, XLVIII minutos [de día], desde el vigésimo año de Adriano, desde el veinticuatroavo día del mes Mesori de los egipcios, una hora antes del mediodía, hasta el año MDXXVII de Cristo, el día sexto antes de los idus de octubre, a las VI horas, momento de esta observación. Si quisiéramos calcular por medio de estos datos, según la tabla, el movimiento mismo, encontraríamos igualmente cinco veces sesenta grados, LIX grados [359°], XLVIII minutos, que sobrepasan a las mil trescientas cuarenta y tres revoluciones de conmutación. Por lo tanto, se tiene correctamente calculado lo que se ha expuesto acerca de los movimientos medios de Saturno. También en este tiempo el movimiento medio del Sol es de LXXXII grados, XXX minutos, de los cuales restados los CCCLIX grados, XLV minutos, quedan los LXXXII grados, XLV minutos del movimiento medio de Saturno, que ya exceden en su cuarenta y sieteava revolución, que coincide con el cálculo: entretanto, también la posición del ápside superior del excéntrico avanzó XIII grados y LVIII minutos en la esfera de las estrellas no errantes, posición a la que Ptolomeo consideraba también fija. Pero ahora aparece moviéndose casi un grado cada cien años.

8. ACERCA DE LA DETERMINACIÓN DE LAS POSICIONES DE SATURNO

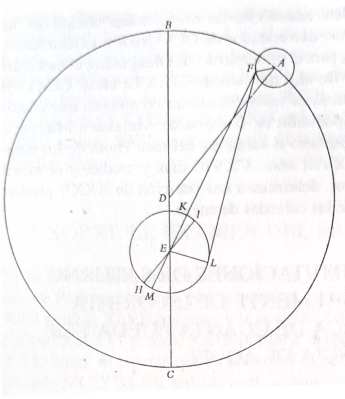
Transcurren CXXXV años, CCXXII días, XXVII minutos [de día], desde el principio de los años de Cristo hasta el año vigésimo de Adriano, día XXIIII del mes Mesori, una hora antes del mediodía, momento de la observación de Ptolomeo, en ese tiempo el movimiento de conmutación de Saturno es de CCCXXVIII grados, LV minutos, que restados de CLXXIIII grados, XLVII minutos, resultan CCV grados, XLIX minutos, lugar de la distancia de la posición media del Sol desde la [posición] media de Saturno, y también su movimiento medio de conmutación en la medianoche antes de las calendas de enero. Desde la primera Olimpíada hasta esta posición hay DCCLXXV años

egipcios, XII días y medio. Comprenden, además de las revoluciones completas, un movimiento de LXX grados, LV minutos, que restados de CCV grados, LIX minutos, quedan CXXXIIII grados, LIIII minutos, para el principio de las Olimpíadas, el mediodía del primer día del mes Hecatombeón. De ahí, después de CCCCLI años, CCXLVII días, hay XIII grados, VII minutos, además de las revoluciones completas, que añadidos a los anteriores proporcionan la posición en tiempos de Alejandro Magno, a CXLVIII grados, I minuto, para el día primero al mediodía del mes Thoth de los egipcios; y hasta César transcurren CCLXXVIII años, CXVIII días y medio, y el movimiento de CCXLVII grados, XX minutos, determinan una posición de XXXV grados, XXI minutos, en la medianoche antes de las calendas de enero.

9. ACERCA DE LAS CONMUTACIONES DE SATURNO, QUE PROCEDEN ANUALMENTE DE LA ÓRBITA DE LA TIERRA, Y ACERCA DE CUÁNTA PUEDA SER LA DISTANCIA DE AQUÉL

Los movimientos regulares en longitud de Saturno se han demostrado de este modo a la vez que los aparentes. Pues los demás movimientos aparentes que le acaecen son, según hemos dicho, conmutaciones que proceden anualmente de la órbita de la Tierra, puesto que igual que la magnitud de la Tierra con respecto a la distancia de la Luna produce paralajes, así también su órbita, a través de la que realiza la revolución anual, tiene que producirlas en relación a las cinco estrellas errantes, pero mucho más evidentes por su magnitud. Pero tales conmutaciones no pueden determinarse si antes no se conoce la altura de la estrella. Sin embargo, ésta es posible deducirla por una observación cualquiera de una conmutación. Por ejemplo, la que hicimos con respecto a Saturno en el año MDXIIII de Cristo, el día sexto antes de las calendas de marzo, a las V horas equinocciales después de la medianoche precedente. Saturno fue visto en línea recta con las estrellas que están en la frente de Scorpio, o sea, la segunda y la tercera, las cuales, teniendo la misma longitud, están a CCIX grados en la esfera de las estrellas fijas. Así pues, por medio de éstas se pudo localizar la posición de Saturno. Desde el principio de los años de Cristo hasta este momento hay MDXIIII años egipcios LXXVII días, XIII minutos [de día]: y, por tanto, según el cálculo, la posición media del Sol está a CCCXV grados, XLI minutos, la anomalía de conmutación de Saturno a CXVI grados, XXXI minutos, y en consecuencia la posición media de Saturno a CXIX grados, X minutos y el ápside superior del excéntrico a CCXL grados con un tercio aproximadamente.

Sea ahora, según el método expuesto, el círculo excéntrico ABC, cuyo centro sea D, y en el diámetro BDC está el apogeo B, el perigeo C, el centro de la órbita de la Tierra E; únanse AD, AE y haciendo centro en A, y con una distancia de la tercera parte de DE, trácese el epiciclo, en el cual F señala la posición de la estrella, trazando el ángulo DAF igual al ADB, y desde el centro E de la órbita de la Tierra dibújese HI, como si estuviera en el mismo plano que el círculo ABC: y se presenta como un diámetro paralelo a AD, de modo que se entiende con respecto al planeta el apogeo de su órbita en H y el perigeo en L Determínese también en la misma órbita, el arco HL de CXVI grados, XXXI minutos, según el cálculo de la anomalía de la conmutación y únase FL, EL, y



FKEM corte a ambos arcos de la órbita. Así pues, ya que el ángulo ADB mide XL grados, X minutos, como el DAF por hipótesis, y el restante [suplementario] ADE tiene CXXXVIII grados, L minutos, y DE mide 854 unidades, siendo AD de 10.000, con lo que se demuestra que en el triángulo ADE el tercer lado AE mide 10.667 unidades, el ángulo DEA XXXVIII grados, IX minutos y el restante EAD III grados, I minuto. Luego, la suma EAF tiene XLIII grados, XI minutos. A su vez, en el triángulo FAE se conoce el lado FA, de 285 unidades, por lo cual también el AE [10.067]: quedará demostrado que el otro lado FKE mide 10.465 de las mismas unidades y el ángulo AEF I grado, V minutos.

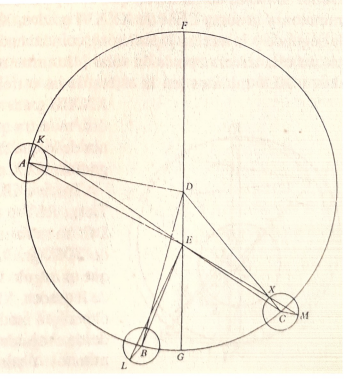
En consecuencia, resulta evidente que toda la diferencia o prostaféresis entre la posición media y la real de la estrella es de IIII grados, VI minutos, que es la suma de los ángulos DAE y AEF. Por lo que si la posición de la Tierra hubiera estado en K o en M, Saturno habría aparecido a los CCIII grados, XVI minutos de la constelación de Aries, como si [hubiera sido visto] a partir del centro E. Pero estando ahora la Tierra en L es visto a CCIX grados. Los V grados, XLIIII minutos corresponden a la diferencia de conmutación según el ángulo KFL. Pero como el arco HL, según el movimiento regular, se calculó de CXVI grados, XXIII minutos, restándole la prostaféresis HM resulta ML de CXII grados, XXV minutos: y el que queda [hasta los 180°] LIK es de LXVII grados, XXXI minutos, la misma medida que tiene el ángulo KEL. Por lo tanto, el triángulo FEL de ángulos conocidos, tiene también dada la proporción de los lados, por la que en unidades EF tiene 10.465, EL de 1.090, y AD o BD de 10.000: pero midiendo BD, según el cálculo de los antiguos, 60 unidades, EL será de 6 unidades, 32 minutos, que en realidad difiere poco de la medida dada por Ptolomeo. En consecuencia, la suma [todo] BDE mide 10.854 unidades, y el resto del diámetro, CE, 9.146 unidades. Pero puesto que el epiciclo en B siempre le resta a la altura del planeta 285 unidades, y en cambio en C le aumenta otro tanto, esto es, la mitad de su diámetro, por tanto la distancia mayor de Saturno desde el centro E será de 10.569 unidades, la mínima de 9.431, midiendo BD 10.000 unidades. Según esta relación, Saturno tiene en el apogeo una altitud de 9 unidades, 42 minutos, teniendo una unidad el radio de la órbita terrestre, en el perigeo 8 unidades, 39 minutos, y ya puede quedar claro, por el modo aquí expuesto acerca de las más pequeñas de la Luna, que las conmutaciones [paralajes] de Saturno pueden ser mayores. Las máximas [conmutaciones] de Saturno cuando está en el apogeo son de 5 unidades, 55 minutos, y las mínimas cuando está en el perigeo de 6 unidades, 39 minutos; difieren entre sí en XLIIII minutos, que conciernen [al ángulo formado] por las líneas provenientes de la estrella en contacto [tangentes] con la órbita [de la Tierra]. Y con este ejemplo, cada una de las diferencias particulares del movimiento de Saturno se han

hallado, las cuales expondremos después al mismo tiempo y juntamente con las de estas cinco estrellas.

10. DEMOSTRACIONES DEL MOVIMIENTO DE JÚPITER

Concluido Saturno, utilizaremos también el mismo método y orden con respecto al movimiento de Júpiter, repitiendo en primer lugar las tres posiciones transmitidas y demostradas por Ptolomeo, las cuales, mediante la transformación de círculos anteriormente señalada, restableceremos idénticamente o con una diferencia no muy grande. La primera oposición solar [«in extremis noctis fulsionibus»] se dio en el año XVII de Adriano, en el mes Epiphi de los egipcios, el primer día de dicho mes, una hora antes de la mitad de la noche siguiente, como ya he dicho a XXIII grados, XI minutos, de Scorpio: pero una vez deducida la precesión de los equinoccios a CCXXVI grados, XXXIII minutos. Registró la segunda en el año XXI de Adriano, en el día XIII del mes Pheophi de los egipcios, dos horas antes de la mitad de la noche del día siguiente, a VI grados, LIIII minutos de Piscis; pero con respecto a las esferas fijas había CCCXXXI grados, XVI minutos. La tercera en el año primero de Antonino, en el mes Athyr, en la noche siguiente al día vigésimo del mes, cinco horas después de la medianoche, a VII grados, XLV minutos de la esfera de las no errantes.

Así pues, desde la primera a la segunda oposición hay III años egipcios, CVI días, XXIII horas y el movimiento aparente de la estrella fue de CIIII grados, XLIII minutos. De la segunda a la tercera, I año, XXXVII días, VII horas, y el movimiento aparente de la estrella de XXXVI grados, XXIX minutos. En el primer intervalo de tiempo el movimiento medio es de IC grados, LV minutos. En el segundo de XXXIII grados, XXVI minutos. Y también encontró que el arco del excéntrico desde el ápside superior al primer acronicio era de LXXVII grados, XV minutos, y los que después siguen de la segunda oposición hasta el ápside inferior II grados, L minutos y de aquí al tercer acronicio XXX grados, XXXVI minutos. Y la excentricidad total era de 5 unidades y media, siendo la línea desde el centro [el radio] de 60 unidades; pero si fueran 10.000, serían 917. Todo lo cual se corresponde aproximadamente con lo observado.

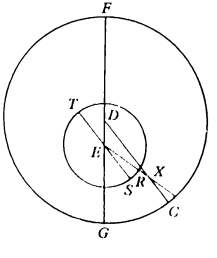


Sea ahora el círculo ABC, cuyo arco AB de la primera oposición a la segunda tenga los propuestos IC grados, LV minutos; BC los XXXIII grados, XXVI minutos, y por el centro D trácese el diámetro FDG, de manera que desde el ápside superior F, FA mida LXXVII grados, XV minutos, FAB CLXXVII grados, X minutos y GC XXX grados, XXXVI minutos. Tómese también E como centro

de la órbita de la Tierra y las tres cuartas partes de 917, o sea, la distancia DE, de 687 unidades, y según la cuarta parte, 229, trácese el epiciclo en los puntos A, B, C, y conéctense AD, BD, CD, AE, BE, CE, y en los epiciclos únanse AK, BL, CM, de tal manera que los ángulos DAK, DBL, y DCM sean iguales a ADF, FDB y FDC: finalmente únanse con líneas rectas K, L, M, con E. En consecuencia, puesto que del triángulo ADE se conoce el ángulo ADE de CII grados, XLV minutos, porque es conocido el ADF, y el lado DE de 687 unidades, midiendo AD 10.000, también se demostrará que el lado AE tiene 10.179 de las mismas unidades y el ángulo EAD de III grados, XLVIII minutos y el DEA, que falta, de LXXIII grados, XXVII minutos y la suma EAK de LXXXI grados, III minutos. También en consecuencia, en el triángulo AEK, con dos lados dados, el EA de 10.174 unidades, de las que el AK mide 229, y el ángulo EAK, se hace patente el ángulo AEK como de I grado, XVII minutos. Por lo tanto, también el KED que falta será de LXXII grados, X minutos.

Del mismo modo se mostrará en el triángulo BED. Pues siguen siendo iguales a los anteriores los lados BD, DE; pero se conoce el ángulo BDE que mide II grados, L minutos: resultará por tanto la base BE de 9.314 unidades, siendo DB de 10.000, y el ángulo DBE de I grado XII minutos. A la vez en el triángulo ELB se conocen dos lados y todo el ángulo EBL de CLXXVII grados, XXII; se conocerá también el ángulo LEB como de IIII minutos de un grado. Al mismo tiempo, restando los XVI minutos obtenidos del ángulo FDB, resultan CLXXVI grados, LIIII, que constituyen el ángulo FEL, restando del cual KED, de LXXII grados, X minutos, quedan CIIII grados, XLIIII minutos, de KEL que aproximadamente coinciden con los del ángulo de apariencia entre el primero y segundo de los términos observados.

También en la tercera posición, por medio del triángulo CDE de lados CD, DE conocidos, con el ángulo CDE que medía XXX grados, XXXVI minutos, se demostrará la base EC de 9.410 unidades y el ángulo DCE de II grados, VIII minutos. De donde la suma ECM medirá CXLVII grados, XLIIII minutos, en el triángulo ECM, por lo que el ángulo CEM se manifiesta como de XXXIX minutos, y el exterior DXE, igual a los dos interiores y opuestos ECX y CEX, de II grados, XLVII minutos, en los que DEM es menor al FDC, de tal modo que el suplementario GEM es de XXXIII grados, XXIII minutos, y la suma LEM de XXXVI grados, XXIX minutos, que es la diferencia entre la segunda y la tercera [oposición], coincidiendo también con lo observado. Pero puesto que esta tercera oposición solar [«summae noctis fulsio»] se encontró a los VII grados, y XLV minutos [en la esfera de las estrellas fijas], al este del ápside inferior en XXXIII grados, XXIII minutos (como se ha demostrado), muestra que la posición del ápside superior, a tenor de lo que falta del semicírculo, estaba en los CLIIII grados, XXX minutos de la esfera de las fijas.



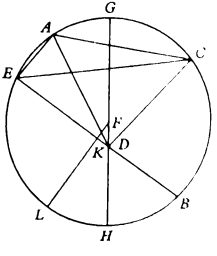
Trácese ahora, alrededor de E la órbita anual de la Tierra RST con su diámetro. SET, paralelo a la línea DC. Ya se ha manifestado que el ángulo GDC midiendo XXX grados, XXXVI minutos, es igual al GES, y que el ángulo DXE, o su igual el RES y el arco RS, es de II grados, XLVII minutos, distancia del planeta desde el perigeo medio de la órbita, por lo cual la suma TSR desde el ápside superior es de CLXXXII grados, XLVII minutos. Y por esto se confirma que en el tiempo de la

tercera posición acrónica de Júpiter, registrado en el primer año de Antonino, el día XX del mes Athyr de los egipcios, cinco horas después de la medianoche siguiente, la estrella de Júpiter estaba, según la anomalía de conmutación, a CLXXXII grados, XLVII minutos. Su posición regular según la longitud a IIII grados, LVIII minutos, y la posición del ápside superior del excéntrico a CLIIII grados, XXII minutos. Todo lo cual coincide con nuestra hipótesis de la movilidad de la Tierra y de su regularidad absoluta.

11. SOBRE OTRAS TRES POSICIONES ACRÓNICAS DE JÚPITER RECIENTEMENTE OBSERVADAS

Sustituiremos las tres posiciones de la estrella Júpiter, transmitidas de otro tiempo y calculadas de este modo, por otras tres de los acronicios de Júpiter y que hemos observado con el máximo cuidado. El primero en el año MDXX de Cristo, el día anterior a las calendas de mayo, en la hora XI después de la medianoche anterior, a los CC grados, XXVIII minutos de la esfera de las fijas. El segundo en el año MDXXVI de Cristo, el día cuarto antes de las calendas de diciembre, a las tres horas después de medianoche, a XLVIII grados, XXXIIII minutos. El tercero en el año MDXXIX también de Cristo, en las mismas calendas de febrero, pasadas XIX horas a partir de la medianoche. A CXIII grados, XLIIII minutos. Del primero al segundo hay VI años, CCXII días, minutos [de día] XL, en los que el movimiento aparente de Júpiter fue de CCVIII grados, VI minutos. Del segundo al tercero hay dos años egipcios, LXVI días, XXXIX minutos, y el movimiento aparente de la estrella fue de LXV grados, X minutos. Y el movimiento regular en el primer intervalo de tiempo es de CIC grados, XL minutos, en el segundo de LXVI grados, X minutos.

Para este modelo trácese el círculo excéntrico ABC, en el que consideramos que el planeta se mueve simple y regularmente, y señálense tres posiciones anotadas según el orden de las letras A, B, C, de tal modo que el arco AB tenga CIC grados, XL minutos, el BC XLVI grados, X minutos, y por tanto lo que queda del círculo, AC, XCIIII grados, X minutos. Tómese también D como centro de la órbita anual de la Tierra, al que se unen ABC, formando AD, BD, CD, una cualquiera de las cuales, por ejemplo DB, prolónguese en línea recta hasta cortar ambas partes del círculo, formando BDE, y únanse AC, AE, CE. En consecuencia, puesto que el ángulo BDC del movimiento aparente mide LXV grados, X minutos, siendo desde el centro cuatro rectos CCCLX, y el suplementario CDE tendrá CXIIII de los mismos grados, L minutos; pero siendo CCCLX dos rectos sobre la circunferencia, tendrá el mismo [el CDE] CCXXXVIIII grados, XL minutos, y el CED [medido] en el arco BC, de LXVI grados, X minutos, y en consecuencia el ángulo que falta [del triángulo] DCE de LXIIII grados, X minutos: por lo tanto, en el triángulo CDE de ángulos conocidos, se dan los lados CE de



18.150 unidades y ED de 10.918 unidades, midiendo el diámetro del círculo que circunscribe al triángulo 20.000 unidades.

Del mismo modo en el triángulo ADE, puesto que es conocido el ángulo ADB de CLI grados, LIIII minutos, resto del círculo después de sustraer la distancia dada del primer acronicio al segundo, y en consecuencia el restante [el suplementario] ADE será de XXVIII grados, VI minutos, [suponiéndolo medido] desde el centro, pero [suponiéndolo medido] desde la circunferencia, de LVI grados, XII minutos, y el AED [medido] en el arco BCA de CLX grados, XX minutos: el que falta [del triángulo] EAD tendrá CXLIII grados, XXVIII minutos, de donde el lado AE alcanza las 9.420 unidades y el ED 18.992 unidades, midiendo el diámetro del círculo que circunscribe al triángulo ADE 20.000 unidades. Pero si ED valía 10.918, y CE 18.150, AE tendrá 5.415 de las mismas unidades. Tengamos, pues, de nuevo un triángulo, el EAC, del cual se conocen los lados EA y EC con el ángulo AEC, [medido] por el arco AC, de XCIIII grados, X minutos, con los cuales se demostrará también el ángulo ACE, [medido] por medio del arco AE, de XXX grados, XL minutos, que con el AC suman CXXIIII grados, L minutos, cuya cuerda CE es de 17.727 unidades, siendo el diámetro del excéntrico de 20.000. Y de acuerdo con la proporción antes dada también será DE de 10.665 unidades, y todo el arco BCAE de CXCI grados.

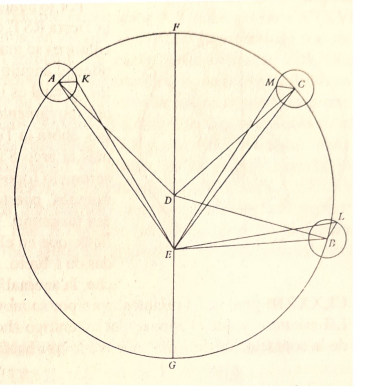
Sigue la parte restante del círculo EB de CLXVIIII, al que subtiende toda la BDE de 19.908 unidades, cuyo resto BD [EB (19.908) - DE (10.665)] es de 9.243. En consecuencia, ya que el segmento mayor es BCAE, en él estará el centro del círculo que es F.

Trácese ahora el diámetro GFDH. Y es evidente que el rectángulo contenido por ED, DB, es igual al GD, DH, que por lo tanto también se conoce. Pero el [rectángulo] GD, DH, junto con el [cuadrado formado por] FD, es igual al [formado] por FDH, por lo que restado de éste el [rectángulo] GD, DH, resulta el cuadrado de FD; luego se conoce la longitud de FD, 1.193, siendo FG de 10.000; pero si fuera de LX, tendría 7 unidades, 9 minutos.

Córtese ahora BE por la mitad en K y prolónguese FKL; por lo tanto, constituirá ángulos rectos [será perpendicular] con BE. Y puesto que la mitad de BDK mide 9.954 unidades y DB 9.243, queda DK de 711 unidades. Por lo tanto, en el triángulo DFK son dados los lados y también el ángulo DFK de XXXVI grados, XXXV minutos, y el arco LH con los mismos XXXVI grados, XXXV minutos. Pero LHB completo mide LXXXIIII grados y medio, el resto BH queda en XLVII grados, LV minutos, distancia del perigeo a la segunda posición, y el resto que sigue hasta el apogeo, BCG, de CXXXII grados, V minutos, restados los LXVI grados, X minutos, de BC, quedan LXV grados, LV minutos, [distancia] desde la tercera oposición al apogeo. Restados éstos de los XCIIII grados, X minutos, quedan XXVIIII grados, XV minutos [distancia] desde el apogeo a la primera posición del epiciclo.

Todo ello concuerda evidentemente poco con las apariencias, no corriendo el planeta por el excéntrico propuesto, de manera que ni siquiera este modo de demostración basado en un principio incierto puede llevar a algo seguro. De esto, entre otras muchas cosas, hay un indicio en que para Ptolomeo, en Saturno, presenta una distancia entre los centros mayor de lo justo, en Júpiter menor, y para nosotros lo mismo nos parece bastante mayor, de manera que, supuestos diferentes arcos de círculo para cada planeta, no parece evidentemente provenir lo que se busca del mismo modo. Y no era posible componer de otra manera el movimiento regular y el aparente de Júpiter en los tres términos propuestos, y en consecuencia en todos los demás, si no seguimos la separación

total de excentricidad entre los centros, señalada por Ptolomeo, de 5 unidades, 30 minutos, teniendo el radio del excéntrico 60 unidades; pero si tuviera 10.000, serían 917. Por lo que, el arco desde el ápside superior al primer acronicio mide XLV grados, II minutos, del ápside inferior al segundo LXIIII grados, XLII minutos, y desde el tercer acronicio al ápside superior XLIX grados, VIII minutos.

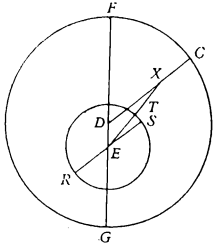


Repítase, pues, la figura anterior del excéntrico-epiciclo [excéntrico portador de un epiciclo], en cuanto convenga con este ejemplo. Por lo tanto, según nuestra hipótesis, las tres cuartas partes de la distancia total entre los centros DE constituirán 687 unidades, y la cuarta parte restante [como radio] en el epiciclo 229 unidades, siendo FD de 10.000 unidades. Y midiendo el ángulo ADF XLV grados, II minutos, el triángulo ADE tendrá dos lados conocidos, AD, DE, con el ángulo ADE, con lo que se demuestra que el tercer lado AE tiene 10.496 unidades, ya que AD es de 10.000, y que el ángulo DAE mide II grados XXXIX minutos. Y puesto que el ángulo DAK se supone igual al ADF, la suma EAK será de XLVII grados, XXXVII minutos, con lo cual se conocen del triángulo AEK dos lados, AK, AE, que comprenden al ángulo AEK de LVII minutos, que junto con el DAE, restándolo del ADF, queda el KED de XLI grados, XXVI minutos en la primera oposición solar.

Del mismo modo se manifiesta en el triángulo BDE. Puesto que se dan como conocidos los lados BD, DE y el ángulo BDE de LXIIII grados, XLII minutos, también se conocerá el tercer lado BE de 9.725 unidades, siendo BD de 10.000, y el ángulo DBE tendrá III grados, XL minutos. Y, por lo tanto, también en el triángulo BEL se conocen dos lados BE y BL, con todo el ángulo EBL de CXVIII grados, LVIII minutos; y resultará conocido el BEL de I grado, X minutos, y a partir de ellos se sabrá que DEL mide CX grados, XXVIII minutos. Pero ya ha quedado claro también que el AED valía XLI grados, XXVI minutos; luego todo el KEL suma CLI grados, LVII minutos. Por lo tanto, restándolos de cuatro rectos, de CCCLX grados, dan CCVIII grados, VI minutos de apariencia entre la primera y la segunda oposición congruente con lo observado.

Finalmente, en la tercera posición se conocen del mismo modo los lados DC, DE del triángulo CDE, y también el ángulo CDE de CXXX grados, LII minutos. Dado el ángulo FDC, el tercer lado DE medirá 10.463 unidades, siendo también CD de 10.000, y el ángulo DCE de II grados, LI minutos; luego el ECM en total medirá LI grados, LVIIII minutos. De ahí que se conozcan también del triángulo ECM dos lados, CM y CE, y el ángulo MCE. Se pondrá también de manifiesto el ángulo MEC, que es de I grado, y éste juntamente con el DCE, calculado antes, son iguales a la diferencia entre el FDC y DEM [MEC + DCE = FDC - DEM], ángulos del movimiento regular y aparente, y de ahí el DEM será de XLV grados, XVII minutos en el acronicio tercero. Pero

ya se ha demostrado que el DEL era de CX grados, XXVIII minutos; en consecuencia, LEM, que media entre la segunda y la tercera oposición observada, será de LXV grados, X minutos, y que coincide con las observaciones. Pero puesto que la tercera posición de Júpiter apareció a CXIV grados, XLVII minutos de la esfera de las no errantes, la posición del ápside superior de Júpiter se muestra casi a CLIX grados.



Por lo cual, si con centro en E trazamos la órbita de la Tierra RST, cuyo diámetro RES sea [paralelo] a DC, entonces se manifiesta que en el tercer acronicio de Júpiter, el ángulo FDC sería de XLIX grados, VIII minutos, al cual es igual el DES, y que en R está el apogeo del movimiento regular en la conmutación. En cambio, ahora la Tierra, habiendo recorrido el semicírculo más el arco ST, está en conjunción con Júpiter en el acronicio [oposición]: tal arco ST es de III grados, LI minutos, puesto que el ángulo SET se demostró con esa magnitud. Y así, a partir de aquí, queda de manifiesto que en el año MDXXIX de Cristo, en las calendas de febrero, a las XIX horas después de la medianoche, la anomalía de conmutación de Júpiter era igual a CLXXXIII grados, LI minutos, pero por su movimiento [Júpiter estaba] a CIX grados, LII minutos, y que el apogeo del excéntrico ahora está a CLIX grados casi del cuerno de la constelación de Aries: que era lo que había que investigar.

12. COMPROBACIÓN DEL MOVIMIENTO REGULAR DE JÚPITER

Ya anteriormente se ha visto que, en la última de las tres oposiciones solares consideradas por Ptolomeo, la estrella Júpiter estaba en su movimiento regular a IIII grados, LVIII minutos, con una anomalía de conmutación de CLXXXII grados, XLVII minutos. Por lo que consta que en el tiempo que media entre una y otra observación pasaron en el movimiento de conmutación de Júpiter, además de las revoluciones completas, I grado, V minutos, y en su propio movimiento casi CIIII grados, LIIII minutos. Pero en el tiempo que media desde el año primero de Antonino, el día vigésimo del mes Athyr de los egipcios, cinco horas después de la medianoche siguiente, hasta el año MDXXIX de Cristo, en las mismas calendas de febrero, XIX horas después de la medianoche precedente, han transcurrido MCCCXCII años egipcios, IC días, XXXVII minutos de día. A este tiempo corresponde igualmente, según el cálculo más arriba expuesto, I grado, V minutos, además de las revoluciones completas: en las cuales [revoluciones] regulares la Tierra se anticipó a Júpiter mil doscientas sesenta y siete veces. Y así, al coincidir el cálculo con lo visto, se tiene por cierto y comprobado. También se manifiesta que el ápside superior e inferior del excéntrico se movieron hacia el este IIII grados y medio. Una distribución mediada proporciona I grado aproximadamente por cada CCC años.

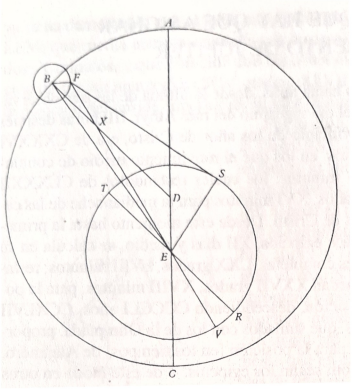
13. POSICIONES QUE HAY QUE ASIGNAR AL MOVIMIENTO DE JÚPITER

Pero puesto que el tiempo transcurrido hacia atrás, desde la última de las tres observaciones en el año primero de Antonino, el día vigésimo del mes Athyr, IIII horas después de la medianoche siguiente, hasta el principio de los años de Cristo, era de CXXXVI años egipcios, CCCXIIII días, X minutos, en los que el movimiento medio de conmutación es de LXXXIIII grados, XXXI minutos; los cuales restándolos de CLXXXII grados, XLVII minutos, resultan IIC grados, XVI minutos para la medianoche de las calendas de enero al principio de los años de Cristo. Desde este momento hasta la primera Olimpíada, o sea, en DCCLXXV años egipcios, XII días y medio, se calcula en su movimiento, además de las revoluciones completas, LXX grados, LVIII minutos; restados de los IIC grados, XVI minutos, quedan XXVII grados, XVIII minutos, para la posición en la Olimpíada. Desde esta posición, descendiendo CCCCLI años, CCXLVII días, aumentan ℂX grados, LII minutos, que sumados con los de la Olimpíada, proporcionan CXXXVIII grados, X minutos, para la posición [en los tiempos] de Alejandro, al mediodía, del día primero del mes Toth según los egipcios. Y de este modo en otros cualesquiera.

14. ACERCA DE LO QUE SE HA DE INVESTIGAR EN LAS CONMUTACIONES DE JÚPITER Y DE SU ALTITUD EN RELACIÓN CON LA ÓRBITA DE LA REVOLUCIÓN TERRESTRE

Para percibir con respecto a Júpiter los demás movimientos aparentes, que son los de conmutación, observamos con sumo cuidado su posición en el año MDXX de Cristo, doce días antes de las calendas de marzo, VI horas antes de mediodía. Y observamos, por medio del aparato, que Júpiter precedía [estaba al oeste] a la primera estrella, la más brillante, de la frente de Escorpión, en IIII grados, XXXI minutos, y puesto que la posición de esta estrella fija era de CCIX grados, XL minutos, es patente que la posición de Júpiter estaba a CCV grados, IX minutos, con respecto a la esfera de las estrellas no errantes. En consecuencia, desde el principio de los años de Cristo hasta el momento de esta observación hay MDXX años iguales, LXII días, XV minutos, de donde se deduce el movimiento medio del Sol de CCCIX grados, XVI minutos, y la anomalía de conmutación de CXI grados, con lo que se deduce la posición media de la estrella Júpiter en CIIC grados, I minuto. Y puesto que la posición del ápside superior del excéntrico se halló en el momento de nuestra observación a CLIX grados, la anomalía del excéntrico de Júpiter estaba a XXXIX grados, I minuto.

Siguiendo este ejemplo, trácese el círculo excéntrico ABC, cuyo centro sea D, y su diámetro ADC; esté el apogeo en A, el perigeo en C, y por lo tanto en DC esté E, centro de la órbita anual terrestre. Tómese también el arco AB de XXXIX grados, I minuto, y haciendo centro en B trácese un epiciclo por medio de [radio] BF, la tercera parte de la distancia DE: hágase también el ángulo DBF igual al ADB y únanse con líneas rectas BD, BE, FE. En consecuencia, puesto que en el triángulo BDE se conocen dos



lados, el DE de 687 unidades, siendo BD de 10.000, y esos dos lados comprenden el ángulo BDE que sabemos mide CXL grados, LIX minutos, a partir de ellos se demostrará que la base BE tiene 10.543 de las mismas unidades y el ángulo DBE de II grados, XXI minutos, en los que se diferencia BED de ADB [DBE = ADB - BED = 2°, 21']. Luego todo el ángulo EBF medirá XLI grados, XXII minutos. Por lo tanto, en el triángulo EBF se conoce el mismo ángulo EBF con los dos lados que lo comprenden, el EB de 10.543 unidades, el BF con 229 de las mismas unidades, en cuanto tercera parte de la distancia DE, siendo BD de 10.000.

De éstos se deduce que el lado restante FE mide 10.373 unidades y el ángulo BEF de L minutos. Cortándose las líneas BD, FE en el punto X, el ángulo de la sección DXE será la diferencia entre FED y BDA [DXE = BDA - FED], movimiento medio y real, el cual [DXE] está compuesto por el DBE y BEF de III grados, XI minutos, que restados de los XXXIX grados, I minuto, dan como resultado el ángulo FED de XXXV grados, L minutos, desde el ápside superior del excéntrico a la estrella. Pero la posición del ápside superior estaba a CLIX grados; conjuntamente constituyen CXCIIII grados, L minutos. Ésta era la verdadera posición de Júpiter con respecto al centro E, sin embargo apareció a los CCV grados, IX minutos; en consecuencia, la diferencia de X grados, XIX minutos es la de conmutación.

Trácese ahora la órbita terrestre RST alrededor del centro E, cuyo diámetro RET sea paralelo a BD, de modo que R sea el apogeo de conmutación. Tómese también el arco RS como medida de la anomalía media de conmutación de CXI grados, XV minutos, y prolónguese FEV en línea recta por ambas partes de la circunferencia de la órbita terrestre y en V estará el verdadero apogeo del planeta y el ángulo de diferencia REV, igual al DXE, forma parte de todo el arco VRS de CXIIII grados, XXVI minutos, y el restante [suplementario] FES es de LXV grados, XXXIIII minutos. Pero puesto que se halló que EFS medía X grados, XIX minutos, el ángulo restante FSE será de CIIII grados, VII minutos: en el triángulo EFS de ángulos conocidos, será dada la proporción entre sus lados, FE es a ES como 9.698 es a 1.791. En consecuencia, FE mide 10.373 de las mismas unidades, de tales ES tendrá 1.916, y siendo BD de 10.000. Pero Ptolomeo calcula ES como de 11 unidades, 30 minutos, habiendo desde el centro del excéntrico [radio] 60 unidades, y ésta es casi la misma proporción que hay entre 10.000 y 1.916, en lo que nada parece que nos distanciamos de él. Por lo tanto, el diámetro ADC es al diámetro RET como V unidades, XIII minutos es a una unidad, del mismo modo que AD es a ES, o sea, a RE, como 5 unidades, 13 minutos, 9 segundos, es a 1 unidad. Así DE medirá XXI minutos, XXIX segundos, y BF VII minutos, X segundos. En consecuencia, la suma ADE, menos BF, estando Júpiter en el apogeo, será [proporcional] a la mitad del diámetro de la órbita terrestre, como 5 unidades, 27 minutos, 29 segundos.

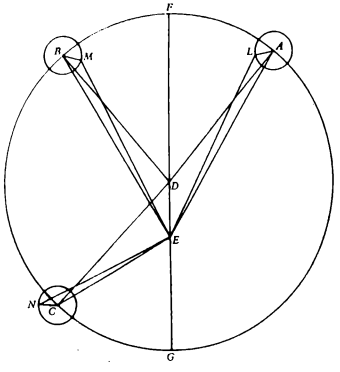
a uno, y la parte restante EC, junto con BF, [estando Júpiter] en el perigeo, [será proporcional al radio de la Tierra] como 4 unidades, 58 minutos, 49 segundos, [es a una unidad], y en las posiciones medias, según convenga [la proporción]. Con lo que se tiene que Júpiter en su apogeo efectúa una conmutación máxima de X grados, XXXV minutos, y en el perigeo de XI grados, XXXV minutos: y entre ellas hay una diferencia de I grado. Por lo tanto, se han demostrado los movimientos regulares de Júpiter a la vez que los aparentes.

15. SOBRE LA ESTRELLA MARTE

Ahora tenemos que examinar las revoluciones de Marte, tomando tres oposiciones solares de los antiguos, a las que añadiremos los datos de la antigüedad sobre la movilidad terrena. Así pues, entre aquellas que nos transmitió Ptolomeo, la primera fue en el año décimo quinto de Adriano, el día XXVI del mes Tybi, el quinto de los egipcios, una hora equinoccial después de la medianoche siguiente: y dice que [Marte] estaba a XXI grados de Géminis, pero en relación con la esfera de las estrellas fijas estaba a LXXIIII grados, XX minutos. Anotó la segunda en el decimonono año del mismo [Adriano], el día VI del mes Pharmuthi, el octavo mes de los egipcios, tres horas antes de la medianoche siguiente, a XXVIII grados, L minutos, de Leo, pero a CXLII grados, X minutos, de la esfera de las estrellas no errantes. En cambio, la tercera, en el año segundo de Antonino, el día duodécimo del mes Epiphi, el undécimo de los egipcios, dos horas equinocciales antes de la medianoche siguiente, a II grados, XXXVII minutos de Sagitario, y a CCXXXV grados, LIIII minutos de la esfera de las estrellas fijas.

En consecuencia, entre la primera y la segunda [oposición] hay IIII años egipcios, LXIX días, XX horas, o L minutos [de un día], y el movimiento aparente de la estrella, además de las revoluciones completas, fue de LXVII grados, L minutos. Pero de la segunda a la tercera oposición hubo IIII años, XCVI días y I hora, y el movimiento aparente de la estrella fue de XCIII grados, XLIIII minutos. Y el movimiento medio en el primer intervalo, además de los recorridos totales, fue de LXXXI grados, XLIIII minutos, en el segundo de VC grados, XXVIII minutos. A partir de ahí encontró la distancia total entre los centros de 12 unidades, teniendo 60 la que parte del centro del excéntrico [el radio], pero si fueran 10.000, proporcionalmente serían 2.000. Y en los movimientos medios, desde la primera oposición hasta el ápside superior había XLI grados, XXXIII minutos. Y luego de uno a otro [«aliud ex alio»], desde el ápside superior a la segunda oposición XL grados, XI minutos, y desde la tercera oposición al ápside inferior XLIIII grados, XXI minutos.

Pero según nuestra hipótesis de los movimientos regulares, entre los centros del excéntrico y de la órbita terrestre habrá las tres cuartas partes de aquella [distancia], o sea, 1.500 unidades, y la cuarta parte restante, 500, será el semidiámetro del epiciclo. De este modo, trácese ahora el círculo excéntrico ABC, cuyo centro sea D, el diámetro que pasa por ambos ápsides FDG, en el cual esté E, centro de la órbita de la revolución anual, y sean por orden A, B, C, los puntos de las oposiciones observadas; pero AF es un arco que mide XLI grados, XXXIII minutos, FB de XL grados, XI minutos, y CG de XLIIII grados, XXI minutos, y en cada uno de los puntos A, B, C, descríbase un epiciclo con la tercera parte de la distancia DE, y únanse AD, BD, CD, AE, BE, CE, y en el

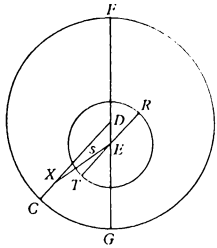


epiciclo AL, BM, CN, de tal modo que los ángulos DAL, DBM, DCN sean iguales a los ADF, BDF, CDF. En consecuencia, ya que en el triángulo ADE el ángulo ADE es conocido de CXXXVIII grados porque el ángulo FDA es dado y los dos lados AD, DE, ya que DE es de 1.500 unidades, siendo AD de 10.000, de esto se sigue que el lado restante AE tiene 11.172 de las mismas unidades y el ángulo DAE de V grados, VII minutos; luego, la suma EAL vale XLVI grados, XL minutos. Así también en el triángulo EAL se da el ángulo EAL con dos lados, el AE de 11.172 unidades y el AL de 500 unidades, de las cuales mide AD 10.000: se dará también el ángulo AEL de un grado, LVI minutos, que junto con el ángulo DAE proporciona toda la diferencia entre el ADF y el AED, de VII grados, III minutos, y el DEA de XXXIIII y medio grados.

De igual modo en la segunda oposición [«noctis extremo»] se conoce del triángulo BDE el ángulo BDE de CXXXIX grados, XLIX minutos, y el lado DE de 1.500 unidades, de las que BD tiene 10.000; resultando el lado BE de 11.188 unidades y el ángulo BED de XXXV grados, XIII minutos, y el restante DBE de IIII grados, LVIII minutos. Luego el EBM en total mide XLV grados, XIII minutos, y dados los lados BE y BM que lo comprenden, se deduce por los mismos el ángulo BEM de I grado, LIII minutos, y el resto DEM de XXXIII grados, XX minutos. En consecuencia, el MEL completo mide LXVII grados, L minutos, por medio del cual apareció el movimiento de la estrella desde la primera oposición a la segunda: y el cálculo concuerda con la experiencia.

Una vez más, puesto que en la tercera oposición el triángulo CDE tiene dados los lados CD, DE, que comprenden el ángulo CDE de XLIIII grados, XXI minutos, que proporcionan una base CE de 8.988 unidades, siendo CD de 10.000 o DE de 1.500, y el ángulo CED de XXXVII grados, XXXIX minutos con el que queda DCE de VI grados, XLII minutos; así, de nuevo en el triángulo CEN, el ángulo completo ECN de CXLII grados, XXI minutos, puesto que se conocen los lados que comprenden al ECN, con los cuales se conocerá también el ángulo CEN de I grado, LII minutos: luego, queda el resto NED de CXXVII grados, V minutos [CED - CEN] en la tercera oposición. Pero ya se ha mostrado que DEM era de XXXIII grados, XX minutos; queda MEN de XCIII grados, VL minutos, que es el ángulo de apariencia entre la primera y la segunda oposición: en lo que coincide también bastante el cálculo con lo observado. Pero puesto que en esta última oposición de Marte observada la estrella fue vista a CCXXXV grados, LIIII minutos, distando (según se ha demostrado) del apogeo del excéntrico en CXXVII grados, V minutos, luego la posición del apogeo del excéntrico de Marte estaba a CVIII grados, L minutos de la esfera de las estrellas no errantes.

Trácese ahora la órbita anual de la Tierra RST, haciendo centro en E, con un diámetro RET paralelo a DC, en el que R sea el apogeo de la conmutación, T el perigeo. En



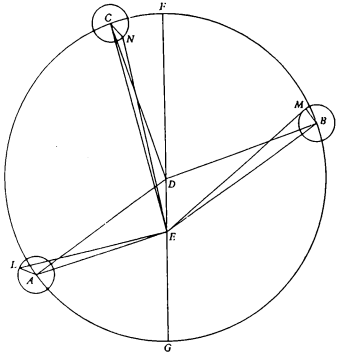
consecuencia, puesto que el planeta fue visto en EX a CCXXXV grados, LIIII minutos, en longitud, y el ángulo DXE se mostró de VIII grados, XXXIIII minutos, diferencia entre el [movimiento] regular y el aparente, y también por esa causa el movimiento medio era de CCXLIIII grados y medio, pero el ángulo DXE es igual al SET trazado en el centro, de VIII grados semejantes, XXXIIII minutos: en consecuencia, si el arco ST de VIII grados, XXXIIII minutos se resta del semicírculo, tendremos el movimiento medio de conmutación de la estrella, que es el arco RS de CLXXI grados, XXVI minutos. Por tanto, además de otras cosas, tenemos demostrado por esta hipótesis del movimiento de la Tierra, que en el año segundo de Antonino, el día duodécimo del mes Epiphi de los egipcios, diez horas regulares después del mediodía, la estrella Marte según su movimiento medio de longitud estaba a CCXLIIII grados y medio, y la anomalía de conmutación a CLXXI grados, XXVI minutos.

16. ACERCA DE OTRAS TRES OPOSICIONES SOLARES RECIENTEMENTE OBSERVADAS CON RESPECTO A LA ESTRELLA MARTE

Con estas tres observaciones de Ptolomeo con respecto a Marte, comparamos nosotros otras tres, que tomamos con cuidado. La primera en el año MDXII de Cristo, en las nonas de junio, una hora después de la medianoche, en la que se encontró la posición de Marte a CCXXXV grados, XXXIII minutos, cuando el Sol estaba en el punto opuesto a LV grados, XXXIII minutos, a partir de la primera estrella de Aries en la esfera de las fijas, que se tomó como punto de partida. La segunda en el año MDXVIII de Cristo, el día anterior a los idus de diciembre, VIII horas después de mediodía, y apareció la estrella a los LXIII grados, II minutos. Y la tercera en el año MDXXIII, VIII días antes de las calendas de marzo, VII horas antes del mediodía, a los CXXXIII grados, XX minutos. En consecuencia, de la primera a la segunda hay VI años egipcios, CXCI días, XLV minutos. De la segunda a la tercera IIII años, LXXII días, XXIII minutos de día. El movimiento aparente en el primer intervalo de tiempo es de CLXXXVII grados, XXIX minutos, y el regular de CLXVIII grados, VII minutos. En el segundo espacio de tiempo, el movimiento aparente fue de LXX grados, XLIX minutos, el regular de LXXXIII grados.

Repítase, como hace poco, el círculo excéntrico de Marte, sólo que ahora AB sea de CLXVIII grados, VII minutos, y BC de LXXXIII grados. En consecuencia, con el mismo método (aunque ocultando en el silencio la magnitud, complicación y tedio de aquellos cálculos) que utilizamos con Saturno y Júpiter, señalamos finalmente el apogeo de Marte en el arco BC. Pues que no puede estar en AB se muestra porque el movimiento aparente sería mayor que el medio en XIX grados, XXII minutos. Tampoco puede estar en CA, pues aunque el precedente a éste, el BC, sea FC menor, sin embargo excede al movimiento aparente con una diferencia mayor que el CA. Pero como se

ha demostrado con anterioridad, el movimiento menor y decreciente acontece en el excéntrico alrededor del apogeo. En consecuencia, se estimará correctamente que el apogeo F se encuentra en el BC, y que FDG es el diámetro del círculo, en el que también está el centro de la órbita terrestre. En consecuencia, encontramos que FCA es de CXXV grados, XXIX minutos, y de ahí se sigue que el BF es de LXVI grados, XVIII minutos, FC de XVI grados, XXXVI minutos. Pero la distancia DE entre los centros es 1.460, siendo la distancia desde el centro [el radio] DF 10.000; y la mitad del diámetro del epiciclo mide 500 de las mismas unidades, con lo que se demuestra que el movimiento aparente y el regular concuerdan y coinciden entre sí y con los experimentos.



Complétese, pues, la figura como antes. Se ha mostrado que, conociendo del triángulo ADE los dos lados AD, DE, con el ángulo ADE, que desde la primera posición acrónica de Marte al perigeo medía LIIII grados, XXXI minutos, el ángulo DAE resultará de VII grados, XXIIII minutos, y el que falta AED de CXVIII grados, V minutos, y también el tercer lado AE de 9.229 unidades. Y por hipótesis el ángulo DAL es igual al FDA; en consecuencia, todo el EAL es de CXXXII grados, LIII minutos. Así también, en el triángulo EAL se conocen los lados EA, AL, que comprenden al ángulo A conocido; en consecuencia, el restante AEL es de II grados, XII minutos: falta el LED de CXV grados, LIII minutos.

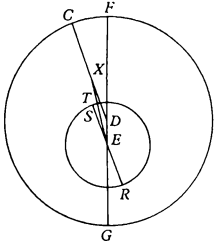
De igual modo se demuestra en la posición acrónica segunda que, comprendiendo en el triángulo BDE los dos lados conocidos DB, DE, al ángulo BDE de CXIII grados, XXXV minutos, el ángulo DBE, por lo demostrado en los triángulos planos, será de VII grados, XI minutos, y el restante DEB de LIX grados, XIIII minutos, y la base BE de 10.668 unidades, siendo DB de 10.000 y BM de 500, y todo el EBM de LXXIII grados, XXXVI minutos.

Así, también en el triángulo EBM, del que conocemos dos lados y el ángulo que comprenden, se demostrará que el ángulo BEM es de II grados, XXXVI minutos, partiendo de lo cual el restante DEM será de LVI grados, XXXVIII minutos; de ahí, el que queda, exterior desde el perigeo, MEG de CXXIII grados, XXII minutos. Pero ya se ha demostrado que el ángulo LED era de CXV grados, LIII minutos; el exterior que sigue, LEG, de LXIIII grados, VII minutos; y éste sumado con el GEM ya hallado da un resultado de CLXXXVII grados, XXIX minutos, siendo IIII rectos CCCLX. Todo lo cual coincide con la distancia aparente desde el primer acronicio al segundo. Y del mismo modo es posible verlo en el acronicio tercero.

Se ha demostrado que el ángulo DCE mide II grados, VI minutos, y el lado EC 11.407 unidades, siendo CD de 10.000. En consecuencia, siendo todo el ángulo ECN de XVIII grados, XLII minutos, y conocidos también los lados CE, CN, del triángulo

CNE, constará el ángulo CEN de L minutos, que sumado el DCE resulta II grados, LVI minutos, en los que el ángulo de apariencia DEN es menor que el de regularidad FDC. Luego es conocido el DEN de XIII grados, XL minutos: lo que coincide también aproximadamente con el movimiento aparente observado entre el segundo y el tercer acronicio.

En consecuencia, puesto que la estrella Marte apareció en esta posición (como hemos dicho), a CXXXIII grados, XX minutos, desde la cabeza de la constelación de Aries, y se mostró el ángulo FEN aproximadamente de XIII grados, XL minutos, se manifiesta, al calcular retrocediendo, que la posición del apogeo del excéntrico en esta última medición estuvo a CXIX grados, XL minutos en la esfera de las estrellas fijas. En tiempos de Antonino, Ptolomeo la encontraba a CVIII grados, L minutos, y, por tanto, hasta nuestros días, se movió hacia el este X grados y cinco sextos de un grado. También hallamos que la distancia entre los centros es menor en 40 unidades, considerada la distancia desde el centro del excéntrico [el radio] en 10.000, no porque se hubiera equivocado Ptolomeo o nosotros, sino por un argumento claro: porque el centro de la gran órbita terrestre se ha acercado al centro de la órbita de Marte, mientras el Sol permanecía inmóvil. Todas estas cosas corresponden aproximadamente entre sí, como aparecerá después más claro que la luz.



Trácese ahora la órbita anual de la Tierra, con centro en E, con su diámetro SER paralelo a CD debido a la regularidad de las revoluciones, y esté en R el apogeo regular con respecto a la estrella, en S el perigeo, en T la Tierra; y prolongando la línea ET, en la que fue vista la estrella, cortará a CD en el punto X. Y fue vista en la línea ETX, en esta última posición, (como se ha dicho) a CXXXIII grados, XX minutos. También se demostró que el ángulo DXE medía II grados, LVI minutos. Y en realidad ésta es la diferencia por la que el ángulo XDF, del movimiento medio, es mayor que el XED, del movimiento aparente. Pero el SET es igual al DXE, su alterno, y es la prostaféresis de la conmutación, restada la cual del semicírculo quedan CLXXVII grados, IIII minutos, anomalía regular de conmutación, deducida desde el apogeo R del movimiento regular, de manera que tenemos demostrado que en el año MDXXIII de Cristo, ocho días antes de las calendas de marzo, siete horas equinocciales antes del mediodía, la estrella Marte estaba en su movimiento medio en longitud a CXXXVI grados, XVI minutos y su anomalía regular de conmutación a CLXXVII grados, IIII minutos y el ápside superior del excéntrico a CXIX grados, XL minutos. Que era lo que se tenía que demostrar.

17. COMPROBACIÓN DEL MOVIMIENTO DE MARTE

Ha quedado claro, más arriba, que en la última de las tres observaciones de Ptolomeo, Marte estaba en su movimiento medio a CCXLIIII grados y medio, y en la anomalía de conmutación a CLXXI grados, XXVI minutos. En consecuencia, en el tiempo intermedio, además de las revoluciones completas, aumentaron en V grados, XXXVIII minu-

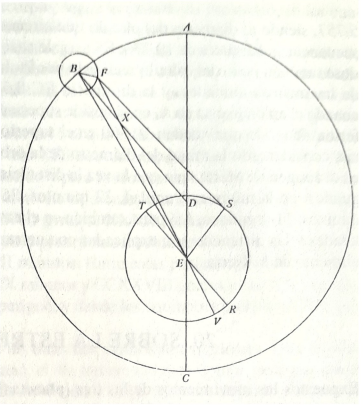
tos. Así, desde el año segundo de Antonino, el día duodécimo del mes Epiphi, el undécimo de los egipcios, nueve horas después del mediodía, esto es, tres horas equinocciales antes de la medianoche siguiente, con respecto al meridiano de Cracovia, hasta el año de Cristo MDXXIII, ocho días antes de las calendas de marzo, siete horas antes del mediodía, han transcurrido MCCCLXXXIIII años egipcios, CCLI días, XIX minutos. En este tiempo se encuentran, según el cálculo antes expuesto, un exceso en la anomalía de conmutación de V grados, XXXVIII minutos, completadas sus DCIIL revoluciones. Y se considera el movimiento regular del Sol de CCLVII y medio grados, deducidos del cual los V grados, XXXVIII minutos del movimiento de conmutación, quedan CCLI grados, LII minutos, movimiento medio de Marte en longitud. Todo lo cual coincide aproximadamente con lo que se ha expuesto.

18. DETERMINACIÓN DE LAS POSICIONES DE MARTE

Se han calculado desde el principio de los años de Cristo, hasta el año segundo de Antonino, duodécimo día del mes Epiphi de los egipcios y tres horas antes de la medianoche, CXXXVIII años egipcios, CLXXX días, LII minutos. En ellos el movimiento de conmutación era de CCXCIII grados, XXII minutos, que restados de los CLXXI grados, XXVI minutos, de la última observación de Ptolomeo, tomada una revolución íntegra, quedan CCXXXVIII grados, XXII minutos, en el primer año de Cristo, a la medianoche antes de las calendas de enero. Hasta este momento, desde la primera Olimpíada, hay DCCLXXV años egipcios, XII días y medio, durante los cuales el movimiento ha sido de CCLIIII grados, I minuto. De igual modo, restados de los CCXIIII grados, XLVI minutos, tomada una vuelta, queda su posición en la primera Olimpíada a CCCXLIIII grados, XXI minutos. De manera semejante, calculando los movimientos con respecto a otros intervalos de tiempo, tendremos la posición en la época de Alejandro a CXX grados, XXXIX minutos, en la de César a CXI grados, XXV minutos.

19. SOBRE CUÁNTO MEDIRÍA LA ÓRBITA DE MARTE SI CONSIDERÁRAMOS LA ÓRBITA ANUAL DE LA TIERRA COMO UNA UNIDAD

Al respecto también observamos la conjunción de Marte con la primera estrella brillante de las de Scorpio, llamada la meridional Chele, que aconteció en el año MDXII de Cristo, en las mismas calendas [día 1º] de enero. Vimos, por la mañana, seis horas equinocciales antes de aquel mediodía, a Marte que distaba de la estrella fija la cuarta parte de un grado, pero desviada hacia el solsticio naciente, con lo que se significaba que Marte estaba separado de la estrella hacia el este por la octava parte de un grado en longitud, pero por un quinto en latitud boreal. Consta, pues, la posición de la estrella desde la primera de Aries a CXCI grados, XX minutos, con una latitud norte de XL minutos. Y se evidenció la posición de Marte a CXCI grados, XXVIII minutos, teniendo una latitud norte de LI minutos. A este tiempo, según el cálculo, le corresponde una anomalía de conmutación de XCVIII grados, XXVIII minutos. La posición media del



Sol estaba a CCLXII grados y la posición media de Marte a CLXIII grados, XXXII minutos, la anomalía del excéntrico a XLIII grados, LII minutos.

Propuesto esto así, descríbase el excéntrico ABC, sea D su centro, el diámetro ADC, el apogeo A, el perigeo C, la excentricidad DE de 1.460 unidades, siendo AD de 10.000. Se da también el arco AB de XLIII grados, LII minutos. Haciendo centro en B, pero con una distancia BF de 500 unidades, de las que AD tiene 10.000, descríbase un epiciclo, de modo que el ángulo DBF sea igual al ADB, y únanse BD, BE, FE. También con centro en E, trácese la órbita mayor de la Tierra RST, siendo su diámetro RET paralelo a BD, en el que [diámetro] esté R apogeo de la conmutación del planeta, T el perigeo del movimiento regular de éste. Y esté la Tierra en S, y siguiendo el arco RS la anomalía regular de conmutación, que se calcula de XCVIII grados, XXVIII minutos. Prolónguese FE en línea recta formando FEV, que cortará BD en el punto X y al arco convexo de la órbita terrestre en V, en el que está el auténtico apogeo de conmutación.

En consecuencia, puesto que del triángulo BDE conocemos los lados, DE de 1.460 unidades, siendo BD de 10.000, que contienen al ángulo dado BDE de CXXXVI grados, VIII minutos, interior al ADB cuya medida conocemos de XLIII grados, LII minutos [180° - 43°, 52' = 136°, 8']: a partir de estos datos se demostrará el tercer lado de 11.097 de aquellas unidades, y el ángulo DBE de V grados, XIII minutos. Pero el ángulo DBF es igual al ADB por hipótesis; la suma EBF será de XLIX grados, V minutos, contenido por los lados dados EB, BF. Por lo tanto, tendremos el ángulo BEF de dos grados y el otro lado FE de 10.776 unidades, siendo DB de 10.000. En consecuencia, el DXE mide VII grados, XIII minutos, pues lo forman conjuntamente el XBE y el XEB, interiores y opuestos. Ésta es la prostaféresis sustractiva, por la que el ángulo ADB es mayor que el XED y la posición media de Marte mayor a la real. Y la posición media se calculó en CLXIII grados, XXXII minutos. Luego la real la precede [hacia el oeste] a CLVI grados, XIX minutos, pero apareció a CXCI grados, XXVIII minutos, observándola desde S. En consecuencia se produjo una paralaje o conmutación de XXXV grados, IX minutos, al oeste. Luego es patente que el ángulo EFS tiene XXXV grados, IX minutos. Y siendo RT paralela a BD, el ángulo DXE era igual al REV, y el arco RV medirá por semejanza VII grados, XIII minutos. Así, la suma VRS es de CV grados, XLI minutos, medida de la anomalía de conmutación corregida con lo que consta el ángulo VES, exterior al triángulo FES. Y a partir de ahí se conoce el ángulo interior y opuesto FSE de LXX grados, XXXII minutos, y todos en el mismo tipo de grados, siendo dos rectos CCCLX. Pero en los triángulos de ángulos dados, se conoce la proporción entre los lados, luego FE tiene una longitud de 9.428 unidades, ES de

5.757, siendo el diámetro del círculo que circunscribe al triángulo de 10.000. En consecuencia, si EF fuera de 10.776, ES será de casi 6.580, siendo BD de 10.000, separándose también poco del cálculo realizado por Ptolomeo. Pero la suma ADE tiene 11.460 de las mismas unidades, y la diferencia EC 8.540. Y a éstas se restan 500 unidades cuando el epiciclo está en A, en el ápside superior del excéntrico, y se le suman en el inferior, de modo que queden 10.960 en el superior, 9.040 en el inferior. En consecuencia, considerando la mitad del diámetro de la órbita terrestre como una unidad, habrán en el apogeo de Marte, que es a la vez la distancia máxima, 1 unidad 39 minutos, 57 segundos: en la mínima, 1 unidad, 22 minutos, 26 segundos, en la media, 1 unidad, 31 minutos, 11 segundos. Así pues, también en el caso de Marte, los movimientos, las cantidades y las distancias son explicadas con un razonamiento seguro por medio del movimiento de la Tierra.

20. SOBRE LA ESTRELLA VENUS

Expuestos los movimientos de los tres [planetas] más altos, Saturno, Júpiter y Marte, que giran exteriormente a la Tierra, ahora conviene hablar de aquellos a los que la propia Tierra rodea. Y en primer lugar de Venus, que admite una demostración de su movimiento más fácil y evidente que aquél [Mercurio] con tal que no falten las observaciones necesarias de algunas posiciones. Puesto que si sus máximas distancias, la matutina y la vespertina, de la una y la otra a la posición media del Sol, se encuentran iguales entre sí, sabremos ya con certeza que en el punto medio de esas dos posiciones del Sol se encuentran los ápsides superior e inferior del excéntrico de Venus, los cuales [ápsides] se distinguen porque tal igualdad de digresión [elongación angular] se hace menor en el apogeo y mayor en el punto opuesto [perigeo]. Además, en las otras posiciones se sabe cuánto dista la órbita de Venus del ápside superior o inferior por las diferencias de aquéllos, por las que [en la elongación angular] uno a otro se exceden, y se percibe la excentricidad sin duda alguna, partiendo de lo transmitido por Ptolomeo con tanta claridad que no sería necesario repetirlas una a una, si no se aplicasen también a nuestra hipótesis de la movilidad terrestre a partir de las mismas mediciones de Ptolomeo.

Tomó como primera observación, una hecha por el matemático Theón de Alejandría (como se ha dicho) en el año dieciséis de Adriano, el día XXI del mes Pharmuthi, en la primera hora de la noche siguiente, que era el año CXXXII de Cristo, por la tarde, VIII días antes de los idus de marzo. Y Venus fue visto en su mayor distancia vespertina desde la posición media del Sol, a XLVII grados y un cuarto, mientras la posición media del Sol según el cálculo estaba a CCCXXXVII grados, XLI minutos de la esfera de las fijas. A ésta añadió otra observación suya, que dice tuvo lugar en el año cuarto de Antonino, al amanecer el día doce del mes Thoth, o sea, en el año CXLII de Cristo, al alba del tercer día antes de las calendas de agosto, fecha en la que dice que el límite máximo [máxima elongación] de Venus matutino estaba de nuevo a XLVII grados, XV minutos, igual distancia que en la anterior desde la posición del Sol, y que estaba a CXIX grados aproximadamente de la esfera de las estrellas fijas, mientras que la anterior estaba a CCCXXXVII grados, XLI minutos. Es manifiesto que entre estas posiciones medias están las de los ápsides a XLVIII y un tercio y CCXXVIII y un tercio, opuestas entre sí. Añadiendo a ambos los VI grados y dos tercios de la precesión de los equinoccios, in-

ciden en los XXV grados de Tauro y Scorpio, según la opinión de Ptolomeo, en los cuales deben estar los ápsides superior e inferior del diámetro de Venus.

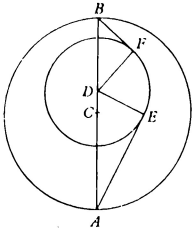
De nuevo, para una mayor confirmación de este problema, toma otra observación de Theón en el año cuarto de Adriano, al amanecer del día XX del mes Athyr, que era el año CXIX del nacimiento de Cristo, en la mañana del día cuarto antes de los idus de octubre, momento en que apareció de nuevo Venus con una distancia máxima de XLVII grados, XXXII minutos; desde la posición media del Sol que estaba a CXCI grados, XIII minutos. A ésta añade su observación en el año XXI de Adriano, que era el año CXXXVI de Cristo, el día nueve del mes egipcio Mechir, y para los romanos VIII días antes de las calendas de enero, en la primera hora de la noche siguiente, momento en el que de nuevo la distancia vespertina se encontró a XLVII grados, XXXII minutos, desde la posición media del Sol a CCLXV grados. Pero en la precedente medida de Theón, la posición media del Sol estaba a CXCI grados, XIII minutos. Entre estas posiciones medias caen de nuevo [los ápsides] a XLVIII grados, XX minutos y CCXXVIII grados y casi XX minutos, en los que deben estar el apogeo y el perigeo, y desde los equinoccios están a XXV grados de Tauro y Scorpio.

Las cuales las separó después por las otras dos mediciones siguientes. Una de ellas era de Theón, en el año trece de Adriano, el día tercero del mes Epiphi, pero que era el año CXXIX de Cristo, en la madrugada del día doce de las calendas de junio, fecha en la que aparece el límite extremo [elongación máxima] de Venus matutino a XLIIII grados, XLVIII minutos, mientras el Sol estaba en su movimiento medio a XLVIII grados y cinco sextos, y Venus apareció a IIII grados de la esfera de las fijas. El propio Ptolomeo realizó la otra en el año XXI de Adriano, el segundo día del mes Tybi de los egipcios, por lo que calculamos el año romano ciento treinta y seis después del nacimiento de Cristo, V días antes de las calendas de enero, en la primera hora de la noche siguiente, estando el Sol en su movimiento medio a CCXXVIII grados, LIIII minutos, del cual Venus distaba una máxima distancia vespertina [máxima elongación vespertina] de XLVII grados, XVI minutos, apareciendo a CCLXXVI grados y un sexto. A partir de estos datos se diferencian los ápsides uno de otro, o sea, el superior a XLVIII grados con un tercio, donde acontecen las elongaciones menores de Venus, y el inferior a CCXXVIII grados y un tercio, donde se dan las mayores. Esto era lo que había que demostrar.

21. SOBRE CUÁL ES LA PROPORCIÓN ENTRE LOS DIÁMETROS DE LA ÓRBITA DE LA TIERRA Y DE VENUS

También partiendo de estas mediciones se hará patente la proporción entre los diámetros de las órbitas de la Tierra y de Venus. Trácese, pues, la órbita de la Tierra AB con centro en C; su diámetro ACB que pasa por ambos ápsides, en el que se toma D como centro de la órbita de Venus, excéntrica al círculo AB. Y sea A la posición del apogeo, estando en la cual la Tierra su centro distaba al máximo del centro de la órbita de Venus, mientras AB es la línea del movimiento medio del Sol, a XLVIII grados y un tercio [en A], pero a CCXXVIII grados y un tercio en B.

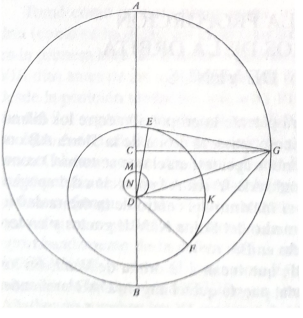
Trácense también las líneas rectas AE, BF, que tocan a la órbita de Venus en los puntos E, F, y únanse DE, DF. En consecuencia, puesto que el ángulo DAE subtiende,



con respecto al centro del círculo, a XLIIII grados y cuatro quintos de circunferencia, y el ángulo AED es recto, el triángulo DAE será de ángulos, y por tanto de lados, conocidos, así DE como es la mitad de la cuerda del doble de DAE medirá 7.046 unidades, de las cuales AD tiene 10.000. Del mismo modo, en el triángulo rectángulo BDF se conoce el ángulo DBF de XLVII y un tercio grados: por tanto, la cuerda DF será de 7.346 unidades, siendo BD de 10.000. En consecuencia, partiendo de esto, si DF igual a DE fuera de 7.046 unidades, BD medirá 9.582 de las mismas unidades. De aquí, la suma ACB de 19.582 de las mismas unidades y la mitad AC de 9.791, y la diferencia CD [BC - BD] de 208. En consecuencia, cuando AC fuera 1 unidad, DE tendrá XLIII minutos y una sexta parte de minuto, y CD un minuto con una cuarta parte aproximadamente. Y midiendo AC 10.000, DE o DF tendrá 7.193 y CD aproximadamente 208. Que era lo que se quería demostrar.

22. ACERCA DEL DOBLE MOVIMIENTO DE VENUS

A pesar de lo dicho, el movimiento regular de Venus alrededor de D no es simple, sobre todo por las razones que se deducen de dos observaciones de Ptolomeo. Una de ellas tuvo lugar en el año XVIII de Adriano, el segundo día del mes Pharmuthi de los egipcios; pero según los romanos era el año CXXXIIII después del nacimiento de Cristo, en el amanecer del día diecinueve antes de las calendas de marzo. Estando entonces el Sol en su movimiento medio a CCCXVIII grados y cinco sextos, Venus, apareciendo por la mañana a CCLXXV grados y un cuarto, había alcanzado el límite extremo de digresión [elongación] en los XLIII grados, XXXV minutos. Tomó la segunda en el año tercero de Antonino, en el mismo mes de Pharmuthi, en el día cuarto, según los egipcios, que era en el año CXL de Cristo, según el calendario romano, en el crepúsculo del día doce antes de las calendas de marzo. También entonces la posición media del Sol estaba a los CCCXVIII grados y cinco sextos, y Venus en la máxima distancia [elongación] de aquél por la tarde de XLVIII grados y un tercio, fue visto a los VII grados y cinco sextos de longitud.



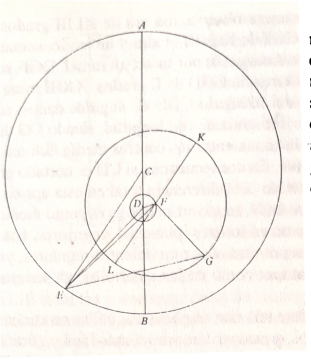
Expuesto esto así, tómese en idéntica órbita terrestre el punto G en el que esté la Tierra de modo que AG sea un cuadrante del círculo, por el que el Sol, en posiciones opuestas en ambas observaciones en ocasiones según su movimiento medio, pareció preceder [apareció al oeste] al apogeo del excéntrico de Venus, y únase CG, a la que se trazará una paralela DK, y las tangentes a la órbita de Venus GE y GF, y únanse DE, DF, DG. En consecuencia, puesto que el

ángulo de elongación matutina EGC en la primera observación era de XLIII grados, XXXV minutos, y en la otra, la vespertina, el CGF de XLVIII grados y un tercio, suman ambos todo el EGF de XCI grados con once doceavos. Y, por tanto, su mitad, DGF, es de XLV grados, LVII minutos y medio, y la diferencia CGD de II grados, XXIII minutos. Pero el DGC es recto; en consecuencia, del triángulo CGD de ángulos dados, se conoce la proporción de los lados, y CD mide 416 unidades de longitud, siendo CG de 10.000. Pero antes se ha demostrado que la distancia entre los centros medía 208 unidades, realizada ahora es mayor casi en el doble. En consecuencia, si CD es cortado en dos partes en el punto M, DM será igualmente de 208, diferencia total en esta aproximación y alejamiento. Si se le cortara de nuevo en N, se advertirá que es el punto medio y regular de este movimiento. Por lo tanto, como en los tres [planetas] superiores, aparece el movimiento de Venus como compuesto por otros dos movimientos regulares, ya sea que esto ocurre por el epiciclo del excéntrico, como en los anteriores, ya sea por otra de las maneras anteriormente dichas.

Sin embargo, esta estrella tiene alguna diferencia con respecto a aquéllas en cuanto al orden y medida de sus propios movimientos, y esto se demostrará más fácil y cómodamente (según creo) por medio de un excéntrico. De este modo, si alrededor de N como centro, y con la distancia [radio] DN describiéramos un pequeño círculo, sobre el que se mueva alrededor y cambie de posición [el centro de] la órbita de Venus según esta ley, que cuando la Tierra cae sobre el diámetro ACB, en el que están los ápsides superior e inferior del excéntrico, el centro de la órbita del planeta estará siempre en la distancia mínima, esto es, en el punto M, pero en el ápside medio (como es G) el centro de la órbita llega al punto D y a la máxima distancia CD. Con lo que es posible comprender, que en el tiempo en que la Tierra recorre una vez su órbita, el centro de la órbita del planeta realiza dos revoluciones alrededor de su centro N, y en la misma dirección que la Tierra, esto es, hacia el este. Pues por tal hipótesis acerca de Venus, el movimiento regular y el aparente coinciden en todos los ejemplos, como quedará claro inmediatamente. Además nos encontramos que todo lo que se ha demostrado hasta ahora con respecto a Venus coincide con nuestro tiempo, a no ser en que la excentricidad ha decrecido un sexto de unidad aproximadamente, de tal modo que la que antes era de 416 unidades, ahora es de 350, lo que nos lo demuestran muchas observaciones.

23. SOBRE EL EXAMEN DEL MOVIMIENTO DE VENUS

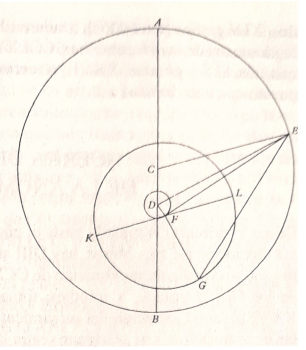
Sobre esto tomamos dos posiciones muy cuidadosamente observadas, una por Timócaris en el año trece de Ptolomeo Filadelfo, en el año LII después de la muerte de Alejandro, al amanecer del día dieciocho del mes Mesori del calendario egipcio, en la cual se transmitió que Venus había sido vista ocupando la posición de la estrella que precede a las cuatro que están en el ala izquierda de Virgo y que es la sexta en la descripción de este signo, y cuya longitud es de CLI grados y medio, su latitud boreal de un grado y un sexto, y es de tercera magnitud. La localización de Venus quedaba así clara. Y la posición media del Sol, según el cálculo, estaba a CXCIIII grados, XXIII minutos. Con este ejemplo en la figura descrita, y permaneciendo el punto A a XLVIII grados, XX minutos, AE será un arco de CXLVI grados, III minutos, y el resto BE de XXXIII grados, LVII minutos y también el ángulo CEG, distancia del planeta desde la posición media del Sol, será de XLII grados, LIII minutos.



En consecuencia, puesto que la línea CD mide 312 unidades, siendo CE de 10.000, y el ángulo BCE es de XXXIII grados, LVII minutos: los que faltan en el triángulo CDE serán, el ángulo CED de I grado, I minuto, y el tercer lado DE de 9.743 unidades. Pero el ángulo CDF, doble del BCE, es de LXVII grados, LIIII minutos; queda del semicírculo el ángulo BDF de CXII grados, VI minutos, y el BDE, exterior del triángulo CDE de XXXIIII grados, LVIII minutos, con lo que consta la medida de todo el EDF de CXLIIII grados, IIII minutos, y DF se conoce como de 104 unidades, siendo DE de 9.743. También en el triángulo DEF, el ángulo DEF medirá XX minutos, y todo el CEF I grado, XXI minutos y el lado EF 9.831 unidades. Pero ahora es patente que todo el CEG es de XLII grados, LIII minutos; en consecuencia, la diferencia FEG será de XLI grados, XXXII minutos, y FG desde el centro de la órbita [radio] es de 7.193 unidades, siendo EF de 9.831. En consecuencia, en el triángulo EFG, conocida la proporción de sus lados y el ángulo FEG, se dan los restantes ángulos, luego el EFG tiene LXXII grados, V minutos; sumando a los cuales el semicírculo dan CCLII grados, V minutos del arco KLG desde el ápside superior de la órbita. Así tenemos demostrado que en el año XIII de Ptolomeo Filadelfo, al amanecer del día XVIII del mes Mesor la anomalía de conmutación de Venus era de CCLII grados, V minutos.

Otra posición de Venus observamos el año MDXXIX de Cristo, cuatro días antes de los idus de marzo, una hora después del ocaso del Sol y al principio de la hora octava después del mediodía. Vimos que la Luna empezó a ocultar a Venus en su parte tenebrosa en la distancia media entre sus cuernos. Y la ocultación duró hasta el final de esa misma hora o un poquito más, hasta que el planeta se vio emerger por la otra parte, en medio de la gibosidad de sus cuernos, hacia el ocaso [oeste]. En consecuencia, es patente que en medio de esta hora, poco más o menos, fue la unión a tenor de los centros entre la Luna y Venus. Y contemplamos este espectáculo en Frauenburg. Venus estaba entonces en su aumento [de elongación] vespertino y más acá del punto de contacto [tangencial] de su órbita [con la línea desde la Tierra].

En consecuencia, han transcurrido desde el nacimiento de Cristo MDXXIX años egipcios, LXXXVII días, VII horas y media según el tiempo aparente, pero según el regular VII horas, XXXIIII minutos. La posición media del Sol alcanza los CCCXXXII grados, XI minutos, la precesión de los equinoccios es de XXVII grados, XXIIII minutos; el movimiento regular de la Luna a partir del Sol era de XXXIII grados, LVII minutos, la anomalía regular a CCV grados y un minuto, el de latitud a LXXI grados, LIX minutos. A partir de estos datos se calculó la posición real de la Luna en X grados, pero partiendo desde el equinoccio a los VII grados, XXIIII minutos de Tauro, con una latitud boreal de I grado XIII minutos. Pero puesto que estaban surgiendo los XV grados de Libra, por ello la paralaje de la Luna en longitud era de XLVIII minutos, en latitud XXXII, y por tanto su posición apareció a los VI grados, XXXVI minutos de Tauro, pero



la longitud en la esfera de las fijas era de IX grados, XII minutos, con una latitud norte de XLI minutos. Y la posición aparente de Venus tenía una distancia por la tarde desde la posición media del Sol de XXXVII grados, I minuto, la distancia de la Tierra al ápside superior de Venus era de LXXVI grados, IX minutos, al oeste.

Repítase ahora la figura de acuerdo con el modo de construcción precedente, excepto que el arco EA o el ángulo ECA sea de LXXVI grados, IX minutos, y su doble CDF de CLII grados, XVIII minutos. La excentricidad CD según se encuentra en nuestros días de 246 unidades y DF de 104, siendo CE de 10.000. Luego tenemos en el triángulo CDE un ángulo dado, la diferencia [180 - 76°, 9'] DCE de CIII grados, LI minutos, comprendido por lados conocidos, a partir de los cuales se demuestra el ángulo CED de un grado, XV minutos y el tercer lado DE de 10.056, y el restante ángulo CDE de LXXIIII grados, LIIII minutos. Pero el CDF, doble del ACE, es de CLII grados, XVIII minutos, de los cuales si resto el ángulo CDE queda el EDF de LXXVII grados, XXIIII minutos.

Así, de nuevo, en el triángulo DEF, dos lados, el DF de 104 unidades y el DE de 10.056 de las mismas unidades, comprenden el ángulo conocido EDF. Se conoce también el ángulo DEF de XXXV minutos, y el lado que queda EF de 10.034; de aquí que todo el ángulo CEF sea de I grado, L minutos. Además, puesto que todo el ángulo CEG es de XXXVII grados, I minuto, según el cual el planeta parece distar [distancia aparente] de la posición media del Sol, si le restamos CEF, quedará FEG de XXXV grados, XI minutos.

En el mismo sentido, también en el triángulo EFG, junto con el ángulo en E dado, se conocen también dos lados, el EF de 10.034 unidades, y el FG de 7.193 de las mismas unidades. A partir de aquí, también los restantes ángulos resultarán calculados, el EGF de LIII y medio grados y el EFG de XCI grados, XIX minutos, en los que distaba el planeta del perigeo real de su órbita. Pero como el diámetro KFL se trazó paralelo a CE, de modo que sea K el apogeo del movimiento regular y L el perigeo, restado el ángulo EFL [del EFG], igual al CEF, quedará el ángulo LFG, y el arco LG, de LXXXIX grados, XXIX minutos, y el resto del semicírculo KG será de XC grados, XXXI minutos, anomalía de conmutación del planeta calculada desde el ápside superior del movimiento regular de su órbita: lo que buscábamos en el momento de nuestra observación.

Pero en la observación de Timócaris [de la anomalía] eran CCLII grados, XV minutos. En consecuencia, en el tiempo intermedio, además de MCXV revoluciones completas, hay CIIC grados, XXVI minutos. Pero el tiempo transcurrido desde el año XIII de Ptolomeo Filadelfo, en el amanecer del día XVIII del mes de Mesori, hasta el año MDXXIX de Cristo, el día IIII antes de los idus de marzo, VII horas y media después de mediodía, es de MDCCC años egipcios, CCXXXVI días, XL minutos aproximadamente. En consecuencia, multiplicando el movimiento de las MCXV revoluciones CIIC grados, XXVI, minutos, por CCCLXV días, y dividiendo el producto por MDCCC años, CCXXXVI días, XL minutos, tendremos un movimiento anual de III veces sesenta gra-

dos, XLV grados [total 225°], I minuto, XLV segundos, III terceros, XL cuartos. Distribuidos éstos de nuevo entre los CCCLXV días queda un movimiento diario de XXXVI minutos, LIX segundos, XXVIII terceros. Con lo que se explica la tabla que hemos expuesto con anterioridad.

24. ACERCA DE LAS POSICIONES DE LA ANOMALÍA DE VENUS

Desde la primera Olimpíada hasta el año XIII de Ptolomeo Filadelfo, al amanecer del día dieciocho del mes Mesor, hay DIII años egipcios, CCXXVIII días, XL minutos, en los que se calcula un movimiento de CCXC grados, XXXIX minutos. Si se restan éstos de los CCLII grados, V minutos, tomada una revolución, quedan CCCXXI grados, XXVI minutos, posición del movimiento en la primera Olimpíada, a partir de la cual las otras posiciones se averiguan según la proporción de movimiento y tiempo dicho ya muchas veces: [en el tiempo] de Alejandro de LXXXI grados, LII minutos, de César de LXX grados, XXVI minutos, de Cristo CXXVI grados, XLV minutos.

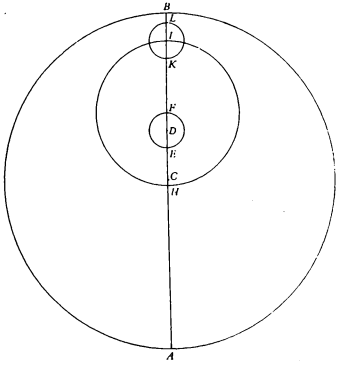
25. SOBRE MERCURIO

Se ha mostrado de qué modo Venus está ligado al movimiento de la Tierra y bajo qué proporción de los círculos se oculta su movimiento regular. Queda Mercurio que, sin duda, se expondrá también bajo el mismo principio asumido, aunque divaga por sus varios movimientos más que aquél [Venus] o que cualquiera de los antes citados. Consta suficientemente, por la experiencia de las observaciones antiguas, el hecho de que Mercurio tiene en el signo de Libra las mínimas digresiones [elongaciones] a partir del Sol, y mayores en su punto opuesto (como es lógico). Sin embargo, no presenta las máximas en este lugar, sino en cualquier otra posición más allá o más acá, como en Géminis o en Acuario, sobre todo en el tiempo de Antonino, según opinión de Ptolomeo, lo que no sucede con ningún otro astro. Los matemáticos antiguos consideraban que la causa de esto era la inmovilidad de la Tierra y que Mercurio se movía en su gran epiciclo sobre el excéntrico, como advirtieran que un solo y simple excéntrico no podía satisfacer estas apariencias (aun concediendo que el excéntrico se moviera no alrededor de su centro, sino de otro centro distinto), se vieron obligados a admitir que el excéntrico, transportando un epiciclo [deferente], se movía sobre otro círculo pequeño, como lo admitían con respecto al excéntrico de la Luna. Por lo tanto, existiendo tres centros, por supuesto el del excéntrico transportando a un epiciclo, otro el del pequeño círculo, y un tercero el del círculo (al que los más modernos llaman «equante»), desechados los dos primeros, concedieron que el epiciclo era transportado regularmente alrededor del centro del equante, que era el más ajeno al centro verdadero y a su relativa [distancia] y a los otros centros preexistentes. Y no pensaron que podía salvarse la apariencia de la estrella con otra relación, como se declara profusamente en la *Composición* ptolomaica.

Pero para librar a este último astro de la injuria y asechanzas de sus detractores y para que quede no menos clara que la de sus precedentes su regularidad con respecto a la Tierra, le asignaremos un excéntrico de excéntrico, en lugar de aquel epiciclo que

consideraba la antigüedad, pero de un modo diferente al de Venus. Y en manera alguna el epiciclo se mueve menos sobre su excéntrico, sino que la estrella se mueve, no según la circunferencia, sino según su diámetro hacia arriba y hacia abajo, lo que puede suceder en movimientos regulares circulares, como se ha expuesto antes con respecto a la precesión de los equinoccios. Y esto no es sorprendente, porque también Proclo en la exposición de los *Elementos* de Euclides confiesa que una línea recta puede ser descrita también por muchos movimientos. Con todo lo cual se demostrarán sus apariencias.

Pero para captar más claramente esta hipótesis, sea AB la gran órbita de la Tierra, su centro C, el diámetro ACB, en el cual, tomado como centro D, entre los puntos B, C y con una distancia [radio] de la tercera parte de CD, trácese el pequeño círculo EF, de modo que en F esté la máxima distancia a partir de C, y en E la mínima. Después con centro en F dibújese la órbita de Mercurio HI. A continuación, haciendo centro en I, ápside superior, añádase el epiciclo que recorre el planeta. Sea HI la órbita excéntrica de un excéntrico que conlleva un epiciclo-excéntrico. Expuesta de este modo la figura, todos estos puntos, por orden, caigan en línea recta AHCEDFKILB. Y entre tanto se supone al planeta en K, esto es, en la distancia mínima desde el centro F, que es FK. Ahora establecido así el punto de arranque de las revoluciones de Mercurio, entiéndase que el centro F realiza dos revoluciones por cada una de la Tierra, y en la misma dirección, que es hacia el oeste; de modo semejante se mueve el planeta en KL, pero a lo largo del diámetro hacia arriba y abajo con respecto al centro de la órbita HI. De esto se sigue que, cuando la Tierra está en A o en B, el centro de Mercurio está en F, esto es, en la posición más alejada de C, pero cuando la Tierra está en los cuadrantes intermedios, el centro está en E, la posición más próxima, de modo contrario a como sucedía en Venus. También según esta ley, cuando Mercurio recorre el diámetro del epiciclo KL, está en la posición más próxima al centro de la órbita que lleva al epiciclo, que es en K cuando la Tierra pasa por el diámetro AB, y cuando está en ambas posiciones medias la estrella alcanzará el lugar más alejado, L. Así se producen las dos revoluciones gemelas, la del centro de la órbita sobre la circunferencia del círculo pequeño EF y la estrella a lo largo del diámetro HK [LK], iguales entre sí y conmensurables por el espacio recorrido anualmente por la Tierra. Pero entretanto el epiciclo, o la línea FI, se mueve con su propio movimiento siguiendo la órbita HI, y su centro regularmente [moviéndose con regularidad] completa una revolución simple en XIIC días aproximadamente con respecto a la esfera de las estrellas fijas. Pero con ese movimiento, que supera al de la Tierra y al que llamamos movimiento de conmutación, vuelve al inicio [realiza una revolución] con respecto a ella [la Tierra] en CXVI días, como más exacta-



mente puede obtenerse por la tabla de los movimientos medios. De ahí se deduce que Mercurio, en su propio movimiento, no siempre describe el mismo arco de círculo, sino uno muy diferente en relación de su distancia al centro de su órbita; así el [arco] mínimo en el punto K, el máximo en L, y el medio alrededor de I, casi del mismo modo que conviene advertir en el epiciclo del epiciclo lunar. Pero lo que la Luna realiza a través de la circunferencia, Mercurio lo hace a lo largo de su diámetro con un movimiento recíproco, compuesto de movimientos regulares. Cómo se realiza esto, lo mostramos más arriba en conexión con la precesión de los equinoccios. Pero sobre ello aportaremos después otros datos más numerosos en relación a las latitudes. Y esta hipótesis es suficiente para todas las apariencias que se observan de Mercurio. Lo cual se evidencia por la historia de las observaciones de Ptolomeo y de otros.

26. ACERCA DE LAS POSICIONES DE LOS ÁPSIDES SUPERIOR E INFERIOR DE MERCURIO

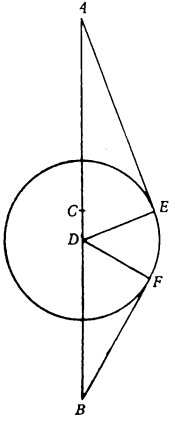
Así pues, ptolomeo observó a Mercurio en el primer año de Antonino, después del ocaso del día veinte del mes Epiphi, estando el planeta por la tarde a su máxima distancia a partir del Sol. Hasta ese momento habían pasado CXXXVII años de Cristo, CXIIX días, XLII minutos y medio, en Cracovia. Y por tanto, la posición media del Sol, según nuestro cálculo, estaba a LXIII grados, L, minutos, y la estrella, según los instrumentos estaba a VII grados (como dijo) de Cáncer. Pero deducida la precesión de los equinoccios, que era entonces de VI grados, XL minutos, la posición de Mercurio se mostró a los XC grados, XX minutos, del principio de Aries en la esfera de las fijas, y la elongación máxima desde la posición media del Sol a XXVI grados y medio.

Tomó otra medición en el año cuarto de Antonino, en el día diecinueve del mes Phamenoth, al amanecer, cuando habían transcurrido desde el principio de los años de Cristo, CXL años, LXVII días y aproximadamente XII minutos, estando la posición media del Sol a CCCIII grados, XIX minutos. Y Mercurio aparecía, según el instrumento, a XIII grados y medio de Capricornio: pero desde el principio fijo de Aries estaba a CCLXXVI grados, XLIX minutos aproximadamente, y por tanto la máxima distancia matutina estaba igualmente a XXVI grados y medio. En consecuencia, siendo iguales los límites de las digresiones [elongaciones] desde la posición media del Sol, es necesario que en el punto medio de esas posiciones, estuvieran los ápsides de Mercurio, esto es, entre los LXIII grados, L minutos y XC grados, XX minutos. Y hay III grados, XXXIIII minutos, y CLXXXIII grados, XXXIIII minutos, en los puntos extremos del diámetro, en los que conviene que estén ambos ápsides de Mercurio, el superior y el inferior. Éstos son distinguidos, como en el caso de Venus, por medio de dos observaciones, la primera de las cuales tuvo lugar en el año diecinueve de Adriano, en la madrugada del día quinto del décimo mes Athyr, mientras la posición media del Sol estaba a CLXXXII grados, XXXVIII minutos. Desde éste, la distancia máxima de Mercurio por la mañana era de XIX grados, III minutos, puesto que la posición aparente de Mercurio estaba a CXLIII grados, XXXV minutos. Y en el mismo año diecinueve de Adriano, que era el CXXXV después del nacimiento de Cristo, en el crepúsculo del día diecinueve del mes Pachon según los egipcios, se encontró a Mercurio con la ayuda del instrumento a XXVII grados, XLIII minutos, de la esfera de las fijas, mientras el Sol en su

movimiento medio estaba a IIII grados, XXVIII minutos. Se evidenció de nuevo, que la distancia máxima de la estrella por la tarde era de XXIII grados, XV minutos, y mayor que la anterior, de donde quedaba bastante claro, que el apogeo de Mercurio en este tiempo no estaba sino a CLXXXIII grados y un tercio aproximadamente. Lo que debía anotarse.

27. SOBRE LA MAGNITUD DE LA EXCENTRICIDAD DE MERCURIO Y DE LA SIMETRÍA DE SUS ÓRBITAS

Por medio de lo anterior, se demuestra también al mismo tiempo la distancia entre los centros y las magnitudes de las órbitas. Sea, pues, AB una línea recta que pasa por los ápsides de Mercurio, A el superior y B el inferior, y es también el diámetro del círculo grande, cuyo centro es C, y haciendo centro en D trácese la órbita del planeta. Constrúyanse las líneas tangentes a la órbita AE, BF, y únanse DE, DF. En consecuencia, puesto que en la primera de las dos observaciones precedentes fue vista la distancia máxima por la mañana en los XIX grados, III minutos, por ello el ángulo CAE era de XIX grados, III minutos. Pero en la otra medición aparecía la máxima distancia vespertina en los XXIII grados y un cuarto.

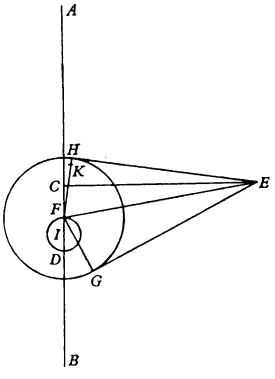


En consecuencia, en ambos triángulos rectángulos AED y BED de ángulos conocidos se conocerán también las proporciones entre sus lados, de manera que si AD fuera de 100.000, ED, distancia desde el centro de la órbita [radio], sería de 32.639. Pero si BD fuera de 100.000 unidades, FD será de 39.474 de tales unidades. Pero según las unidades, en las que FD es igual a ED (como desde el centro [radio] del círculo) de 32.639 unidades, y de las cuales AD tenía 100.000 unidades, el resto DB será de 82.685 unidades; de ahí que la mitad AC sea de 91.342 unidades, y el resto CD de 8.658 unidades, distancia entre los centros. Pero si AC midiera 1 unidad o LX minutos, la distancia desde el centro [radio] de la órbita de Mercurio tendrá XXI minutos, XXVI segundos, y CD será de V minutos, XLI segundos. Y si AC es de 100.000, DF es de 35.733 unidades, CD de 9.479. Que era lo que había que demostrar.

Pero estas magnitudes tampoco permanecen las mismas en todo momento y distan mucho de las que acaecen alrededor de los ápsides medios, cosa que enseñan las longitudes aparentes matutinas y vespertinas observadas en aquellas posiciones que nos transmiten Theón y Ptolomeo. Pues Theón observó el límite vespertino de Mercurio, en el año XIIII de Adriano, el día XVIII del mes Mesor, después de la puesta del Sol, y desde la natividad de Cristo habían transcurrido CXXIX años, CCXVI días, XLV minutos, mientras la posición media del Sol estaba a XCIII grados y medio, esto es, aproximadamente en el ápside medio de Mercurio. Y el planeta fue visto, por medio del instrumento, preceder [al este] a Basiliscus de la constelación Leo en III grados y

cinco sextos y, por tanto, su posición estaba a CXIX grados y tres cuartos y su distancia máxima vespertina era de XXVI grados y un cuarto. Pero Ptolomeo nos transmitió otro límite observado por él en el año segundo de Antonino, al amanecer del día XXI del mes Mesor, en ese momento habían CXXXVIII años de Cristo, CCXIX días, XII minutos, siendo la posición media del Sol de XCIII grados, XXXIX minutos, a partir del cual halla la máxima distancia matutina de Mercurio en XX grados y un cuarto; pues, fue visto a LXXIII grados y dos quintos de la esfera de las fijas.

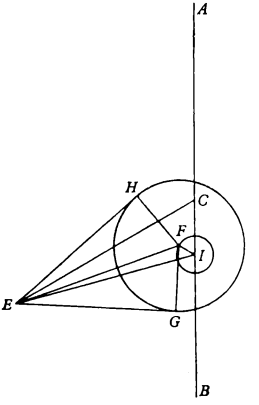
Por consiguiente, repítase el diámetro ACDB de la gran órbita que pasa por los ápsides de Mercurio, como antes, y desde el punto C extiéndase, formando ángulos rectos, la línea del movimiento medio del Sol, que es CE. Tómese entre C y D el punto F, con centro en el cual se describirá la órbita de Mercurio, a la que tocan, las líneas rectas EH, EG, y únanse FG, FH, EF. Se propone encontrar de nuevo el punto F, y la proporción que exista entre la línea que parte del centro [radio] FG con respecto a AC. Así pues, ya que es conocido el ángulo CEG de XXVI grados con un cuarto, y el CEH de XX grados con un cuarto, en consecuencia, la suma HEG de XLVI grados y medio, la mitad HEF de XXIII grados y un cuarto; en consecuencia, la diferencia CEF tendrá III grados. Por todo ello, del triángulo rectángulo CEF conocemos los lados CF de 524 unidades, y la subtensa FE de 10.014, siendo CE igual a AC de 10.000 unidades. Pero antes se ha mostrado que CD completa medía 948 de las mismas unidades, cuando la Tierra estaba en la dirección del ápside superior o inferior del planeta; el exceso DF, diámetro del círculo pequeño, que ha descrito el centro de la órbita de Mercurio, será de 424 unidades, y la línea que parte del centro [radio] IF de 212 unidades. De ahí que la suma CFI sea de 736 unidades.



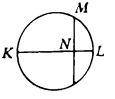
De igual modo, en el triángulo HEF (con un ángulo recto en H) se conoce también HEF de XXIII grados y un cuarto, a partir de los cuales consta FH de 3.947 unidades, si EF tuviera 10.000. Pero si EF fuera de 10.014, de las cuales también CE es de 10.000 unidades, FH sería de 3.953 unidades. Pero antes se ha mostrado que medía 3.573 unidades, al ser igual a FK. Luego el resto HK será de 380 unidades, máxima diferencia de elongación de la estrella desde el centro F de su órbita, que se produce desde el ápside superior e inferior a los [ápsides] medios. A causa de esta elongación y de su diversidad, alrededor del centro F de su órbita, la estrella describe círculos desiguales según distancias diversas, la mínima de 3.573 unidades, la máxima de 3.953 unidades, entre las que tiene que estar la media de 3.763. Y esto es lo que se intentaba demostrar.

28. POR QUÉ LAS DIGRESIONES DE MERCURIO PARECEN MAYORES ALREDEDOR DE LOS LADOS DEL HEXÁGONO, QUE LAS QUE SE PRODUCEN EN EL PERIGEO

También a partir de lo anterior parecerá menos admirable que Mercurio realice alrededor de [los puntos donde] los lados del hexágono [tocan al] del círculo digresiones mayores que en el perigeo, e incluso que sean mayores que las que hemos demostrado, de tal modo que se llegó a pensar, por parte de los antiguos, que en una sola revolución de la Tierra, la órbita de Mercurio se aproximaba dos veces a la Tierra. Así pues, constrúyase el ángulo BCE de LX grados; por tanto el BIF será de CXX grados. Se supone que F realiza dos revoluciones por cada una del centro E de la Tierra. Después únanse EF, EI. En consecuencia, puesto que CI se demostró de 736 unidades, de las que EC tiene 10.000, y se conoce el ángulo ECI de LX grados, por lo tanto el otro lado del triángulo ECI, el EI medirá 9.655 unidades, y el ángulo CEI será de III grados, XLVII minutos, aproximadamente, en los que CIE es menor que ACE. Pero se sabe que éste mide CXX grados; en consecuencia, CIE será de CXVI grados, XIII minutos. Pero también el ángulo FIB mide CXX grados, pues por construcción es doble al ECI, y el que sigue hasta el semicírculo, el CIF de LX grados: queda el EIF de XVI grados, XIII minutos. Pero IF se demostró que medía 212 unidades, de las que EI mide 9.655, y que comprenden el ángulo ya conocido EIF, datos de los que se deduce que el ángulo FEI mide I grado, IIII minutos, y la diferencia CEF de II grados, XLIII minutos, en los que se diferencia el centro de la órbita del planeta de la posición media del Sol, y el otro lado EF de 9.540 unidades.



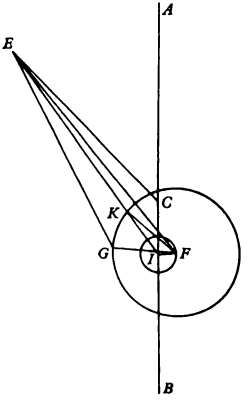
Trácese ahora, con centro en F, la órbita de Mercurio GH, y tiéndase desde E las tangentes a la órbita, EG, EH, y únanse FG, FH. Primero hemos de averiguar cuánto mide la distancia desde el centro [radio] FG o FH en esta situación. Lo haremos así. Tómese un círculo pequeño cuyo diámetro KL tiene 380 unidades, si consideramos que AC mide 10.000, a través de este diámetro u otro igual a él se entiende que la estrella en la línea recta FG o FH se acerca o se aleja de su propio centro F, del modo que anteriormente hemos expuesto con respecto a la precesión de los equinoccios. Y según la hipótesis, por la que BCE subtiende LX grados de arco, tómese KM con los mismos CXX grados, y trácese MN formando ángulos rectos con KL, la cual [MN] es la mitad de la cuerda del doble de KM o del doble de ML y cortará al diámetro por su cuarta parte LN de VC unidades, lo cual se demuestra en los *Elementos* de Euclides en el XIII, XII y en el V, XV.



Por lo tanto, las otras tres partes de KN medirán 285 unidades, que junto con la distancia mínima de la estrella suman 3.858, la línea buscada en esa posición FG o FH, si consideramos a AC de 10.000 unidades semejantes, de las que también se demostró que EF tenía 9.540. Por todo ello, del triángulo rectángulo FEG o FEH se conocen dos lados; por lo tanto, será también conocido el ángulo FEG o el FEH. Puesto que si EF fuera de 10.000 unidades, FG o FH tendrán 4.054 y las dos comprenden un ángulo de XXIII grados, LII minutos, de los que todo el GEH será de XLVII grados, XLV minutos. Pero en el ápside inferior aparecieron sólo XLVI grados y medio, y del mismo modo en el medio XLVI grados y medio. En consecuencia, en uno y otro, éste [la elongación] se hizo mayor en I grado, XIIII minutos, no porque la órbita del planeta esté más cercana a la Tierra de lo que estaba en el perigeo, sino porque el planeta describe en esta posición un círculo mayor que en aquélla. Todo lo cual concuerda tanto con las observaciones presentes como con las antiguas y se deduce de los movimientos regulares.

29. EXAMEN DEL MOVIMIENTO MEDIO DE MERCURIO

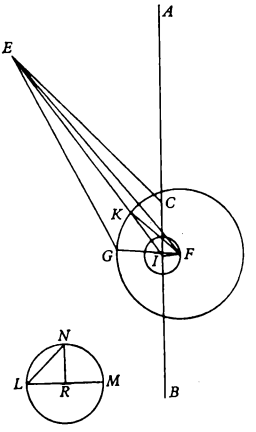
Se encuentra en las mediciones más antiguas que en el año XXI de Ptolomeo Filadelfo, al amanecer del día XIX del mes egipcio Thoth según los egipcios, Mercurio apareció, en la línea recta que pasa por la segunda y tercera de las estrellas que existen en la frente de Scorpio, separado hacia el este por una distancia de dos diámetros lunares, y separado hacia el norte de la primera estrella por un diámetro de Luna. Y es patente que la posición de la primera estrella es de CCIX grados y dos tercios en longitud, y de un grado con un tercio de latitud norte. En cambio la de la segunda era de CCIX de longitud, y de I grado y un medio y un tercio de latitud sur, a partir de las cuales se deducía la posición de Mercurio a CCX grados y dos tercios de longitud, y a I grado y cinco sextos aproximadamente de latitud norte. Habían transcurrido LIX años, XVII días, XLV minutos, desde la muerte de Alejandro, y la posición media del Sol según nuestro cálculo estaba a CCXXVIII grados, VIII minutos, y la distancia matutina de la estrella de XVII grados, XXVIII minutos, estaba creciendo sin cesar, lo que se notó en los IIII días siguientes, con lo que era indiscutible que el planeta aún no había llegado al límite extremo matutino, ni al punto de contacto [tangente] de su órbita, sino que se movía aún en un arco inferior y más cercano a la Tierra.



Pero puesto que el ápside superior estaba a CLXXXIII grados, XX minutos, había con respecto a la posición media del Sol XLIIII grados, XLVIII minutos. Luego sea de nuevo ACB el diámetro de la órbita grande que pasa por I, y desde el centro C proyéctese la línea CE del movimiento medio del Sol, de manera que el ángulo ACE sea de XLIIII grados, XLVIII minutos, y

con centro en I trácese el círculo pequeño, en el que se mueve el centro del excéntrico, que sea F, y tómese el ángulo BIF por hipótesis el doble que el ACE, o sea, de XIC grados, XXXVI minutos, y únanse EF, EI. En consecuencia, puesto que en el triángulo ECI son conocidos dos lados, el CI de 736 unidades y media, de las que CE mide 10.000, que comprenden el ángulo conocido ECI de CXXXV grados, XII minutos, continuo [suplementario] al ACE, el lado restante EI será de 10.534 unidades y el ángulo CEI de II grados, XLIX minutos, en los que EIC es menor que ACE. Luego también se conoce CIE de XLI grados, LIX minutos. Pero también el CIF, que viene después [suplementario] del BIF, es de XC grados, XXIIII minutos. Luego todo el EIF es de CXXXII grados, XXIII minutos, ángulo al que comprenden los lados también dados del triángulo EFI, o sea, el EI de 10.534 unidades y el IF de 211 unidades y media, si a AC lo suponemos de 10.000. De ellos se deduce el ángulo FEI de L minutos, con el lado restante EF de 10.678 unidades y la diferencia CEF de un grado, LIX minutos.

Tómese ahora el círculo pequeño LM cuyo diámetro LM mida 380 unidades, si AC es de 10.000, y el arco LN sea por hipótesis de XIC grados, XXXVI minutos, y trácese su subtensa [cuerda] LN, y NR perpendicular a LM. En consecuencia, puesto que el cuadrado LN es igual al rectángulo LM, LR, dada esta proporción, se da también LR en longitud de 189 unidades aproximadamente, si el diámetro LM mide 380, a tenor de esta línea recta [IR], o de una igual a ella, se distingue la distancia del planeta al centro F de su órbita, en el tiempo en que la línea EC ha completado el ángulo ACE: en consecuencia, sumando estas unidades a las 3.573 de la distancia mínima, resultan en esta posición 3.762 unidades. En consecuencia, con centro en F, y con una distancia de 3.762 unidades, descríbase un círculo y únase EG, que corte al arco convexo en el punto G, de manera que el ángulo CEG sea de XVII grados, XXVIII minutos, medida en la que la estrella parecía alejada [ángulo de elongación] de la posición media del Sol, y únase FG y sea FK paralela a CE. Restando el ángulo CEF de todo el CEG, el resto FEG será de XV grados, XXIX minutos. De ahí que se conocen dos lados del triángulo EFG, el EF de 10.678 unidades y el FG de 3.762, y también el ángulo FEG de XV grados, XXIX minutos, por los que constará el ángulo EFG de XXXIII grados, XLVI minutos, descontando de éste el EFK, igual al CEF, quedará el KFG, y el arco KG de XXXI grados, XLVI minutos, distancia de la estrella desde el perigeo medio de su órbita, que es K, al que si se le añade un semicírculo, suman CCXI grados, XLVII minutos, movimiento medio de la anomalía de conmutación en el momento de esta observación. Lo que se tenía que demostrar.



30. ACERCA DE LOS MOVIMIENTOS DE MERCURIO OBSERVADOS MÁS RECIENTEMENTE

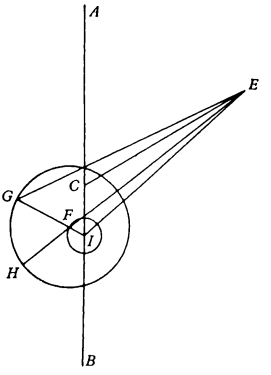
Los antiguos nos mostraron el camino para examinar el curso de esta estrella, pero ayudados por un cielo más sereno, allí donde el Nilo (como dicen) no espira auras [vapores] como entre nosotros el Vístula. Pues la naturaleza nos negó esa comodidad a quienes habitamos una perjudicial región más rigurosa, donde la tranquilidad del aire es más rara y además, a causa de la gran inclinación de la esfera, Mercurio se deja ver muy raramente, aun en su distancia máxima del Sol y no nace a nuestra vista en Aries ni en Piscis, ni tampoco se pone en Virgo y Libra. Pero tampoco se presenta de la misma manera en Cáncer o Géminis, ni cuando el crepúsculo de la noche o el amanecer, y nunca por la noche, a no ser que el Sol hubiera retrogradado en buena parte de Leo.

Por eso esta estrella nos extorsionó con muchos rodeos y trabajos para investigar sus desviaciones. Por esto hemos cambiado a tres posiciones, de las que diligentemente fueron observadas en Nuremberg. La primera por Bernardo Valtero, discípulo del Regiomontano, en el año MCCCCXCI de Cristo, el noveno día de septiembre, el quinto antes de los idus, cinco horas regulares después de la medianoche, por medio del astrolabio armillar dispuesto hacia Palilicio. Y vio a Mercurio a XIII grados y medio de Virgo, con una latitud norte de I grado, la mitad y un tercio [5/6], y en ese momento la estrella estaba en el principio de su ocultación matutina, mientras en los días anteriores la matutina [elongación] había decrecido sin cesar. En consecuencia, habían transcurrido desde el inicio de los años de Cristo MCDXCI años egipcios, CCLVIII días, XII minutos y medio, y la posición media simple del Sol era de CXLIX grados, XLVIII minutos: o sea, desde el equinoccio de primavera a XXVI grados, XLVII minutos de Virgo. Desde allí también la distancia de Mercurio era de XIII grados y un cuarto aproximadamente.

La segunda fue en el año MDIIII de Cristo, el día quinto antes de los idus de enero, VI horas y media después de la medianoche, mientras en el cielo de Nuremberg mediaban los X grados de Scorpio, fue observada por Johann Schöner, a quien apareció la estrella a III grados y un tercio de Capricornio, con una latitud boreal de 0 grados, XLV minutos. La posición media del Sol, por cálculo, a partir del equinoccio primaveral estaba en los XXVII grados, VII minutos, de Acuario, al que el Mercurio matutino precedía en XXIII grados, XLVII minutos. La tercera observación, también del mismo Johann y en el mismo año MDIIII, XV días antes de las calendas de abril, fecha en la que encontró a Mercurio en los XXVI grados con una décima de Aries, a los III grados aproximadamente de latitud norte, mientras los XXV grados de Cáncer estaban en la mitad del cielo de Nuremberg según el astrolabio armillar dispuesto hacia la misma estrella de Palilicio, a las VII horas y media después de mediodía. En ese momento la posición media del Sol a partir del equinoccio de primavera estaba a V grados, XXIX minutos de Aries y el Mercurio vespertino a XXI grados, XVII minutos del Sol.

En consecuencia, transcurrieron desde la primera posición a la segunda XII años egipcios, CXXV días, III minutos, XLV segundos, en los cuales el movimiento simple del Sol era de CXX grados, XIIII minutos, y el de la anomalía de conmutación de Mercurio de CCCXVI grados, I minuto. En el segundo intervalo hay LXIX días, XXXI minutos, XLV segundos; la posición media simple del Sol de LXVIII grados, XXXII minutos, la anomalía media de conmutación de Mercurio de CCXVI grados.

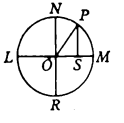
En consecuencia, partiendo de estas tres observaciones, queremos examinar el curso de Mercurio en el tiempo actual, en las cuales creemos que hay que admitir la permanencia aún



ahora de las mediciones tomadas por Ptolomeo, ya que, al igual que en los otros planetas, no se descubre que los buenos autores antiguos se equivocaran en esta parte. Y si, de acuerdo con éstos, tomáramos la posición del ápside del excéntrico, nada sería más deseable con respecto al movimiento aparente de esta estrella. Tomemos, pues, la posición del ápside superior a CCXI grados y medio, esto es, a XXVIII grados y medio del signo Scorpio. Y no fue posible tomarla menor sin peligro de las observaciones. Y así tendremos una anomalía del excéntrico (me refiero a la distancia del movimiento medio del Sol desde el apogeo), en el primer intervalo de CCIIC grados, XV minutos, en el segundo de LVIII grados, XXIX minutos, en el tercero de CXXVII grados, I minuto.

Descríbase, pues, la figura como antes, salvo en que el ángulo ACE se construya de LXI grados, XLV minutos, en los que la línea media del Sol precedía [estaba al oeste] al apogeo en la primera observación, y en lo demás se sigue la misma hipótesis. Y puesto que se da IC de 736 unidades y media, siendo AC de 10.000, y el ángulo IEC en el triángulo ECI: se conocerá también el ángulo CEI de III grados, XXXV minutos, y el lado IE de 10.369, midiendo EC 10.000, y el IF de 211 y media. En consecuencia, en el triángulo EFI hay dos lados que tienen la razón dada, y el ángulo BIF es de CXXIII grados y medio, o sea, el doble de ACE por construcción, y el que le sigue CIF [suplementario de BIF] de LVI grados y medio. Luego todo el EIF mide CXIIII grados, XL minutos. En consecuencia, IEF mide I grado, V minutos y el lado EF 10.371 unidades. De ahí que el ángulo CEF mida II grados y medio.

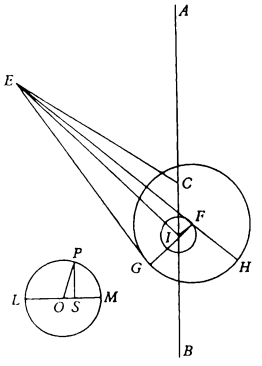
Ahora, para saber cuánto ha aumentado la órbita, cuyo centro es F, a lo largo del movimiento de aproximación y retroceso desde el apogeo o el perigeo, dibújese un círculo pequeño, cortado en cuatro partes iguales por los diámetros LM, NR, con centro en O, y tómese el ángulo POM el doble de ACE, o sea, de CXXIII grados y medio, y desde el punto P trácese una perpendicular PS a LM. En consecuencia, según la proporción dada, OP, o su igual LO, es a OS, esto es, 10.000 es a 8.349, como 190 es a 105, lo que simultáneamente constituye a LS de 295 unidades, siendo AC de 10.000, distancia máxima con la que la estrella se separa del centro F. Añadiendo éstas a las 3.573 unidades de la distancia mínima suman 3.868, distancia presente, con las que desde el centro F descríbase el círculo HG, únanse EG y EF y prolónguese en línea recta EF, FH.



En consecuencia, ya se ha demostrado que el ángulo CEF medía II grados y medio, y se ha observado que el GEC era de XIII grados y un cuarto, distancia matutina de la estrella a partir de la posición media del Sol: luego todo el FEG será de XV grados con tres cuartos. Pero siendo la razón EF a FG, en el triángulo EFG, como 10.371 a 3.868, con el ángulo en E dado, se nos muestra también que el ángulo EGF mide XLIX grados, VIII minutos. De aquí que el otro ángulo exterior [GFH] será de LXIIII grados, LIII minutos, que restados de todo el círculo dejan CCVC grados, VII minutos, de anomalía de conmutación real, a la que si añades el ángulo CEF, resultará la conmutación

media y regular de CCIIIC grados, XXXVII minutos que buscábamos. Si se le añade CCCXVI grados, I minuto, tendremos la anomalía regular de conmutación de la segunda observación de CCLIII grados, XXXVIII minutos, la que ya manifestamos que era cierta y coincidente con la observación.

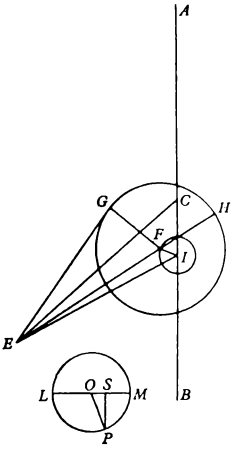
Supongamos al ángulo ACE, de acuerdo con la segunda anomalía del excéntrico, de LVIII grados, XXIX minutos. También entonces en el triángulo CEI se conocen dos lados, el IC de 736 unidades, de las mismas que EC mide 10.000, y el consiguiente ángulo ECI de CXXI grados, XXXI minutos, y en consecuencia el tercer lado EI será de 10.404 unidades, y el ángulo CEI de III grados, XXVIII minutos. De igual modo, en el triángulo EIF, puesto que el ángulo EIF es de CXVIII grados, III minutos, y el lado IF de 211 y media, de las que IE tiene 10.404, el tercer lado EF tendrá 10.505 de las mismas unidades, y el ángulo IEF de LXI minutos, en consecuencia el ángulo restante FEC de II grados, XXVII minutos, que es la prostaféresis del excéntrico, y ésta unida al movimiento medio de conmutación proporciona el verdadero de CCLVI grados, V minutos.



Tomemos también ahora en el epiciclo de aproximación y alejamiento el arco LP, o el ángulo LOP, doble que el ACE, de CXVI grados, LVIII minutos. Entonces, también en el triángulo rectángulo OPS por la conocida razón entre sus lados, el OP es al OS como 10.000 es a 4.535, el OS medirá 85, de las que el OP o el LO tiene 190, y la longitud total de LOS es de 276, que añadida a 3.573, separación mínima, da 3.849. Haciendo centro en F, trácese con este radio el círculo HG, de manera que esté el apogeo en el punto H, del cual dista la estrella por medio del arco HG, CIII grados, LV minutos al oeste, en los que se diferencia una revolución completa del movimiento de conmutación examinado, que era de CCLVI grados, V minutos; y, por lo tanto, el ángulo EFG es de LXXVI grados, V minutos [180°- 103°, 55']. Así, de nuevo, en el triángulo EFG se conocen dos lados, el FG de 3.849 unidades, de las que el EF mide 10.505. Por tanto el ángulo FEG medirá XXI grados, XIX minutos, que junto con el CEF completará todo el CEG de XXIII grados, LXVI minutos, que es la distancia aparente entre el centro C de la órbita grande y el planeta G: lo que se diferencia poco de lo observado.

Esto mismo se confirmará en el tercer caso, suponiendo el ángulo ACE de CXXVII grados, I minuto, o el suplementario BCE de LII grados, LIX minutos: tendremos de nuevo un triángulo en el cual dos lados son conocidos, el CI de 736 unidades y media, de las cuales el EC tiene 10.000, y el ángulo que comprenden ECI de LII grados, LIX minutos, a partir de los cuales se demuestra que el ángulo CEI mide III grados, XXXI minutos, y el lado IE 9.575, de las cuales EC tiene 10.000. Y puesto que el ángulo EIF por construcción se conoce como de XLIX grados, XXVIII minutos, también son conocidos los lados que lo comprenden, el FI de 211 unidades y media y el EI de 9.575, el lado restante medirá 9.440 de esas unidades, y el ángulo IEF de LIX minutos, los cuales restados de todo el IEC, dan el ángulo FEC de II grados, XXXII minutos. Que es la prostaféresis sustractiva

de la anomalía del excéntrico, que sumándola a la anomalía de conmutación media, que calculamos en CIX grados, XXXVIII minutos, añadiéndole los CCXVI grados de la segunda [anomalía], mostrará la verdadera de CXII grados, X minutos.



Tómese ahora en el epiciclo el ángulo LOP, doble al EC, de CV grados, LVIII minutos. Tendremos también entonces, por la razón PO a OS, la OS de 52, de manera que LOS completa sea de 242, la que añadiéndola a la distancia mínima 3.573, tendremos la distancia adecuada 3.815, de acuerdo con la cual descríbase con centro en F un círculo, en el que el ápside superior de las conmutaciones sea H, una vez hecha la prolongación en línea recta de EFH, y de acuerdo con la anomalía real de conmutación se toma el arco HG de CXII grados, X minutos, y únanse G, F: luego el ángulo siguiente [suplementario] GFE será de LXVII grados, L minutos, al que comprenden los lados conocidos, GF de 3.815 unidades, de las que el EF mide 9.440, a partir de los cuales constará el ángulo FEG de XXIII grados, L minutos. Deducida de éste la prostaféresis CEF queda CEG de XXI grados, XVIII minutos, ángulo de apariencia entre la estrella vespertina y el centro de la órbita grande, distancia casi equivalente a la hallada por la observación.

Estas tres posiciones que concuerdan con lo observado atestiguan sin lugar a dudas que la posición del ápside superior del excéntrico, que tomábamos a CCXI grados y medio en la esfera de las fijas en nuestro tiempo y a partir de aquí todo lo que se sigue, era cierta, y que la anomalía de conmutación en la primera posición es de CCIIIC grados, XXXVII minutos, en la segunda de CCLIII grados, XXXVIII minutos, en la tercera de CIX grados, XXXVIII minutos. Que era lo que había que investigar.

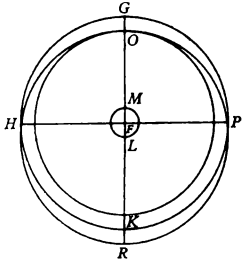
Pero en aquella medición antigua, en el año XXI de Ptolomeo Filadelfo, al amanecer del día XIX del primer mes Thoth según los egipcios, la posición de ápside superior del excéntrico (según Ptolomeo) era de CLXXXIII grados, XX minutos, con respecto a la esfera de las fijas, y la anomalía regular de conmutación a CCXI grados, XLVII minutos. Y el tiempo transcurrido entre esta observación más reciente y aquella antigua, es de MDCCLXVIII años egipcios, CC días, XXXIII minutos. En dicho tiempo el ápside superior del excéntrico se movió en la esfera de las estrellas no errantes XXVIII grados, X minutos, y el movimiento de conmutación, además de las ∇DLXX revoluciones completas, es de CCLVII grados, LI minutos, puesto que en XX años se completan aproximadamente LXIII períodos, que suman en MDCCLX años ∇DXLIIII períodos y en los restantes VIII años y CC días, XXVI revoluciones. De ahí que en los MDCCLXVIII años, CC días, XXXIII minutos, aumentaran, además de las ∇DLXX revoluciones, CCLVII grados, LI minutos, en lo que difieren las posiciones observadas, las antiguas de la primera observada por nosotros, lo que coincide con los cálculos que hemos expuesto en las tablas. Pero si hemos comparado los XXVIII grados, X minutos, con el tiempo en el que se mueve el apogeo del excéntrico, resultará que en LXIII años se habría movido un grado, si el movimiento fuera regular.

31. ACERCA DE LA DETERMINACIÓN DE LAS POSICIONES DE MERCURIO

En consecuencia, puesto que desde el principio de los años de Cristo hasta nuestra última observación transcurrieron MDIIII años egipcios, LXXXVII días, XLVIII minutos, en los que el movimiento de la anomalía de conmutación de Mercurio fue de LXIII grados, XIII minutos, además de las revoluciones completas: restando éstas de los CIX grados, XXXVIII minutos, quedan XLVI grados, XXIIII minutos, posición de la anomalía de conmutación de Mercurio al principio de los años de Cristo. Desde este momento hacia atrás hasta el principio de la primera Olimpíada transcurrieron DCCLXXV años egipcios, XII días y medio, en los que se calculan VC grados, III minutos, además de las revoluciones íntegras, que restados de la posición al principio de los años de Cristo (añadida una revolución), resulta una posición para la primera Olimpíada de CCCXI grados, XXI minutos. También desde aquí hasta la muerte de Alejandro hay CCCCLI años, CCXLVII días, hecho el cálculo correspondiente, la posición alcanzó los CCXIII grados, III minutos.

32. ACERCA DE OTRA RAZÓN SOBRE LA APROXIMACIÓN Y EL ALEJAMIENTO

Antes de que nos alejemos de Mercurio, nos ha parecido bien citar otra manera, también fiable, por la que pueda realizarse y comprenderse la aproximación y el alejamiento. Sea, pues, el círculo GHKP, dividido en cuatro partes iguales, con centro en F, al cual se le traza un círculo homocéntrico LM, y de nuevo con centro en L, pero con una distancia [radio] LFO igual a FG o a FH, se traza otro círculo OR. Y supóngase que toda esta formación de círculos con sus secciones GFR y HFP se mueve alrededor del centro F hacia el oeste, con un movimiento diario de aproximadamente II minutos, VII segundos, o sea, tanto cuanto el movimiento de conmutación de la estrella supera el movimiento de la Tierra en el zodíaco a partir del apogeo del excéntrico de la estrella, el cual entretanto completa el movimiento restante desde el punto G a través de OR el círculo propio de la conmutación, similar aproximadamente al movimiento terreno. Supóngase también que en esta misma revolución, esto es, la anual, el centro de la órbita OR deferente de la estrella se mueve con un movimiento de libración, avanzando y retrocediendo como se ha dicho antes, a través del diámetro LFM, el doble del que se puso antes.



Establecido esto así, suponiendo que la Tierra en su movimiento medio ha llegado frente al apogeo del excéntrico de la estrella, y que al mismo tiempo el centro de la órbita deferente de la estrella está en L y que la estrella está en el punto O, entonces ésta, estando en la mínima distancia desde F, describe en su movimiento total un círculo mínimo, cuya distancia desde el centro [radio] sería FO, y de ahí se sigue que, cuando la Tierra

está cerca del ápside medio, la estrella situada en el punto H a la máxima distancia de F describirá los arcos máximos, o sea, en relación con el círculo cuyo centro es F. Entonces coincidirá el deferente OR con la órbita GH a causa de la unidad de centro en F. Partiendo la Tierra de aquí hacia la zona del perigeo y el centro de la órbita OR hacia el otro extremo M, se coloca también la misma órbita sobre GK, y la estrella en R incide de nuevo en la distancia mínima con respecto a F, y acontece lo mismo que en un principio. Concurren, pues, aquí tres revoluciones iguales entre sí, la de la Tierra hacia el apogeo de la órbita del excéntrico de Mercurio, la libración del centro a través del diámetro LM y la del planeta por la línea FG en la misma dirección, de las que sólo difiere el movimiento de las secciones G, H, K, P, desde el ápside del excéntrico, como hemos dicho.

Con respecto a esta estrella jugó así la naturaleza con tan admirable variedad que, sin embargo, confirmó con un orden perpetuo, cierto e inmutable. Pero hay que advertir, que en los espacios medios de los cuadrantes G, H, K, P, el astro no pasó sin diferencia de longitud, puesto que interviniendo la diversidad de los centros necesariamente realizará alguna prostaféresis, aunque lo impida la inestabilidad de aquel centro. Pues si (por ejemplo), permaneciendo el centro en L, la estrella se alejase de O, alcanzaría la máxima diferencia en H, en relación con la medida de excentricidad FL. Pero de lo presupuesto se sigue que la estrella, saliendo de O, origina y promete cierta diferencia, que debe realizar la distancia FL entre los centros, pero acercándose el centro móvil al punto medio F se aparta más y más de la diversidad prometida y se frustra de tal manera que se desvanece por completo en las secciones medias H, P, donde debía esperarse mayor. Y no obstante (lo confesamos) empequeñecido bajo los rayos del Sol[1] se oculta, y en oriente u occidente, cuando la estrella sale o se pone, no se distingue apenas en las curvaturas del círculo. Y no se ha querido omitir este procedimiento no menos razonable que el anterior y que resultará muy apto para usarse con respecto al alejamiento [movimiento] en latitud.

33. ACERCA DE LAS TABLAS DE PROSTAFÉRESIS DE LAS CINCO ESTRELLAS ERRANTES

Estas cosas referentes al movimiento regular y aparente de Mercurio y de los demás astros errantes se han demostrado y expuesto con cálculos, con tales ejemplos quedará claro por medio de los números las diferencias entre los movimientos en cualquier posición. Pero para un uso más fácil hemos preparado unas tablas particulares para cada uno, de seis columnas y XXX filas, por tríadas de grados, como acostumbramos. Las dos primeras columnas tendrán los números comunes, tanto de la anomalía del excéntrico como de las conmutaciones. La tercera las prostaféresis del excéntrico recogidas, es decir, todas las diferencias que ocurren entre el movimiento regular e irregular de aquellas órbitas. En la cuarta los minutos de las conmutaciones, que son sexagésimos, con los que las conmutaciones por la mayor o menor distancia a la Tierra aumentan o disminuyen. En la quinta las prostaféresis, que son las conmutaciones que suceden en el ápside superior del excéntrico. En la sexta y última el exceso en que superan las que ocurren en el ápside inferior del excéntrico. Y éstas son las tablas.

1. Es decir, cuando el planeta está en conjunción con el Sol.

Tabla de prostaféresis de Saturno

Números comunes		*Prostaféresis del excéntrico*		*Minutos proporcionales*	*Paralajes de la órbita grande*		*Excesos de paralaje*	
°	°	°	'	'	°	'	°	'
3	357	0	20	0	0	17	0	2
6	354	0	40	0	0	34	0	4
9	351	0	58	0	0	51	0	6
12	348	1	17	0	1	7	0	8
15	345	1	36	1	1	23	0	10
18	342	1	55	1	1	40	0	12
21	339	2	13	1	1	56	0	14
24	336	2	31	2	2	11	0	16
27	333	2	49	2	2	26	0	18
30	330	3	6	3	2	42	0	19
33	327	3	23	3	2	56	0	21
36	324	3	39	4	3	10	0	23
39	321	3	55	4	3	25	0	24
42	318	4	10	5	3	38	0	26
45	315	4	25	6	3	52	0	27
48	312	4	39	7	4	5	0	29
51	309	4	52	8	4	17	0	31
54	306	5	5	9	4	28	0	33
57	303	5	17	10	4	38	0	34
60	300	5	29	11	4	49	0	35
63	297	5	41	12	4	59	0	36
66	294	5	50	13	5	8	0	37
69	291	5	59	14	5	17	0	38
72	288	6	7	16	5	24	0	38
75	285	6	14	17	5	31	0	39
78	282	6	19	18	5	37	0	39
81	279	6	23	19	5	42	0	40
84	276	6	27	21	5	46	0	41
87	273	6	29	22	5	50	0	42
90	270	6	31	23	5	52	0	42

(continuación)

Números comunes		*Prostaféresis del excéntrico*		*Minutos proporcionales*	*Paralajes de la órbita grande*		*Excesos de paralaje*	
°	°	°	'	'	°	'	°	'
93	267	6	31	25	5	52	0	43
96	264	6	30	27	5	53	0	44
99	261	6	28	29	5	53	0	45
102	258	6	26	31	5	51	0	46
105	255	6	22	32	5	48	0	46
108	252	6	17	34	5	45	0	45
111	249	6	12	35	5	40	0	45
114	246	6	6	36	5	36	0	44
117	243	5	58	38	5	29	0	43
120	240	5	49	39	5	22	0	42
123	237	5	40	41	5	13	0	41
126	234	5	28	42	5	3	0	40
129	231	5	16	44	4	52	0	39
132	228	5	3	46	4	41	0	37
135	225	4	48	47	4	29	0	35
138	222	4	33	48	4	15	0	34
141	219	4	7	50	4	1	0	32
144	216	4	0	51	3	46	0	30
147	213	3	42	52	3	30	0	28
150	210	3	24	53	3	13	0	26
153	207	3	6	54	2	56	0	24
156	204	2	46	55	2	38	0	22
159	201	2	27	56	2	21	0	19
162	198	2	7	57	2	2	0	17
165	195	1	46	58	1	42	0	14
168	192	1	25	59	1	22	0	12
171	189	1	4	59	1	2	0	9
174	186	0	43	60	0	42	0	7
177	183	0	22	60	0	21	0	4
180	180	0	0	60	0	0	0	0

Tabla de prostaféresis de Júpiter

Números comunes		*Igualación excéntrico*		*Minutos proporcionales*		*Paralajes de la órbita*		*Excesos de paralajes*	
°	°	°	'	'		°	'	°	'
3	357	0	16	0	3	0	28	0	2
6	354	0	31	0	12	0	56	0	4
9	351	0	47	0	18	1	25	0	6
12	348	1	2	0	30	1	53	0	8
15	345	1	18	0	45	2	19	0	10
18	342	1	33	1	3	2	46	0	13
21	339	1	48	1	23	3	13	0	15
24	336	2	2	1	48	3	40	0	17
27	333	2	17	2	18	4	6	0	19
30	330	2	31	2	50	4	32	0	21
33	327	2	44	3	26	4	57	0	23
36	324	2	58	4	10	5	22	0	25
39	321	3	11	5	40	5	47	0	27
42	318	3	23	6	43	6	11	0	29
45	315	3	35	7	48	6	34	0	31
48	312	3	47	8	50	6	56	0	34
51	309	3	58	9	53	7	18	0	36
54	306	4	8	10	57	7	39	0	38
57	303	4	17	12	0	7	58	0	40
60	300	4	26	13	10	8	17	0	42
63	297	4	35	14	20	8	35	0	44
66	294	4	42	15	30	8	52	0	46
69	291	4	50	16	50	9	8	0	48
72	288	4	56	18	10	9	22	0	50
75	285	5	1	19	17	9	35	0	52
78	282	5	5	20	40	9	47	0	54
81	279	5	9	22	20	9	59	0	55
84	276	5	12	23	50	10	8	0	56
87	273	5	14	25	23	10	17	0	57
90	270	5	15	26	57	10	24	0	58

(continuación)

Números comunes		*Igualación excéntrico*		*Minutos proporcionales*		*Paralajes de la órbita*		*Excesos de paralajes*	
°	°	°	'	'	"	°	'	°	'
93	267	5	15	28	33	10	25	0	59
96	264	5	15	30	12	10	33	1	0
99	261	5	14	31	43	10	34	1	1
102	258	5	12	33	17	10	34	1	1
105	255	5	10	34	50	10	33	1	2
108	252	5	6	36	21	10	29	1	3
111	249	5	1	37	47	10	23	1	3
114	246	4	55	39	0	10	15	1	3
117	243	4	49	40	25	10	5	1	3
120	240	4	41	41	50	9	54	1	2
123	237	4	32	43	18	9	41	1	1
126	234	4	23	44	46	9	25	1	0
129	231	4	13	46	11	9	8	0	59
132	228	4	2	47	37	8	56	0	58
135	225	3	50	49	2	8	27	0	57
138	222	3	38	50	22	8	5	0	55
141	219	3	25	51	46	7	39	0	53
144	216	3	13	53	6	7	12	0	50
147	213	2	59	54	10	6	43	0	47
150	210	2	45	55	15	6	13	0	43
153	207	2	30	56	12	5	41	0	39
156	204	2	15	57	0	5	7	0	35
159	201	1	59	57	37	4	32	0	31
162	198	1	43	58	6	3	56	0	27
165	195	1	27	58	34	3	18	0	23
168	192	1	11	59	3	2	40	0	19
171	189	0	53	59	36	2	0	0	15
174	186	0	35	59	58	1	20	0	11
177	183	0	17	60	0	0	40	0	6
180	180	0	0	60	0	0	0	0	0

Tablas de prostaféresis de Marte

Números comunes		*Igualación excéntrico*		*Minutos proporcionales*		*Paralajes de la órbita*		*Excesos de paralajes*	
°	°	°	'	'	''	°	'	°	'
6	354	1	5	0	2	2	16	0	17
9	351	1	37	0	7	3	24	0	25
12	348	2	8	0	15	4	31	0	33
15	345	2	39	0	28	5	38	0	41
18	342	3	10	0	42	6	45	0	50
21	339	3	41	0	57	7	52	0	59
24	336	4	11	1	13	8	58	1	8
27	333	4	41	1	34	10	5	1	16
30	330	5	10	2	1	11	11	1	25
33	327	5	38	2	31	12	16	1	34
36	324	6	6	3	2	13	22	1	43
39	321	6	32	3	32	14	26	1	52
42	318	6	58	4	3	15	31	2	2
45	315	7	23	4	37	16	35	2	11
48	312	7	47	5	16	17	39	2	20
51	309	8	10	6	2	18	42	2	30
54	306	8	32	6	50	19	45	2	40
57	303	8	53	7	39	20	47	2	50
60	300	9	12	8	30	21	49	3	0
63	297	9	30	9	27	22	50	3	11
66	294	9	47	10	25	23	48	3	22
69	291	10	3	11	28	24	47	3	34
72	288	10	19	12	33	25	44	3	46
75	285	10	32	13	38	26	40	3	59
78	282	10	42	14	46	27	35	4	11
81	279	10	50	16	4	28	29	4	24
84	276	10	56	17	24	29	21	4	36
87	273	11	1	18	45	30	12	4	50
90	270	11	5	20	8	31	0	5	5

(continuación)

Números comunes		*Igualación excéntrico*		*Minutos proporcionales*		*Paralajes de la órbita*		*Excesos de paralajes*	
°	°	°	'	'	"	°	'	°	'
93	267	11	7	21	32	31	45	5	20
96	264	11	8	22	58	32	30	5	35
99	261	11	7	24	32	33	13	5	51
102	258	11	5	26	7	33	53	6	7
105	255	11	1	27	43	34	30	6	25
108	252	10	56	29	21	35	3	6	45
111	249	10	45	31	2	35	34	7	4
114	246	10	33	32	46	35	59	7	25
117	243	10	11	34	31	36	21	7	46
120	240	10	7	36	16	36	37	8	11
123	237	9	51	38	1	36	49	8	34
126	234	9	33	39	46	36	54	8	59
129	231	9	13	41	30	36	53	9	24
132	228	8	50	43	12	36	45	9	49
135	225	8	27	44	50	36	25	10	17
138	222	8	2	46	26	35	59	10	47
141	219	7	36	48	1	35	25	11	15
144	216	7	7	49	35	34	30	11	45
147	213	6	37	51	2	33	24	12	12
150	210	6	7	52	22	32	3	12	35
153	207	5	34	53	38	30	26	12	54
156	204	5	0	54	50	28	5	13	28
159	201	4	25	56	0	26	8	13	7
162	198	3	49	57	6	23	28	12	47
165	195	3	12	57	54	20	21	12	12
168	192	2	35	58	22	16	51	10	59
171	189	1	57	58	50	13	1	9	1
174	186	1	18	59	11	8	51	6	40
177	183	0	39	59	44	4	32	3	28
180	180	0	0	60	0	0	0	0	0

Tablas de prostaféresis de Venus

Números comunes		*Igualación excéntrico*		*Minutos proporcionales*		*Paralajes de la órbita*		*Excesos de paralajes*	
°	°	°	'	'	"	°	'	°	'
3	357	0	6	0	0	1	15	0	1
6	354	0	13	0	0	2	30	0	2
9	351	0	19	0	10	3	45	0	3
12	348	0	25	0	39	4	59	0	5
15	345	0	31	0	58	6	13	0	6
18	342	0	36	1	20	7	28	0	7
21	339	0	42	1	39	8	42	0	9
24	336	0	48	2	23	9	56	0	11
27	333	0	53	2	59	11	10	0	12
30	330	0	59	3	38	12	24	0	13
33	327	1	4	4	18	13	37	0	14
36	324	1	10	5	3	14	50	0	16
39	321	1	15	5	45	16	3	0	17
42	318	1	20	6	32	17	16	0	18
45	315	1	25	7	22	18	28	0	20
48	312	1	29	8	18	19	40	0	21
51	309	1	33	9	31	20	52	0	22
54	306	1	36	10	48	22	3	0	24
57	303	1	40	12	8	23	14	0	26
60	300	1	43	13	32	24	24	0	27
63	297	1	46	15	8	25	34	0	28
66	294	1	49	16	35	26	43	0	30
69	291	1	52	18	0	27	52	0	32
72	288	1	54	19	33	28	57	0	34
75	285	1	56	21	8	30	4	0	36
78	282	1	58	22	32	31	9	0	38
81	279	1	59	24	7	32	13	0	41
84	276	2	0	25	30	33	17	0	43
87	273	2	0	27	5	34	20	0	45
90	270	2	0	28	28	35	21	0	47

(continuación)

Números comunes		*Igualación excéntrico*		*Minutos proporcionales*		*Paralajes de la órbita*		*Excesos de paralajes*	
°	°	°	'	'	"	°	'	°	'
93	267	2	0	29	58	36	20	0	50
96	264	2	0	31	28	37	17	0	53
99	261	1	59	32	57	38	13	0	55
102	258	1	58	34	26	39	7	0	58
105	255	1	57	35	55	40	0	1	0
108	252	1	55	37	23	40	49	1	4
111	249	1	53	38	52	41	36	1	8
114	246	1	51	40	19	42	18	1	11
117	243	1	48	41	45	42	59	1	14
120	240	1	45	43	10	43	35	1	18
123	237	1	42	44	37	44	7	1	22
126	234	1	39	46	6	44	32	1	26
129	231	1	35	47	36	44	49	1	30
132	228	1	31	49	6	45	4	1	36
135	225	1	27	50	12	45	10	1	41
138	222	1	22	51	17	45	5	1	47
141	219	1	17	52	33	44	51	1	53
144	216	1	12	53	48	44	22	2	0
147	213	1	7	54	28	43	36	2	6
150	210	1	1	55	0	42	34	2	13
153	207	0	55	55	57	41	12	2	19
156	204	0	49	56	47	39	20	2	34
159	201	0	43	57	33	36	58	2	27
162	198	0	37	58	16	33	58	2	27
165	195	0	31	58	59	30	14	2	27
168	192	0	25	59	39	25	42	2	16
171	189	0	19	59	48	20	20	1	56
174	186	0	13	59	54	14	7	1	26
177	183	0	7	59	58	7	16	0	46
180	180	0	0	60	0	0	16	0	0

Tablas de prostaféresis de Mercurio

Números comunes		*Igualación excéntrico*		*Minutos proporcionales*		*Paralajes de la órbita*		*Excesos de paralajes*	
°	°	°	'	'	"	°	'	°	'
3	357	0	8	0	3	0	44	0	8
6	354	0	17	0	12	1	28	0	15
9	351	0	26	0	24	2	12	0	23
12	348	0	34	0	50	2	56	0	31
15	345	0	43	1	43	3	41	0	38
18	342	0	51	2	42	4	25	0	45
21	339	0	59	3	51	5	8	0	53
24	336	1	8	5	10	5	51	1	1
27	333	1	16	6	41	6	34	1	8
30	330	1	24	8	29	7	15	1	16
33	327	1	32	10	35	7	57	1	24
36	324	1	39	12	50	8	38	1	32
39	321	1	46	15	7	9	18	1	40
42	318	1	53	17	26	9	59	1	47
45	315	2	0	19	47	10	38	1	55
48	312	2	6	22	8	11	17	2	2
51	309	2	12	24	31	11	54	2	10
54	306	2	18	26	17	12	31	2	18
57	303	2	24	29	17	13	7	2	26
60	300	2	29	31	39	13	41	2	34
63	297	2	34	33	59	14	14	2	42
66	294	2	38	36	12	14	46	2	51
69	291	2	43	38	29	15	17	2	59
72	288	2	47	40	45	15	46	3	8
75	285	2	50	42	58	16	14	3	16
78	282	2	53	45	6	16	40	3	24
81	279	2	56	46	59	17	4	3	32
84	276	2	58	48	50	17	27	3	40
87	273	2	59	50	36	17	48	3	48
90	270	3	0	52	2	18	6	3	56

(continuación)

Números comunes		*Igualación excéntrico*		*Minutos proporcionales*		*Paralajes de la órbita*		*Excesos de paralajes*	
°	°	°	'	'	"	°	'	'	'
93	267	3	0	53	43	18	23	4	3
96	264	3	1	55	4	18	37	4	11
99	261	3	0	56	14	18	48	4	19
102	258	2	59	57	14	18	56	4	27
105	255	2	58	58	1	19	2	4	34
108	252	2	56	58	40	19	3	4	42
111	249	2	55	59	14	19	3	4	49
114	246	2	53	59	40	18	59	4	54
117	243	2	49	59	57	18	53	4	58
120	240	2	44	60	0	18	42	5	2
123	237	2	39	59	49	18	27	5	4
126	234	2	34	59	35	18	8	5	6
129	231	2	28	59	19	17	44	5	9
132	228	2	22	58	59	17	17	5	9
135	225	2	16	58	32	16	44	5	6
138	222	2	10	57	56	16	7	5	3
141	219	2	3	56	41	15	25	4	59
144	216	1	55	55	27	14	38	4	52
147	213	1	47	54	55	13	47	4	41
150	210	1	38	54	25	12	52	4	26
153	207	1	20	53	54	11	51	4	10
156	204	1	19	53	23	10	44	3	53
159	201	1	10	52	54	9	34	3	33
162	198	1	0	52	33	8	20	3	10
165	195	0	51	52	18	7	4	2	43
168	192	0	41	52	8	5	43	2	14
171	189	0	31	52	3	4	19	1	43
174	186	0	21	52	2	2	54	1	9
177	183	0	10	52	2	1	27	1	35
180	180	0	0	52	2	0	0	0	0

34. CÓMO SE CALCULAN LAS POSICIONES DE ESTAS CINCO ESTRELLAS EN LONGITUD

Con la ayuda de estas tablas así expuestas por nosotros calcularemos sin dificultad las posiciones en longitud de estas cinco estrellas errantes. En todas ellas el modo del cálculo es el mismo, aunque difieren algo los tres exteriores del de Venus y Mercurio. Así pues, hablemos primero de Saturno, Júpiter y Marte, cuyo cálculo es tal que para cualquier tiempo propuesto muestran los movimientos medios, me refiero al movimiento simple del Sol y al de conmutación del planeta, del modo antes expuesto. Después, la posición del ápside superior del excéntrico del planeta se resta de la posición simple del Sol y de lo que quedara de esto se resta la anomalía de conmutación. Lo que queda, pues, es la anomalía del excéntrico de la estrella, cuyo número lo buscaremos entre los comunes en cualquiera de las dos primeras columnas de la tabla, y por el contrario en la tercera columna tomaremos la igualación del excéntrico, y en la que sigue los minutos proporcionales. Añadamos esta igualación al movimiento de conmutación y la restaremos de la anomalía del excéntrico si el número que hayamos encontrado lo hubiéramos hallado en la primera columna, y, por el contrario, lo restaremos de la anomalía de conmutación y lo añadiremos a la anomalía del excéntrico si estuviera en la segunda columna. Y el resultado de la suma o de la resta serán las anomalías corregidas de conmutación y del excéntrico, reservando entretanto los minutos de las proporciones para el uso que se ha de decir luego.

Después buscaremos la anomalía así corregida entre los primeros números comunes, y en la quinta columna tomaremos la prostaféresis de conmutación con su exceso puesto al final, de cuyo exceso tomaremos la parte proporcional según el número de minutos proporcionales, la que añadiremos siempre a la prostaféresis: y el resultado de la suma será la conmutación real del planeta, que hay que restar de la anomalía de conmutación regularizada, si fuera mayor que el semicírculo, y sumarla en el caso de un semicírculo mayor. Así pues, tendremos la distancia, hacia el oeste, real y aparente de la estrella desde la posición media del Sol, la cual, restándola de la posición media del Sol, dará la posición de la estrella que se buscaba con respecto a la esfera de las no errantes. Finalmente, si se le suma la precesión de los equinoccios, se determinará su posición a partir del punto de sección primaveral [equinoccio de primavera]. En Venus y Mercurio usamos, en vez de la anomalía del excéntrico, la distancia desde el ápside superior a la posición media del Sol, y por medio de esta anomalía regularizaremos el movimiento de conmutación, como ya se ha dicho, y la conmutación misma. Pero si la prostaféresis del excéntrico junto con la paralaje regularizada fueran de un mismo modo de ser o especie [ambas del mismo signo], se suman o se restan a la vez de la posición media del Sol. Pero si fueran de diversas especies, se resta la menor de la mayor, y con lo que queda se hace lo que hemos dicho, según la propiedad aditiva o sustractiva del número mayor y resultará la posición aparente que se busca.

35. ACERCA DE LAS DETENCIONES Y RETROGRADACIONES DE LAS CINCO ESTRELLAS ERRANTES

También parece pertenecer al razonamiento del movimiento que se produce según la longitud, el conocer sus detenciones, regresiones y retrogradaciones, dónde, cuándo y cuántas ocurren. Sobre estas cosas trabajaron no poco los matemáticos, sobre todo Apolonio de Perga; pero de este modo, casi con una sola irregularidad, aquella con la que se mueven las propias estrellas con respecto al Sol, a la que nosotros llamamos conmutación debido al movimiento de la órbita grande de la Tierra. Puesto que si los círculos de las estrellas fueran homocéntricos a la gran órbita de la Tierra, por los que todas las estrellas se mueven con curso dispar en la misma dirección, esto es, hacia el oeste, y alguna estrella en su órbita y dentro de la órbita grande, como Venus y Mercurio, fuera más veloz que el movimiento de la Tierra, desde la que trazando una línea recta que corte la órbita de la estrella, de manera que tomando la mitad de su sección en la órbita esté en la misma razón con respecto a la línea que va desde nuestro punto de mira, que es la Tierra, hasta el arco inferior y convexo de la órbita cortada, que la razón existente entre el movimiento de la Tierra con respecto a la velocidad de la estrella, entonces señalado un punto en la línea trazada así hasta el arco de perigeo del círculo de la estrella, separa la retrogradación de la progresión, de tal modo que la estrella situada en esa posición presenta la apariencia de un estacionamiento.

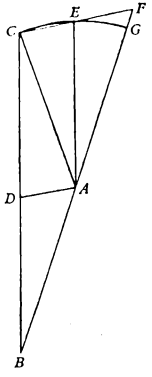
De igual modo en las otras tres exteriores, cuyo movimiento es más lento que la velocidad de la Tierra. Trazada una línea recta desde nuestro punto de vista que corte la gran órbita, de tal modo que la mitad del segmento que está en la órbita tenga con respecto a la línea que va desde la estrella hasta nuestro punto de vista situado en la superficie más cercana y convexa de la órbita la misma razón que tiene el movimiento de la estrella con respecto a la velocidad de la Tierra: entonces la estrella presenta a nuestra vista la imagen de una posición estática.

Si la mitad del segmento que está en el círculo, como se ha dicho, tiene con respecto al otro segmento exterior una razón mayor que la que tiene la velocidad de la Tierra con respecto a la de Venus o Mercurio, o que la del movimiento de los otros tres astros anteriores con respecto a la velocidad de la Tierra, la estrella avanzará hacia el este; en cambio, si fuera menor, retrocederá hacia el oeste.

Para demostrar todo esto Apolonio establece una proposición que, aunque se refiere a la hipótesis de la inmovilidad de la Tierra, no menos coincide con nuestros principios sobre la movilidad de la Tierra, y por ello nosotros también la utilizaremos. Y podemos enunciarla de esta manera: si el lado mayor de un triángulo se corta de tal manera que uno de los segmentos no sea menor que el lado adyacente, la razón de tal segmento al segmento restante será mayor que la de los ángulos que están en el lado cortado en orden inverso.

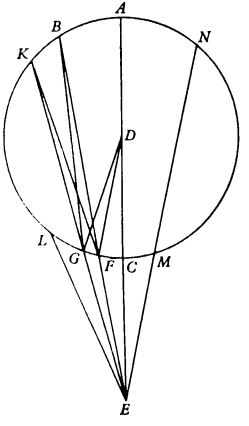
Sea, digo, BC el lado mayor del triángulo ABC, en el cual si se toma CD no menor que AC, digo, que CD estará con respecto a BD en una razón mayor que el ángulo ABC con respecto a BCA.

Y se demuestra de este modo: complétese el paralelogramo ADCE y prolónguese BA y CE hasta que coincidan en el punto F. Puesto que AE no es menor que AC, en consecuencia el círculo trazado con centro en A y con una distancia [radio] AE pasará



por C o por encima de él; supongamos que pasa por C, y es GEC. Siendo el triángulo AEF mayor que el sector AEG, pero el triángulo AEC menor que el sector AEC, el triángulo AEF tiene con respecto al AEC una razón mayor que G el sector AEG con respecto al sector AEC. Pero así como el triángulo AEF es al AEC, así será la base FE a EC; luego tiene FE con respecto a E una razón mayor que el ángulo FAE con respecto al ángulo EAC. Pero tal como FE sea a EC, así será CD con respecto a DB; pues el ángulo FAE es igual al ABC y EAC igual a BCA. En consecuencia, CD tiene una razón mayor con respecto a DB que el ángulo ABC con respecto al ACB. Luego es evidente que la razón será mucho mayor si no se considera CD igual a AC, esto es, a AE, sino que se supone mayor que él.

Sea ahora el círculo de Venus o de Mercurio ABC con centro en D, y fuera del círculo la Tierra E se mueve alrededor del mismo centro D, y desde nuestro punto de vista E trácese la línea recta ECDA que pase, por el centro del círculo. Sea A el lugar más alejado de la Tierra, C el más próximo, y supóngase que DC tiene con respecto a CE una razón mayor que la del movimiento del punto de vista con respecto a la velocidad de la estrella. En consecuencia, es posible encontrar una línea EFB que sea de tal modo que la mitad de BF tenga la misma razón con respecto a FE que la del movimiento de visión con respecto al curso de la estrella; pues la línea EFB, alejándose del centro D, disminuye en FB y aumenta en EF hasta que se completa el postulado. Digo que la estrella situada en el punto F nos mostrará una apariencia de estacionamiento, y cualquier arco que tomáramos a una y otra parte de F, la encontraremos avanzando si se toma hacia el apogeo, y retrocediendo hacia el perigeo.



Tómese, pues, en primer lugar el arco FG hacia el apogeo, prolónguese EGK y únanse BG, DG, DF. En consecuencia, puesto que el segmento BF del lado mayor BE del triángulo BGE es mayor que BG, BF tiene una razón mayor con respecto a EF que el ángulo FEG con respecto a GBF. De ahí también que la mitad del BF tiene con respecto a FE una razón mayor que el ángulo FEG con respecto al doble del ángulo GBF, esto es, el ángulo GDF; pero la razón de la mitad del BF con respecto a FE es la misma que la del movimiento de la Tierra con respecto al curso de la estrella; en cambio el ángulo FEG tiene con respecto a GDF una razón menor que la que tiene la velocidad de la Tierra con respecto a la velocidad de la estrella. Por consiguiente, el ángulo que tiene con respecto al ángulo FDG la misma razón que la del movimiento de la Tierra con respecto al curso de la estrella, es mayor que el FEG, en consecuencia será igual al FEL. Luego, en el tiempo en que la estrella recorre el arco de su órbita GF, se estimará

que nuestro punto de vista ha recorrido el espacio contrario a aquel que está entre la línea EF y la línea EL. Se manifiesta que en el tiempo en que el arco GF traslada la estrella hacia nuestro punto de vista al oeste, por el ángulo menor FEG, el tránsito de la Tierra la retrajo hacia el este por el ángulo mayor FEL, de tal modo que la estrella, que está aún en el ángulo GEL, parece no haberse detenido.

Se manifiesta también que por el mismo procedimiento se demostrará su contrario. Si suponemos que, en el mismo trazado, la mitad de GK tiene con respecto a GE la misma razón que tiene el movimiento de la Tierra con respecto a la velocidad del planeta, y tomamos el arco GF hacia el perigeo desde la línea recta EK: unida, pues, KF y haciendo el triángulo KEF, en el que se dibuja GE mayor que EF, KG tendrá con respecto a GE una razón menor que el ángulo FEG a FKG. Así, también la mitad de KG tiene con respecto a GF una razón menor que la del ángulo FEG con respecto al doble de FKG, esto es, el ángulo GDF, tal como se ha demostrado antes. Y por el mismo procedimiento se deduce que el ángulo GDF tiene con respecto al ángulo FEG una razón menor que la de la velocidad de la estrella con respecto a la velocidad del punto de vista. Y así, hecho el ángulo GDF mayor para que tengan la misma razón, la estrella realizará un avance hacia el oeste mayor que el que su progresión exige.

De todo ello se manifiesta también que si trazásemos arcos iguales FC y CM, el estacionamiento segundo estará en el punto M; una vez trazada la línea EMN, la mitad de MN con respecto a ME tendrá la misma razón que la velocidad de la Tierra con respecto a la velocidad de la estrella, como la mitad de BF era FE, y por tanto los puntos F y M ambos señalan estacionamientos, y el arco FCM es regresivo y el restante del círculo progresivo.

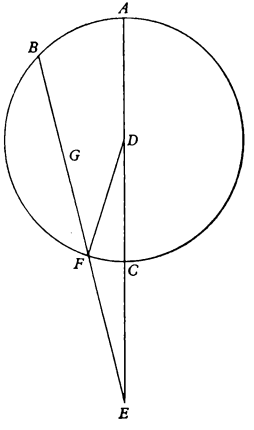
Se sigue también que, en tales distancias, DC a CE no será una razón mayor que la de la velocidad de la Tierra con respecto a la de la estrella, ni será posible llevar otra línea recta con una razón igual a ésta, ni la estrella parecerá pararse o adelantarse. Pues, suponiendo en el triángulo DGE, que la recta DC no fuera menor que la EG, el ángulo CEG con respecto al CDG tendrá una razón menor que la recta DC a la CE; pero la razón de DC a CE no es mayor que la de la velocidad de la Tierra a la de la estrella: en consecuencia, también el ángulo CEG tendrá una razón menor con respecto a CDG que la de la velocidad de la Tierra con respecto a la de la estrella. Cuando esto suceda la estrella avanzará y no encontraremos en la órbita del planeta un arco por el que parezca retroceder.

Esto referente a Venus y Mercurio, que están dentro de la órbita grande. Acerca de los otros tres, exteriores a la órbita, se demostrarán del mismo modo, y con el mismo dibujo (cambiados sólo los nombres), de manera que pongamos en ABC la órbita grande de la Tierra y la circulación de nuestro punto de vista, y en E a la estrella cuyo movimiento en su órbita sea menor que la rapidez de nuestro punto de vista en la órbita grande. Por lo demás, la demostración procede por los mismos términos que antes.

36. CÓMO SE DIFERENCIAN LOS TIEMPOS, POSICIONES Y ARCOS DE LAS REGRESIONES

Si las órbitas por las que se mueven las estrellas errantes fueran homocéntricas a la gran órbita, fácilmente constaría lo que prometen las demostraciones precedentes (existiendo siempre la misma razón entre la rapidez de la estrella y la del punto de vista); pero son excéntricas y, por tanto, de movimiento irregular según la apariencia. Por esa cau-

sa convendrá que nosotros tomemos los movimientos discretos [irregulares] y regularizados [corregidos] y sus diferencias de velocidad y que los utilicemos en las demostraciones, y no los simples y regulares, a no ser que suceda que la estrella esté alrededor de las longitudes medias, que es cuando únicamente parece moverse con movimiento medio por su órbita.



Mostraremos esto con un ejemplo de Marte, en el que los retrocesos de los demás se harán más claros. Sea, pues, la gran órbita ABC, en la que se mueve nuestro punto de vista, y la estrella en el punto E. Desde ahí trácese, pasando por el centro de la órbita, la línea recta ECDA y la EFB; la mitad de BF, esto es, GF, tendrá con respecto a EF la misma razón que la velocidad variable de la estrella con respecto a la velocidad del punto de mira, en la que supera a la estrella. Nos proponemos encontrar el arco FC de la mitad de la retrogradación, o el ABF, para saber cuánto dista la estrella, al realizar un estacionamiento, del punto A, el más lejano, y el ángulo comprendido por FEC; a partir de éstos predeciremos el tiempo y la posición de tal modificación de la estrella. Y supongamos a la estrella alrededor del ápside medio del excéntrico, cuando el movimiento de longitud y el de anomalía difieren poco de los regulares.

En consecuencia, en el caso de Marte la magnitud de su movimiento medio es de 1 unidad, 8 minutos, 7 segundos, esto es, la línea GF, mientras que el movimiento de conmutación, o sea, el movimiento de nuestro punto de vista con respecto al movimiento medio de la estrella, se calcula en 1 unidad, y es la recta EF, de manera que toda EB tiene 3 unidades, 16 minutos, 14 segundos, y el rectángulo comprendido por los mismos, BEF, 3 unidades, 16 minutos, 14 segundos. Y demostramos que DA, distancia desde el centro de la órbita [radio], mide 6.580, de las que DE mide 10.000; pero si DE midiera 60, AD valdrá 39, 29, y toda AE es a EC como 99, 29 es a 20, 31, y el rectángulo comprendido por ellos [AE, EC] 2.041, 4, que se entiende igual al BEF. En consecuencia, por comparación [reducción], hecha la división de 2.041, 4 entre 3, 16, 14, nos sale 624, 4, y el lado EF de 24, 58, 52, en las unidades en las que se proponía a DE igual a 60, pero si se le supone de 10.000, EF tendrá 4.163, 5, y de las que DF vale 6.580.

En consecuencia, en el triángulo DEF de lados conocidos tendremos el ángulo DEF de XXVII grados, XV minutos, que es el ángulo de regresión de la estrella, y el ángulo CDF de la anomalía de conmutación de XVI grados, L minutos. Como en el primer estacionamiento la estrella apareció en la línea EF, y la estrella en el acronicio [opuesta al Sol] en EC; si la estrella no se moviera hacia el este, los XVI grados, L, del arco CF comprenderían los XXVII grados, XV, de regresión hallados en el ángulo AEF (según la razón expuesta entre la velocidad de la estrella y la velocidad del punto de vista), y los XVI, L, corresponden a las secciones de la anomalía de conmutación, y aproximadamente XVIIII, VI, XXXIX, corresponden a las secciones de la anomalía en longitud,

que restados de los XXVII, XV, quedan desde el otro estacionamiento hasta el acronicio [oposición solar] VIII grados, VIII minutos, y en 36 días y medio aproximadamente se completan los XVIIII, VI, XXXIX de aquella anomalía en longitud, y de ahí la regresión total de XVI grados XVI, en 73 días.

Demostrado esto en las longitudes medias del excéntrico, se demuestra de modo semejante en otras posiciones, pero presentando siempre la velocidad variable de la estrella según haya proporcionado la posición, tal como hemos dicho.

De ahí que este modo de demostración se manifieste también en Saturno, Júpiter y Marte, y no menos en Venus y Mercurio, con tal de que tomemos en vez de la estrella el punto de vista y en vez del punto de vista, la estrella. Pues suceden estas cosas al contrario en las órbitas que son rodeadas por la Tierra, de aquellas que rodean a la Tierra y, por tanto, basta todo ello para no repetir la misma cantinela.

Sin embargo, como el movimiento variable de la estrella comporta no pequeña dificultad con respecto al punto de vista y a la ambigüedad del estacionamiento de lo que nos relevó aquel postulado de Apolonio, no sé si no se obraría mejor buscando simplemente los estacionamientos desde la posición más próxima, del modo como buscamos la conjunción de la posición de la estrella en el acronicio [oposición solar] con respecto a la línea del movimiento medio del Sol, o bien la unión de cualquiera de las estrellas mediante los números conocidos de sus movimientos, lo que dejamos al gusto de cada cual.

LIBRO SEXTO

Hemos indicado, según nuestras posibilidades, que capacidad y consecuencia tiene la asumida revolución de la Tierra en el movimiento aparente en longitud de las estrellas errantes y hacia qué orden, cierto y necesario, empuja todas las cosas. Resta que nos ocupemos del fluir de aquellas estrellas en su digresión en latitud y mostremos cómo también en esto la movilidad de la Tierra ejerce dominio y les prescribe leyes también en esta cuestión. Por otra parte, también es necesaria esta parcela de la ciencia, porque las digresiones de los astros establecen una diferencia no pequeña sobre el orto y el ocaso, apariciones, ocultaciones, y otras cosas que se han expuesto en general más arriba. Y sus posiciones únicamente se dicen verdaderamente conocidas, cuando consta la longitud junto con la latitud en el círculo de los signos [eclíptica]. En consecuencia, lo que los matemáticos antiguos pensaron que habían demostrado mediante la estabilidad de la Tierra, nosotros haremos lo mismo mediante su hipotética movilidad, con una mayor coherencia, quizá, y más ordenadamente.

1. EXPOSICIÓN GENERAL DE LA DIGRESIÓN EN LATITUD DE LAS CINCO ESTRELLAS ERRANTES

En todas éstas encontraron los antiguos dos desviaciones en latitud, que responden a la doble desigualdad en longitud de las mismas, una que se produce con ocasión de las órbitas excéntricas, y otra con respecto a los epiciclos, en la posición de tales epiciclos tomamos una sola órbita grande de la Tierra (repetida ya con frecuencia). No porque la órbita decline de algún modo con respecto al plano de la eclíptica obtenido de una vez para siempre, siendo las inclinaciones las mismas, sino porque las órbitas de aquellas estrellas se inclinan con relación a éste con una oblicuidad no fija; tal variedad se regula a tenor del movimiento y de las revoluciones de la órbita grande de la Tierra. Pero puesto que los tres superiores, Saturno, Júpiter y Marte, se mueven en longitud mediante otras leyes que los otros dos, de igual modo en el movimiento de latitud también se diferencian no poco. En consecuencia, primero se escrutaron dónde estaban y cuántos eran los límites extremos de la latitud norte, los cuales encontró Ptolomeo para Saturno y Júpiter al principio de Libra, en cambio para Marte hacia el final de Cáncer, aproximadamente en el apogeo del excéntrico.

Sin embargo, en nuestro tiempo encontramos estos límites septentrionales para Saturno en el VII grado de Scorpio, para Júpiter en el XXVII de Libra, para Marte en el XXVII de Leo, ya que los apogeos han cambiado hasta nuestros días. Pues las inclinaciones y los puntos cardinales de las latitudes siguen el movimiento de aquellas órbitas. Entre estos límites, tomados como cuadrantes de los círculos según distancias regulares o aparentes, no parecen hacer ninguna digresión de latitud, donde quiera que entonces se encuentre la Tierra. Luego, cuando están en estas longitudes medias se comprende que se encuentran en la sección común de sus órbitas con la eclíptica, no de otra manera de como se encuentra la Luna en las secciones eclípticas, a las que Ptolomeo llama nodos, el ascendente a partir del cual la estrella avanza grados septentrionales, y el descendente desde el que marcha hacia el sur. No porque la órbita grande de la Tierra, permaneciendo siempre igual con respecto al plano de la eclíptica, les aporte alguna latitud, sino que toda digresión de latitud se mide desde ellos [nodos], la cual de unas a otras posiciones varía mucho, aproximándose a los cuales la Tierra, cuando aparecen opuestos al Sol, en el acronicio, siempre avanzan con una desviación mayor que en cualquier otra posición de la Tierra: en el hemisferio norte hacia el norte, en el sur hacia el sur, y esto con una diferencia mayor o menor según exija la proximidad y alejamiento de la Tierra. Con ocasión de lo cual se conoció que la inclinación de aquellas órbitas no era fija, sino que variaba según un cierto movimiento de libración, medible por las revoluciones de la órbita grande de la Tierra, según se dirá un poco más abajo.

Pero Venus y Mercurio parecen variar de otra manera, aunque con una ley fija observada a partir de los ápsides medios, superiores e inferiores. Pues en las longitudes medias, es decir, cuando la línea del movimiento medio del Sol dista un cuadrante del ápside superior o inferior, y las mismas estrellas matutinas o vespertinas distan un cuadrante de sus órbitas a partir de la misma línea del movimiento medio, no encontraron [los antiguos] en ellas ninguna desviación con respecto a la órbita de los signos, por lo que entendieron que ellos [los planetas] estaban en una sección común con la órbita de los signos y eclíptica, tal sección pasa por el apogeo y perigeo de aquéllas. Y, por tanto, las digresiones, que son superiores o inferiores con respecto a la Tierra, se manifiestan entonces, las máximas en la distancia mayor desde la Tierra, esto es, alrededor de la salida vespertina o la ocultación matutina, cuando Venus aparece más al norte, Mercurio más al sur.

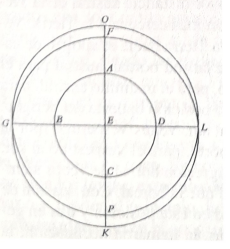
Y por el contrario, en la posición más cercana a la Tierra, cuando se ocultan por la tarde o surgen por la mañana, Venus está al sur, Mercurio al norte. Viceversa, cuando la Tierra está en la posición opuesta a ésta y en el otro ápside medio, siendo la anomalía del excéntrico de CCLXX grados, Venus aparece a la mayor distancia austral de la Tierra, Mercurio a la mayor distancia boreal, y en la posición más cercana a la Tierra, Venus al norte y Mercurio al sur. En cambio, en el giro de la Tierra hacia el apogeo de estos astros, Ptolomeo encuentra para Venus matutino una latitud boreal, austral para el vespertino. Y también al contrario en el caso de Mercurio, para el matutino austral, para el vespertino boreal. Del mismo modo acontece esto en la posición opuesta del perigeo, de manera que Venus Lucifer [por la mañana] aparece al sur, Venus Vesperugo [por la tarde] al norte. En cambio, para Mercurio matutino al norte, para el vespertino al sur. Y también en estas y otras posiciones encontraron una digresión boreal de Venus siempre mayor que la austral, la de Mercurio mayor la austral que la boreal. Con ocasión de esto, [los antiguos] razonaron que había una doble latitud en esta posición y tres en general. La primera, que acontece en las longitudes medias, la llamaron declinación; la

segunda, en el ápside superior e inferior, oblicuidad; y la tercera, unida a ésta [a la segunda], desviación, boreal siempre para Venus, austral para Mercurio. Entre estos cuatro límites se mezclan entre sí, y alternativamente crecen y decrecen y cambian mutuamente. A todas las cuales les asignaremos las circunstancias convenientes.

2. HIPÓTESIS DE LOS CÍRCULOS EN LOS QUE ESTAS ESTRELLAS SE MUEVEN EN LATITUD

En consecuencia, hemos de aceptar en estas cinco estrellas que sus órbitas se inclinan con respecto al plano de la eclíptica con una inclinación variable, pero regular, y la sección común se produce en el diámetro de la eclíptica. Ya que en Saturno, Júpiter y Marte el ángulo de la sección recibe una cierta libración en aquella sección como en el eje, semejante a la que demostramos en el caso de la precesión de los equinoccios, pero simple y conmensurable con el movimiento de conmutación, según el cual aumenta y disminuye con un intervalo cierto, de manera que cada vez que la Tierra está cercana al planeta, esto es, en el acronicio [oposición solar], acontece la máxima inclinación de la órbita del planeta, la mínima en su opuesto, y en el medio, la media; así, estando el planeta en el límite de la máxima latitud norte o sur, su latitud aparece mucho mayor en la proximidad de la Tierra que a la máxima distancia, Y aunque ésta podría ser la única causa de tal irregularidad, la desigual distancia a la Tierra, a tenor de que los más cercanos parecen mayores que los más lejanos; sin embargo, las latitudes de estas estrellas aumentan y disminuyen con una diferencia mayor, cosa que no puede suceder, a no ser que también tales órbitas oscilen en su oblicuidad. Pero, como hemos dicho antes, en estas libraciones conviene tomar un cierto medio entre los extremos.

Para que todo esto aparezca más claro, sea la órbita grande ABCD, que está en el plano de la eclíptica, teniendo como centro a E, con respecto a la cual [órbita grande de la Tierra] está inclinada la órbita del planeta que es FGKL, de declinación media y permanente, cuyo límite norte de latitud sea F, el sur K, el nodo descendente de la sección G, el ascendente L, BED la sección común que se prolonga por las líneas rectas GB y DL, y que tales cuatro límites no cambian, si no es por el movimiento de los ápsides. Y entiéndase que el movimiento en longitud de la estrella no se produce en el plano del círculo FG, sino en otro oblicuo al homocéntrico FG, que es el OP, y que se cortan entre sí en la línea recta GBDL.



Por lo tanto, mientras la estrella se mueve en la órbita OP, y coincidiendo algunas veces en el movimiento de libración con el plano FK, se mueve en una y otra dirección y hace por ello aparecer una latitud distinta. Primero, esté, pues, la estrella en la máxima latitud norte en el punto O, próxima a la Tierra que está en A, entonces la latitud de la estrella crecerá según el ángulo OGF, el de máxima inclinación de la órbita OGP. Este movimiento es de aproximación y alejamiento, puesto que es conmensurable, por hipótesis, con el movimiento de conmutación, y si ahora la Tierra estuviera en B, el punto O coincidirá con F, y la latitud de la estrella

aparecerá menor estando en la misma posición que antes; e incluso mucho menor si la Tierra estuviera en el punto C. Pues O se desplazará hacia la parte extrema y diversa de su libración, y excederá tanto cuanto sobrepase en una libración sustractiva de latitud norte, esto es, en un ángulo igual al OGF. Después crece la latitud norte de la estrella existente alrededor del punto F, mientras por el resto del hemiciclo CDA vuelve [la Tierra] al primer punto A, de donde había salido.

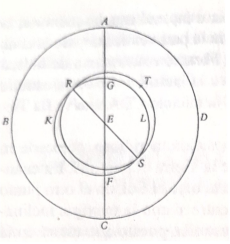
El mismo próceso y modo habrá para la estrella en posición meridiana, colocada en el punto K, tomando como principio del movimiento de la Tierra el punto C. En cuanto a si la estrella, en el acronicio [oposición solar] u oculta bajo el Sol, en el otro punto G o L, aunque entonces las órbitas FK o OP se alejen entre sí con la máxima inclinación, no por ello se hará sensible ninguna latitud de la estrella, puesto que estará en la sección común de las órbitas. A partir de lo cual pienso que se entiende con facilidad de qué modo la latitud norte del planeta decrece de F a G, la sur aumenta de G a K, se desvanece totalmente hacia L y camina hacia posiciones septentrionales.

Y aquellos tres astros superiores se comportan de este modo. De los cuales, tanto en longitud como en latitud, difieren no poco Venus y Mercurio, ya que tienen las secciones comunes de sus órbitas colocadas alrededor del apogeo y perigeo. En cuanto a sus máximas inclinaciones se vuelven mudables hacia los ápsides medios por un movimiento de libración, como el de los astros superiores, pero además sufren otra libración diferente a la primera. Sin embargo, ambas son conmensurables con las revoluciones de la Tierra, aunque no de un único modo. La primera libración se caracteriza por lo siguiente: que habiendo realizado la Tierra una revolución a través de los ápsides de aquellos, el movimiento de libración ha girado dos veces, teniendo inmóvil, como hemos dicho, el eje de la sección por el apogeo y perigeo, de manera que, cuantas veces la línea del movimiento medio del Sol esté en el perigeo o en el apogeo de ellos, se produce el ángulo máximo de sección, en cambio el mínimo siempre en las longitudes medias.

La segunda libración que sigue a ésta, se diferencia de ella en lo siguiente: que colocada la Tierra en una longitud media o estando el planeta Venus o Mercurio siempre en el eje, esto es, en la sección común de su movimiento de libración, pero con una desviación máxima cuando la Tierra pasa por el apogeo o perigeo de éstos, acontece que Venus siempre está al norte (como se ha dicho), Mercurio al sur; debiendo entonces carecer de latitud a causa de su anterior y simple inclinación.

Por ejemplo, cuando el movimiento medio del Sol está junto al apogeo de Venus, y éste en tal posición, se evidencia que, según la inclinación simple y la primera libración, estando [Venus] en la sección común de su órbita con el plano de la eclíptica, entonces no habría realizado ninguna latitud; pero la segunda libración le induce a su desviación máxima, teniendo la sección o eje a lo largo del diámetro transversal de la órbita del excéntrico y cortando a este diámetro, que pasa por el ápside superior e inferior, en ángulos rectos. Pero si en este mismo tiempo estuviera en cualquier otro cuadrante y cerca de los ápsides medios de su órbita, entonces el eje de esta libración coincidiría con la línea del movimiento medio del Sol y la misma Venus añadirá a la inclinación norte una desviación máxima, la que se restará de la inclinación austral y quedará la menor. Y de este modo, la libración de desviación es conmensurable con el movimiento de la Tierra.

Para que se capte más fácilmente esto, repítase la órbita grande [de la Tierra] ABCD, la órbita de Venus o Mercurio, excéntrica y oblicua al círculo ABC según una inclinación igual FGKL, la sección común de estos FG por el apogeo F de la órbita y el



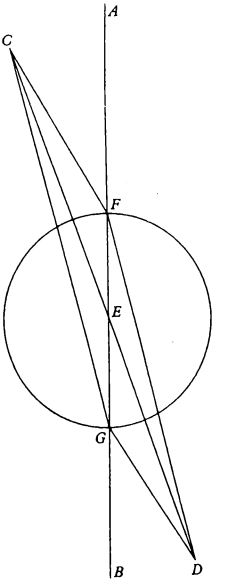
perigeo G. Primero, para una demostración más cómoda, supongamos la inclinación de la órbita excéntrica GKF como simple y fija, o si parece bien, media entre la mínima y la máxima, a no ser que la sección común FG cambie según el movimiento del perigeo y el apogeo. Mientras la Tierra está en ella, esto es, en A o en C, y el planeta en la misma línea, se manifiesta que entonces no tendría latitud, puesto que toda latitud proviene de los lados, en los hemiciclos GKF y FLG, en los que el planeta se acerca hacia la zona boreal o austral (como se ha dicho) a tenor de la inclinación del círculo FKG con respecto al plano de la eclíptica. A esta digresión del planeta le llaman unos oblicuidad, otros reflexión. Pero estando la Tierra en B o en D, esto es, junto a los ápsides medios del planeta, las latitudes serán las mismas arriba y abajo, FKG y GLF, a las que llaman declinaciones. Y así, más por el nombre que por la realidad difieren de las anteriores, e incluso los nombres se confunden en las posiciones medias.

Pero puesto que el ángulo de inclinación de estos círculos se halla que es mayor en la oblicuidad que en la declinación, entendieron que esto sucedía por una cierta libración que se curvaba en la sección FG como en un eje, según se ha dicho anteriormente. En consecuencia, como tenemos en uno y otro caso conocido el ángulo de la sección, fácilmente entenderemos a partir de su diferencia, cuánto vale esa libración desde la inclinación mínima hasta la máxima. Entiéndase ahora otro círculo de desviación, oblicuo al GKFL, homocéntrico en el caso de Venus, pero excéntrico al excéntrico en el caso de Mercurio, como diremos después, cuya sección común sea RS en cuanto eje de esta libración, móvil en un circuito, por este motivo, mientras la Tierra se encuentre en A o en B, el planeta está en el límite extremo de la desviación, dondequiera que esté, por ejemplo en el punto T. Y cuánto haya avanzado la Tierra a partir de A, tanto se entiende que el planeta se ha movido desde T, decreciendo entretanto la oblicuidad del círculo de desviación, de manera que mientras la Tierra ha recorrido el cuadrante AB, se entiende que el planeta ha llegado hasta el nodo de esta latitud, esto es, a R. Pero coincidiendo entonces los planos en el momento medio de la libración y tendiendo hacia direcciones contrarias, el restante hemiciclo de la desviación, que antes era austral, irrumpe hacia la parte boreal, y avanzando hacia el cual Venus, una vez abandonado el austral, vuelve a dirigirse hacia el septentrión, y nunca se acercará al sur a lo largo de esta libración. Tal como Mercurio, atravesando porciones contrarias, continúa al sur, y también difiere en esto [de Venus], en que no oscila [realiza una libración] en el homocéntrico del excéntrico, sino en un excéntrico del excéntrico. Por ello, con respecto al movimiento en longitud, utilizamos el epiciclo en la demostración de la irregularidad. Pero puesto que allí se consideraba una longitud sin latitud, aquí una latitud sin longitud, aunque comprendiendo una sola y la misma revolución y reduciéndolas a la igualdad, aparece suficientemente claro que el movimiento es uno solo y una misma la libración, que pudo ofrecer ambas variedades, siendo a la vez excéntrica y oblicua, y no hay otra hipótesis, excepto la que ya nombramos, de la que diremos más cosas después.

3. SOBRE CUÁL SEA LA INCLINACIÓN DE LAS ÓRBITAS DE SATURNO, JÚPITER Y MARTE

Después de las hipótesis expuestas sobre las digresiones de los cinco planetas, tenemos que descender a las cosas mismas y a separarlas una a una. Y, en primer lugar, cuán grandes sean las inclinaciones de cada círculo, calculamos las cuales mediante un círculo máximo, que pasa por los polos del círculo inclinado, y formando ángulos rectos con la eclíptica, con respecto al que se examinan los cambios según la latitud. Pues, comprendidas éstas [inclinaciones], se abrirá el camino para conocer las latitudes de cada uno. Empezando otra vez por los tres superiores, sobre todo porque en los límites extremos de la latitud austral, según la exposición ptolomaica, aparece el alejamiento de Saturno del acronicio [oposición solar] a III grados, V minutos, el de Júpiter a II grados, VII minutos, el de Marte a VII grados. Pero en las posiciones opuestas, mientras avanzan hacia el Sol [conjunción solar], el de Saturno de II grados, III minutos, el de Júpiter de I grado, V minutos, el de Marte a sólo V minutos, de manera que casi toca el círculo de los signos; en cuanto a estas cosas, que observó en las ocultaciones y salidas de aquéllos, convenía tenerlas presentes en las latitudes.

Propuesto así esto, en un plano, que forme ángulos rectos con el círculo de los signos [eclíptica] y pase por su centro, sea AB la sección común con el zodíaco, y CD la sección común con uno cualquiera de los tres planetas superiores a través de los límites máximos australes y boreales, también el centro del zodíaco en E, y el diámetro de la órbita grande de la Tierra FEG. Y sea D la latitud austral, C la boreal, con las que se unen CF, CG, DF, DG.



Pero ya antes, con respecto a cada uno, se han demostrado las razones entre EG, [radio] de la órbita grande de la Tierra, en relación con ED, [radio] del excéntrico del planeta, en cualquiera de sus posiciones propuestas. Pero también se dan por las observaciones las posiciones de las latitudes máximas. Luego, resultando conocido el ángulo de la máxima latitud austral BGD, exterior del triángulo EGD, se conocerá también por lo demostrado sobre los triángulos planos el ángulo interior y opuesto GED, de inclinación máxima austral del excéntrico con respecto al plano del zodíaco. De igual modo, por medio de la mínima latitud austral demostraremos la mínima inclinación, por consiguiente por el ángulo EFD. Puesto que en el triángulo EFD se conoce la razón entre los lados EF a FD, con el ángulo EFD, tendremos como dado el ángulo exterior DFE, el de la mínima inclinación austral y de ahí, por la diferencia entre una y otra declinación, toda la libración del excéntrico con respecto al zodíaco. Con estos ángulos de inclinación, calcularemos también las

latitudes boreales opuestas, esto es, serían los ángulos AFC y EGC, que si coincidieran con las observaciones, significarán que nos hemos equivocado mínimamente.

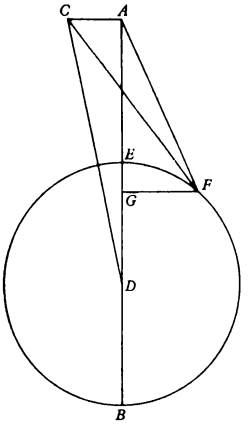
Y vamos a tomar como ejemplo a Marte, porque se aleja en latitud más que todos los otros. Ptolomeo anotó su máxima latitud sur aproximadamente en los VII grados, en el perigeo de Marte, y también la máxima boreal de IIII grados, XX minutos en el apogeo. Y como nosotros tomáramos el ángulo BGD de VI grados, L minutos, encontramos que su correspondiente el ángulo AFC es de IIII grados y casi XXX minutos. Pues, siendo dada la razón EG a ED, como uno es a uno, XXII minutos, XXVI segundos, partiendo de esto tendremos, junto con el ángulo BGD, el ángulo DEG de I grado, LI minutos aproximadamente, de máxima inclinación austral. Y puesto que EF es a CE, como una unidad es a una unidad, XXXIX minutos, LVII segundos, y el ángulo CEF es igual al DEG de I grado, LI minutos, se sigue el ángulo exterior (del que hablamos) CFA de IIII grados y medio, estando el planeta en el acronicio [oposición solar].

De igual modo en la posición opuesta mientras corre junto con el Sol [conjunción solar], si hubiéramos tomado el ángulo DFE de V minutos, a partir de los lados dados DE y EF con el ángulo EFD, tendremos el ángulo EDF, y el exterior DEG de casi IX minutos de inclinación mínima: el cual también nos mostrará el ángulo CGE de latitud norte de casi VI minutos. Luego restando la inclinación mínima de la máxima, esto es, IX minutos de I grado y LI minutos, queda I grado, XLII minutos, que es la libración de esta inclinación, y su mitad de L minutos y medio aproximadamente.

De igual modo se hicieron patentes los ángulos de las inclinaciones junto con las latitudes de los otros dos, Júpiter y Saturno, o sea, la inclinación máxima de Júpiter de I grado, XLII minutos, la mínima de I grado, XVIII minutos, de manera que toda su libración no comprende una amplitud mayor que XXIIII minutos. Y para Saturno la inclinación máxima es de II grados, XLIIII minutos, la mínima de II grados, XVI minutos, entre las que hay una libración de XVIII minutos. De ahí que por medio de los ángulos mínimos de inclinación, que acontecen en la posición opuesta, mientras estaban ocultos bajo el Sol, surgirán los alejamientos en latitud con respecto al círculo de los signos, el de Saturno II grados, III minutos, el de Júpiter I grado, VI minutos, que era lo que había que demostrar y conservar por las tablas a exponer más abajo.

4. SOBRE LA EXPOSICIÓN DE OTRAS LATITUDES EN PARTICULAR Y EN GENERAL DE ESTOS TRES ASTROS

Después de haber hecho ostensibles así estas cosas, se evidenciarán las latitudes de estos tres planetas en general y en particular. Entiéndase, pues, como antes, la sección común AB del plano perpendicular al círculo de los signos [eclíptica] a través de los límites de las digresiones extremas. Y esté en A el límite boreal, y sea también la sección común de la órbita del planeta la recta CD, que corta a AB en el punto D. Tomado éste como centro, descríbase la órbita grande de la Tierra EF, y por el acronicio [oposición solar], que está en E, tómese EF un arco conocido por cualquier procedimiento, y también desde F y desde C, la posición de la estrella, constrúyanse perpendiculares a AB, que serán CA, FG, y únanse FA, FC. Buscamos, primero, cuánto puede medir en este esquema el ángulo de inclinación del excéntrico ADC. Ya se ha demostrado que era



máximo cuando la Tierra estaba en el punto E. También ha quedado claro que toda su libración se calcula por la revolución de la Tierra sobre el círculo EF, en relación con el diámetro BE, según exige la naturaleza de la libración. Luego, como consecuencia del arco conocido EF, se conocerá la razón de ED a EG, y tal es la razón de la libración total con respecto a lo que decreció en el momento del ángulo ADC. Por esta razón es dado el ángulo ADC en la presente cuestión. Por lo que se da con todos sus lados el triángulo ADC de ángulos conocidos. Pero puesto que, según lo precedente, CD tiene una razón dada con respecto a ED, se dará también con respecto al resto DG; y, por tanto, CD y AD en relación GD; de ahí que se conozca también el resto AG, por lo que también es dada FG, puesto que es la mitad de la cuerda del doble de EF: luego, conocidos dos lados del triángulo rectángulo AGF, se conocerá la cuerda AF y la razón de AF a AC. Por último, conocidos dos lados del triángulo rectángulo ACF, se conocerá el ángulo AFC, y éste es el de la latitud aparente que se buscaba. Esto lo ejemplificaremos de nuevo con respecto a Marte, cuyo máximo límite de latitud sur está alrededor de A, casi en su ápside inferior.

Esté, pues, la posición del planeta en C, donde, mientras la Tierra estaba en el punto E, se ha demostrado que el ángulo de inclinación ADC era máximo, o sea, de I grado, L minutos. Supongamos ahora la Tierra en el punto F y el movimiento de conmutación según el arco EF de XLV grados: luego se conoce la recta FG de 7.071, siendo ED de 10.000, y GE el resto de la que parte del centro [radio] de 2.929 unidades. Y ya se ha mostrado que la mitad del ángulo de libración ADC era de 0,50 1/2 grados, teniendo la razón del aumento o disminución en esta posición, como DE es a GE, así 50 1/2 es a 15 aproximadamente, restando este último número de I grado, L minutos, dará I grado, XXXV minutos, el ángulo de la inclinación ADC en el caso presente. Por esta razón, el triángulo ADC será de ángulos y lados conocidos, y como se demostrado antes que CD medía 9.040 unidades, siendo ED de 6.580, FG tendrá 4.653, AD de 9.036 unidades, y el resto AEG de 4.383 unidades, y AC de 249 unidades y media. En consecuencia, en el triángulo rectángulo AFG, la perpendicular AG de 4.383 unidades y la base FG de 4.653 unidades, de donde se sigue que la cuerda [hipotenusa] AF es de 6.392 unidades. Así, por último, del triángulo ACF, del que son dados el ángulo recto CAF con los lados AC, AF, se conocerá el ángulo AFC de II grados, XV minutos, el de latitud aparente con respecto a la Tierra situada en F. Del mismo modo aplicaremos el razonamiento para los otros dos, Saturno y Júpiter.

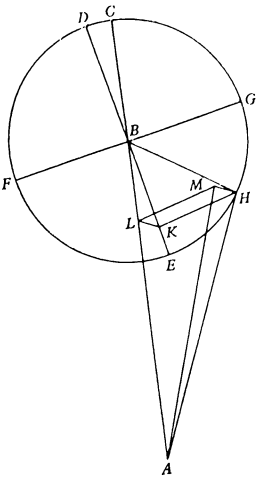
5. SOBRE LAS LATITUDES DE VENUS Y MERCURIO

Quedan Venus y Mercurio, cuyos traslados en latitud se demostrarán (como hemos dicho) con tres digresiones simultáneas de latitudes complicadas. Para que se puedan distinguir separadamente, empezaremos por aquella que llaman declinación, como de tratamiento más sencillo. Ya que únicamente a ésta le sucede que a veces se separa de las demás, lo que ocurre alrededor de las longitudes medias y alrededor de los nodos, según rigurosos movimientos de longitud cuando la Tierra está situada por los cuadrantes de los círculos a partir del apogeo y perigeo del planeta; hallaron que, cuando la Tierra está próxima, le correspondía en el caso de Venus VI grados, XXII minutos, de latitud austral o boreal, en el de Mercurio IIII grados, V minutos, pero cuando la Tierra está a su máxima distancia, para Venus I grado II minutos, para Mercurio I grado, XLV minutos, con los cuales los ángulos de las inclinaciones en esta posición se manifiestan por medio de las tablas expuestas de las igualaciones [«aequationes, prostaféresis»], según las cuales hay una latitud para Venus en esa posición, en la distancia mayor desde la Tierra, de I grado, II minutos, en la mínima distancia de VI grados, XXII minutos, y a uno y a otro lado [de la latitud media] el arco de la órbita tiene II grados y medio aproximadamente; pero en el caso de Mercurio I grado, XLV minutos, en la distancia superior, IIII grados, V minutos, en la inferior, postula un arco de su órbita de VI grados con una cuarta parte de grado, de manera que el ángulo de inclinación de las órbitas es el de Venus de II grados, XXX minutos, y el de Mercurio de VI grados con una cuarta parte, siendo cuatro rectos CCCLX grados, con los que pueden explicarse todas las latitudes particulares de declinación, en este lugar, tal como demostraremos empezando por Venus.

Sea, pues, ABC la sección común en el propuesto círculo del zodíaco [eclíptica] y de un plano recto que pasa por su centro, y DBE la sección común de la superficie de la órbita de Venus [con el plano perpendicular]. Y sea el centro de la Tierra A, y el de la órbita del planeta B, y ABE el ángulo de inclinación de la órbita con respecto a la eclíptica; y trazada alrededor de B la órbita DFEG, únanse FBG, diámetro perpendicular al diámetro DE. Y entiéndase que el plano de la órbita se considera de tal modo con respecto al plano perpendicular tomado que en el plano del círculo las líneas què son trazadas a DE formando ángulos rectos son paralelas entre sí y al plano del zodíaco y en él sólo está la línea FBG. El propósito es, a partir de las líneas rectas dadas AB y BC junto con el ángulo de inclinación dado ABE, encontrar cuánto se ha distanciado el planeta en latitud, por ejemplo, cuando dista XLV grados de E el punto más próximo de la Tierra, que elegimos siguiendo a Ptolomeo, con el fin de que aparezca si la inclinación de la órbita comporta alguna diversidad en longitud a Venus o Mercurio.

Tales diferencias se deben advertir mejor alrededor de las posiciones medias entre los límites D, F, E, G, sobre todo porque la estrella situada en esos cuatro límites alcanza las mismas longitudes que tendría sin declinación, como es claro por sí mismo. Tomemos, pues, el arco EH, como se ha dicho, de XLV grados, y trácense perpendiculares, HK a BE, KI, y HM al propuesto plano de la eclíptica, y únanse HB, LM, AM y AH. Tendremos el paralelogramo cuadrángulo y rectángulo LKHM, esto porque HK es paralela al plano de la eclíptica, y ya que el ángulo LAM de la prostaféresis en longitud tiene el mismo lado, mientras el ángulo HAM es el tránsito en latitud, cayendo además HM perpendicularmente sobre el plano de la eclíptica. En consecuencia, puesto que se conoce el ángulo HBE de XLV grados, HK la mitad de la cuerda del doble de HE ten-

drá 7.071 unidades, de las que EB tiene 10.000. De modo semejante, del triángulo BKL se conoce el ángulo KBL de II grados y medio y el BLK es recto y la cuerda BK de 7.071, siendo BE de 10.000; los restantes lados serán, pues, el KL, de 308 unidades y el BL de 7.064. Pero puesto que AB es a BE, según se ha mostrado antes, como 10.000 es a 7.193 aproximadamente, los otros serán, en las mismas unidades, HK de 5.086, HM igual a KL de 221 y BL de 5.081; de ahí que el resto LA valga 4.919. Ahora, también del triángulo ALM conocidos los lados AL, el LM igual al HK, y el ángulo ALM recto, tendremos la hipotenusa AM de 7.075, y el ángulo MAL de XLV grados, LVIII minutos, que es la prostaféresis o conmutación mayor de Venus, según los cálculos.



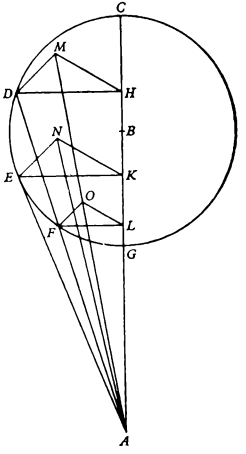
De igual modo, en el triángulo MAH dados el lado AM de 7.075 unidades y el MH igual al KL, constará el ángulo MAH de I grado, XLVII minutos, de declinación en latitud. Y si no molesta investigar en qué afecta esta inclinación en las diferencias de Venus en longitud, tomemos el triángulo ALH, entendiendo que LH es un diámetro [diagonal] del paralelogramo LKHM. Mide, pues, [LH] 5.091 unidades, de las cuales AL tiene 4.919, y el ángulo ALH es recto: de donde se deduce la hipotenusa AH de 7.079. En consecuencia, conocida la razón entre los lados, el ángulo HAL tendrá XLV grados, LVIIII minutos. Pero se ha mostrado que ALMB vale XLV grados, LVII minutos; luego aumentaron sólo II minutos. Lo que había que demostrar.

Nuevamente, en el caso de Mercurio, con un razonamiento semejante sobre la declinación demostraremos las latitudes, por medio de una descripción similar a la precedente, en la que se supone el arco EH de XLV grados, y las dos rectas HK, KB, se toman otra vez como de 7.071 unidades, siendo la hipotenusa HB de 10.000. En consecuencia, si BH, a partir del centro [radio] midiera 3.953 y AB 9.964, en esta posición, según puede deducirse de las diferencias de longitud antes demostradas, entonces BK y KH serán de 2.795 unidades. Y puesto que el ángulo de inclinación ABE se mostró como de VI grados, XV minutos, suponiendo que cuatro rectos miden CCCLX grados: en consecuencia del triángulo rectángulo BKL de ángulos conocidos, se da la base KL de 304 unidades, y el lado perpendicular BL de 2.778, luego la diferencia AL es de 7.186. Pero también LM es igual a HK de 2.795, en consecuencia del triángulo ALM, con un ángulo recto el L, con dos lados conocidos el AL y el LM, tendremos la hipotenusa AM de 7.710 unidades, y el ángulo LAM de XXI grados, XVI minutos, y ésta es la prostaféresis calculada.

Del mismo modo, en el triángulo AMH, con dos lados conocidos el AM y el MH iguales al KL, que comprenden al ángulo recto M, se hará patente el ángulo MAH, que es la latitud buscada. Si se quiere averiguar cuánto se debe a la prostaféresis real y a la aparente, se deduce la diagonal LK, que calculamos a partir de los lados como de 2.811

unidades y AL de 7.186 unidades: todo lo cual muestra que el ángulo LAH, prostaféresis aparente, es de XXI grados, XXIII minutos, que excede al calculado antes en casi VII minutos. Y esto se quería demostrar.

6. ACERCA DEL SEGUNDO DESPLAZAMIENTO EN LATITUD DE VENUS Y MERCURIO SEGÚN LA OBLICUIDAD DE SUS ÓRBITAS EN EL APOGEO Y PERIGEO



Sobre el desplazamiento en latitud de estas estrellas, el que ocurre alrededor de las longitudes medias de sus órbitas, ya hemos dicho que se les llama declinaciones a estas latitudes. Ahora hay que hablar de las que acontecen alrededor del perigeo y el apogeo, en los que se mezcla aquella tercera digresión, de desviación, no como en los tres planetas superiores, sino con un razonamiento con el que pueda discernirse y separarse más fácilmente, tal como sigue. En efecto, Ptolomeo observó que estas latitudes eran máximas cuando las estrellas estaban en las líneas rectas que tocaban las órbitas partiendo del centro de la Tierra, lo cual sucede en las distancias máximas al Sol, matutinas o vespertinas (como hemos dicho). Y halló que las latitudes boreales de Venus eran mayores que las australes en un tercio de grado, en cambio las latitudes australes de Mercurio eran mayores en casi medio grado que las boreales. Pero, queriendo resolver la dificultad y el trabajo de los cálculos, tomó una razón media de II grados y medio en las diversas direcciones de latitud, grados que son subtendidos por las mismas latitudes en el círculo perpendicular al zodíaco, alrededor del centro de la Tierra, por tal círculo se delimitan las latitudes, sobre todo porque no pensó que habría un evidente error, como constataremos después. Porque si tomamos II grados y medio como digresión igual a una y otra parte del círculo de los signos [eclíptica] y excluimos la desviación hasta que hayamos determinado las latitudes de las inclinaciones, nuestras demostraciones serán más simples y fáciles.

En consecuencia, se ha de demostrar primero que la digresión máxima de esta latitud se produce en contacto con el círculo excéntrico, cuando también las prostaféresis en longitud son máximas. Sea, pues, la sección común de los planos del zodíaco y del círculo excéntrico, ya sea de Venus o de Mercurio, que pasa por el apogeo y el perigeo, en la que se toma A posición de la Tierra, y B centro del excéntrico CDEFG círculo oblicuo a la eclíptica, de modo que cualquier línea recta trazada a CG comprenda ángulos iguales a la oblicuidad; y trácese AE tangente al círculo, y AFD que lo corta. Se trazan también desde los puntos D, E y F perpendiculares a CG, o sea, DH, EK, FL, y al presupuesto plano de la eclíptica las DM, EN, FO y únanse MH, NK, OL, y además

AN y AOM. Por ejemplo, AOM es una recta, en la que tres puntos suyos están en dos planos, o sea, el círculo de la eclíptica y ADM perpendicular al plano de la eclíptica.

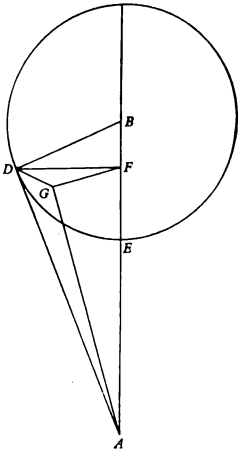
En consecuencia, puesto que en la oblicuidad propuesta, los ángulos en longitud, HAM y KAN, comprenden las prostaféresis de estas estrellas, y DAM y EAN las desviaciones en latitud, digo, primero, que el ángulo de latitud EAN es el máximo, situado en el punto de tangencia, cuando aproximadamente también existe la máxima prostaféresis de longitud. Pues, siendo EAK el ángulo mayor de todos, KE estará con respecto a EA en una razón mayor que la de HD y LF con respecto a DA y FA, respectivamente. Pero EK es a EN como HD a DM y LF a FO; pues son iguales, como hemos dicho, los ángulos que comprenden, y los que tienen como vértices M, N y O son rectos. En consecuencia, NE tiene con respecto a EA una razón mayor que MD y OF con respecto a DA y FA, respectivamente; y de nuevo DMA, ENA y OFA son ángulos rectos; luego EAN es un ángulo mayor que el DAM y que todos los que se construyen de este modo.

De donde se manifiesta que de las diferencias que se producen a partir de esta oblicuidad según la longitud entre las prostaféresis, la máxima es la que se determina por el traslado máximo alrededor del punto E. Pues a causa de que son iguales los ángulos que comprenden, HD, KE y LF son proporcionales a HM, KN y LO. Y como la razón de ellos permanece igual con respecto a sus diferencias, consecuentemente la diferencia entre EK y KN está en una razón con respecto a EA mayor que las otras diferencias con respecto a las semejantes a AD. De ahí se manifiesta también que la máxima prostaféresis en longitud estaría, con respecto al máximo traslado en latitud, en la misma razón que tendrán las prostaféresis de los segmentos del excéntrico en longitud, con respecto a los traslados en latitud. Puesto que KE es a EN, como todas las semejantes a LF y HD son a las semejantes a FO y DM. Y esto es lo que se había propuesto demostrar.

7. CUÁLES SON LOS ÁNGULOS DE OBLICUIDAD DE ESTAS DOS ESTRELLAS, VENUS Y MERCURIO

Veamos, una vez conocidas estas cosas, cuánto vale el ángulo de los planos de ambas estrellas en inclinación, repitiendo lo que se ha dicho antes que entre la distancia máxima y mínima [en latitud] cada planeta tiene V grados, de manera que se colocan más al norte o más al sur en un momento contrario según la posición de la órbita, puesto que el desplazamiento de Venus realiza una digresión imperceptiblemente mayor o menor de V grados, pasando por el apogeo y perigeo del excéntrico, y la de Mercurio de medio grado más o menos.

En consecuencia, sea, como antes, la sección común ABC entre el zodíaco y el excéntrico, y una descrita, con centro en B, la órbita de la estrella, oblicua al plano de la eclíptica, según el modo expuesto, se traza desde el centro de la Tierra la línea recta AD, tangente a la órbita en el punto D, desde el que se dibujan perpendiculares, DF a CBE, DG al plano de la eclíptica, y únanse BD, FG y AG. Tómese también el ángulo DAG que comprende la mitad de la desviación expuesta, según la latitud de una y otra estrella, de II grados y medio, si IIII rectos valen CCCLX grados. Se propone encontrar cuánto mide el ángulo de oblicuidad en uno y otro plano, esto es, el ángulo comprendido por DFG.

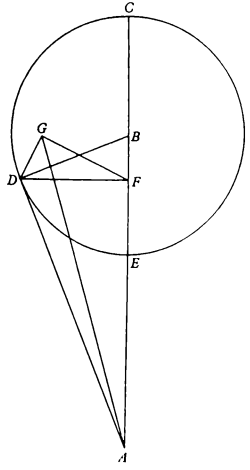


En consecuencia, puesto que en la estrella Venus, cuya distancia que parte del centro de la órbita [radio] es de 7.193 unidades, se ha demostrado que la distancia mayor, al apogeo, es de 10.208 unidades, y la menor, al perigeo, de 9.792 unidades, y entre éstas la media de 10.000, la cual le pareció bien tomarla a Ptolomeo para esta demostración, queriendo resolver la dificultad y abreviar el proceso en cuanto fuera posible: pues no cumpliendo los extremos una clara diferencia, era más seguro seguir el medio: en consecuencia, AB estará con respecto a BD en la misma razón que 10.000 a 7.193, y el ángulo ADB es recto: luego tendremos el lado AD con una longitud de 6.947. Del mismo modo, así como BA es a AD, así BD a DF, y tendremos para DF una longitud de 4.997 unidades. De nuevo, puesto que el ángulo DAG se supone que mide II grados y medio y el AGD es recto: en consecuencia en un triángulo de ángulos conocidos, el lado DG tendrá 303 unidades, siendo AD de 6.947. Así, también son conocidos los dos lados, DF, DG, y el ángulo DGF es recto; el ángulo de inclinación u oblicuidad DFG tendrá III grados, XXIX minutos. Pero puesto que el exceso del ángulo DAF sobre el FAG comprende la diferencia realizada de conmutación en longitud, de ahí que tal diferencia deba calcularse partiendo de la determinación de sus magnitudes. Después que se ha demostrado, que DG mide 303 unidades, de las que la hipotenusa AD mide 6.947 y DF 4.997, y restando el cuadrado de DG de los de AD y FD, quedan los cuadrados de AG y GF: luego se conocen AG con una longitud de 6.940 unidades y FG de 4.988 unidades. Y si AG fuera de 10.000 unidades, FG tendrá 7.187 y el ángulo FAG será de XLV grados, LVII minutos: y si AD fuera de 10.000, DF tendrá 7.193 y el ángulo DAF aproximadamente de XLVI grados. Luego en la máxima oblicuidad de conmutación la prostaféresis es deficitaria en III minutos aproximadamente. Pero en cambio quedó claro que en el ápside medio el ángulo de inclinación de las órbitas era de II grados y medio; aquí, sin embargo, aumentó casi I grado completo, que le añadió aquel primer movimiento de libración, del cual ya hemos hablado.

También en el caso de Mercurio se demuestra del mismo modo. Pues, siendo la distancia desde el centro de la órbita [radio] de 3.573 unidades, de las que la distancia máxima de la órbita desde la Tierra es de 10.948, y la mínima de 9.052, la media entre éstas de 10.000. También AB está con respecto a BD en la misma razón que 10.000 a 3.573; luego tendremos el tercer lado AD de 9.340 unidades, y puesto que AB es a AD, como BD a BF, luego DF tiene una longitud de 3.337 unidades. Y como se ha establecido que el ángulo de latitud DAG es de II grados y medio. DG será de 407, de las que DF tiene 3.337. Así, en el triángulo DFG, conocida la razón entre estos dos lados y siendo el ángulo G recto, tendremos el ángulo DFG de VII grados aproximadamente. Que es el ángulo de inclinación o de oblicuidad de la órbita de Mercurio con el plano de la eclíptica. Pero alrededor de las longitudes medias o cuadrantes medios se ha mos-

trado que el ángulo de inclinación era de VI grados, XV minutos. Luego ahora se le han sumado a causa del movimiento de la primera libración XLV minutos. Del mismo modo, para calcular los ángulos de las prostaféresis y la diferencia entre éstas, conviene advertir que ya se ha demostrado que la recta DG mide 407 unidades, de las que AD mide 9.340 y DF 3.337. En consecuencia, si restamos el cuadrado de DG de los de AD y DF, tendremos los cuadrados de AG y de FG; luego tendremos a AG con una longitud de 9.331 unidades, y a FG de 3.314, de los que se deduce GAF, ángulo de la prostaféresis, de XX grados, XLVIII minutos. Pero el ángulo DAF mide XX grados, LVI minutos, luego a aquél con respecto a éste le faltan casi VIII minutos, que es la oblicuidad.

Falta que veamos si tales ángulos de oblicuidad y las latitudes con respecto a la máxima y mínima distancia de la órbita son concordantes con lo obtenido en las observaciones. Para ello se toma de nuevo, en la misma figura, primero la razón de AB a BD en la distancia máxima de la órbita de Venus, razón que es de 10.208 a 7.193; y puesto que el ángulo ADF es recto, AD tendrá una longitud de 7.238 unidades, y a causa de la razón de AB a AD como BD a DF, tendrá DF una longitud de 5.102 de tales unidades; pero se encontró el ángulo de oblicuidad DFG de III grados, XXIX minutos, el otro lado DG medirá 309, de las que AD mide 7.238. En consecuencia, si AD fuera de 10.000 unidades, DG medirá 427 de ellas, de donde se concluye que el ángulo DAG mide II grados, XXVII minutos, en la distancia máxima desde la Tierra. Pero en la mínima, puesto que la distancia desde el centro de la órbita [el radio] BD mide 7.193 unidades de aquellas que AB es de 9.792, la perpendicular a dicho radio AD es de 6.644. Y de modo semejante, ya que BD es a DF como AB a AD, se da DF con una longitud de 4.883 unidades. Pero el ángulo DFG ha sido establecido de III grados, XXIX minutos; luego se da DG de 297 de las que AD tiene 6.644. Y, por lo tanto, del triángulo de lados conocidos, se da el ángulo DAG de II grados, XXXIIII minutos. Pero ni III, ni IIII minutos, son suficientes para que puedan captarse con la ayuda del astrolabio. Luego se tiene por buena la que se juzgaba máxima latitud de desviación [oblicuidad] en la estrella Venus.



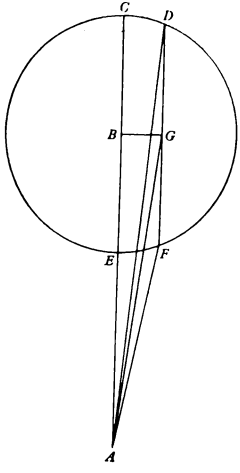
Igualmente, tómese la distancia máxima de la órbita de Mercurio, esto es, la razón de AB a BD, que es la de 10.948 a 3.573, de modo que por demostraciones similares a las anteriores, calculemos AD de 9.452 unidades, y DF de 3.085. Pero también aquí tenemos expuesto que el ángulo de oblicuidad DFG vale VII grados y, por tanto, la recta DG tiene 376 unidades, de las que DF mide 3.085 o DA 9.452. En consecuencia, también en el triángulo rectángulo DAG de lados conocidos tendremos el ángulo DAG de II grados, XVII minutos aproximadamente de digresión maxima en latitud. Pero en la distancia mínima, la razón de AB con respecto a BD se establece como la de 9.052 a 3.573: y según eso AD es de 8.317 de las mismas unidades, y DF de 3.283. Pero cuando, por la misma oblicuidad, se supone la razón de DF a DG como la de 3.283 a 400, entonces AD mide 8.317 unidades: y de ahí que el

ángulo DAG es de II grados, XLV minutos. En consecuencia, la digresión de latitud de II grados y medio tomada aquí a tenor de la razón media, se diferencia de la tomada en el apogeo en un mínimo de XIII minutos, pero con una diferencia máxima de XV minutos de la tomada en el perigeo, en vez de los cuales, en los cálculos según la razón media, utilizaremos un cuarto de grado, que no difiere sensiblemente de lo observado.

Demostrado esto así, y también que las máximas prostaféresis en longitud están en la misma razón con respecto a los máximos traslados en latitud, que los grados de las prostaféresis en las restantes secciones de la órbita con respecto a cada uno de los traslados en latitud, nos ponen en la mano calcular todas las latitudes, que se producen por la oblicuidad de la órbita de Venus y Mercurio. Pero sólo se calculan las que acontecen en las posiciones medias entre el apogeo y el perigeo (como hemos dicho), de las cuales se mostró la latitud máxima en II grados y medio, y la máxima prostaféresis de Venus de XLVI grados, y la de Mercurio alrededor de XXII. Y ya tenemos en las tablas de los movimientos irregulares las prostaféresis puestas frente a cada sección de las órbitas. En consecuencia, tanto cuanto cada una de las prostaféresis sea menor que la prostaféresis máxima, tornaremos una parte proporcional a tal diferencia en cada planeta partiendo de esos II grados y medio; las inscribiremos con sus números en la tabla que hay que exponer más abajo, y de este modo tendremos explanadas las latitudes particulares de oblicuidad que acontecen estando la Tierra en sus ápsides superior e inferior, según como también expusimos las latitudes de declinación en los cuadrantes y longitudes medias. Y las latitudes que se producen entre estos cuatro límites podrían explicarse con la sutileza del arte matemático, según la hipótesis propuesta de los círculos, aunque no sin trabajo. Ptolomeo, resumiendo cuanto pudo, y viendo que ambas clases de estas latitudes aumenta y disminuye por sí misma y en todas sus partes proporcionalmente, al modo de la latitud lunar, en consecuencia, tomando 12 partes de ella, puesto que la latitud máxima es de V grados, número que es la doceava parte de 60, pone los minutos de las proporciones según ellas, que juzgó conveniente utilizarlas no sólo en el caso de estas dos estrellas, sino también en las tres superiores, como se clasificará más abajo.

8. ACERCA DEL TERCER ASPECTO DE LA LATITUD DE VENUS Y MERCURIO, AL QUE LLAMAN DESVIACIÓN

Expuestas así estas cosas, resta decir algo del tercer movimiento de latitud, que es la desviación. De ésta, los antiguos que mantienen la Tierra en la mitad del mundo consideran que se realiza por la declinación de un excéntrico junto con la de su epiciclo alrededor del centro de la Tierra, sobre todo cuando el epiciclo está en el apogeo o perigeo, en Venus siempre por un sexto de grado al norte, y en Mercurio siempre por tres cuartos de grado hacia el sur (tal como hemos dicho). Pero no está suficientemente claro si querían que tal inclinación de las órbitas fuera siempre regular y la misma. Sus cálculos lo indican, cuando siempre toman como desviación de Venus la sexta parte de los minutos proporcionales, y como la de Mercurio las tres cuartas partes. Lo que no tiene lugar si no permanece el ángulo de inclinación siempre el mismo, según lo exige el cálculo de aquellos minutos, en el que se fundan. Incluso permaneciendo igual el ángulo, no podría entenderse cómo esta latitud de aquellas estrellas pasa de repente de la sección común a la misma latitud que dejó

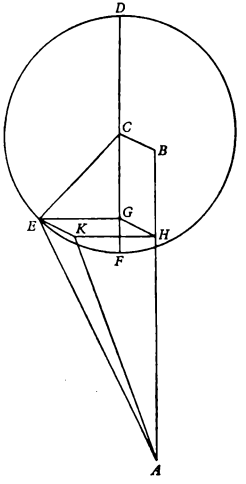


antes, si no se dice que esto ocurre a modo de la refracción de la luz (como en óptica). Pero estamos tratando de un movimiento que no es instantáneo, sino medible en el tiempo por su propia naturaleza. Es oportuno, pues, confesar que hay en ellos una libración, como la que se ha expuesto, que hace que las partes del círculo se muevan en diversas direcciones, tal libración es necesario seguir, de modo que los cálculos de ellos difieran en el caso de Mercurio en una quinta parte de grado. Lo cual debe parecer menos admirable, si, según nuestra hipótesis, esta latitud es variable y no simple, no produciendo, sin embargo, un error aparente, que puede discernirse en todas las diferencias.

Esté, pues, en el supuesto plano perpendicular a la eclíptica la sección común, en la que sea A el centro de la Tierra, B el centro de la órbita CDF a la distancia máxima o mínima de la Tierra, como si pasara por los polos de la propia órbita inclinada. Y cuando el centro de la órbita está en el apogeo o perigeo, esto es, en B [en la línea AB] la estrella está en su desviación máxima, dondequiera que esté según el círculo paralelo a la órbita, y DF es un diámetro paralelo al diámetro de la órbita CBE, cuyas secciones [DF y CBE] se suponen comunes a los planos perpendiculares al plano CDF. Se corta DF en dos mitades por G, y será el propio G el centro del círculo paralelo, y únanse BF, AG, AD y AF, y supongamos que el ángulo BAG comprende un sexto de grado, como en la mayor desviación de Venus. En consecuencia, en el triángulo ABG, con un ángulo recto B, tenemos la razón de los lados, AB es a BG como 10.000 es a 29. Pero toda ABC mide 17.193 unidades, y el resto AE 2.807, y también las mitades de las cuerdas de los arcos dobles CD y EF son iguales a BG. En consecuencia, el ángulo CAD medirá VI minutos, y el EAF aproximadamente XV minutos, difiriendo del BAG, allí en casi IIII minutos, aquí en V minutos, que por su exigüidad se desprecian. En consecuencia, la desviación aparente de Venus, estando la Tierra en su apogeo o perigeo, será algo mayor o menor de X minutos, en la parte que esté de su órbita la estrella.

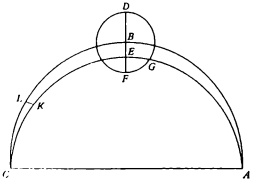
En cambio, en el caso de Mercurio, habiendo trazado el ángulo BAG de tres cuartos de un grado, y AB que es a BG como 10.000 es a 131, y ABC de 13.573, y el resto AE de 6.427, el ángulo CAD tendrá XXXIII minutos y el EAF aproximadamente LXX minutos. En consecuencia, allí [en el CAD] faltan XII minutos, aquí [en el EAF] sobran XXV. Pero estas diferencias son generalmente disipadas por los rayos del Sol, antes de que Mercurio emerja ante nuestra vista determinaron su desviación aparente como si fuera simple. Pero si alguien quisiera determinar aquellos desplazamientos ocultos bajo el Sol, averiguando la razón exacta con un mínimo de trabajo, actúe de la manera como le indicaremos.

Para ello tomamos como ejemplo a Mercurio, porque realiza una desviación más destacada que Venus. Sea, pues, AB una línea recta en la sección común de la órbita de la estrella y de la eclíptica, mientras que la Tierra, en A, está en el apogeo o perigeo de la órbita de la estrella. Establecemos, sin variaciones, que la línea AB es de 10.000 unidades, como longitud media entre la máxima y la mínima, como se ha hecho con respecto a la obli-



cuidad. Descríbase el círculo DEF con centro en C, paralelo a la órbita excéntrica según la distancia CB, en tal paralelo se entiende que realiza la estrella su máxima desviación y sea DCF un diámetro de ese círculo, que deberá ser paralelo a AB y ambas líneas estarán en el mismo plano, perpendicular a la órbita de la estrella. Tómese el arco EF de XLV grados, por ejemplo, con respecto al cual podamos observar la desviación de la estrella, y constrúyanse las perpendiculares EG a CF, y EK, GH al propuesto plano de la órbita, y conectando HK se completa un paralelogramo rectángulo, únanse también AE, AK, EC. Luego, siendo en Mercurio, según la desviación máxima, BC de 131 unidades, midiendo AB 10.000, CE tiene también 3.573 de las mismas unidades, y se da un triángulo rectángulo [EGC] de ángulos conocidos, luego también el lado EG o CH mide 2.526, pero restando BH, que es igual a EG o CG, queda AH de 7.474 unidades. En consecuencia, en el triángulo AHK, del que son conocidos los lados que comprenden el ángulo recto H, la hipotenusa AK será de 7.889, y el lado que sea igual a CB o a GH se ha determinado que vale 131 unidades. En consecuencia, también en el triángulo AKE, con dos lados conocidos, el AK y el KE que comprenden el ángulo recto en K, se conoce el ángulo KAE, que corresponde a la desviación que buscábamos con respecto al arco tomado EF, y que se diferencia poco de lo observado.

Del mismo modo actuaremos en los otros [planetas] y en el caso de Venus y lo consignaremos en la tabla adjunta. Expuestas así estas cosas, a las desviaciones que están entre estos límites adaptaremos los minutos o partes sexagesimales de las proporciones. Sea, pues, el círculo ABC la órbita del excéntrico de Venus o de Mercurio, y sean



A, C, los nodos de esta latitud, B el límite de máxima desviación, haciendo centro en el cual descríbase el pequeño círculo DFG, cuyo diámetro transversal sea DBC, por el que se lleva a cabo la libración del movimiento de desviación. Y puesto que se supuso, que estando la Tierra en el apogeo o perigeo de la órbita del excéntrico de la estrella, esta estrella realiza su máxima desviación en el punto F, en el que el círculo deferente de la estrella toca al círculo pequeño: esté ahora la Tierra alejada del apogeo o perigeo de la estrella, a tenor de este movimiento tómese un arco semejante en el círculo pequeño, que sea FG, y trácese el círculo AGC, que corta al diámetro DF en el punto E, en este círculo se supone a la estrella en el punto K, de acuerdo con el arco EK similar al FG por hipótesis, y trácese KL perpendicular al círculo ABC. Se propone hallar la magnitud de KL a partir de FG, EK y BE, esto es, la distancia de la estrella desde el

círculo ABC. Puesto que por medio del arco FG se conocerá el EG como una recta que difiere al mínimo de una circular o convexa, y EF es semejante en unidades a las de BF y a las de la diferencia BE, y también BF es a BE como la cuerda del doble del cuadrante CE es a la cuerda del doble de CK, y semejantemente como BE es a KL: en consecuencia, si supusiéramos a BF y a la línea que parte del centro [radio] en el arco CE con un mismo número, LX, a partir de éstos tendremos las unidades que conciernen a BE, multiplicando estos números entre sí y dividiendo el resultado por 60, tendremos KL, los minutos proporcionales al arco EK: que consignaremos del mismo modo en el quinto y último lugar de la tabla que sigue.

Latitudes de Saturno, Júpiter y Marte

Números comunes		*Latitud de Saturno*				*Latitud de Júpiter*				*Latitud de Marte*				*Minutos proporcionales*	
		Norte		*Sur*		*Norte*		*Sur*		*Norte*		*Sur*			
°	°	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	'	"
3	357	2	3	2	2	1	6	1	5	0	6	0	5	59	48
6	354	2	4	2	2	1	7	1	5	0	7	0	5	59	36
9	351	2	4	2	3	1	7	1	5	0	9	0	6	59	6
12	348	2	5	2	3	1	8	1	6	0	9	0	6	58	36
15	345	2	5	2	3	1	8	1	6	0	10	0	8	57	48
18	342	2	6	2	3	1	8	1	6	0	11	0	8	57	0
21	339	2	6	2	4	1	9	1	7	0	12	0	9	55	48
24	336	2	7	2	4	1	9	1	7	0	13	0	9	54	36
27	333	2	8	2	5	1	10	1	8	0	14	0	10	53	18
30	330	2	8	2	5	1	10	1	8	0	14	0	11	52	0
33	327	2	9	2	6	1	11	1	9	0	15	0	11	50	12
36	324	2	10	2	7	1	11	1	9	0	16	0	12	48	24
39	321	2	10	2	7	1	12	1	10	0	17	0	12	46	24
42	318	2	11	2	8	1	12	1	10	0	18	0	13	44	24
45	315	2	11	2	9	1	3	1	11	0	19	0	15	42	12
48	312	2	12	2	10	1	13	1	11	0	20	0	16	40	0
51	309	2	13	2	11	1	14	1	12	0	22	0	18	37	36
54	306	2	14	2	12	1	14	1	13	0	23	0	20	35	12
57	303	2	15	2	13	1	15	1	14	0	25	0	22	32	36
60	300	2	16	2	15	1	16	1	16	0	27	0	24	30	0
63	297	2	17	2	16	1	17	1	17	0	29	0	25	27	12
66	294	2	18	2	18	1	18	1	18	0	31	0	27	24	24
69	291	2	20	2	19	1	19	1	19	0	33	0	29	21	21
72	288	2	21	2	21	1	21	1	21	0	35	0	31	18	18
75	285	2	22	2	22	1	22	1	22	0	37	0	34	15	15
78	282	2	24	2	24	1	24	1	24	0	40	0	37	12	12
81	279	2	25	2	26	1	25	1	25	0	42	0	39	9	9
84	276	2	27	2	27	1	27	1	27	0	45	0	41	6	24
87	273	2	28	2	18	1	28	1	28	0	48	0	45	3	12
90	270	2	30	2	30	1	30	1	30	0	51	0	49	0	0

(continuación)

Números comunes		*Latitud de Saturno*				*Latitud de Júpiter*				*Latitud de Marte*				*Minutos proporcionales*	
		Norte		*Sur*		*Norte*		*Sur*		*Norte*		*Sur*			
°	°	°	′	°	′	°	′	°	′	°	′	°	′	′	″
93	267	2	31	2	31	1	31	1	31	0	55	0	52	3	12
96	264	2	33	2	33	1	33	1	33	0	59	0	56	6	24
99	261	2	34	2	34	1	34	1	34	1	2	1	0	9	9
102	258	2	36	2	36	1	36	1	36	1	6	1	4	12	12
105	255	2	37	2	37	1	37	1	37	1	11	1	8	15	15
108	252	2	39	2	39	1	39	1	39	1	15	1	12	18	18
111	249	2	40	2	40	1	40	1	40	1	19	1	17	21	21
114	246	2	42	2	42	1	42	1	42	1	25	1	22	24	24
117	243	2	43	2	43	1	43	1	43	1	31	1	28	27	12
120	240	2	45	2	45	1	45	1	44	1	36	1	34	30	0
123	237	2	46	2	46	1	46	1	46	1	41	1	40	32	36
126	234	2	47	2	48	1	47	1	47	1	47	1	47	35	12
129	231	2	49	2	49	1	49	1	49	1	54	1	55	37	36
132	228	2	50	2	51	1	50	1	51	2	2	2	5	40	0
135	225	2	52	2	53	1	51	1	53	2	10	2	15	42	12
138	222	2	53	2	54	1	52	1	54	2	19	2	26	44	24
141	219	2	54	2	55	1	53	1	55	2	29	2	38	46	24
144	216	2	55	2	56	1	55	1	57	2	37	2	48	48	24
147	213	2	56	2	57	1	56	1	58	2	47	3	4	50	12
150	210	2	57	2	58	1	58	1	59	2	51	3	20	52	0
153	207	2	58	2	59	1	59	2	1	3	12	3	32	53	18
156	204	2	59	3	0	2	0	2	2	3	23	3	52	54	36
159	201	2	59	3	1	2	1	2	3	3	34	4	13	55	48
162	198	3	0	3	2	2	2	2	4	3	46	4	36	57	0
165	195	3	0	3	2	2	2	2	5	3	57	5	0	57	48
168	192	3	1	3	3	2	3	2	5	4	9	5	23	58	36
171	189	3	1	3	3	2	3	2	6	4	17	5	48	59	6
174	186	3	2	3	4	2	4	2	6	4	23	6	15	59	36
177	183	3	2	3	4	2	4	2	7	4	27	6	35	59	48
180	180	3	2	3	5	2	4	2	7	4	30	6	50	60	0

Latitudes de Venus y Mercurio

Números comunes		*Venus*				*Mercurio*				*Venus*		*Mercurio*		*Minutos proporcionales*	
		Declinac.		*Oblicui.*		*Declinac.*		*Oblicui.*		*Desviac.*		*Desviac.*			
°	°	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	'	"
3	357	1	2	0	4	1	45	0	5	0	7	0	33	59	36
6	354	1	2	0	8	1	45	0	11	0	7	0	33	59	12
9	351	1	1	0	12	1	45	0	16	0	7	0	33	57	14
12	348	1	1	0	16	1	44	0	22	0	7	0	33	57	14
15	345	1	0	0	21	1	44	0	27	0	7	0	33	55	41
18	342	1	0	0	25	1	43	0	33	0	7	0	33	54	9
21	339	0	59	0	29	1	42	0	38	0	7	0	33	52	12
24	336	0	59	0	33	1	40	0	44	0	7	0	34	49	43
27	333	0	58	0	37	1	38	0	49	0	7	0	34	47	21
30	330	0	57	0	41	1	36	0	55	0	8	0	34	45	4
33	327	0	56	0	45	1	34	1	0	0	8	0	34	42	0
36	324	0	55	0	49	1	30	1	6	0	8	0	34	39	15
39	321	0	53	0	53	1	27	1	11	0	8	0	35	35	53
42	318	0	51	0	57	1	23	1	16	0	8	0	35	32	51
45	315	0	49	1	1	1	19	1	21	0	8	0	35	29	41
48	312	0	46	1	5	1	15	1	26	0	8	0	36	26	40
51	309	0	44	1	9	1	11	1	31	0	8	0	36	23	34
54	306	0	41	1	13	1	8	1	35	0	8	0	36	20	39
57	303	0	38	1	17	1	4	1	40	0	8	0	37	17	40
60	300	0	35	1	20	0	59	1	44	0	8	0	38	15	0
63	297	0	32	1	24	0	54	1	48	0	8	0	38	12	20
66	294	0	29	1	28	0	49	1	52	0	9	0	39	9	55
69	291	0	26	1	32	0	44	1	56	0	9	0	39	7	38
72	288	0	23	1	35	0	38	2	0	0	9	0	40	5	39
75	285	0	20	1	38	0	32	2	3	0	9	0	41	3	57
78	282	0	16	1	42	0	26	2	7	0	9	0	42	2	34
81	279	0	12	1	46	0	21	2	10	0	9	0	42	1	28
84	276	0	8	1	50	0	16	2	14	0	10	0	43	0	40
87	273	0	4	1	54	0	8	2	17	0	10	0	44	0	10
90	270	0	0	1	57	0	0	2	20	0	10	0	45	0	0

(continuación)

Números comunes		*Venus*				*Mercurio*				*Venus*		*Mercurio*		*Minutos proporcionales*	
		Declinac.		*Oblicui.*		*Declinac.*		*Oblicui.*		*Desviac.*		*Desviac.*			
°	°	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	'	''
93	267	0	5	2	0	0	8	2	23	0	10	0	45	0	10
96	264	0	10	2	3	0	15	2	25	0	10	0	46	0	40
99	261	0	15	2	6	0	23	2	27	0	10	0	47	1	28
102	258	0	20	2	9	0	31	2	28	0	11	0	48	2	34
105	255	0	26	2	12	0	40	2	29	0	11	0	48	3	57
108	252	0	32	2	15	0	48	2	29	0	11	0	49	5	39
111	249	0	38	2	17	0	57	2	30	0	11	0	50	7	38
114	246	0	44	2	20	1	6	2	30	0	11	0	51	9	55
117	243	0	50	2	22	1	16	2	30	0	11	0	52	12	20
120	240	0	59	2	24	1	25	2	29	0	12	0	52	15	0
123	237	1	8	2	26	1	35	2	28	0	12	0	53	17	40
126	234	1	18	2	27	1	45	2	26	0	12	0	54	20	39
129	231	1	28	2	29	1	55	2	23	0	12	0	55	23	34
132	228	1	38	2	30	2	6	2	20	0	12	0	56	26	40
135	225	1	48	2	30	2	16	2	16	0	13	0	57	29	41
138	222	1	59	2	30	2	27	2	11	0	13	0	57	32	51
141	219	2	11	2	29	2	37	2	6	0	13	0	58	35	53
144	216	2	25	2	28	2	47	2	0	0	13	0	59	39	15
147	213	2	43	2	26	2	57	1	53	0	13	1	0	42	0
150	210	3	3	2	22	3	7	1	46	0	13	1	1	45	4
153	207	3	23	2	18	3	17	1	38	0	13	1	2	47	21
156	204	3	44	2	12	3	26	1	29	0	14	1	3	49	43
159	201	4	5	2	4	3	34	1	20	0	14	1	4	52	12
162	198	4	26	1	55	3	42	1	10	0	14	1	5	54	9
165	195	4	49	1	42	3	48	0	59	0	14	1	6	55	41
168	192	5	13	1	27	3	54	0	48	0	14	1	7	57	14
171	189	5	36	1	9	3	58	0	36	0	14	1	7	58	25
174	186	5	52	0	48	4	2	0	24	0	14	1	8	59	12
177	183	6	7	0	25	4	4	0	12	0	14	1	9	59	36
180	180	6	22	0	0	4	5	0	0	0	14	1	10	60	0

9. ACERCA DEL CÁLCULO DE LAS LATITUDES DE LAS CINCO ESTRELLAS ERRANTES

La manera de calcular las latitudes de las cinco estrellas errantes se realiza por medio de estas tablas. Pues en Saturno, Júpiter y Marte comparamos la anomalía del excéntrico, corregida o regularizada, con respecto a los números comunes, en Marte la suya [su anomalía], cualquiera que fuera, en Júpiter restándole antes XX grados, en Saturno sumándole L grados, en consecuencia, lo que resulta lo anotamos en la columna sexagesimal, o sea, los minutos proporcionales. De modo semejante, por medio de la anomalía corregida de conmutación determinamos el número propio de cada una [estrella] correspondiente a la latitud, la primera y la latitud norte, si los minutos proporcionales estuvieran en la parte superior [de la columna], lo que sucede cuando la anomalía del excéntrico tuviera menos de XC o más de CCLXX; después la sur y la latitud segunda, si los minutos proporcionales están en la parte inferior, esto es, si hay más de XC o menos de CCLXX grados en la anomalía del excéntrico (por la que es introducida [la tabla]). En consecuencia, si multiplicamos una y otra de estas latitudes por sus minutos, aparecerá la distancia desde la eclíptica al norte o al sur, según la designación de los números tomados. Pero en Venus y Mercurio, las tres anomalías, la de declinación, la de oblicuidad y la de desviación, que se consignan aparte, han de ser tomadas primero por la anomalía corregida de conmutación, a no ser en el caso de Mercurio, en el que se resta la décima parte de la oblicuidad, si la anomalía del excéntrico y su número se encuentran en la parte superior de la tabla, o se añade otro tanto si está en la inferior, y de ellos se toma el resultado de la suma o de la resta. Hay que distinguir si estas designaciones son norte o sur. Porque si la anomalía de conmutación corregida estuviera en el semicírculo del apogeo, esto es, menor de XC o mayor de CCLXX y también la anomalía del excéntrico es menor que un semicírculo (o también si la anomalía de conmutación estuviera en el arco del perigeo, o sea, más de XC y menos de CCLXX, y la anomalía del excéntrico mayor que un semicírculo) la declinación de Venus será boreal, la de Mercurio austral. Pero si la anomalía de conmutación estuviera en el arco del perigeo, la anomalía del excéntrico fuera menor que un semicírculo, o estando la anomalía de conmutación en la parte del apogeo y la anomalía del excéntrico mayor que un semicírculo, será por el contrario la declinación de Venus austral y la de Mercurio boreal. En cambio, en la oblicuidad, si la anomalía de conmutación es menor que un semicírculo cuando la anomalía del excéntrico ocurre en el apogeo o la anomalía de conmutación es mayor que un semicírculo estando la anomalía del excéntrico en el perigeo, la oblicuidad de Venus será boreal, la de Mercurio austral, y a la inversa. Sin embargo, las desviaciones de Venus son siempre boreales, y las de Mercurio australes. Finalmente, con la anomalía corregida del excéntrico se toman los minutos proporcionales comunes a los cinco, aunque adscritos a los tres superiores, que se asignan a la oblicuidad y por último a la desviación. Después de esto, añadidos XC grados a la misma anomalía del excéntrico, agregado esto, se buscan los minutos proporcionales comunes que haya, aplicándolos a la latitud de declinación. Colocadas así todas estas cosas en orden, se multiplican cada una de las tres latitudes expuestas por sus minutos proporcionales y se encontrarán medidas en su ubicación y tiempo, de modo que finalmente tengamos la suma de estas tres latitudes en estas dos estrellas. Si fueran todas del mismo nombre [signo], se suman; si no, se suman al menos dos, las del mismo nombre, las cuales según sean mayores o menores, se restan de la tercera latitud, que es recíprocamente diversa: resultará la latitud preponderante buscada.

Galileo Galilei

(1564-1642)

VIDA Y OBRA

En 1633, noventa años después de la muerte de Copérnico, el astrónomo y matemático italiano Galileo Galilei fue llevado a Roma para ser juzgado por herejía ante la Inquisición. Los cargos procedían de la publicación de su libro *Diálogo sobre los dos principales sistemas del mundo: ptolemaico y copernicano*. En este libro, Galileo declaró enérgicamente, desafiando un edicto de 1616 contra la difusión de la doctrina copernicana, que el sistema heliocéntrico no era una simple hipótesis, sino que correspondía a la verdad. No hubo vacilaciones en el veredicto. Galileo admitió que quizá había ido demasiado lejos en sus argumentos en favor del sistema copernicano, a pesar de los avisos previos de las autoridades de la Iglesia católica romana. La mayoría de los cardenales del tribunal le hallaron «vehementemente sospechoso de herejía» por apoyar y enseñar la idea de que la Tierra está en movimiento y no es el centro del universo, y lo condenaron a prisión perpetua.

Galileo fue obligado a firmar una retractación manuscrita y a abjurar públicamente de sus creencias. De rodillas, y con las manos sobre la Biblia, pronunció su abjuración en latín:

> Yo, Galileo Galilei, hijo del fallecido Vincenzio Galilei de Florencia, de setenta años de edad, juzgado personalmente por este tribunal, y arrodillado ante Vosotros, Eminentísimos y Reverendísimos Señores Cardenales, Inquisidores Generales de la República Cristiana contra las depravaciones heréticas, teniendo ante mis ojos los Santísimos Evangelios y poniendo sobre ellos mi propia mano, juro que siempre he creído, creo ahora y que, con la ayuda de Dios, creeré en el futuro todo lo que la Santa Iglesia Católica y Apostólica mantiene, predica y enseña.
>
> Pero como yo, tras haber sido amonestado por este Santo Oficio a abandonar completamente la falsa opinión de que el Sol es el centro inmóvil del universo, y que la Tierra no es el centro del universo y se mueve, y a no sostener, defender o enseñar de ninguna manera, ni oralmente ni por escrito, la mencionada falsa doctrina; y tras haberme sido notificado que dicha doctrina es opuesta a las Sagradas Escrituras, escribí y di a la imprenta un libro en que trato de dicha doctrina ya condenada, y presento argumentos de mucha eficacia en su favor,

sin llegar a ninguna conclusión: he sido hallado vehementemente culpable de herejía, es decir, de haber mantenido y creído que el Sol es el centro inmóvil del universo, y que la Tierra no está en el centro del universo y se mueve.

Sin embargo, deseando eliminar de las mentes de vuestras Eminencias y de todos los fieles cristianos esta vehemente sospecha razonablemente concebida contra mí, abjuro con corazón sincero y piedad no fingida, condeno y detesto los dichos errores y herejías, y generalmente todos y cada uno de los errores y sectas contrarios a la Santa Iglesia Católica. Y juro que en el futuro nunca más defenderé con palabras o por escrito cosa alguna que pueda acarrearme sospechas semejantes; y si conozco algún hereje, o sospechoso de herejía, lo denunciaré a este Santo Oficio, o al Inquisidor y Ordinario del lugar donde me encuentre.

También juro y prometo cumplir y observar enteramente cuantas penitencias me impusiere este Santo Oficio. Y si contravengo cualquiera de estas promesas, protestas y juramentos (¡no lo quiera Dios!) me someto a las penas y castigos que los Sagrados Cánones y los Decretos generales o particulares establecen y promulgan contra tales infractores. Auxílieme Dios y los Santos Evangelios, que toco con mis propias manos.

Yo, el antedicho Galileo Galilei, he abjurado, jurado y prometido, y me declaro a mí mismo comprometido como antes he declarado; y en testimonio de la verdad, con mi propia mano suscribo la presente cédula de abjuración, y la recito palabra por palabra. En Roma, en el Convento de la Minerva, este 22 de junio de 1633. Yo, Galileo Galilei, he abjurado como lo declaro con mi propia mano.

Se dice que Galileo, al levantarse, susurró en voz baja *Eppur si muove* («sin embargo, se mueve»). Esta frase cautivó durante siglos a científicos y estudiosos, ya que representaba un desafío al oscurantismo y una noble determinación de buscar la verdad aún en las circunstancias más adversas. Aunque se ha descubierto un retrato al óleo de Galileo de 1640 con la inscripción *Eppur si muove*, la mayoría de los historiadores consideran que esta historia es un mito. Aun así, corresponde plenamente al carácter de Galileo haber cedido sólo verbalmente a las exigencias de la Iglesia en su abjuración, y haber vuelto después a sus estudios cinéticos, correspondieran o no a principios copernicanos. Después de todo, lo que había llevado a Galileo ante la Inquisición fue su publicación de *Los dos máximos sistemas del mundo*, un desafío frontal al edicto eclesiástico de 1616 que prohibía enseñar la teoría copernicana de la Tierra en movimiento alrededor del Sol como más que una hipótesis. Puede que la frase *Eppur si muove* no concluyera su juicio y abjuración pero, en todo caso, marca la vida y los logros de Galileo.

Nacido en Pisa el 18 de febrero de 1564, Galileo Galilei era hijo de Vincenzo Galilei, músico y matemático. La familia se trasladó a Florencia cuando Galileo era joven, y allí empezó su formación en un monasterio. Aunque ya a temprana edad Galileo mostró una inclinación por las matemáticas y las investigaciones mecánicas, su padre impuso con firmeza que se dedicara a un campo más útil, de manera que en 1581 se matriculó en la universidad de Pisa para estudiar medicina y la filosofía de Aristóteles. Fue allí donde emergió su rebeldía: su interés por la medicina era escaso o nulo, y empezó a estudiar con pasión las matemáticas. Se cree que mientras estaba observando las oscilaciones de una lámpara colgante en la catedral de Pisa, Galileo descubrió la isocronía del péndulo —la independencia del período de oscilación con respecto a la amplitud de ésta—, que aplicaría medio siglo más tarde en la construcción de un reloj astronómico.

Galileo convenció a su padre de que le permitiera dejar la universidad sin haber obtenido ningún grado, y regresó a Florencia para estudiar y enseñar matemáticas. En 1586, había empezado a cuestionar la ciencia y la filosofía de Aristóteles, prefiriendo reexaminar los trabajos del gran matemático Arquímedes, que también era conocido

por haber descubierto y perfeccionado los métodos de integración para el cálculo de áreas y volúmenes. Arquímedes también obtuvo una gran reputación por su invención de numerosos artefactos utilizados como máquinas bélicas, como catapultas gigantes para lanzar piedras contra ejércitos en marcha y grandes grúas para volcar barcos. Galileo se inspiró sobre todo en el genio matemático de Arquímedes, pero también fue arrastrado por su espíritu de inventiva, y diseñó una balanza hidrostática para determinar la densidad de los objetos pesándolos en agua.

En 1589, Galileo fue nombrado profesor de matemáticas en la universidad de Pisa, donde se le encargó que enseñara astronomía ptolemaica —la teoría según la cual el Sol y los planetas giran alrededor de la Tierra—. Fue en Pisa, a los veinticinco años, donde profundizó su comprensión de la astronomía y empezó a romper con Aristóteles y Ptolomeo. Algunas notas de conferencias recuperadas de aquel período muestran que Galileo había adoptado el punto de vista de Arquímedes sobre el movimiento; en concreto, enseñaba que la velocidad de caída de los objetos era proporcional a su densidad, y no a su peso, como Aristóteles pretendía. Se dice que Galileo demostró esta teoría dejando caer objetos del mismo peso pero diferentes densidades desde lo alto de la torre inclinada de Pisa. En esta ciudad, también escribió *Sobre el movimiento* (*De motu*), un libro que refutaba las teorías aristotélicas del movimiento y que convirtió a Galileo en un líder de la reforma científica.

Tras la muerte de su padre en 1592, Galileo no vio mucho futuro en Pisa. La paga era miserable y con la ayuda de un amigo de la familia, Guidobaldo del Monte, fue nombrado catedrático de matemáticas en la universidad de Padua, en la república de Venecia, donde su reputación floreció. Permaneció en Padua durante dieciocho años, enseñando geometría y astronomía y dando clases particulares de cosmografía, óptica, aritmética y sobre el uso del transportador en ingeniería militar. En 1593, recopiló tratados sobre fortificaciones y mecánica para sus estudiantes particulares e inventó una bomba que podía subir agua con la potencia de un solo caballo.

En 1597, Galileo inventó una regla de calcular que resultó útil para los ingenieros mecánicos y los militares. También inició una correspondencia con Johannes Kepler, cuyo libro *Misterio del cosmos* (*Mysterium cosmographicum*) había leído y con cuyas opiniones copernicanas había simpatizado. Kepler esperaba que Galileo apoyara abiertamente la teoría de una Tierra heliocéntrica, pero los intereses científicos de éste todavía estaban enfocados en las teorías mecánicas, por lo cual no siguió los deseos de Kepler. En aquella época, Galileo se enamoró de Marina Gamba, una mujer veneciana con la que tuvo un hijo y dos hijas. La hija mayor, Virginia, nacida en 1600, permaneció siempre muy unida a su padre, sobre todo a través de un intercambio epistolar, ya que pasó la mayor parte de su vida adulta en un convento, donde tomó el nombre de María Celeste en homenaje al interés de su padre por las cuestiones celestes.

En los primeros años del siglo XVII, Galileo experimentó con el péndulo y exploró la relación de éste con el fenómeno de la aceleración natural. También empezó a trabajar en un modelo matemático que describía el movimiento de la caída de los cuerpos, que estudió midiendo el tiempo que tardaban unas bolas en rodar diversas distancias a lo largo de planos inclinados. En 1604, una supernova observada en el cielo nocturno de Padua renovó sus dudas acerca del modelo aristotélico de un cielo inmutable. Galileo se lanzó a la primera línea del debate, con conferencias provocadoras, pero dudó si debía o no publicar sus teorías. En octubre de 1608, un holandés llamado Hans Lipperhey solicitó una patente para un catalejo que hacía que objetos lejanos parecieran pró-

ximos. Al oír hablar de este invento, Galileo intentó mejorarlo. Al cabo de poco tiempo había diseñado un telescopio de potencia nueve, tres veces más potente que el aparato de Lipperhey, y en un año ya había conseguido un telescopio de potencia treinta. Cuando en enero de 1610 apuntó el telescopio hacia el cielo, el firmamento se abrió literalmente a la humanidad. La Luna ya no pareció un disco perfectamente liso, sino montañosa y llena de cráteres. Con su telescopio, Galileo vio que la Vía Láctea era en realidad un conjunto vastísimo de estrellas separadas. Pero, aún más importante, avistó cuatro lunas alrededor de Júpiter, un descubrimiento que tenía implicaciones tremendas para los partidarios del geocentrismo, que defendían que todos los cuerpos celestes giraban exclusivamente alrededor de la Tierra. Aquel mismo año publicó el *Nuncio sidéreo* (*Sidereus Nuncius*) en que explicaba sus descubrimientos, que le situaron al frente de la astronomía contemporánea. Se sintió incapaz de seguir enseñando teorías aristotélicas, y su fama le permitió conseguir una plaza en Florencia como matemático y filósofo en la corte del gran duque de Toscana.

Ya libre de las obligaciones de la enseñanza, Galileo pudo dedicarse por completo al telescopio. Pronto observó las fases de Venus, que confirmaban la teoría de Copérnico de que el planeta giraba alrededor del Sol. También observó la forma oblonga de Saturno, que atribuyó a numerosas lunas girando a su alrededor, ya que su telescopio no podía detectar los anillos de este planeta.

La Iglesia católica romana apreció y elogió los descubrimientos de Galileo, pero discrepó de la interpretación que les daba. En 1613, Galileo publicó las *Cartas sobre las manchas solares*, en que defendía por primera vez en letra impresa el sistema copernicano de un universo heliocéntrico. El trabajo fue inmediatamente atacado, su autor denunciado, y la Santa Inquisición tomó buena nota de ello. Cuando en 1616 Galileo publicó una teoría de las mareas, que creía que demostraba el movimiento de la Tierra, fue llamado a Roma a responder por sus ideas. Un consejo de teólogos promulgó un edicto según el cual Galileo hacía mala ciencia cuando enseñaba como un hecho el sistema copernicano, pero no fue condenado oficialmente. Un encuentro con el papa Pablo V le hizo creer que el pontífice le tenía en gran estima y que podía seguir enseñando bajo su protección. Sin embargo, fue seriamente advertido de que las teorías copernicanas eran contrarias a las Escrituras, y que sólo podían ser presentadas como hipótesis.

Cuando a la muerte del papa Pablo V, en 1623, uno de los amigos y protectores de Galileo, el cardenal Barberini, fue elegido papa, tomando el nombre de Urbano VIII, Galileo supuso que el edicto de 1616 sería revocado. Urbano dijo a Galileo que él mismo había hecho omitir del edicto la palabra «herejía» y que, mientras Galileo tratara la doctrina copernicana como una hipótesis y no como una verdad, sería libre para publicar. Con esta seguridad, Galileo trabajó durante los seis años siguientes en el *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo*, el libro que lo llevaría a la cárcel.

Los dos máximos sistemas del mundo presenta la forma de una polémica entre un partidario de Aristóteles y Ptolomeo y uno de Copérnico, que intentan ganar para sus respectivas filosofías a un hombre ilustrado corriente. Galileo prologó su libro con una declaración de respeto al edicto de 1616 y, al presentar las teorías a través de los personajes del libro, consiguió evitar declararse abiertamente partidario de ninguno de los bandos. Sin embargo, el público percibió claramente que en *Los dos grandes sistemas del mundo* Galileo denostaba el aristotelismo. En la polémica, la cosmología aristotélica es defendida débilmente por su ingenuo partidario y es atacada vigorosamente por el

poderoso y persuasivo copernicano. El libro alcanzó un gran éxito, pese a ser objeto de protestas masivas en el momento de su publicación. Al escribir en italiano y no en latín, Galileo lo hizo accesible a un amplio público ilustrado, y no tan sólo a eruditos y clérigos. Los rivales ptolemaicos de Galileo se enfurecieron por el trato despreciativo que habían recibido sus opiniones científicas. En Simplicio, el defensor del sistema ptolemaico, muchos lectores reconocieron una caricatura de Simplicius, un comentador de Aristóteles del siglo VI. El papa Urbano VIII llegó a sospechar que Simplicio era una caricatura de él mismo, y se sintió engañado por Galileo, que aparentemente había omitido informarle de cualquier contravención al edicto de 1616 cuando pidió permiso para escribir el libro. Galileo, por su parte, nunca recibió ninguna prohibición escrita, y pareció no ser consciente de haber transgredido el edicto.

En marzo de 1632, la Iglesia ordenó al impresor que dejara de publicar el libro, y Galileo fue convocado a Roma para defenderse. Alegando una seria enfermedad, Galileo rehusó viajar, pero el papa insistió, amenazándole con llevarlo encadenado. Once meses más tarde, Galileo llegó a Roma para el juicio. Fue obligado a abjurar de la herejía de la teoría copernicana y sentenciado a prisión perpetua. Esta última sentencia fue conmutada poco después por un suave arresto domiciliario en Siena, bajo la vigilancia del arzobispo Ascanio Piccolomini, antiguo alumno de Galileo. Piccolomini le permitió seguir escribiendo, e incluso le animó a ello. Allí, Galileo terminó su última obra, *Diálogo sobre dos nuevas ciencias*, una presentación de sus descubrimientos en física. Pero al año siguiente, cuando en Roma se conoció el trato de favor que Galileo recibía de Piccolomini, se le hizo trasladar a otra casa, en las colinas cercanas a Florencia. Algunos historiadores creen que fue durante este desplazamiento cuando Galileo pronunció realmente *Eppur si muove*, y no al final de su abjuración pública.

El traslado acercó a Galileo a su hija Virginia, pero ésta murió pronto, tras una breve enfermedad, en 1634. Esta pérdida destrozó a Galileo, pero al fin logró sobreponerse y reemprender el trabajo en *Dos nuevas ciencias*, y terminó el libro en un año. Sin embargo, la Congregación del Índice, la censura eclesiástica, no le autorizó a publicarlo. El manuscrito fue llevado de Italia a Leiden, en la Europa protestante, por Louis Elsevier, un editor holandés, para que pudiera aparecer en letra impresa, en 1638. *Diálogos sobre dos nuevas ciencias*, en que estableció las leyes del movimiento acelerado que rigen la caída de los cuerpos, es ampliamente considerado como una de las piedras angulares de la física moderna. En este libro, Galileo revisó y afinó sus estudios anteriores del movimiento, así como los principios de la mecánica. Las dos nuevas ciencias en que se concentra Galileo son el estudio de la resistencia de materiales (una rama de la ingeniería), y el estudio del movimiento (la cinemática, una rama de las matemáticas). En la primera mitad del libro, Galileo describió sus experimentos con planos inclinados sobre el movimiento acelerado. En la segunda mitad, se enfrentó al espinoso problema del cálculo de la trayectoria de un proyectil disparado por un cañón. Inicialmente, se creía que, según los principios aristotélicos, un proyectil seguía una línea recta hasta que perdía su «ímpetu» y caía directamente al suelo. Posteriormente, los observadores advirtieron que en realidad volvía a tierra en una trayectoria curva pero, hasta Galileo, nadie pudo decir por qué razón pasaba esto ni dar una descripción exacta de la curva. Galileo llegó a la conclusión de que la trayectoria del proyectil está determinada por dos movimientos: uno vertical, producido por la gravedad, que tira del proyectil hacia abajo, y uno horizontal, gobernado por el principio de inercia.

Galileo demostró que la combinación de estos dos movimientos independientes determina el recorrido del proyectil a lo largo de una curva descriptible matemáticamen-

te. Lo demostró dejando rodar una bola de bronce untada de tinta por un plano inclinado y una mesa, desde el borde de la cual caía libremente al suelo. La bola dejaba una marca en el punto de su caída al suelo, siempre a cierta distancia del borde de la mesa. Así, Galileo demostró que la bola se seguía moviendo horizontalmente, a velocidad constante, mientras la gravedad tiraba de ella hacia abajo verticalmente. Halló que la distancia aumentaba de manera proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido y que la curva tenía una forma matemática precisa, que los antiguos griegos habían llamado parábola.

Dos nuevas ciencias representó una contribución tan grande a la física, que los estudiosos afirman que el libro se anticipó a las leyes del movimiento de Isaac Newton. Cuando fue publicado, sin embargo, Galileo había perdido la vista. Vivió los años restantes de su vida en Arcetri, donde murió el 8 de enero de 1642. Las contribuciones de Galileo a la humanidad nunca han sido subestimadas. Albert Einstein lo reconoció cuando escribió: «Las proposiciones obtenidas por métodos puramente lógicos son completamente vacías en lo que respecta a su relación con la realidad. Que Galileo lo advirtiera, y particularmente que lo anunciara al mundo científico, lo convierte en el padre de la física moderna, es decir, de la ciencia moderna».

En 1979, el papa Juan Pablo II reconoció que la Iglesia católica romana podría haberse equivocado al condenar a Galileo, y nombró una comisión específica para reabrir el caso. Cuatro años más tarde, la comisión concluyó que Galileo no debería haber sido condenado, y la Iglesia publicó todos los documentos relevantes de su juicio. En 1992, el papa asumió las conclusiones de la comisión.

DIÁLOGO
SOBRE DOS NUEVAS CIENCIAS

JORNADA PRIMERA

Interlocutores: Salviati, Sagredo y Simplicio

SALV. Pienso que la frecuente actividad en vuestro famoso arsenal, Señores Venecianos, ofrece un gran campo para filosofar a los intelectos que especulan, especialmente, en aquella parte que se denomina mecánica, en donde se construyen continuamente todo tipo de instrumentos y de máquinas por medio de un gran número de artesanos, algunos de los cuales han de ser muy entendidos y con un talento muy agudizado debido tanto a las observaciones que sus predecesores hayan hecho como a lo que van descubriendo ellos mismos sin interrupción.

SAGR. V. S. no se engaña en absoluto: y por lo que a mí se refiere, siendo como soy curioso por naturaleza, visito frecuentemente, para recreación mía, este lugar, fijándome en lo que hacen aquellos que nosotros, a causa de cierta preeminencia que ostentan sobre el resto de los artesanos, llamamos principales. Hablar con ellos me ha ayudado muchas veces a investigar la causa de efectos no solamente maravillosos, sino ocultos también y apenas creíbles. Es verdad que, a veces, he quedado confundido y he desesperado de llegar a entender cómo pueda ocurrir aquello que no consigo llegar a explicarme aunque los sentidos me demuestren que es verdadero. Aunque lo que nos decía no hace mucho aquel buen anciano es algo proverbial y de sobra conocido, lo juzgaba yo, no obstante, algo completamente falso como tantas otras cosas que están en boca de los estúpidos, introducidas por ellos, creo yo, para mostrar [50] que saben decir alguna cosa acerca de lo que no entienden.

SALV. ¿Se refiere tal vez V. S. a la última frase que profirió, cuando intentábamos entender la razón por la cual se utilizaba mayor cantidad de puntales, andamios y otros montajes y refuerzos para sostener aquella gran galera antes de su botadura que la que necesitan las embarcaciones más pequeñas, y a lo que él respondió que esto se hacía para evitar el peligro de que se rompiera, oprimida por el fortísimo peso de su gran tamaño, inconveniente con el que no se encuentran las embarcaciones menores?

SAGR. A eso me refiero y, de modo especial, a la última conclusión que él añadió, conclusión que siempre he estimado una falsa idea que se hace el vulgo; es decir, en estas y otras máquinas parecidas no hay que argumentar de las pequeñas a las grandes por razón de que muchos diseños de máquinas dan resultado en tamaño reducido, mientras que no funcionan si son más grandes. Pero, dado que todas las leyes de la mecánica tie-

nen sus fundamentos en la geometría, en la que no veo que el tamaño grande o pequeño de los círculos, triángulos, cilindros, conos o cualquier otra figura sólida afecte a sus propiedades, si la máquina más grande se fabrica de forma que todas sus partes están en la misma proporción que las de la pequeña —siendo ésta fuerte y resistente para el trabajo a que se le destina— no veo por qué no ha de ser capaz de resistir los contratiempos adversos y destructivos que le puedan acaecer.

SALV. La opinión del vulgo es completamente falsa, y de tal modo banal que se puede afirmar lo contrario con la misma razón, sosteniendo que muchas máquinas se podrían hacer con más precisión en tamaño grande que en uno más reducido; así, un reloj grande, por ejemplo, mostrará y dará las horas con más exactitud que uno pequeño. Hay otras personas más inteligentes que defienden este mismo saber popular, dándole un fundamento mejor; éstos, al ver que las máquinas de grandes dimensiones no se conforman a lo que se seguiría de las puras y abstractas demostraciones de la geometría, atribuyen la causa de ello a la imperfección de la materia, la cual está sujeta a gran número de alteraciones e imperfecciones. [51] Llegados a este punto, no sé si podré, sin caer en el riesgo de ser arrogante, decir que recurrir a las imperfecciones de la materia, capaces de contaminar las purísimas matemáticas, tampoco es suficiente para explicar la desobediencia de las máquinas, en la realidad, a las leyes abstractas e ideales de la mecánica. A pesar de todo, lo he de afirmar, sosteniendo que si se eliminan todas las imperfecciones de la materia llegando a suponerla perfectísima e inalterable, así cómo exenta de cualquier mutación accidental, no es menos cierto que, por el simple hecho de ser material, la máquina más grande, fabricada con la misma materia y según las mismas proporciones que la pequeña, será perfectamente simétrica con ésta y responderá a las mismas condiciones, si exceptuamos lo que atañe a la solidez y resistencia contra los asaltos violentos; y es que cuanto más grande sea tanto más débil, proporcionalmente, ha de ser. Y puesto que doy por supuesto que la materia es inalterable; es decir, siempre la misma, es evidente que de ella pueden deducirse demostraciones no menos que de las puras y abstractas matemáticas.

Por todo ello, señor Sagredo, abandonad, pues, la idea que sustentabais, tal vez al unísono con otros muchos que han hecho estudios de mecánica, de que las máquinas y los artefactos compuestos de la misma materia y que mantienen con toda exactitud las mismas proporciones entre sus partes hayan de ser igualmente o, por decirlo mejor, proporcionalmente dispuestas a resistir y a ceder a los choques y violencias externas, puesto que se puede demostrar geométricamente que las más grandes son siempre, proporcionalmente, menos resistentes que las menores. De modo que, y para acabar, hay un límite que se impone con necesidad no sólo a todas las máquinas, sino a las naturales incluso, y más allá del cual no puede pasar ni el arte ni la naturaleza, ni siquiera en el caso de que las proporciones permanezcan invariables y la materia idéntica.

SAGR. Siento ya que mi cerebro me da vueltas y, como una nube iluminada momentáneamente por un relámpago, se me llena la mente de repentina e insólita luz, insinuándose de lejos, confundiendo y escondiendo, con toda celeridad, imágenes extrañas e inasimilables. Y de todo lo que habéis dicho me parece que se sigue que sería imposible construir dos instrumentos de la misma materia que fuesen semejantes y desiguales, ofreciendo proporcionalmente la misma resistencia. [52] Y si esto es así, también será imposible encontrar dos listones de la misma madera que sean de semejante vigor y resistencia, aunque desiguales en tamaño.

SALV. Así es, señor Sagredo. Y para asegurarnos de que hablamos de la misma cosa, afirmo que si nosotros redujéramos un listón de madera a tal longitud y grosor que fijo,

por ejemplo, en un muro en ángulo recto, es decir, paralelo al horizonte, se le redujera a la mayor longitud que se pudiese alcanzar de modo que alargado un cabello más se rompiese debido a su propio peso, aquél será único en el mundo.* Quiero decir con esto que si fuese su longitud, por ejemplo, cien veces mayor que su grosor, no podría encontrarse ninguna otra rama de la misma materia que, siendo cien veces más larga que gruesa, fuese capaz, al igual que aquélla, de sostenerse, sin más, a sí misma. Las que sean mayores se romperán, mientras que las que sean más pequeñas podrán sostener, además de su propio peso, alguna otra carga suplementaria. Y esto que he dicho acerca de las condiciones bajo las cuales un objeto puede sostenerse a sí mismo, puede aplicarse a cualquier otro caso análogo. Así, si un tablón puede sostener la carga de diez tablones del mismo peso que el primero, una viga semejante a él no podrá, sin embargo, mantener el peso de diez que sean iguales a ella en peso.

Tened la bondad de advertir, V. S. y el señor Simplicio, lo ciertas que son tales conclusiones, a pesar de que parezcan improbables a primera vista. Si se las desarrolla sólo un poco, deponen, sin embargo, los ropajes que las ocultaban para hacer, desnudas y sencillas, gozosa ostentación de sus secretos. ¿Quién no ve que un caballo que cae de una altura de tres o cuatro brazas** se romperá los huesos, mientras que un perro que cae de la misma altura, y lo mismo podríamos decir de un gato que cae desde ocho o diez brazas, no se harán mal alguno, como tampoco un grillo que caiga de una torre o una hormiga que se precipite desde el orbe lunar? ¿Quién no ve que los niños pequeños salen ilesos de caídas en las que los viejos se romperían una pierna o la cabeza? Del mismo modo que los animales más pequeños son proporcionalmente más fuertes y robustos que los más grandes, así también se sostienen mejor los arbustos que son más pequeños. Tengo la impresión de que, a estas alturas, os daréis cuenta de que una encina de una altura de doscientos brazos no podrá sostener sus ramas, extendidas al modo de una de mediano tamaño, y que la naturaleza no podría producir un caballo [53] de magnitud equivalente a veinte caballos ni un gigante diez veces más alto que un hombre normal a no ser milagrosamente o alterando no poco las proporciones de los miembros, especialmente de los huesos, que tendrían que ser, en lo que respecta al resto del organismo, mucho más grandes de lo que normalmente son. Del mismo modo, creer, si se trata de máquinas artificiales, que las más grandes y las más pequeñas se pueden construir y conservar bajo las mismas condiciones, es un error manifiesto. Así, por ejemplo, pirámides pequeñas, columnas igualmente pequeñas y otro tipo de figuras sólidas se podrán manejar, tumbar y elevar de forma segura, sin riesgo de que se rompan, mientras que las que son muy grandes saltarán hechas pedazos ante cualquier desgraciado accidente y no por otra razón sino la de su propio peso.

Llegados a este punto, no puedo por menos de contaros un caso digno realmente de conocerse, como ocurre con todos aquellos que traicionan nuestras expectativas, y de modo especial, cuando la medida que se toma para obviar un inconveniente, se convierte después en causa principal de desorden. Se trataba de una columna muy gruesa de mármol, tendida y que se sostenía en sus extremidades sobre dos trozos de viga. Después de cierto tiempo, a un artesano se le ocurrió que sería conveniente añadir aún

* Aquí, el autor parece indicar que la solución es única.

** Medida de longitud imprecisa, que cambiaba de acuerdo con las diversas ciudades, así como de acuerdo con el material medido. Aunque es difícil conocer su equivalencia exacta, se puede decir que oscila en torno a los 57 centímetros.

un tercer apoyo parecido en la parte del medio, para mayor seguridad de que no habría de romperse por dicha parte, a causa de su propio peso. A todos pareció muy oportuna esta idea, pero el resultado, sin embargo, demostró todo lo contrario, puesto que no pasaron muchos meses cuando se encontraron con la columna resquebrajada y rota precisamente por la parte superior del nuevo apoyo del medio.

SIMP. Caso verdaderamente maravilloso y *praeter spem* [inesperado], si es que se deriva del hecho de haber añadido el apoyo adicional del medio.

SALV. No hay duda de que es de ahí de donde esto se derivó y el reconocer la causa de tal efecto nos hace salir de la estupefacción. Y es que, colocados en pleno suelo los dos trozos de la columna, se vio que una de las vigas, sobre la que se apoyaba una de las extremidades, se había podrido y hundido, después de tanto tiempo; y como la del medio no había perdido nada de su dureza y solidez, la consecuencia fue que la mitad de la columna quedó en el aire, sin ninguna relación con la apoyatura del extremo, de forma que el exceso de su propio peso la llevó a hacer lo que no hubiera hecho en caso de haberse apoyado solamente sobre las dos primeras vigas, ya que si se hubiera hundido alguna de éstas, la columna las habría acompañado. No se puede tener la menor duda, por otro lado, de que accidente semejante no habría tenido lugar en una columna pequeña, aunque fuese de la misma piedra que la grande y tuviese también la misma proporción de anchura y longitud.

[54] SAGR. Desde este momento quedo convencido de la verdad del efecto, pero no capto todavía la razón de por qué al aumentar la materia no se multiplica, igualmente, la resistencia y la fortaleza. Y tanto más perplejo estoy al ver, por el contrario, en otros casos que la fortaleza y la resistencia aumentan mucho más de lo que lo hace el grosor de la materia. Así, si se fijan, por ejemplo, dos clavos en un muro, siendo uno dos veces más grueso que el otro, aquél habrá de sostener no solamente el doble de su peso, sino hasta el triple o el cuádruple.

SALV. Decid, sin miedo, incluso ocho veces más y no os alejaréis de la verdad: este efecto no contradice a aquél del que hemos hablado, aunque parezcan tan diferentes aparentemente.

SAGR. Pues bien, señor Salviati, allanadnos, si podéis, estos obstáculos e iluminadnos estas oscuridades, pues me parece que este asunto de las resistencias es un campo fértil en bellas y útiles especulaciones. Y si os parece bien que sea ésta la materia de nuestros razonamientos de hoy, a mí, y creo que al señor Simplicio, nos será muy grato.

SALV. No puedo por menos de complaceros con tal de que la memoria no me falle a la hora de suministrarme aquello que aprendí de nuestro académico,* quien meditó mucho acerca de tales cosas, demostrándolas geométricamente, como era su costumbre, de tal modo que esta ciencia, por él cultivada, merece el nombre, no sin razón, de ciencia nueva. Y es que, sí bien algunas de las conclusiones provienen de otros, y de manera especial de Aristóteles, tened presente, sin embargo, que aquéllas no son ni tan bellas ni (y esto es lo importante) se prueban con demostraciones necesarias a partir de principios indudables y fundamentales. Y como lo que me propongo es demostraros con pruebas y no solamente persuadiros con consideraciones meramente probables —suponiendo, por otra parte, que os son ya conocidas las conclusiones de la mecánica, conclusiones sólidamente establecidas y necesarias para nuestro propósito—, conviene que consideremos, antes que nada, en qué consista el romperse una madera u otro sólido cualquiera.

* Es decir, Galileo. El autor utiliza a menudo este nombre para referirse a sí mismo.

cuyas partes se encuentran firmemente unidas; tal es el hecho cuyo conocimiento es primordial, ya que en esa noción está contenido el primer y simple principio que hay que suponer como perfectamente conocido.

Para hacer más clara la explicación, dibujemos en el cilindro o prisma AB, de madera [55] o de cualquier otra materia sólida y coherente, sujeto en la parte de arriba por A y colgando a plomo, mientras que al otro extremo se le ata el peso C [figura 1]. Es evidente que, cualquiera que sea la resistencia y cohesión entre las partes de este sólido, a no ser que sea infinita, podrá ser vencida por la fuerza de tracción del peso C, cuya gravedad, por hipótesis, puede aumentarse todo lo que se quiera de modo que el sólido en cuestión se romperá como si fuese una cuerda. Y así como en una cuerda pensamos que su resistencia deriva de los hilos de las fibras que la componen, del mismo modo, en la madera, hay que distinguir fibras y filamentos extendidos a lo largo, que la hacen mucho más resistente a la ruptura de lo que sería cualquier cuerda del mismo grosor; sólo que en un cilindro de piedra o de metal la cohesión (que parece todavía mayor) de sus partes depende de una sustancia aglutinante y no de filamentos o de fibras; a pesar de todo, se las consigue separar también si la tracción es suficientemente fuerte.

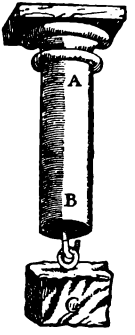


Fig. 1

SIMP. Si los hechos ocurren tal y como lo decís, pienso que los filamentos de la madera, que son tan largos como la misma madera, pueden hacerla sólida y resistente a una fuerza grande que se emplee para romperla. Una cuerda, sin embargo, compuesta de hilos de fibra no más largos de dos o tres brazas, ¿cómo podrá prolongarse a la longitud de cien y permanecer con la misma solidez? Además, me gustaría escuchar también vuestra opinión acerca de la cohesión de las partes de los metales, de las piedras y de otras materias que carecen de tales filamentos y que, si no me engaño, son más resistentes aún.

SALV. Hemos de hacer alguna digresión con especulaciones nuevas, no del todo necesarias para nuestros fines, si es que queremos dar solución a las dificultades expuestas.

SAGR. Si las digresiones nos pueden conducir al conocimiento de nuevas verdades, ¿qué nos impide a nosotros, que no estamos obligados a seguir ningún método estrecho y riguroso, sino que nos reunimos más bien por propio placer, hacer digresiones ahora para no dejar de lado datos que, olvidada la ocasión [56] propicia, tal vez no nos vuelvan a aparecer de nuevo? Más aún, ¿quién sabe si muchas veces no se pueden descubrir curiosidades más bellas que las conclusiones que se buscaban en un principio? Os pido, por tanto, que demos satisfacción al señor Simplicio y a mí, no menos curioso y deseoso que él de entender cuál sea ese aglutinante que con tanta fuerza mantiene unidas las partes de los sólidos, aunque, al fin y al cabo, también pueden acabar siendo separadas. Es necesario conocer esto para comprender la cohesión de las partes de los filamentos mismos de los que se componen algunos de los sólidos.

SALV. Aquí me tenéis dispuesto a complaceros si es que así lo deseáis. La primera dificultad estriba en saber cómo pueden estar tan sólidamente unidos los filamentos de una cuerda de cien brazas de longitud (no siendo la longitud de cada uno de ellos de más de dos o tres brazas) hasta el punto de que se requiera una enorme violencia para separarlos. Pero, decidme, señor Simplicio, ¿no podríais tener sujeto por la extremidad un solo hilo de cáñamo, y de tal manera apretado entre los dedos que yo, tirando de la

otra, lo llegaría a romper antes que arrancároslo de la mano? Ciertamente que sí. En consecuencia, si los hilos de la fibra estuviesen, no sólo en la extremidad, sino a lo largo de toda su longitud, unidos con gran fuerza por quien los circundara apretándolos, ¿no es algo evidente que sustraerlos de lo que los aprieta sería bastante más difícil que romperlos? Y es que, en el caso de la cuerda, el solo hecho de torcerla aprieta los hilos entre ellos de tal manera que si estiráis después la cuerda con gran fuerza, los hilos lo que hacen es apretarse sin que lleguen a separarse los unos de los otros, como suele verse claramente cuando se rompen: los hilos rotos son cortísimos y no más largos de una braza cada uno, mientras que si la división de la cuerda tuviese su causa no en la ruptura de los hilos, sino en la separación de éstos, su longitud sería mayor que una braza.

SAGR. Añádase, en confirmación de lo que acabáis de decir que, a veces, se ve cómo una cuerda se rompe no porque se tire a lo largo, sino sólo porque se ejerce sobre ella una torsión suficiente; argumento del que se infiere, según mi criterio, que los hilos están de tal modo apretados unos contra otros, que por mucho que comprimamos no conseguimos que se corran aquel mínimo que sería necesario para alargar las espiras a fin de que la cuerda, una vez torcida, se haga más corta y, consecuentemente, un poco más gruesa.

SALV. Decís muy bien, pero considerad ahora cómo una verdad trae [57] consigo otra. Aquel hilo que, apretado entre los dedos, no cede a la tracción de quien quisiera arrancarlo de entre ellos, resiste porque lo retiene una doble presión; y es que, igual que el dedo superior ejerce su presión contra el inferior, otro tanto ocurre con éste con respecto a aquél. Y no hay duda de que si de estas dos presiones se mantuviese sólo una, la resistencia que resulta de la unión de las dos disminuiría la mitad; pero como es imposible retirar el dedo superior, por ejemplo, sin suprimir al mismo tiempo la presión del otro dedo, se necesita recurrir a un nuevo artificio para conservar una de las dos presiones de modo que el hilo se comprima a sí mismo contra el dedo u otro cuerpo sólido sobre el que se apoye, de forma que la fuerza empleada para separarlo tanto más lo comprima cuanto más fuertemente tire de él. Esto se puede obtener si enrollamos, a modo de espiral, el mismo hilo alrededor del sólido. Para que se entienda mejor lo que queremos decir trazaré una figura. Sean AB y CD dos cilindros [figura 2] y extendido entre ellos, el hilo EF, que por razones de claridad nos haremos a la idea de que es una pequeña cuerda. Es indudable que si oprimimos fuertemente los dos cilindros, el uno contra el otro, la cuerda FE, tirada desde su extremo F, resistirá una considerable violencia antes de escurrirse entre los dos sólidos que la comprimen. Si quitamos, por el contrario, uno de los dos, la cuerda, aunque quede en contacto con el otro, no será retenida por tal contacto, sino que correrá sin dificultad ninguna. Pero si ahora, después de haber fijado la cuerda, aunque sea débilmente, en la extremidad A del cilindro, la enrollamos alrededor de aquél a modo de espiral —AFLOTR— y tiramos desde el otro extremo R, es obvio que comenzará a apretar al cilindro; y si las espiras y las vueltas son numerosas y se tira con fuerza, la cuerda se comprimirá cada vez más alrededor del cilindro, siendo, por tanto, más difícil que ceda a la tracción y se desplace.

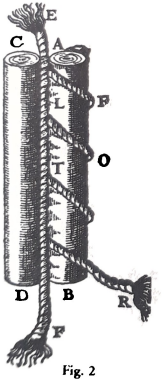


Fig. 2

[58] Ahora bien, ¿quién no ve, pues, que es tal la resistencia de los filamentos, los cuales con miles y miles de vueltas parecidas tejen la gran maroma? Más aún, la compresión de tales torsiones es tan intensa que con un pequeño número de hebras, no muy largas, por otra parte, y entretejidas en unas cuantas espiras, se construyen cuerdas muy robustas, que se llaman, según creo, cabestros [*suste*].

SAGR. Vuestros razonamientos han disipado en mi mente la extrañeza que sentía ante dos efectos cuyas causas desconocía. Uno de ellos era el ver cómo dos o, a lo sumo, tres vueltas de la amarra alrededor del eje del cabrestante, podían no sólo retenerla e impedir que cediera a la tracción de un peso enorme, sino que, lo que es todavía más, girando el cabrestante, el mismo eje, con sólo tocar la cuerda que lo aprieta, podía, al enrollarse sucesivamente, arrastrar y levantar piedras grandísimas, mientras que los brazos de un frágil niño van sosteniendo y recogiendo el otro cabo de la susodicha cuerda. El otro se trata de una argucia simple, pero muy aguda, imaginada por un joven pariente mío, para poder descolgarse con una cuerda desde una ventana sin tener que despellejarse cruelmente las palmas de las manos, como le había ocurrido poco tiempo atrás con grandísimo pesar suyo. Haré un pequeño dibujo con el fin de mostrar mejor de qué se trata [figura 3]. Alrededor de un cilindro de madera, AB, del grosor de una caña y con una longitud aproximada de un palmo, hizo una ranura en forma de espiral de una vuelta y media todo lo más, y lo suficientemente ancha como para poder alojar la cuerda que pensaba utilizar. Hizo pasar a ésta por la ranura metiéndola por el extremo A para hacerla salir por el B. Rodeó después tanto al cilindro como a la cuerda con un tubo de madera, o también de hoja de lata, pero dividido longitudinalmente y encajado de modo tal que pudiese abrirse y cerrarse sin dificultad. Ató después la cuerda a un saliente seguro que estaba arriba, agarró fuertemente con ambas manos el tubo y quedó suspendido por los brazos. Fue tal la presión de la cuerda al quedar entre el tubo y el cilindro que podía —presionando fuertemente con las manos— a su arbitrio sostenerse en el aire sin caerse o, disminuyendo la presión, bajar lentamente.

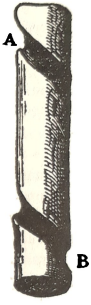


Fig. 3

SALV. Ingenioso invento, ciertamente. Para dar [59] una explicación completa de su naturaleza (que me parece estar un poco en penumbra) se podría añadir alguna otra consideración. No quiero, sin embargo, hacer por el momento más digresiones sobre este particular, especialmente cuando lo que queréis es oír lo que pienso acerca de la resistencia a la fractura de los cuerpos cuya contextura no está compuesta de filamentos, como es el caso de las cuerdas y de la mayor parte de las maderas. La cohesión de las partes de aquéllos resulta, según mi punto de vista, de otras causas, las cuales se reducen principalmente a dos. Una es la tan traída y llevada repugnancia de la naturaleza a admitir el vacío; la otra (al no bastar ésta del vacío) hay que buscarla en algún aglutinante, cola o viscosidad que una fuertemente las partículas de las que se componen dichos cuerpos. Hablaré primero del vacío, mostrando, con experimentos probatorios, cuánta y cuál sea su fuerza [*virtù*].

Podemos ver fácilmente que si ponemos dos láminas de mármol, de metal o de cristal perfectamente planas, pulidas y lustradas, estando una de ellas encima de la otra, se las puede mover con toda facilidad haciendo resbalar a una (prueba evidente de que no las une aglutinante ninguno). Pero si queremos separarlas y mantenerlas equidistantes, encontramos tal oposición que la lámina superior, al moverse, arrastra consigo a la otra,

manteniéndola elevada todo el tiempo por grande y pesada que sea. Esto prueba con suficiente evidencia el horror que tiene la naturaleza a admitir, aunque sólo sea por poco tiempo, el espacio que quedaría vacío entre las dos láminas, antes de que las partes del aire ambiente lo hubieran ocupado llenándolo. También, en el caso de que dos de tales láminas no estuvieran pulidas del todo, no siendo, por tanto, el contacto entre ellas tan perfecto, si queremos separarlas lentamente la única resistencia que encontramos es la de la gravedad. Si, por el contrario, levantamos la lámina superior súbitamente, la inferior será arrastrada, para caer de nuevo en seguida, ya que ésta no seguirá a la primera sino durante aquel pequeño intervalo de tiempo que es necesario para la expansión de aquella mínima cantidad de aire interpuesta entre las dos láminas, imperfectamente encajadas y para la entrada del aire circundante. Esta resistencia, que con tanta claridad se nos aparece entre las dos láminas, no permite dudar que haya de darse también entre las partes de un sólido y que ella contribuya, en cierta medida al menos, y como causa concomitante, a su coherencia.

SAGR. Haced un alto, por favor, y permitidme [60] que haga una consideración particular que se me ha ocurrido en este mismo instante. Es ésta la siguiente: el hecho de que la lámina inferior sea arrastrada por la superior y elevada a gran velocidad, nos hace estar seguros de que, contra lo dicho por muchos filósofos y tal vez por el mismo Aristóteles, el movimiento en el vacío no ha de ser instantáneo. Y es que si fuese tal, las dos láminas en cuestión se separarían sin ninguna resistencia, ya que bastaría el mismo intervalo de tiempo para que tuviera lugar tanto su separación como la afluencia del aire ambiente dispuesto a llenar el vacío que pudiera quedar entre ellas. Del hecho de que la lámina inferior sea arrastrada por la superior se sigue, por tanto, que en el vacío el movimiento no puede ser instantáneo. Se infiere, igualmente, que, incluso entre las mismas láminas, tiene que quedar algo de vacío, al menos durante un brevísimo tiempo; es decir, durante todo el tiempo que es necesario para que el medio pueda llenar el vacío. Si no quedara algo de vacío no habría necesidad ni de la afluencia del aire ni del movimiento del medio. Hemos de decir, pues, que, violentamente o contra la naturaleza, hay a veces vacío (aunque mi opinión es que nada existe contra la naturaleza, a no ser lo imposible, y esto no se da nunca).

Pero aquí me surge otra dificultad: consiste ésta en que aunque la experiencia me asegura la verdad de la conclusión, no llego a captar bien la causa a la que hay que atribuir tal efecto. Y es que la separación de las dos láminas es un efecto anterior al vacío, el cual debería seguirse, más bien, de dicha separación; y puesto que pienso que la causa debe preceder al efecto, temporalmente al menos si no en el orden de la naturaleza, y que de un efecto positivo la causa ha de ser también positiva, no soy capaz de entender cómo de la adherencia de las dos láminas y de su resistencia a la separación, efectos que están ya en acto, se pueda poner su causa en el vacío, que no existe sino que es, por el contrario, una consecuencia; y de las cosas que no existen ningún efecto puede producirse, conforme a la aserción, bien cierta, del filósofo.

SIMP. Puesto que concedéis este axioma a Aristóteles, supongo que no estaréis dispuesto a negarle otro, también muy bello y verdadero. Dicho axioma dice que la naturaleza no se determina a hacer aquello que repugna que se haga, y de tal principio me parece que depende la solución de vuestra duda. Al ser contradictoria la existencia de un espacio vacío, la naturaleza prohíbe hacer aquello que traería como una consecuencia necesaria el vacío; tal sería la separación de las láminas.

[61] SAGR. Admitiendo ahora como solución justa de mi duda lo que dice el señor Simplicio, si seguimos las consideraciones que habíamos comenzado, me parece que

este horror al vacío debería ser causa suficiente para mantener unidas las partes de un sólido de piedra, de metal o de cualquier otra materia, cuyas partes estén más sólidamente unidas y sean más resistentes a la división. Y si de un efecto una sola es la causa, cosa que he aprendido y creído siempre, o si, aunque sean muchas, pueden reducirse a una sola, ¿por qué no ha de bastar la repugnancia al vacío, que sin duda alguna está presente, para explicar todas las resistencias?

SALV. Preferiría por el momento no entrar en la cuestión de si el vacío, por sí solo, sea suficiente para mantener unidas las partes separables de los cuerpos consistentes; pero os he de decir, sin embargo, que esta razón del vacío, que es válida y concluyente en el caso de las dos láminas, no es suficiente, ella sola, para dar cuenta de la fuerte cohesión de las partes de un cilindro sólido de mármol o de metal, y a las que si se hace violencia por medio de una tracción suficientemente potente, acaban por dividirse y separarse. Y si encuentro el medio de distinguir esta resistencia, ya conocida y que depende del vacío, de cualquier otra, sea la que fuese, y que concurriese con ella para fortalecer la unión, y si os hago ver cómo aquélla no es suficiente, ni mucho menos, por sí sola, para conseguir tal efecto, ¿no habréis de conceder que es necesario introducir otra distinta? Id en su ayuda, señor Simplicio, ya que él no sabe bien qué es lo que ha de responder.

SIMP. El silencio del señor Sagredo tiene que tener, por fuerza, otra causa, ya que no se puede dudar de una consecuencia tan clara y necesaria.

SAGR. Vos, señor Simplicio, lo habéis adivinado. Estaba pensando que si un millón de oro, traído de España cada año, no fuese suficiente para pagar al ejército, habría que encontrar otros recursos para pagar los sueldos de la tropa.*

Pero continuad, señor Salviati, y suponiendo que yo admita vuestro argumento, mostradnos el modo de separar la acción del vacío de la de las otras, y una vez medida, hacednos ver cómo ella es demasiado débil como para producir el efecto del que hablamos.

SALV. Vuestro demonio os asiste. Hablaré, pues, del modo de distinguir la fuerza [*virtù*] del vacío de las otras y, después, de la manera de medirla. Para separarla, tomaremos una materia continua, cuyas partes no ofrezcan otra resistencia que no sea la del vacío. Esta materia, como ha sido demostrado ampliamente en un cierto tratado [62] de nuestro Académico, es el agua. Así, pues, si se dispusiera de un cilindro de agua y si al tirar de él se encontrase una resistencia a la separación de sus partes, no podríamos atribuir esta resistencia a ninguna otra causa que no fuese la repugnancia al vacío. Para realizar esta experiencia, he imaginado un dispositivo que, dibujándolo, clarificará las cosas mejor que las puras palabras [figura 4]. Supongamos que CABD es un corte de un cilindro de metal o, mejor aún, de vidrio, vacío en el interior, pero modelado con mucha exactitud, en el cual se coloca un émbolo de madera perfectamente ajustado. Sea su sección EGHF. El émbolo puede moverse hacia arriba y hacia abajo. Además, éste está agujereado en el centro de modo que pueda pasar un alambre de hierro cuya extremidad K está curvada, mientras que la otra extremidad I se ensancha a manera de cono. El agujero hecho

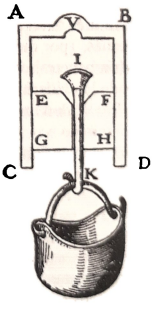


Fig. 4

* El alcance de este comentario queda aclarado al leer lo que Salviati dice más adelante.

en la madera debe agrandarse en su parte superior también en forma de cono, de modo que pueda recibir con exactitud la extremidad cónica I del hierro IK, cada vez que se tire hacia abajo desde K. El trozo de madera EH —llamémosle tapón— inserto en el cilindro cóncavo AD no ha de llegar hasta la parte superior de dicho cilindro, sino que quedará a una distancia de dos o tres dedos. Tal espacio debe estar lleno de agua. Para introducir el agua se dará vuelta al recipiente poniendo hacia arriba la boca CD y presionando el tapón EH a la vez que se mantiene el cono I algo alejado del fondo de la madera para permitir así el paso del aire, el cual, a medida que vaya bajando el tapón, irá saliendo a través del orificio hecho en la madera, el cual, por esta razón, será algo más ancho que el bastoncillo de hierro IK.

Una vez que ha salido el aire y que se ha tirado del hierro a fin de que se ajuste bien su extremo cónico en la madera, hay que dar vuelta completamente al recipiente con la apertura hacia abajo, colgando del gancho K un recipiente, el cual puede contener dentro arena u otra sustancia pesada. Dicho recipiente se lastrará de modo que, finalmente, la superficie superior EF del tapón se separe de la superficie inferior del agua, a la cual lo único que la mantenía unida era la repugnancia al vacío. Después de todo esto, basta con pesar el tapón, el hierro, el recipiente y lo [63] que haya dentro, para calcular la fuerza del vacío.

Por otro lado, si se cuelga de un cilindro de mármol o de metal, del mismo grosor que nuestro cilindro de agua, un peso tal que, junto con el peso del mismo mármol o cristal, sea igual al de todos los utensilios mencionados antes, si esto tiene como consecuencia la rotura del cilindro, podremos afirmar, sin duda alguna, que las partes del mármol y del cristal permanecían unidas debido a la fuerza del vacío solamente. Pero si la carga es insuficiente, siendo necesario entonces cuatro veces más de peso para que se dé la rotura, hay que decir que la resistencia del vacío representa sólo un quinto de la resistencia total, siendo la otra cuatro veces mayor que la del vacío.

SIMP. No se puede negar que el invento es ingenioso, pero lo encuentro sujeto a muchas dificultades que hacen que me parezca dudoso. Porque, ¿quién nos asegura que el aire no puede penetrar a través del cristal y del tapón, por mucho que se cubra bien con estopa o con cualquier otra materia plástica [*cedente*]. De modo que, para que el cono I cierre bien el agujero, tal vez no sea suficiente el untarlo con cera o con trementina. Además, ¿por qué no podrían separarse y rarificarse las partes del agua? ¿Por qué no podría penetrar el aire, vapores u otras sustancias más sutiles a través de las porosidades de la madera o del mismo cristal?

SALV. Con mucha inteligencia enuncia el señor Simplicio las dificultades y en parte él mismo nos sugiere las soluciones en lo que a la penetración del aire a través de la madera o entre la madera y el cristal se refiere. En cuanto a mí, he de hacer notar que podríamos constatar al mismo tiempo, adquiriendo así nuevos conocimientos, si las dificultades suscitadas son reales. Porque si el agua es, por naturaleza, capaz de expandirse, aunque esto ocurriera con alguna violencia, como es el caso del aire, entonces se verá caer el tapón. Y si hacemos en la parte superior del cristal una concavidad algo prominente, como V, el aire u otra sustancia más tenue, penetrando por las porosidades del cristal o de la madera alcanzará (cediendo paso el agua) la parte superior V. Si tales cosas no tuvieran lugar, podríamos tener la seguridad de que la experiencia se ha realizado con las debidas precauciones; sabríamos también que el agua no es susceptible de dilatación ni el cristal es permeable por ninguna sustancia, por muy sutil que ésta sea.

SAGR. Gracias a esta conversación descubro ya la causa de un efecto que ha tenido mi mente llena de estupefacción y vacía de entendimiento desde hace tiempo. No hace mucho tuve la ocasión de observar [64] una cisterna en la que se había dispuesto una bomba para sacar agua, creyendo el que tal cosa hizo, equivocadamente, claro está, que de este modo podía obtener con menor esfuerzo la misma o mayor cantidad de agua que la que se obtiene con los cangilones ordinarios. El pistón y la válvula de esta bomba están colocados en la parte de arriba de modo que el agua se eleva por aspiración y no por compresión, como es el caso de las bombas en las que estos instrumentos están colocados en la parte de abajo. Aquella a la que hacemos referencia lanza agua abundantemente en tanto que en la cisterna el agua se mantiene a una determinada altura, pero cuando el agua desciende hasta un punto determinado, la bomba deja de actuar. La primera vez que observé tal cosa, creí yo que el aparato estaba averiado, pero el maestro que encontré para que lo arreglara me dijo que el único defecto que existía era el del agua, la cual, al estar muy baja, no podía ser elevada a tal altura. Añadió también que no era posible hacerla subir un pelo más arriba de dieciocho brazas ni con bombas ni con cualquier otra máquina hecha para elevar el agua por aspiración. Este límite es inalterable, tanto si son anchas como si son estrechas las bombas.

Hasta el momento no era capaz de darme cuenta de que, a pesar de que comprendía que una cuerda, un bastón de madera o una vara de hierro, si se les aumenta más y más su longitud mientras permanecen colgados, acaban finalmente por romperse debido a su propio peso, no me daba cuenta, repito, de que lo mismo debería suceder, y con más razón aún, si se trata de una cuerda o bastón de agua. Pues aquello que se eleva por succión en el caso de la bomba ¿qué otra cosa es sino un cilindro de agua, sujeto a su parte superior, cilindro que si se alarga cada vez más llega un momento en el que, igual que si se tratase de una cuerda, acaba por romperse?

SALV. Es con esta exactitud como suceden las cosas. Y puesto que esta altura de dieciocho brazas resulta ser el límite de la altura en la que puede mantenerse cualquier cantidad de agua, siendo indiferente que las bombas sean todo lo anchas o estrechas que se quiera, desde el momento en que pesemos el agua contenida en un conducto de dieciocho brazas —sea éste ancho o estrecho— tendremos la medida de la resistencia del vacío en los cilindros de cualquier materia sólida y con un grosor como el de los tubos a los que nos hemos referido.

Y ya que hemos dicho tantas cosas, mostremos, para todos los metales, piedras, maderas, cristales, etc., cómo se puede encontrar fácilmente el punto más allá del cual no podrían alargarse los cilindros, fibras [65] o barras de la anchura que sean, sin que se rompan a causa de su propio peso.

Tomemos, por ejemplo, un hilo de cobre, con la anchura y longitud que se quiera. Atando un extremo al techo, coloquemos en el otro más y más peso hasta que, finalmente, se rompa. Supongamos que el peso máximo que se puede colgar de este modo sea, por ejemplo, de cincuenta libras. Es obvio que cincuenta libras de cobre —además del propio peso del alambre, que vamos a suponer que es de un octavo de onza— convertidas en un alambre de tal anchura, sería la longitud máxima del hilo que podría sostenerse por sí misma. Midamos, después, la longitud del hilo roto y supongamos que sea, por ejemplo, de una braza. Dado que pesaba un octavo de onza y podía sostener su propio peso, además de las cincuenta libras —equivalentes a cuatro mil ochocientos octavos de onza—, hemos de decir que todos los hilos de cobre, cualquiera que sea su anchura, pueden quedar suspendidos sin romperse si no sobrepasan la longitud de cua-

tro mil ochocientas una brazas. Y así, si una vara de cobre puede sostenerse hasta la longitud de cuatro mil ochocientas una brazas, la resistencia que tiene a la ruptura y que depende del vacío, en relación a la resistencia total, corresponde al peso de una vara de agua de dieciocho brazas de longitud y de la misma anchura que la vara de cobre. Siendo, por ejemplo, el cobre nueve veces más pesado que el agua, la resistencia de cualquier vara de cobre a romperse, y que depende del vacío, equivale al peso de dos brazas de la susodicha vara.

Con razonamientos y operaciones parecidas, se podrán calcular los límites de las longitudes de los hilos o varas de todas las materias sólidas hasta el máximo que se les pueda alargar sin provocar su ruptura; y, al mismo tiempo, la parte que corresponde al vacío en la resistencia total.

SAGR. Os queda ahora por decirnos en qué consiste el resto de la resistencia; es decir, cuál es el aglutinante o la cola que mantiene unidas las partes del sólido, dejando aparte el vacío; y es que, por lo que a mí respecta, sería incapaz de imaginarme qué tipo de cola puede ser ésta que no se quema ni consume en un horno al rojo vivo ni en dos, ni en tres, ni en cuatro, ni en diez, ni en cien meses. La plata, el oro o el cristal, por su parte, licuados, permanecen así durante largo tiempo en el crisol, pero si se les retira, sus partes, al enfriarse, vuelven a reunirse y recobran la misma cohesión que tenían al principio. Además, la misma dificultad que encuentro en la cohesión de las partes del cristal vuelve a aparecer en lo que atañe a lar partes de la cola. Por tanto, ¿qué es lo que las tiene tan fuertemente unidas?

[66] SALV. Hace poco os dije que un demonio venía en vuestra ayuda. Por lo que a mí respecta, yo también me encuentro sumido en las mismas angustias. Tocando con la mano la verdad de que el horror al vacío es, sin duda alguna, lo que no permite separar, a no ser que se use una gran violencia, las dos láminas o, lo que es más todavía, las dos partes grandes de la columna de mármol o de bronce, no veo por qué la misma causa no ha de tener por efecto la adhesión de las partes más pequeñas e, incluso, de las partes mínimas y últimas de estos mismos materiales. Y dado que de un efecto sólo hay una causa verdadera y principal, ¿por qué no he de intentar ver si no ha de ser suficiente el vacío, el cual se da sin duda, ya que de momento no encuentro otro aglutinante?

SIMP. Si habéis demostrado, hace poco, que la resistencia del gran vacío, al separarse las dos grandes partes de un sólido, es pequeñísima en comparación con la que une las partes mínimas entre ellas, ¿cómo no habréis de tener como algo más que cierto que ésta es completamente distinta de aquélla?

SALV. A esto respondió el señor Sagredo, que se pagaba, ciertamente, a cada uno de los soldados individualmente con dinero de los impuestos generales, recogido céntimo a céntimo, en caso de que un millón de oro no bastase para pagar a todo el ejército. ¿Quién sabe si habrá otros vacíos pequeñísimos entre las partículas ínfimas que garantice la cohesión de todas las partes de un sólido, resultando ser así de la misma moneda? Os voy a decir algo que me acaba de pasar por la imaginación y que no os lo daré como algo verdadero sino a modo de conjetura aún sin madurar, sometiéndola a consideraciones más elevadas. Tomad lo que os parezca y del resto hacer lo que juzguéis más conveniente. Considerando, a veces, cómo el fuego deslizándose entre las partículas más pequeñas de tal o cual metal, las cuales se encuentran fuertemente unidas, acaba por separarlas y desunirlas; y cómo cuando el fuego se retira, vuelven a unirse inmediatamente con la misma fuerza que al principio poseían, sin que haya disminuido en nada la cantidad en el caso del oro, y muy poco en otros metales, incluso si han per-

manecido éstos separados durante mucho tiempo, pensé yo que esto podía suceder debido a que las partículas más sutiles del fuego, al penetrar por los poros estrechos del metal (a través de los cuales y dada su estrechez no podrían pasar ni el aire ni otros muchos fluidos) llenasen estos vacíos mínimos, liberando así a las partículas más pequeñas de la presión ejercida por estos mismos vacíos, [67] al atraerse mutuamente, impidiendo su separación. De este modo, al poder moverse libremente, su masa se haría fluida, permaneciendo en este estado mientras quedasen entre ellas los corpúsculos de fuego [*ignicoli*]. Al desaparecer éstos, los vacíos primitivos volverían a su sitio, dándose de nuevo la atracción entre ellos y, consecuentemente, la unión de las partes. Y por lo que a la pregunta del señor Simplicio se refiere, me parece que se puede responder diciendo que si bien estos vacíos serían muy pequeños y, por tanto, cada uno de ellos podría ser vencido fácilmente, no obstante, la innumerable multitud multiplica innumerablemente (por decirlo de alguna manera) las resistencias. Que de la unión de un gran número de intensidades [*momenti*] insignificantes resulta una fuerza inmensa, tenemos una prueba evidente cuando vemos que un peso de millones de libras que es sostenido por un cable muy grueso, resulta vencido finalmente y es levantado gracias al esfuerzo de innumerables átomos de agua, los cuales, arrastrados por el viento del norte o porque diluidos en una finísima niebla, se mueven por el aire, acaban por alojarse entre las fibras de los cables más tensos, sin que la inmensa fuerza del peso que los sostiene pueda impedirles la entrada. Así pues, penetrando a través de estrechos conductos, ensanchan las cuerdas al mismo tiempo que las acortan, por lo que terminan elevando con fuerza aquella pesadísima mole.

SAGR. No cabe la menor duda de que si una resistencia no es infinita puede ser vencida por una multitud de fuerzas mínimas, de forma que las hormigas, en un número suficiente, podrían arrastrar una nave cargada de trigo. Constatamos todos los días cómo una hormiga lleva sin dificultad un grano de trigo y es claro que en la nave no hay infinitos granos, sino más bien un número determinado. De este modo, puede darse un número cuatro o seis veces más grande, que supondremos igual al número de hormigas; éstas, puestas manos a la obra, acabarán por arrastrar el trigo y también el barco. Será necesario, naturalmente, que el número sea elevado, como lo es, a mi criterio, el de los vacíos que mantienen unidas entre sí las partes mínimas del metal.

SALV. Y si fuese necesario que fuesen infinitos, ¿lo tendríais por imposible?

SAGR. No, si la cantidad [*mole*] de metal fuese infinita; de otro modo...

[68] SALV. ¿De otro modo, qué? ¡Adelante! Ya que nos hemos enredado en paradojas, veamos si hay algún medio de demostrar que en una extensión continua finita sería posible encontrar infinitos vacíos. Al mismo tiempo, habremos propuesto, a falta de otra cosa, una solución del problema más admirable que se haya planteado Aristóteles entre aquellos que él mismo califica como admirables; me refiero a las *Cuestiones mecánicas*.* Y tal vez la solución no sea menos explicativa y concluyente que la que da Aristóteles, aunque sea diferente de la que con tanta agudeza ofrece el sapientísimo monseñor de Guevara.**

Pero es necesario, antes de nada, enunciar una proposición que nadie ha considerado, de la que depende la solución del problema y que, además, si no me engaño, traerá

* *Cuestiones mecánicas*, obra falsamente atribuida a Aristóteles, aunque salida de su escuela. Contienen valiosas aportaciones, como el principio de las velocidades virtuales, el del paralelogramo de fuerzas, etc.

** Obispo de Teano (1561-1641).

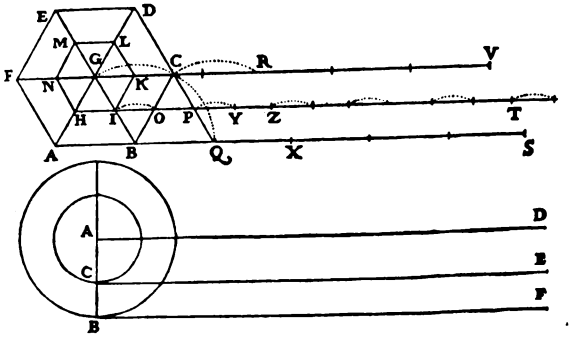


Fig. 5

como consecuencia otros conocimientos nuevos y admirables. Describamos gráfica y detalladamente esto para entenderlo [figura 5]. Supongamos un polígono equilátero y equiángulo, con el número de lados que se quiera, y cuyo centro esté en G. Supongamos también que ABCDEF es un hexágono. Tracemos otro hexágono más pequeño y que tenga el mismo centro, al que llamaremos HIKLMN. Prolonguemos el lado AB del hexágono mayor indefinidamente en dirección a S. En la misma dirección, prolonguemos el lado HI correspondiente, del hexágono pequeño, siguiendo la línea HT, paralela a AS. Desde el centro tracemos ahora otra GV, paralela a las otras dos. [69] Una vez hecho esto, hagamos rotar el polígono mayor sobre la línea AS, arrastrando consigo al polígono pequeño. Es evidente que, permaneciendo fijo el punto B, extremo del lado AB, al comenzar el movimiento de rotación, el ángulo A se elevará y el punto C descenderá, describiendo el arco CQ, de modo que el lado BC se adecuará al segmento de la misma longitud BQ. Ahora bien, en el curso de la rotación, el ángulo I del polígono pequeño se elevará por encima de la línea IT, ya que IB es oblicua a AS y el punto I no coincidirá con la paralela IT a no ser en el momento en que el punto C haya llegado a Q. Entonces I se encontrará con O después de haber descrito el arco IO, fuera de la línea HT, y el lado IK coincidirá con OP, mientras que el centro G, por su parte, habrá caminado fuera de la línea GV, sobre la cual no volverá sino después de haber descrito el arco GC. Habiéndose realizado este primer paso, el polígono mayor se habrá movido de tal manera que el lado BC reposará en la línea BQ; el lado IK del polígono menor coincidirá con el segmento OP, habiendo saltado toda la parte IO sin tocarla; y el centro G, habiendo llegado a C, habrá seguido su curso fuera de la paralela GV. Finalmente, toda la figura volverá a tomar una posición semejante a la del principio, de modo que, continuándose la revolución y efectuada una segunda vez, el lado DC del polígono mayor se adaptará a la parte QX, el KL del menor (habiendo saltado del arco PY) caerá en YZ, y el centro, caminando siempre fuera de la recta GV, sólo llegará a ésta en R, después del gran salto CR. Finalmente, al cabo de una vuelta [*conversione*] completa, el polígono mayor habrá cubierto, sobre su recta AS, seis líneas iguales a su períme-

tro, sin interposición ninguna. El polígono menor habrá cubierto, igualmente, seis líneas iguales a su perímetro, pero discontinuas, debido a la interposición de los cinco arcos, bajo los que quedan las cuerdas, partes de la paralela HT, no tocadas por el polígono. Y, finalmente, el centro G no habrá coincidido nunca con la paralela GV, excepto en seis puntos. De todo lo dicho podéis comprender cómo el espacio recorrido por el polígono menor es casi igual al recorrido por el grande; es decir, la línea HT a la línea AS, de la que solamente es menor lo que es la cuerda de uno de estos arcos, considerando, sin embargo, que la línea HT incluye los espacios entre los cinco arcos.

Ahora bien, esto que acabo de exponeros y explicaros, con la ejemplificación de estos hexágonos, quisiera que lo hiciérais extensivo a todos los polígonos [70] restantes, tengan los lados que se quiera, con tal de que sean semejantes, concéntricos y unidos de modo que la revolución del mayor lleva consigo la del menor, por pequeño que éste sea. Quisiera, insisto, que entendierais que las líneas recorridas por estos polígonos son aproximadamente iguales, con la condición de que, en el espacio que han de recorrer, se tengan en cuenta los intervalos comprendidos bajo los arcos pequeños, intervalos que no habrá tocado ninguna parte del polígono menor. Demos, pues, al polígono mayor mil lados y hagámosle recorrer una recta igual a su perímetro. En el mismo tiempo, el pequeño recorrerá una línea aproximadamente igual, sólo que discontinua y compuesta de mil pequeños segmentos, iguales a sus mil lados, con la interposición de mil espacios vacíos, pues de este modo podemos llamarlos para distinguirlos de los mil segmentos pequeños tocados por el polígono. Todo lo dicho hasta aquí no ofrece la menor duda o dificultad.

Pero, decidme, si alrededor de un centro [figura 5], que podríamos representar por medio del punto A, describimos dos círculos concéntricos y unidos entre sí, y si trazamos desde los puntos C y B de sus semidiámetros las tangentes CE, BF, y desde el centro A la paralela a ellas AD, girando el círculo mayor sobre la línea BF (suponiendo que sea de una longitud igual a su circunferencia, como ocurre con las otras dos CE y AD), una vez que se haya realizado una revolución, ¿qué es lo que habrá hecho el círculo pequeño y qué es lo que habrá hecho el centro? Éste, sin duda alguna, habrá recorrido y tocado toda la línea AD y la circunferencia de aquél habrá, por sus puntos de contacto, medido toda la línea CE, haciendo lo mismo que hacían los polígonos de los que hablamos hace un momento, con la única diferencia, sin embargo, de que la línea HT no fue tocada en todas sus partes por el perímetro del polígono más pequeño, sino que, debido a la interposición de los vacíos saltados, quedaron sin tocar tantas partes como las tocadas por los lados. Pero, en el caso de los círculos, la circunferencia del más pequeño no se separará jamás de la línea CE, de modo que no deje parte alguna sin tocar, así como tampoco ninguna de sus partes está exenta de contacto con la línea recta. Ahora bien, ¿cómo es posible que el círculo más pequeño pueda recorrer, sin saltarse nada, una línea mucho mayor que su circunferencia?

SAGR. Estaba pensando precisamente si se pudiese decir que así como el centro del círculo, él solo, no siendo más que un punto, arrastrado sobre la recta AD la toca toda entera, del mismo modo, podrían los puntos de la circunferencia más pequeña, arrastrados por el movimiento de la mayor, deslizarse por algunas partes minúsculas de la línea CE.

[71] SALV. Esto no puede ser por dos razones. En primer lugar, porque no habría razón por la que algunos de los puntos de contacto semejantes al punto C anduviesen deslizándose por algunas partes de la línea CE y otros no. Y si esto sucediera, al ser infini-

tos los contactos (ya que son puntos) los deslizamientos sobre CE serían infinitos; y al ser de alguna extensión [*quanti*] formarían todos juntos una línea infinita. Pero CE es finita. La otra razón estriba en que, al cambiar el círculo grande continuamente de punto de contacto en su revolución, el círculo pequeño no puede por menos de cambiarlo igualmente; y es que no se puede trazar una recta hasta el centro A y que pase por el punto C si no es desde el punto B, de modo que cambiando la circunferencia grande su punto de contacto, lo cambia también la pequeña y ningún punto de la pequeña puede tocar en más de un punto de la recta CE. Además de que, en la revolución de los polígonos, ningún punto del perímetro del pequeño coincidía con más de un punto de la línea que era medida por tal perímetro, como se comprenderá fácilmente, si consideramos que la línea IK es paralela a la BC, de donde se sigue que mientras BC no coincida con BQ, IK permanecerá por encima de IP y no la cubrirá sino en el momento mismo en el que BC se una con BQ; es sólo entonces cuando todo el segmento IK se une con OP para elevarse, inmediatamente después, por encima.

SAGR. La cuestión es realmente complicada, y no llego a ver solución ninguna. Pero decidnos lo que vos mismo pensáis.

SALV. Recurriré a las consideraciones hechas antes con respecto a los polígonos, pues su mecanismo es inteligible y ya lo hemos comprendido. Mi razonamiento es el siguiente: así como en los polígonos de cien mil lados, la línea franqueada y medida por el perímetro del más grande, es decir, por sus cien mil lados yuxtapuestos de forma continua, es igual a la que miden los cien mil lados del más pequeño, sólo que con la interposición de cien mil espacios vacíos, del mismo modo he de decir que en los círculos (que son polígonos de lados infinitos), la línea recorrida por los infinitos lados del círculo grande, colocados uno tras otro [sin solución de continuidad] es igual en longitud a la línea recorrida por los infinitos lados del círculo más pequeño, pero con la interposición entre ellos de otros tantos espacios vacíos. Y así como el número de lados no es finito [*non son quanti*], sino más bien infinito, del mismo modo el número de vacíos interpuestos no es finito [*quanti*], sino infinito. Aquéllos, infinitos puntos, todos llenos; éstos, infinitos puntos, en parte llenos y en parte vacíos.

Aquí quisiera haceros notar cómo si reducimos y [72] dividimos una línea en partes extensas [*quante*] y, por tanto, numerables es imposible colocar tales partes en una longitud mayor que la que ocupaban cuando estaban conjuntamente dispuestas, una tras otra, sin interponer entre ellas otros tantos espacios vacíos. Pero si nos imaginamos una línea reducida a partes inextensas [*non quante*], es decir, a la infinitud de sus indivisibles, podemos concebirla como inmensamente extendida, sin la interposición de espacios extensos [*quanti*], pero sí con la de infinitos indivisibles vacíos. Y esto que hemos dicho de las simples líneas debe extenderse también a las superficies y a los cuerpos sólidos, considerándolos compuestos de infinitos e inextensos [*non quanti*] átomos. Si quisiéramos dividirlos en partes extensas [*quante*] no hay duda alguna de que no podríamos extenderlas en espacios que fuesen más amplios que los ocupados en un principio por estos mismos sólidos, a no ser que interpusiésemos espacios vacíos extensos [*quanti*] —vacíos, digo, al menos de la materia del sólido—. Pero si lo que intentamos es la más profunda y última división de estos cuerpos en sus primeros componentes inextensos [*non quanti*] e infinitos, podremos concebir tales componentes desplegados en un espacio inmenso sin la interposición de espacios vacíos extensos [*quanti*], sino solamente con una infinidad de vacíos inextensos [*non quanti*]. Así, no repugna que una pequeña bola de oro, por ejemplo, se extienda en un espacio muy grande sin tener

que admitir espacios vacíos extensos [*quanti*], siempre y cuando admitamos que el oro está compuesto de indivisibles en número infinito.

SIMP. Me da la impresión que entráis en la vía de aquellos vacíos diseminados de los que habló cierto filósofo antiguo.

SALV. Pero no añadís: «el cual negaba la Providencia divina» como en ocasión parecida y muy inoportunamente apostilló cierto adversario de nuestro académico.

SIMP. He notado, y no sin disgusto, la hiel de ese tendencioso adversario. Por lo que a mí respecta, me guardaré bien de tocar este punto, no sólo por educación, sino porque sé demasiado bien lo lejos que está una mente tan equilibrada y organizada como la de V. S., que no sólo es religiosa y piadosa, sino católica y santa.

Pero volviendo a nuestro tema, siento que me nacen muchas dificultades de las consideraciones que se acaban de hacer y de las que, sinceramente, no sabría salir. Por poner una: si las circunferencias de los dos círculos son iguales a las dos rectas CE, BF, ésta tomada continuamente, y aquélla, con la interposición de infinitos puntos vacíos, la recta AD, descrita por el centro, que es un solo punto, ¿de qué modo se podrá decir que es igual a ese punto único, si contiene infinitos? Además, esta manera de componer la línea de puntos, lo divisible de indivisibles, [73] lo extenso [*quanto*] de lo inextenso [*non quanti*], me parece un escollo muy difícil de salvar. Así mismo, el hecho de admitir el vacío, tan concluyentemente refutado por Aristóteles, no está exento de las mismas objeciones.

SALV. Estas dificultades, en efecto, existen, así como muchas otras. Pero no olvidemos que estamos en medio de los infinitos y los indivisibles, aquéllos incomprensibles para nuestro finito entendimiento debido a su grandeza, y éstos, a causa de su pequeñez. A pesar de todo, vemos cómo la razón humana no cesa de dar vueltas a su alrededor, de modo que, tomándome cierta libertad, os comunicaré alguna de mis fantasías que, si no son necesariamente concluyentes, sí son capaces, al menos, debido a su originalidad, de suscitar cierta admiración. Pero tal vez el apartarnos tanto del camino comenzado os parezca inoportuno y, por tanto, poco grato.

SAGR. A Dios gracias gozamos del beneficio y del privilegio que se tiene al hablar con vivos y entre amigos y más aún si se trata de cosas que hemos escogido sin que nadie nos las haya impuesto; cosa bien diferente de tratar con libros muertos, los cuales suscitan mil dudas sin que resuelvan ninguna. Hacednos, pues, partícipes de esas ideas que se os ocurren con motivo de nuestra conversación; puesto que tenemos el privilegio de no estar constreñidos por ningún quehacer ineludible, no nos faltará tiempo para continuar y resolver los otros problemas que hemos abordado. De modo especial, las objeciones adelantadas por el señor Simplicio no deben, en modo alguno, quedar sin respuesta.

SALV. Que así sea, pues tal es vuestro deseo. Y para responder a la primera cuestión que se me ha planteado de cómo es posible que un solo punto sea igual a una línea, procuraré, ya que no puedo hacer más por el momento, disipar, o al menos atenuar, una improbabilidad por medio de otra parecida o mayor; así, a veces, una extrañeza desaparece ante un milagro.* Os he de mostrar, por tanto, que dos superficies iguales, y con ellas dos cuerpos también iguales que tengan por bases tales superficies, pueden disminuir continua, uniforme y simultáneamente, dejando restos siempre iguales entre sí, para llegar por fin, al término de sus igualdades perpetuas, a que uno de los sólidos y una de las superficies se reduzcan a una línea muy larga, mientras que el otro sólido y la otra superficie se reduzcan a un solo punto; esto es, aquéllos a una infinidad de puntos y éstos a uno solo.

* Cf. *infra*.

[74] SAGR. Me parece que es ésta una proposición realmente admirable; pero oigamos la explicación y la demostración.

SALV. Es necesario que dibujemos una figura, ya que la prueba es puramente geométrica [figura 6]. Imaginémonos, por tanto, un semicírculo AFB, con centro en C; inscribámoslo en un paralelogramo rectangular ADEB y, desde el centro, tracemos las líneas rectas DC y CE a los puntos D, E. Tracemos, después, el semidiámetro CF, perpendicular a uno de las dos AB, DE, y, dejándolo inmóvil, hagamos girar toda la figura sobre este semidiámetro CF. Es evidente que el rectángulo ADEB describirá un cilindro, el semicírculo AFB, una semiesfera y el triángulo CDE, un cono. Esto supuesto, imaginémonos que retiramos la semiesfera, dejando, sin embargo, el cono y lo que quede del cilindro, al que denominaremos escudilla, precisamente porque es la figura que ha de tomar. Hemos de demostrar, primero, que ésta y el cono son iguales; después de lo cual, habiendo trazado un plano paralelo al círculo que constituye la base de la escudilla, cuyo diámetro es la línea DE y el centro F, demostraremos que tal plano, pasando, *v. g.*, por la línea GN, que corta la escudilla en los puntos G, I, O, N, y el cono en los puntos H, L, cortará una parte del cono CHL, siempre igual a la parte de la escudilla cuyo perfil lo representan los triángulos GAI, BON. Se probará, además, que la base del cono CHL (es decir, el círculo cuyo diámetro es HL) es igual a la superficie circular que sirve de base a aquella parte de la escudilla y que es, como si dijésemos, una corona de la anchura de la línea GI. (Notad, de pasada, lo que son las definiciones de los matemáticos: son una imposición de nombres o, mejor, abreviaciones del hablar, pensadas e introducidas para eliminar esa molestia fastidiosa que vos y yo sentimos en este momento por no habernos puesto de acuerdo en llamar, por ejemplo, a esta superficie *corona circular* y al sólido agudísimo de la escudilla, *navaja redonda.*) Ahora bien, llámense como se llamen, basta con que entendáis que todo plano trazado a la altura que sea, con tal de que sea [75] paralelo a la base (o sea, el círculo de diámetro DE) corta siempre a los dos sólidos en partes iguales entre sí (o sea, la parte del cono CHL y la parte superior de la escudilla); es decir, la susodicha corona y el círculo HL son también iguales.

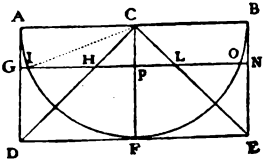


Fig. 6

De todo lo cual se deduce la maravilla que habíamos sugerido: si suponemos que el plano secante se eleva constantemente hacia la línea AB, las partes cortadas de los sólidos siempre son iguales, del mismo modo que lo son las superficies que les sirven de base. Y, finalmente, retirando más y más, tanto los dos sólidos (siempre iguales) como sus bases (superficies siempre iguales), una de las parejas acaba en una circunferencia del círculo y la otra acaba siendo un solo punto, ya que tales son el borde extremo de la escudilla y el vértice del cono. Ahora bien, puesto que los dos sólidos, a medida que disminuyen, son siempre iguales entre sí, hasta el final, me parece conveniente decir que los resultados finales de tales disminuciones seguirán siendo iguales, sin que sea el uno infinitamente mayor que el otro. Parece, pues, que la circunferencia de un círculo inmenso puede considerarse igual a un solo punto. Y esto que sucede con los sólidos, sucede igualmente con las superficies, sus bases, las cuales, conservando siempre, en el curso de su común reducción, la igualdad, acaban, al término de su última disminución,

por confundirse la una con la circunferencia de un círculo y la otra con un solo punto. ¿Por qué habríamos de negarnos a tenerlas por iguales, ya que son los últimos vestigios, los últimos restos de cantidades iguales? Notad, además, que aunque tales recipientes fuesen capaces de contener los inmensos hemisferios del cielo, tanto los bordes extremos como los vértices de los conos, conservando siempre la igualdad entre sí, aquéllos acabarían en circunferencias iguales a las de los círculos máximos de los orbes celestes y éstos, en simples puntos. Por tanto, y siguiendo las conclusiones de tales razonamientos, se podrá, pues, decir que todas las circunferencias de los círculos, por muy desiguales que sean, pueden considerarse iguales entre sí, siendo cada una, a su vez, igual a un punto.

SAGR. Tales consideraciones me parecen tan atractivas y nuevas que, incluso en el caso de que pudiera, no quisiera contradecirlas, pues me parece casi un sacrilegio arruinar una construcción tan bella, destruyéndola con algún ataque pedante. Pero para [76] entera satisfacción nuestra, dadnos, pues, la prueba que llamáis geométrica, según la cual se mantiene siempre constante la igualdad entre aquellos sólidos y sus bases, prueba que pienso ha de ser muy aguda, dada la extrema sutileza de la reflexión filosófica que sugieren vuestras conclusiones.

SALV. La demostración, sin embargo, es breve y fácil. Tomemos de nuevo nuestra figura, en la que, al ser el ángulo IPC recto, el cuadrado del semidiámetro IC es igual a la suma de los cuadrados de los lados IP, PC. Ahora bien, el radio IC es igual a la recta AC, y ésta a la GP, y la CP, igual a la PH. Así pues, el cuadrado de la recta GP es igual a la suma de los cuadrados de IP, PH, y su cuádruplo, a sus cuádruplos; es decir, el cuadrado del diámetro GN es igual a la suma de los cuadrados de IO, HL. Y dado que los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros, la superficie del círculo cuyo diámetro es GN, será igual a la suma de las superficies de los círculos cuyos diámetros son IO, HL. Si dejamos de lado el círculo común, cuyo diámetro es IO, el resto del círculo GN será igual al círculo que tiene por diámetro HL. Esto por lo que a la primera parte se refiere.

En cuanto a la segunda, prescindiremos de la demostración por el momento, ya que si la queremos ver, la podemos encontrar en el enunciado duodécimo del libro segundo de *De centro gravitatis solidorum,* en donde el señor Luca Valerio,* este nuevo Arquímedes de nuestro siglo, se sirvió de ella para otros fines. Además, en nuestro caso, basta haber visto cómo las superficies ya definidas son siempre iguales y que, disminuyendo siempre al mismo tiempo, acaban, la una, en un solo punto, y la otra, en la circunferencia de un círculo cuyo tamaño sobrepasará el círculo más grande que cualquiera que se pueda imaginar, ya que es en esta consecuencia en donde se encuentra aquel milagro del que hablaba.**

SAGR. La demostración es tan ingeniosa como admirable la reflexión hecha sobre ella. Oigamos ahora algo acerca de la otra dificultad propuesta por el señor Simplicio en el caso de que tengáis algo que decirnos al respecto, cosa de la que dudo un tanto, ya que se trata de una controversia muy agitada.

SALV. He de expresar algunas ideas mías, diciendo de nuevo lo que no hace mucho he expuesto; es decir, que el infinito, por sí solo, excede nuestra capacidad de com-

* Distinguido matemático italiano, nacido en Ferrara hacia 1552, admitido en la Academia dei Lincei en 1612, y fallecido en 1618.

** Cf. *supra*.

prensión, lo mismo que ocurre con los [77] indivisibles. Pensad lo que pasará si se encuentran juntos. Ahora bien, si queremos componer una línea de indivisibles, hay que tomar un número infinito de ellos, por lo que conviene tomar en consideración al mismo tiempo lo infinito y lo indivisible. Muchas son las cosas que se me han ocurrido sobre este tema, parte de las cuales, y quizá las más importantes, es fácil que se me olviden, dada la improvisación. Pero, en el curso de nuestra discusión, puede suceder que se susciten, especialmente en el caso del señor Simplicio, dificultades y objeciones, mientras que vuestras anotaciones, a su vez, me traerán a la memoria cosas que de otra manera permanecerían dormidas en mi mente. Séanos lícito, pues, presentar con nuestra habitual libertad nuestros caprichos humanos, pues tal es el nombre que merecen en comparación con las doctrinas sobrenaturales, únicas guías seguras y verdaderas de nuestras discusiones que nos conducen infalibles a través de nuestros oscuros y dudosos senderos o, por decirlo mejor, a través de nuestros laberintos.

Una de las primeras objeciones que se suelen adelantar contra aquellos que componen las magnitudes continuas de partes indivisibles suele ser la de que un indivisible añadido a otro indivisible no produce otra cosa divisible, ya que, si así fuese, se seguiría que el indivisible habría de ser, sin embargo, divisible. Y es que si dos indivisibles, como es el caso, por ejemplo, de dos puntos, al unirse construyeran una magnitud extensa [*quantita*] como es la línea divisible, con mucha más razón serían tales las líneas compuestas de tres, cinco, siete o de cualquier otro número impar de elementos. Tales líneas, siendo susceptibles de ser cortadas en dos partes iguales, darían por resultado que el indivisible situado en el medio podría ser cortado en dos. En esta y en otras objeciones parecidas se puede dar satisfacción a los que las ponen diciéndoles que no sólo dos indivisibles, sino ni siquiera diez, cien o mil podrían componer jamás una magnitud divisible y extensa [*quanta*], sino que se necesitarían infinitos.

SIMP. Aquí surge inmediatamente una duda que me parece insoluble; y es que, estando nosotros seguros de que pueden darse líneas, una de las cuales es mayor que la otra, teniendo ambas infinitos puntos, hay que confesar que existe, en magnitudes de la misma especie, una cosa más grande que el infinito, puesto que la infinitud de los puntos de la línea mayor excederá a la infinitud de los puntos de la menor. Ahora bien, que se dé un infinito más grande que el infinito, me parece algo totalmente absurdo.

SALV. Este tipo de dificultades proviene de los razonamientos que nosotros hacemos con nuestro entendimiento finito al tratar con los infinitos, otorgándoles los mismos atributos que damos a las cosas [78] finitas y limitadas, lo cual pienso que es improcedente puesto que creo que las propiedades de mayor, menor e igual no convienen a los infinitos de los que no se puede decir que uno es mayor, menor o igual a otro. Como prueba de ello, me viene a la memoria un argumento que propondré para ser más claro bajo la forma de interrogaciones al señor Simplicio, que ha sido quien ha puesto la dificultad.

Supongo que sabéis perfectamente cuáles son los números cuadrados y los no cuadrados.

SIMP. Sé perfectamente que un número cuadrado es el que resulta de la multiplicación de otro número por sí mismo; así, cuatro, nueve, etc., son números cuadrados, engendrados el uno por el número dos y el otro por el tres al multiplicarse por sí mismos.

SALV. Muy bien. Sabéis también que así como los productos se llaman cuadrados, los que los producen, es decir, los números que se multiplican, se llaman lados o raíces. En cuanto a los números que no son engendrados por la multiplicación de un número

por sí mismo, no son, naturalmente, cuadrados. Por tanto, si yo digo que todos los números, incluyendo cuadrados y no cuadrados, son más que los cuadrados solos, enunciaré una proposición verdadera, ¿no es así?

SIMP. Evidentemente.

SALV. Si continúo preguntando cuántos son los números cuadrados, se puede responder con certeza que son tantos cuantas raíces tengan, teniendo presente que todo cuadrado tiene su raíz y toda raíz su cuadrado; no hay, por otro lado, cuadrado que tenga más de una raíz ni raíz con más de un cuadrado.

SIMP. Así es.

SALV. Pero si pregunto cuántas raíces hay, no se puede negar que haya tantas como números, ya que no hay ningún número que no sea raíz de algún cuadrado. Estando así las cosas, habrá que decir que hay tantos números cuadrados como números, ya que son tantos como sus raíces, y raíces son todo los números. Decíamos al principio, sin embargo, que todos los números son muchos más que todos los cuadrados, puesto que la mayoría de ellos no son cuadrados. Incluso el número de cuadrados va disminuyendo siempre a medida que nos acercamos a [79] números más grandes, ya que hasta cien hay diez cuadrados, que es tanto como decir que sólo la décima parte son cuadrados; y en diez mil sólo la centésima parte son cuadrados, mientras que en un millón la cifra ha descendido a la milésima parte. Con todo, en un número infinito, si pudiéramos concebirlo, habría que decir que hay tantos cuadrados como números en total.

SAGR. En este caso, ¿qué es lo que se deduce?

SALV. Yo no veo que otra cosa haya que decir si no es que infinitos son todos los números, infinitos los cuadrados, infinitas sus raíces; la multitud de los cuadrados no es menor que la de todos los números, ni ésta mayor que aquélla; y finalmente, los atributos de mayor, menor e igual no se aplican a los infinitos, sino sólo a las cantidades finitas [*terminate*]. De modo que, cuando el señor Simplicio me presenta muchas líneas desiguales y me pregunta cómo puede ser que en la mayor no haya más puntos que en la pequeña, yo le respondo que no hay ni más ni menos ni los mismos, sino infinitos en cada una. Si yo le respondiese, por el contrario, que los puntos de una son tantos como los números cuadrados, los de otra mayor, tantos como números naturales, y los de otra pequeñísima, tantos como números cubos, ¿le daría así satisfacción al poner más puntos en una que en otra y en cada una una infitud? Esto por lo que respecta a la primera dificultad.

SAGR. No sigáis, por favor, y permitidme que añada yo a lo dicho hasta el momento una idea que se me ha ocurrido ahora mismo: si las cosas son tal y como se las ha expuesto hasta aquí, me parece que no sólo no se puede decir que un infinito es mayor que otro infinito, sino ni siquiera que es mayor que un finito, ya que en el caso de que un número infinito fuese mayor, *v. g.*, que un millón, se seguiría que, pasando de un millón a otros números cada vez más grandes, se caminaría hacia el infinito; lo cual no es así, ya que, por el contrario, cuanto más nos elevamos a números mayores más nos apartamos del número infinito. Y es que cuanto mayores son los números, más raros son los números cuadrados en ellos contenidos. Ahora bien, en el número infinito, los cuadrados no pueden ser menos numerosos que todos los números en su conjunto, como se acaba de demostrar. Así pues, avanzar hacia números cada vez mayores es alejarse del infinito.*

* Aquí aparece una cierta confusión conceptual en el fallo de distinguir entre el *número n* y la *clase* de los *n* primeros números; y de distinguir infinito como número de infinito como la clase de todos los números.

SALV. Así, de vuestro ingenioso razonamiento se [80] concluye que los atributos de mayor, menor o igual no sólo no tienen lugar entre los infinitos, sino ni siquiera entre los infinitos y los finitos.

Paso ahora a otra consideración y que es la siguiente: admitiendo que la línea, como toda magnitud continua [*continuo*], sea divisible en partes siempre divisibles, no veo cómo pueda dejar de reconocer que está compuesta de infinitos indivisibles, ya que una división y una subdivisión que se pueda proseguir siempre supone que las partes sean infinitas, pues de otro modo la subdivisión tendría un límite. Que las partes sean infinitas trae como consecuencia que no son extensas [*quante*] ya que infinitas partes extensas [*quanti infiniti*] forman una extensión infinita [*estensione infinita*]. Así pues, llegamos a la conclusión de que las magnitudes continuas [*continuo*] están compuestas de infinitos indivisibles.

SIMP. Pero si nosotros podemos proseguir indefinidamente la división en partes extensas [*quante*], ¿qué necesidad tenemos de introducir, a tal respecto, las inextensas [*non quante*]?

SALV. El hecho mismo de poder proseguir perpetuamente la división en partes extensas [*quante*] implica la necesidad de composición de infinitas partes inextensas [*non quanti*]. Es ésta la razón de que, para ser más precisos, os pida que me digáis con toda franqueza si las partes extensas [*quante*] en una magnitud continua [*continuo*] son, según vuestra opinión, finitas o infinitas.

SIMP. Y yo os respondo que son finitas e infinitas. Infinitas en potencia y finitas en acto. Infinitas en potencia: es decir, antes de la división. Pero finitas en acto: después de la división. Pues no hay que pensar que todas ellas estén en acto, sino sólo después de que se las divide o señale. En caso contrario se dice que están en potencia.

SALV. De modo que una línea que tenga una longitud, por ejemplo, de veinte palmos, no es cierto que contenga veinte líneas de un palmo, cada una en acto, sino después de la división en veinte partes iguales. Hasta entonces las contiene sólo en potencia. ¡Como queráis! Pero decidme, una vez que se realiza la división de tales partes, ¿ha aumentado el todo, ha disminuido o ha permanecido con el mismo tamaño?

SIMP. Ni ha crecido ni ha disminuido.

SALV. Lo mismo creo yo también. Así pues, las partes extensas [*quante*] del continuo, estén en acto o en potencia, no hacen su magnitud ni más grande ni más pequeña. Ahora bien, es evidente que las partes extensas [*quante*] contenidas actualmente en su todo, si son infinitas, hacen a éste de infinito tamaño. Así que partes extensas [*quante*], aunque sólo sean infinitas en potencia, sólo pueden estar contenidas en [81] una magnitud infinita. Por tanto, en la línea finita en magnitud no pueden contenerse partes extensas [*quante*] infinitas ni en acto ni en potencia.

SAGR. Entonces ¿cómo puede ser verdad que las magnitudes continuas [*continuo*] pueden dividirse indefinidamente en partes siempre susceptibles de una nueva división?

SALV. Parecería que esta distinción entre acto y potencia nos posibilita, por una parte, aquello que, por otra, sería imposible. Voy a tratar de ajustar estas partidas haciendo otro cálculo. A la cuestión de saber si las partes extensas [*quante*] de las magnitudes continuas finitas [*continuo terminato*] son finitas o infinitas, he de responder todo lo contrario de lo que ha dicho el señor Simplicio; o sea, que no son ni finitas ni infinitas.

SIMP. Yo no hubiera sido capaz de responder así nunca, al no creer que haya un término medio entre lo finito y lo infinito, de modo que la división o distinción que dice que una cosa ha de ser finita o infinita sea insuficiente y defectuosa.

SALV. Eso es lo que me parece a mí. Y, hablando de las cantidades discretas, me parece que entre las finitas y las infinitas hay un término medio: las que corresponden a cualquier número dado. De modo que si, en nuestro caso, se pregunta por las partes extensas [*quante*] de las magnitudes continuas [*continuo*] para ver si son finitas o infinitas, la respuesta más congruente es la que ya indiqué: no son ni finitas ni infinitas, sino tales que corresponden a cualquier número dado. A tal efecto, es necesario que aquéllas no estén comprendidas dentro de un número limitado, pues, de lo contrario, no corresponderían a un número superior. Tampoco es necesario que sean infinitas, ya que ningún número determinado es infinito. Así, podemos asignar a una línea que se nos proponga, una división en cien partes, en mil y en cien mil, si os place; pero en un número infinito es algo que cae fuera de toda consideración. Concedo, pues, a los señores filósofos que las magnitudes continuas [*continuo*] contengan tantas partes cuantas les gusten y concedo que las tengan en acto o en potencia, a su gusto y buen placer; pero no dejo de añadir que del mismo modo que en una línea de diez brazas se contienen diez líneas de una braza cada una, cuarenta de un codo, ochenta de medio codo, etc., del mismo modo contiene aquélla un número infinito de puntos.

SIMP. No puedo por menos que alabar vuestros [82] razonamientos, pero me temo mucho que la comparación establecida entre las partes extensas [*quante*] y los puntos, en cuanto al modo de ser contenidos en la línea, no se aplique con toda exactitud y que la división de la supuesta línea en puntos infinitos no os sea algo tan fácil como a aquellos filósofos el dividirlas en diez brazas o cuarenta codos. Pienso, más bien, que es del todo imposible llevar a cabo tal división, ya que se trata de una de esas potencias que nunca llegan a actualizarse.

SALV. El que sólo sea realizable con gran esfuerzo y diligencia o utilizando gran cantidad de tiempo, no convierte esta tarea en algo imposible, ya que pienso que tampoco vos encontraríais fácil dividir una línea en mil partes y mucho menos si hay que dividirla en 937 o en algún otro número primo que sea grande. Pero si esta división que estimáis imposible la convirtiera yo en algo tan practicable como sí se tratase de una división en cuarenta partes, ¿aceptáis admitirla en nuestra discusión de mejor grado?

SIMP. Me gusta mucho cómo soléis tratar estas materias y a vuestra pregunta os respondo diciendo que la facilidad que proponéis me parecería más que suficiente, si la división en puntos no fuese más laboriosa que la división en mil partes.

SALV. Aquí os he de decir algo que tal vez os cause admiración y que se refiere a la pretensión de querer o poder reducir la línea a sus infinitas partes, utilizando el método que otros ponen en práctica para dividirla en cuarenta, sesenta o cien partes; o sea, dividiéndola primero en dos partes, luego en cuatro, etcétera. Quien creyera que, siguiendo este orden, llegaría a encontrar la infinitud de los puntos cometería un grave error, ya que con tal procedimiento no llegaría, ni siquiera en la eternidad, a dividir todas las partes extensas [*quante*]. Porque está tan alejado el poder llegar; por tal camino, al ansiado término de los indivisibles, que lo que hace, por el contrario, es alejarse. De este modo, mientras piensa que, continuando la división, y multiplicando la multitud de las partes, se va acercando al infinito, me parece que lo que hace es alejarse cada vez más. Y la razón que para defender esto puedo esgrimir es la siguiente: los razonamientos que hemos usado hace unos momentos nos han llevado a la conclusión de que en el número infinito era necesario que hubiese tantos cuadrados y cubos como números en total, ya que los cuadrados y los cubos son iguales en número a sus raíces, siendo raíces todos los números naturales. Vimos después que cuanto más grandes eran los números,

más escasos eran los cuadrados en ellos contenidos, y más escasos todavía sus cubos. Es, por tanto, evidente que cuanto más progresemos en la serie de los números, tanto más nos iremos apartando del número [83] infinito. De todo lo cual se infiere que, si volvemos hacia atrás (ya que tal ascensión nos va alejando cada vez más de la meta buscada), si algún número puede llamarse infinito, ése es la unidad. Y, de hecho, encontramos en el número uno todas las condiciones exigidas por el número infinito; a saber, contiene en sí tantos cuadrados y cubos como números naturales hay.

SIMP. No llego a comprender bien cómo hay que entender todo esto.

SALV. El asunto no tiene nada de oscuro, ya que la unidad es cuadrado, es cubo, es cuadrado del cuadrado, encerrando en sí todas las potencias, no habiendo particularidad alguna, esencial a los cuadrados, cubos, etc., que no sea propia de la unidad. Así, una de las propiedades de dos números cuadrados, por ejemplo, es el que exista, entre ellos, un número medio proporcional. Imaginémosnos cualquier número cuadrado como uno de los términos y la unidad como otro término. Pues bien, siempre encontraréis un número medio proporcional. Tomemos dos números cuadrados: el 9 y el 4; entre el 9 y el 1 el medio proporcional es 3; entre el 4 y el 1 media el 2, y entre los dos cuadrados 9 y 4 está el número 6 como medio. Propiedad de los números cubos es que haya entre ellos, de modo necesario, dos números medios proporcionales: tomad el 8 y el 27; entre ellos, 12 y 18 son medios proporcionales. Asimismo, entre el 1 y el 8 median el 2 y el 4, mientras que entre el 1 y el 27, el 3 y el 9. Concluyamos, por tanto, que el único número infinito es la unidad. Son éstas maravillas que superan la capacidad de nuestra imaginación las que deberían ponernos en guardia contra los enormes errores de aquellos que intenten pensar sobre el infinito utilizando los mismos atributos que aplicamos en lo finito. La naturaleza de ambos no tiene ningún parecido.

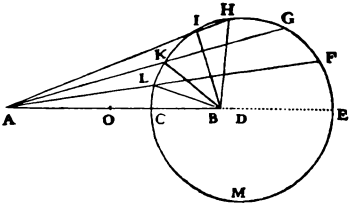


Fig. 7

A este propósito, no quisiera silenciar una interesantísima cuestión que me viene, precisamente en este instante, a la memoria y que da explicación de la diferencia infinita, más aún, de la repugnancia y aversión natural que encontraría una cantidad finita [*terminata*] si quisiera convertirse en infinita. Dibujemos una línea recta, que llamaremos AB [figura 7], de la longitud que se quiera y tomemos un punto, C, que la divida en partes desiguales. Digo que si trazamos desde los extremos A y B pares de líneas que tengan entre sí las mismas proporciones que mantienen los segmentos AC y BC, estas rectas se cortarán y los puntos de intercesión caerán todos sobre la circunferencia [84] de un mismo círculo. Imaginemos, por ejemplo, las rectas AL y BL, trazadas desde los puntos A y B, y guardando entre sí la misma proporción que la que tienen los segmentos AC y BC. AL y BL concurren en el punto L. Por otra parte, también guardan la misma proporción las otras dos rectas AK y BK, las cuales concurren en K; además de éstas, tenemos: AI, BI, AH, HB, AG, GB, AF, FB, AE, EB. Afirmo que los puntos de concurrencia L, K, I, H, G, F, E, caen todos en la misma circunferencia de un mismo círculo; de tal modo, que si nos imaginamos que el punto C se desplaza continuamente, si-

guiendo la ley según la cual las líneas trazadas desde ese punto a los extremos fijos A y B mantienen siempre la misma proporción que tienen los segmentos AC y BC, entonces el punto C describirá la circunferencia de un círculo, como os lo habré de demostrar en seguida. Y el círculo así descrito será siempre más grande e infinitamente más grande a medida que el punto C lo tomemos más cerca del punto del centro —por ejemplo, O— y será tanto más pequeño si es descrito desde un punto más cercano al extremo B. De manera que a partir de los infinitos puntos que se pueden obtener sobre la línea AB, se describirán círculos (siguiendo la ley más arriba explicada) del tamaño que se quiera: más pequeños que la pupila de los ojos de una pulga o más grandes que el ecuador del primer móvil.

Ahora bien, si, al desplazarse, los puntos comprendidos entre O y B describen todos círculos y los puntos cercanos a O círculos inmensos, ¿qué ocurrirá si es el mismo punto O el que se eleva y continúa moviéndose según la ley descrita; es decir, las rectas trazadas desde este punto a los extremos A y B han de guardar entre sí la misma proporción que la que se da entre los segmentos AO y OB? ¿Qué línea describirá el punto O? Describirá la circunferencia de un círculo, pero de un círculo mayor que el resto de los otros, por muy grandes que éstos sean; de un círculo, pues, infinito. Pero se describe también una línea recta y perpendicular sobre BA, trazada sobre el punto O y prolongada hasta el infinito, sin volverse nunca sobre sí misma para unir su punto de partida con su último término, como ocurría en el caso de las otras. Y es que la engendrada por el [85] movimiento finito del punto C, después de haber formado el semicírculo superior CHE, continuaba describiendo el semicírculo inferior EMC, para acabar reuniendo en el punto C sus dos términos extremos. Pero el punto O, poniéndose en movimiento para describir un círculo, como el resto de los puntos de la línea AB (ya que los puntos tomados en el segmento OA habrán de describir, a su vez, círculos tanto más grandes cuanto más cerca de O estén los puntos que tomemos) no podrá, antes de describir un círculo superior a todos en magnitud (dicho de otro modo, infinito), volver a su punto de partida, por lo que describirá; a modo de circunferencia de su círculo infinito, una recta infinita.

Considerad ahora cuál es la diferencia entre un círculo finito y otro infinito: este último cambia de tal forma su esencia que pierde totalmente su ser y su poder ser, ya que nosotros entendemos con claridad que no puede darse un círculo infinito. Esto trae como consecuencia que tampoco pueda existir una esfera infinita ni ningún otro cuerpo o superficie con forma infinita. Pero ¿qué diremos de estas metamorfosis, generadas al pasar de lo finito al infinito? Además, ¿por qué hemos de sentir más repugnancia cuando, buscando el infinito en los números, lo hallamos en la unidad? Y si rompiendo un sólido en muchas partes lo continuamos dividiendo hasta reducirlo a partículas cada vez más pequeñas, logrando así disociarlo en sus infinitos átomos indivisibles, ¿por qué no hemos de poder decir que ha vuelto a ser un solo continuo fluido, tal vez como el agua o el mercurio, o el mismo metal licuado? ¿No vemos, acaso, que las piedras se funden tornándose en cristal, y el mismo cristal, bajo la acción del fuego intenso, llega a hacerse más fluido que el agua?

SAGR. ¿Hemos de creer, entonces, que los fluidos son tales porque se han reducido a la infinitud de sus indivisibles, que son sus componentes?

SALV. No encuentro mejor expediente para dar cuenta de algunos hechos que caen bajo nuestros ojos, uno de los cuales es el siguiente: si cojo un cuerpo duro, sea éste de piedra o de metal, y con la ayuda de un martillo o de una lima muy fina lo voy dividiendo todo lo que puedo hasta convertirlo en finísimo polvo, impalpable ya, es evidente que las partículas mínimas obtenidas, aunque tomadas una a una sean imperceptibles, dada su pequeñez, a nuestra vista y a nuestro tacto, sin embargo, son extensas [*quanti*],

dotadas de forma y discretas [*numerabili*], si se las acumula, el resultado es que se mantienen en forma de montón; si se las ahueca hasta un cierto punto, la cavidad subsiste sin que las partes del entorno vayan a llenarla; si se las mueve y agita, en seguida se paran tan pronto como cesa la acción del motor [86] externo. Y estos mismos efectos son propios de todos los agregados de corpúsculos, por muy grandes que sean y cualquiera que sea su figura, incluso si es esférica, como podemos observar en los montones de mijo, de trigo, de perdigones de plomo y de cualquier otra materia. Sin embargo, si intentamos ver tales cosas en el agua, quedaremos defraudados; ésta, elevada, se desparrama inmediatamente a no ser que se la retenga en una vasija o en algún recipiente que la recoja; si se hace un hueco en ella, corre rápidamente a tapar el agujero; y si se la agita, fluctúa durante muchísimo tiempo, extendiendo sus ondas a través de grandes espacios.

Me parece que de todo esto se puede concluir, razonablemente, que los elementos más pequeños en que puede resolverse el agua (ya que ésta tiene menos consistencia que el polvo, por fino que éste sea; más aún, se podría decir que no tiene consistencia ninguna) son muy diferentes de las partículas mínima extensas [*quanti*] y divisibles. Yo no sabría explicar esta diferencia si no es diciendo que los elementos últimos del agua son indivisibles. Me parece, también, que la perfecta transparencia del agua es un argumento muy fuerte en favor de esta hipótesis, ya que si tomamos el cristal más transparente que podamos encontrar y comenzamos a romperlo y triturarlo, una vez que los hemos reducido a polvo, pierde la transparencia y esto tanto más cuanto más finamente lo pulvericemos. El agua, sin embargo, que está sumamente triturada, es diáfana. El oro y la plata, pulverizados más sutilmente bajo la acción de ácidos [*acque forti*] que lo que se conseguiría con la mejor lima, con todo siguen siendo polvo* y no se convierten en fluidos ni se licúan a no ser que los disuelvan en sus últimos componentes los indivisibles del fuego o de los rayos del sol, siendo aquéllos, creo yo, infinitos e indivisibles.

SAGR. Lo que V. S. ha dicho acerca de la luz es algo que yo he visto maravillado muchas veces. He visto repito, que el plomo se licúa en un instante con un espejo cóncavo de tres palmos de diámetro, lo que me ha hecho pensar que si el espejo fuese muy grande, bien pulido y de forma parabólica, licuaría igualmente, en brevísimo tiempo, cualquier otro metal, viendo la fuerza con la que aquél del que hablo (que no era ni grande ni bien pulimentado y de cavidad esférica) licuaba el plomo y abrasaba cualquier sustancia combustible. Estos efectos me hacen creer en las maravillas que se dicen de los espejos de Arquímedes.

SALV. Acerca de los efectos de los espejos de Arquímedes, los relatos maravillosos que narra más de un autor, me los han hecho creíbles la lectura de los libros del mismo Arquímedes, leídos y estudiados por mí desde hace algún tiempo y no sin profundo estupor. Si me hubiese quedado alguna duda, lo que ha publicado últimamente el P. Buenaventura Cavalieri** [87] en *La specchio ustoria* y que he leído con admiración, me habría bastado para alejar cualquier dificultad que se me presentase.***

* No queda claro qué quiere decir aquí Galileo cuando afirma que el oro y la plata, al ser tratados con ácidos, siguen siendo polvo.

** Uno de los investigadores más activos entre los contemporáneos de Galileo. Nació en Milán en 1598 y falleció en Bolonia en 1647. Perteneciente a la orden de los jesuitas, introdujo en Italia el uso de los logaritmos y fue el primero en deducir la expresión para la longitud focal de una lente con dos radios de curvatura diferentes. Su «método de los indivisibles» es considerado un precursor del cálculo infinitesimal.

*** Se dice que Arquímedes incendiaba los navíos de la escuadra romana sirviéndose de grandes espejos capaces de concentrar los rayos del sol.

SAGR. También yo he visto este tratado, leyéndolo con gran placer y admiración. Y puesto que yo conocía ya personalmente al autor, me confirmo en el concepto que de él me había hecho y según la cual llegaría a ser uno de los principales matemáticos de nuestro siglo. Pero, volviendo al maravilloso efecto de los rayos solares al licuar los metales, ¿hemos de creer que una acción tan violenta tenga lugar sin movimiento o, por el contrario, que ha de comportar un movimiento muy rápido?

SALV. Vemos que las otras combustiones y disoluciones tienen lugar con movimiento, y con un movimiento velocísimo: considérense las acciones de los rayos, de la pólvora en las minas y de los petardos, y, en suma, cómo se consigue aumentar la fuerza para licuar los metales, activando la llama de los carbones por medio de fuelles, estando aquélla mezclada con vapores espesos e impuros. En consecuencia, no podría concebir que la acción de la luz, aunque purísima, pudiese tener lugar sin movimiento, y un movimiento de enorme rapidez.

SAGR. Pero ¿de qué naturaleza y magnitud hemos de pensar que es esta velocidad de la luz? ¿Es acaso instantánea y momentánea o, por el contrario, exige tiempo, como los otros movimientos? ¿No podríamos asegurarnos de su naturaleza por medio de la experiencia?

SIMP. Nuestra experiencia cotidiana nos enseña que la propagación de la luz es instantánea. Cuando vemos que, a lo lejos, dispara la artillería, el resplandor de la llama, sin interposición de tiempo, llega a nuestros ojos, cosa que no ocurre con el sonido, el cual no llega a nuestros oídos si no es después de un considerable intervalo de tiempo.

SAGR. ¡Un momento, señor Simplicio! De esta conocidísima experiencia lo único que se sigue es que el sonido llega a nuestros oídos en un tiempo menos breve que el que necesita la luz para llegar a nuestros ojos; pero no tenemos ninguna seguridad de que la llegada de la luz sea, por eso, instantánea y no temporal, aunque de una velocidad inmensa. Tampoco se sigue de semejante observación más de lo que se seguiría de quien dijese: «Tan pronto como llega el sol al horizonte, llega su resplandor a nuestros ojos». Pero ¿quién me asegura que sus rayos no han alcanzado el horizonte antes de tocar nuestra vista?

SALV. El hecho de que se puedan concluir tan pocas cosas de observaciones como éstas o parecidas me sugirió la idea, en cierta ocasión, de buscar el modo de constatar, sin error, si la iluminación, o lo que es lo mismo, si la expansión de la luz es realmente [88] instantánea; porque el movimiento bastante rápido del sonido nos da la seguridad de que el de la luz debe de ser de una velocidad extrema. La experiencia que se me ocurrió fue la siguiente.

Dos hombres toman una luz cada uno y la esconden en el interior de una linterna o cualquier otro aparato capaz de cubrirla, de modo que puedan ir encendiéndola y apagándola, poniendo la mano delante, en cuanto ven a su compañero. Después, colocándose uno enfrente del otro a la distancia de unos pocos codos, empiezan a encender y a apagar la luz según la siguiente regla: cada vez que uno de los dos ve la luz del otro, enciende inmediatamente la suya. Después de algunos ensayos, se habrá ajustado la maniobra hasta el punto que, sin error posible, en cuanto uno encienda le responderá inmediatamente el otro, de forma que en el momento que una encienda su luz, verá al mismo tiempo aparecer ante sus ojos la de su compañero. Asegurada esta práctica en esta distancia tan pequeña, coloquemos ahora a estos hombres, y con dos luces semejantes, a la distancia de dos o tres millas el uno del otro. Comenzando de noche la misma experiencia; van observando atentamente si las respuestas a sus respectivos encen-

der y apagar guardan, a esta distancia, la misma cadencia que antes. Si es así, se podrá concluir, con bastante seguridad, que la expansión de la luz es instantánea, ya que si ésta necesitara tiempo en una distancia de tres millas, si tenemos en cuenta la ida de una y la vuelta de la otra, la demora tendría que ser suficientemente observable. Y si se repitiese la experiencia con distancias mayores, con ocho o diez millas de distancia, por ejemplo; nos podríamos servir del telescopio, colocando a los observadores con cuidado en el lugar en el que habría de practicarse por la noche la experiencia. Las luces, aunque no fuesen muy potentes, lo que las haría invisibles a simple vista dada la distancia, podrían, sin embargo, encenderse y apagarse fácilmente gracias a la ayuda del telescopio, que ajustaría debidamente las apariciones y desapariciones de la luz, posibilitando así la visión.

SAGR. La experiencia me parece un invento tan seguro como ingenioso. Pero decidnos qué conclusiones habéis sacado de tal experiencia.

SALV. La verdad es que yo sólo he realizado la experiencia a poca distancia; es decir, a menos de una milla, por lo que no he podido asegurarme de si la aparición de la luz opuesta era realmente instantánea. Pero si no es instantánea, he constatado que es velocísima, por no decir momentánea. Por el momento yo la asimilaría al movimiento que vemos [89] que se produce cuando aparece un relámpago entre las nubes a una distancia de ocho o diez millas. De este relámpago distinguimos el comienzo, la cabeza y la fuente, diría yo, en un punto determinado entre tales nubes, e inmediatamente sigue su amplísima expansión a través de vastísimas zonas, lo cual probaría, según creo yo, que tal expansión requiere muy poco tiempo, puesto que si la iluminación se hiciera toda de una sola vez y no gradualmente, me parece que no se podría distinguir su origen, lo que yo llamaría su centro, por una parte, y los bordes y últimas dilataciones, por otro. Pero ¿en qué océanos nos andamos metiendo poco a poco y sin darnos cuenta de ello? ¿Entre los vacíos, entre los infinitos, entre los indivisibles, entre los movimientos instantáneos, sin poder nunca, después de mil razonamientos, alcanzar la orilla?

SAGR. Son cosas que sobrepasan en mucho a nuestro entendimiento. En efecto: el infinito, buscado entre los números, parece que va a acabar en la unidad; de los indivisibles nace lo divisible sin fin; el vacío parece que no reside en parte alguna, a no ser indisolublemente ligado a lo pleno. Y, en suma, se modifica la naturaleza de las cosas que normalmente entendemos, de tal modo, que hasta la circunferencia de un círculo se convierte, en una línea recta infinita. Porque, si la memoria no me falla, es ésta la proposición que vos, señor Salviati, debíais ponernos de manifiesto, demostrándola geométricamente. No estaría mal, por tanto, que cuando os guste y sin más digresiones nos la presentéis.

SALV. Aquí estoy, dispuesto a serviros, demostrando, a fin de que todo quede claro, el siguiente problema:

Dada una línea recta, dividida según la proporción que se quiera en A partes desiguales, descríbase un círculo tal que, trazando dos líneas rectas desde los extremos de la línea dada a cualquier punto de la circunferencia, mantengan la misma proporción que tienen entre ellas las partes de la línea propuesta, siendo homólogas las líneas que partan de los mismos extremos.

Sea AB la línea recta dada, dividida, del modo que se quiera, en partes desiguales por el punto C. Hay que describir un círculo tal que dos rectas, trazadas desde los extremos A y B, a un punto cualquiera de su circunferencia, tengan entre sí la misma proporción

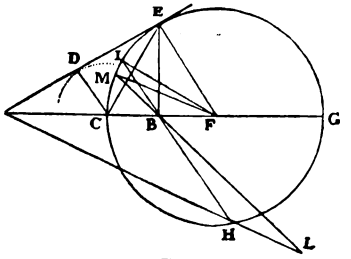


Fig. 8

que tienen, a su vez, los segmentos AC y BC, siendo homólogas las que partan del mismo extremo. Tomando el punto C como centro y como radio el pequeño segmento CB, describamos un círculo á cuya circunferencia trazamos, desde el [90] punto A, la tangente AD, prolongada indefinidamente hacia E. Sea D el punto de contacto. Unamos después los puntos C y D formando una recta perpendicular a AE [figura 8]. Al ser A un ángulo agudo, la recta BE, perpendicular a BA, encontrará a la AE en un punto. Llamemos E a tal punto. Desde este punto tracemos una recta, perpendicular a AE, que encontrará en F a la AB, infinitamente prolongada. Pues bien, afirmo, en primer lugar, que las dos rectas, FE, FC, son iguales, ya que si trazamos la recta EC, tendremos que en los triángulos DEC, BEC, los lados de uno DE, EC, son iguales a los lados del otro, BE, EC, al ser tanto DE como EB tangentes al círculo DB; igualmente son iguales las bases DC y CB. Se sigue de aquí que los dos ángulos, DEC y BEC, han de ser iguales. Y puesto que al ángulo BCE, para ser un ángulo recto, le falta el equivalente del ángulo CEB; y al ángulo CEF, también para ser un ángulo recto, le falta el equivalente del ángulo CED, siendo las partes que les faltan iguales, los ángulos FCE y FEC serán también iguales y, consecuentemente, lo mismo ocurrirá con los lados FE, FC. De donde se deduce que si tomamos como centro el punto F y con FE como radio describimos un círculo, éste pasará por el punto C. Describámoslo y llamémoslo CEG. He de decir que es éste el círculo buscado, pues es tal, que si trazamos, desde los puntos extremos A y B, dos rectas a cualquier punto que sea de su circunferencia, tendrán la misma proporción entre ellas que la que tienen los dos segmentos AC y BC, los cuales concurrían, como hemos visto, en el punto C. Esto es evidente por lo que se refiere a las dos rectas AE, BE, rectas que se encuentran en el punto E, al estar el ángulo E del triángulo AEB dividido en dos partes iguales por la recta CE, de modo que la proporción que se da entre AC y CB es la misma que la que se da entre AE y BE.

Lo mismo hemos de probar acerca de las dos rectas AG y BG, las cuales terminan en el punto G. Puesto que (por la semejanza de los triángulos AFE y EFB) AF es a FE como EF a FB, es decir, AF a FC como CF a FB, así, *dividendo,* AC es a CF (o sea a FG) como CB a FB; y la recta entera AB a la recta [91] entera BG; como CB a BF; y *componendo,* AG es a GB como CF es a FB; es decir, FE a FB, o AE a EB, AC a CB, cosa que era necesario demostrar. Tomemos, ahora, cualquier otro punto de la circunferencia y llamémosle H, siendo a su vez el punto en el que se encuentren las dos rectas AH, BH. Afirmo igualmente que así como AC es a CB; AH es a HB. Prolonguemos HB hasta la circunferencia en el punto I y unamos IF. Ahora bien, hemos visto ya que así como AB es a BG, CB es a BF; de modo que el rectángulo ABF es igual al rectángulo CBG, lo mismo que a IBH; y como AB es a BH, así IB a BF. Y como los ángulos en B son iguales, consecuentemente, AH es a HB como IF, o EF, a FB, y como AE a EB.

Afirmo, además de esto, que no es posible que las rectas que tengan entre ellas tal proporción, partiendo de los extremos A y B se encuentren en punto alguno situado

dentro o fuera del círculo CEG. Supongamos, sin embargo, que fuera posible el que dos rectas tales se encontrasen en el punto L, situado fuera del círculo en cuestión, y llamémoslas AL y BL. Prolonguemos ahora la LB hasta el punto M de la circunferencia; unamos finalmente M y F. Si AL es a BL como AC a BC, o sea como MF a FB, tendremos, entonces, dos triángulos, ALB y MFB, en los que los lados adyacentes a los dos ángulos ALB y MFB serán proporcionales, los ángulos en el vértice B iguales y los dos ángulos restantes FMB y LAB inferiores a un ángulo recto (ya que el ángulo recto en el punto M tiene como base todo el diámetro CG y no sólo el segmento BF, mientras que el otro ángulo en A es agudo puesto que la recta AL, homóloga de AC, es mayor que BL, homóloga de BC). Por todo ello, los triángulos ABL y MBF son semejantes, y como AB es a BL como MB a BF, se seguirá que el rectángulo ABF será igual al rectángulo MBL. Pero se ha demostrado ya que el rectángulo ABF es igual al rectángulo CBG, luego el rectángulo MBL es igual al rectángulo CBG, lo cual es imposible. El punto en el que se encuentran, pues, no puede caer fuera del círculo. De forma idéntica se podrá demostrar que tampoco puede caer dentro. En consecuencia, todos los puntos de encuentro deben caer en la circunferencia misma.

Pero ya es hora de dar satisfacción al deseo del señor Simplicio, mostrándole que descomponer la línea en sus infinitos puntos no es solamente posible, sino que ni siquiera es más difícil que dividirla en sus partes extensas [*quante*]; con tal de que demos por supuesto algo que supongo que el señor Simplicio estará dispuesto a conceder. Se trata de lo siguiente: no me pediréis que yo separe los puntos, los unos de los otros, y que os los haga ver, uno por uno, [92] bien distintos, sobre este papel. Yo me conformaría, por mi parte, con que, sin separar las unas de las otras aquellas cuatro o seis partes de que constase una línea, me indicáseis sus divisiones a modo de marcas o, todo lo más, plegándolas de tal forma que con sus ángulos se pudiese formar un cuadrado o un hexágono. Estoy convencido de que en ese caso consideraríais que las divisiones están suficientemente separadas y actualizadas.

SIMP. Sin duda alguna.

SALV. Si doblar una línea recta en ángulos para formar así un cuadrado, un octógono, un polígono de cuarenta, cien o mil ángulos, constituye una alteración suficiente como para poner en acto aquellas cuatro, ocho, cien o mil partes que estaban ya en esta línea recta en potencia, como decís, ¿no podría yo, con la misma razón, decir que si construyo, con la misma línea, un polígono de lados infinitos, es decir, si la doblo como circunferencia de un círculo, habría puesto en acto aquellas partes infinitas en número y que, según vuestra opinión, estaban contenidas en potencia mientras era una línea recta? No se puede negar, tampoco, que tal descomposición de la recta en sus puntos infinitos no sea más real que su división en cuatro partes, si se trata de formar un cuadrado, o de mil partes, en el caso de un polígono de mil lados. Y es que en tal caso no faltan ninguna de las condiciones que se dan en el polígono de mil o de cien mil lados. Este, puesto sobre una línea recta, se posa encima de ella tocándola con uno de sus lados; o sea, con su cienmilésima parte. El círculo, que es un polígono de infinitos lados, toca la misma recta con uno de sus lados, que es un solo punto, diferente de cualquier otro punto colateral, distinto y separado, por tanto, como lo está el lado de un polígono del resto de sus lados adyacentes; y del mismo modo que él. Y así como el polígono, rotando sobre un plano, traza con el contacto sucesivo de sus lados una línea recta igual a su perímetro, así también el círculo, girando sobre un tal plano, describe con la infinitud de sus sucesivos contactos, una línea recta igual a su circunferencia.

Ahora, señor Simplicio, no sé si los señores peripatéticos —con los cuales estoy de acuerdo en que es una verdad fuera de toda duda el que las magnitudes continuas [*il*

continuo] son divisibles en partes siempre divisibles, de modo que continuando una tal división y subdivisión no se llegaría nunca a un final— estarían dispuestos a concederme que ninguna de esas divisiones es la última, como no lo es ciertamente, ya que queda siempre una ulterior, sino que la última y suprema es aquella que descompone las magnitudes continuas en infinitos indivisibles; a ésta, concedo que no se llegaría nunca dividiendo sucesivamente en más y [93] más partes. Pero utilizando el método que yo propongo y que consiste en distinguir y descomponer de un solo golpe toda la infinitud (artificio al que puedo recurrir con todo derecho) pienso que deberían tranquilizarse y admitir esta composición de las magnitudes continuas en átomos absolutamente indivisibles; tanto más si parece que es éste el mejor camino para sacarnos fuera de laberintos muy intrincados como son, aparte de aquél al que antes nos hemos referido y que trata de la cohesión de las partes de los sólidos, comprender en qué consistan la rarefacción y la condensación, sin caer, por aquélla, en el inconveniente de tener que admitir espacios vacíos y, por ésta, en la penetrabilidad de los cuerpos. Todos estos escollos pienso que podrían evitarse bastante bien si se admite la composición, que hemos expuesto, a base de indivisibles.

SIMP. No sé lo que podrían decir los Peripatéticos, si tenemos en cuenta que las consideraciones que habéis hecho serían, para ellos, cosas nuevas y, como tales, habrían de someterlas a examen. Podría suceder que aquéllos encontraran respuestas y soluciones válidas, capaces de desatar aquellos nudos que yo, a falta de tiempo y por la fragilidad de mi ingenio, no sabría, en este momento, resolver. Pero, dejando de lado ahora esto, tendría yo un deseo enorme de saber cómo la introducción de estos indivisibles facilita la comprensión de lo que es la condensación y la rarefacción, evitando al mismo tiempo el vacío y la penetrabilidad de los cuerpos.

SAGR. Yo también tendría un deseo grande de oíros lo mismo, ya que resulta cosa muy oscura para mi entendimiento: De cualquier modo, no quisiera dejar de oír, conforme a lo que hace poco dijo el señor Simplicio, los argumentos de Aristóteles contra vacío y las soluciones que, en consecuencia, vos dais al problema, como es propio mientras admitáis lo que aquél niega.

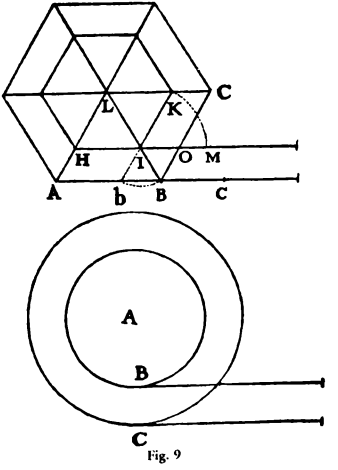


Fig. 9

SALV. Haremos las dos cosas. Por lo que a lo primero se refiere, es necesario que, así como en lo que a la rarefacción atañe nos servíamos de la línea descrita por el círculo más pequeño, línea mayor que circunferencia y obtenida cuando la revolución del más grande arrastra al menor, del mismo modo, en lo que a la condensación se refiere, hemos de mostrar cómo el círculo mayor, arrastrado por la revolución del pequeño, describe una línea recta menor que su circunferencia. Para que la explicación sea más clara, consideraremos primero lo que ocurre en el caso de los polígonos [figura 9].

[94] La figura es parecida a aquella que trazamos anteriormente.* Supongamos dos hexágonos que tengan un centro común, L. Llamemos a los hexágonos ABC y HIK, que a su vez tienen dos líneas paralelas, HOM y ABC, sobre las que se efectuarán las revoluciones. Dejando fijo el ángulo I del polígono más pequeño, se hará rotar tal polígono hasta que el lado IK caiga sobre la paralela, en cuyo movimiento el punto K describirá el arco KM y el lado KI coincidirá con el segmento IM. Veamos, entretanto, lo que hará el lado CB del polígono mayor. Al hacerse la revolución sobre el punto I, el segmento IB, con su extremidad B, describirá, girando hacia atrás, el arco B*b* bajo la paralela *c*A, de modo que cuando el lado KI coincida con MI, el lado BC se unirá con el segmento *bc*, habiendo avanzado un trecho igual a B*c* y yendo hacia atrás en una extensión igual a la cuerda que subtiende el arco B*b*, la cual; superpone a la línea BA.

Si el movimiento de rotación continúa de la misma forma, el polígono más pequeño recorrerá y describirá sobre su paralela una línea igual a su perímetro, mientras que el más grande recorrerá una línea inferior a su perímetro igual a la suma de tantas líneas *b*B cuantos lados tiene menos uno. Esta línea será aproximadamente igual a la descrita por el polígono más pequeño, superándola solamente en una longitud igual a *b*B. Áquí se descubre, pues, sin dificultad alguna la razón por la cual el polígono mayor (arrastrado por el más pequeño) no describe con sus lados una línea mayor que la descrita por el más pequeño. Y es que una parte de cada uno de sus lados se superpone al lado adyacente que le precede.

Pero si consideramos los dos círculos con centro en A, puestos sobre sus paralelas, y tocando el menor a la suya en punto B y el mayor a suya en el punto C, no tendrá lugar aquí el que el punto B permanezca inmóvil, en el momento [95] en el que el círculo menor comience su revolución, de modo tal que la línea BC, volviéndose hacia atras transporte el punto C, como ocurría con los polígonos. En éstos permanecía fijo el punto I hasta que el lado KI cayera sobre la línea IM, mientras que la línea IB llevaba hacia atrás, hasta *b*, el punto B, extremo del lado CB; de ahí que el lado BC cayera en *bc*, superponiendo a la línea BA la parte B*b* y avanzando hacia adelante solamente la parte B*c*, siendo ésta igual a IM esto es, a un lado del polígono menor. Como resultado de tales superposiciones, y que son aquello en lo que exceden los lados mayores a los menores, los adelantos que quedan, y que son iguales a los lados del polígono menor, llegan a componer, al término de una revolución completa, una recta igual a la recorrida y medida por el polígono menor.

Llegados a este punto, he de decir que si queremos aplicar el mismo razonamiento al caso de los círculos, habrá que señalar que si los lados de un polígono, sea el que sea, son determinados en número, los lados del círculo serán infinitos: aquéllos son extensos [*quanti*] y divisibles; éstos son inextensos [*quanti*] e indivisibles. Los extremos de los lados del polígono, durante la revolución, permanecen cierto tiempo sin moverse; es decir, un tiempo equivalente al de una revolución entera dividida por el número de lados del polígono. En el caso de los círculos, las detenciones de los extremos de sus infinitos lados son instantáneas [*momentanee*], ya que cada parte es un instante de un tiempo extenso [*quanto*], como es el caso de un punto de una línea, que a su vez contiene infinitos. Los regresos de los lados del polígono mayor, por su parte, no son iguales al lado entero, sino solamente a lo que sobra con relación al lado del más pequeño; adquiriendo por la parte anterior un espacio igual al lado del menor. En los círculos, el

* Véase *supra* la figura 5.

punto o lado C, durante el reposo instantáneo de la extremidad B, va hacia atrás en una longitud que es igual a lo que excede al lado B, yendo hacia adelante en una longitud igual a este mismo lado B. En suma, los lados infinitamente numerosos e indivisibles del círculo mayor, con sus infinitos e indivisibles retrocesos; efectuados durante los infinitamente numerosos instantes de reposo de los extremos infinitamente numerosos del círculo menor, y con sus adelantos infinitamente numerosos, iguales a los infinitos lados del círculo menor, componen y describen una línea que es igual a la descrita por el círculo menor. Esta contiene en sí misma superposiciones infinitas inextensas [*non quante*], las cuales producen una contracción y una condensación de las partes extensas [*quante*] sin que [96] haya entre ellas penetración alguna, cosa que sería imposible en una línea dividida en partes extensas [*quante*], como es el caso de cualquier polígono imaginable, el cual, si lo desarrollamos hasta convertirlo en una línea recta, no habría forma de acortarlo a no ser que superpusiéramos y compenetrásemos sucesivamente sus lados.

Esta condensación de partes no extensas aunque infinitas y sin penetración de partes extensas, así como lo que hemos dicho antes acerca de la distensión de los infinitos indivisibles con la interposición de vacío; indivisibles, creo que es lo más que se puede decir para dar razón de la condensación y de la rarefacción de los cuerpos, sin necesidad de tener que introducir la penetrabilidad de los cuerpos y espacios extensos [*quanti*] vacíos. Si lo que he expuesto es de vuestro agrado, tenedlo en cuenta; y si no, reputad la cosa vana, lo mismo que todo lo que yo he dicho, e id a buscar de otro una explicación más tranquilizante para vuestro entendimiento. Insisto solamente en estas dos palabras: nos encontramos entre los infinitos y los indivisibles.

SAGR. Que tal pensamiento sea sutil y original y nuevo a mis oídos, he de confesarlo claramente. Que además, la naturaleza proceda de tal guisa es cosa sobre la que no sabría decidir. Pero la verdad es que hasta el momento no he oído nada que me haya satisfecho del todo, y para no permanecer completamente mudo, me atendría a esta solución. Pero tal vez el señor Simplicio sepa darnos la explicación (cosa que hasta el momento a mí me ha sido imposible) que proponen los filósofos en materia tan abstrusa. Porque, a decir verdad, lo que yo he leído acerca de la condensación es, para mí, cosa tan densa y, lo que a la rarefacción se refiere, tan sutil, que mi frágil intuición es incapaz de comprender ésta y de penetrar en aquélla.

SIMP. Yo me encuentro totalmente confundido y veo serias dificultades tanto en un campo como en el otro; y de modo especial en éste en el que nos habéis colocado, porque, según vuestro criterio, una onza de oro podría rarificarse y dilatarse hasta adquirir un tamaño superior al de la misma tierra. Por otro lado, toda la tierra podría condensarse y reducirse a un volumen inferior a una nuez, cosa que me niego a creer y que me parece que ni siquiera vos creéis. Como por otra parte, las consideraciones y demostraciones que nos habéis presentado son cosas matemáticas, abstractas y separadas de la materia sensible, me parece que, aplicadas a las sustancias físicas y materiales, tampoco habrían de conformarse a vuestros principios.

SALV. Que veáis lo invisible es algo que ni yo sabría hacer ni pienso que lo pidáis. Pero en lo que atañe a lo que está a la altura de nuestros sentidos, y [97] ya que habéis nombrado el oro, ¿no veis, acaso, que es susceptible de extender inmensamente sus partes? No sé si habéis tenido la ocasión de ver cómo los artesanos hacen alambre del oro, que no es realmente de oro más que en la superficie, ya que el interior es de plata. Veamos cómo es el procedimiento: toman un cilindro o, si queréis, una varilla de plata de

una longitud aproximada de medio brazo y con un grosor de tres o cuatro veces el dedo pulgar. La doran con hojas de oro batido, que, como sabéis, son tan sutiles que flotan casi en el aire, y de tales hojas superponen no más de ocho o diez. Una vez dorado el cilindro, comienzan a tirar de él con fuerza enorme; haciéndolo pasar por los agujeros de la hilera; operación que repiten muchísimas veces, haciéndolo pasar por agujeros cada vez más estrechos, de modo que, después de que lo hayan pasado muchas veces, queda reducido a algo tan fino cómo el cabello de una mujer, si no más fino. A pesar de todo, en la superficie, sigue estando dorado. Dejo ahora a vuestra consideración, hasta qué punto de mínimo espesor se haya reducido la sustancia del oro.

SIMP. Yo no veo que de esta operación se siga un adelgazamiento de la materia del oro tal que resulten aquellas maravillas de las que hablábais. Porque, en primer lugar, el dorado inicial era de diez hojas de oro, cosa que representa ya un grosor notable. En segundo lugar, porque si bien es verdad que la plata estirada y hecha más fina crece en longitud, no es menos cierto que disminuye tanto en anchura que, compensando una dimensión con otra, no aumenta de tal modo la superficie como para que sea necesario reducir el oro a una finura superior a la de las hojas empleadas en un principio, al revestir la plata de oro.

SALV. Os engañáis con toda seguridad, señor Simplicio, porque el aumento de la superficie es directamente proporcional a la raíz cuadrada del alargamiento, como podría demostraros geométricamente.

SAGR. Por lo que a mí se refiere, y haciéndolo extensivo al señor Simplicio, os rogaría que nos dieseis tal demostración, si es que pensáis que podemos comprenderla.

SALV. Veré si, cogido tan de improviso, consigo recordarla. Para empezar, es evidente que el cilindro grande de plata y el larguísimo hilo estirado son dos cilindros [de volúmenes] iguales, al tratarse de la [98] misma plata; de modo que si os muestro qué proporción guardan entre sí las superficies de los cilindros iguales, habré alcanzado el objetivo. Afirmo, por lo tanto lo siguiente:

Las superficies de cilindros, iguales [en volumen], abstracción hecha de sus bases, están entre sí en una proporción igual a la raíz cuadrada de la proporción de sus longitudes.

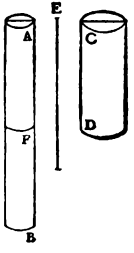


Fig. 10

Sean dos cilindros iguales [en volumen], de altura AB y CD [figura 10], y sea la línea E la media proporcional entre ellas. Digo que la superficie del cilindro AB, abstracción hecha de sus bases, está con la superficie del cilindro CD, abstracción hecha igualmente de sus bases, en la misma proporción que la línea AB con la línea E; o sea como la raíz cuadrada de la proporción de AB respecto a CD. Cortemos el cilindro AB por la parte F, y sea la altura AF igual a la altura CD; dado que las bases de los cilindros iguales están en razón inversa a sus alturas, el círculo de la base del cilindro CD será al círculo de la base del cilindro AB, como la altura de BA a la de DC. Y puesto que los círculos son entre sí como los cuadrados de los diámetros, dichos cuadrados tendrán entre sí la misma proporción que BA y CD; pero como BA es a CD, así el cuadrado de BA es al cuadrado de E. Son, por tanto, los cuatro cuadrados en cuestión proporcionales y, en consecuencia, también sus lados serán proporcionales; de modo que la recta AB es a la recta E, como el diámetro del círculo C al diámetro del círculo A.

Los diámetros, por su parte, están, entre sí, en la misma proporción, que las circunferencias, y las circunferencias, a su vez, como las superficies de los cilindros de la misma altura. Así pues, la superficie del cilindro CD es a la superficie del cilindro AF como la recta AB es a la recta E. Y, puesto que la altura AF es a la altura AB como la superficie del cilindro AF a la del cilindro AB, y, por otro lado, la superficie CD es a la superficie AF como la altura AB a la línea E, entonces, *per la perturbata*, la superficie CD será a la AB como la altura AF a la línea E. Invirtiendo los términos [*convertendo*]: la superficie del cilindro AB será a la del cilindro CD, como la línea E a la AF; es decir, a la línea CD, o también como la AB a la E. Esta última proporción es la raíz cuadrada de AB con respecto a CD, que es lo que había que probar.

Si aplicamos ahora a nuestro caso lo que acabamos de demostrar, suponiendo que el cilindro de plata que [99] se había dorado cuando no tenia más de medio brazo de longitud y un grosor no mayor de tres o cuatro veces el dedo pulgar, tras haberlo adelgazado hasta hacerlo tan fino como un cabello, se haya alargado hasta alcanzar la longitud de veinte mil brazos (sería incluso todavía más largo), nos encontramos con que su superficie ha llegado a ser doscientas veces más grande de lo que era. Se sigue de aquí que aquellas hojas de oro, que se superpusieron en número de diez, se extienden en una superficie doscientas veces mayor, de tal forma que el oro que recubre la superficies de tales brazas de hilo tiene un espesor no mayor que la vigésima parte de una hoja ordinaria de oro batido.

Considerad ahora cuán tenue ha de ser y si es posible concebirla sin una inmensa extensión de sus partes y preguntaos, igualmente, si no nos encontramos delante de una experiencia que nos hace suponer que los cuerpos físicos están compuestos de infinitos indivisibles. Por otro lado, no nos faltan otros hechos aún más fuertes y concluyentes.

SAGR. La demostración me ha parecido tan bella que, incluso si no hubiera sido capaz de alcanzar los objetivos para los que se la había destinado (capacidad que creo que posee en altísimo grado) de cualquier forma, se ha empleado estupendamente el breve tiempo que hemos necesitado para escucharla.

SALV. Ya que os agradan tanto este tipo de demostraciones geométricas, de las cuales se obtienen ganancias seguras, os presentaré otra más que está en relación estrecha con la precedente y que da satisfacción a una pregunta muy curiosa:

En la anterior, hemos visto lo que ocurre en el caso de cilindros del mismo volumen, pero con alturas o longitudes distintas. Veamos ahora lo que sucede en los cilindros de superficie igual, sólo que diferentes en altura. Sólo nos referiremos a las superficies que circundan a los cilindros; dicho de otra manera: prescindimos de las bases, tanto de la superior como de la inferior. Afirmo, por tanto, que:

Los cilindros rectos, cuyas superficies, abstracción hecha de las bases, son iguales, guardan entre sí la misma proporción que sus alturas tomadas inversamente. *

Sean [figura 11] iguales las superficies de los dos cilindros AE y CF, mientras que la altura de CD es mayor que la de AB. Digo que el [volumen del] cilindro AE tiene la misma proporción con respecto al cilindro CF que la altura CD con respecto a AB. Y puesto que la superficie CF es igual a la superficie AE, el cilindro CF será menor que el

* Véase Euclides, libro V, definición 20, edición de Todhunter, p. 137 (Londres, 1877).

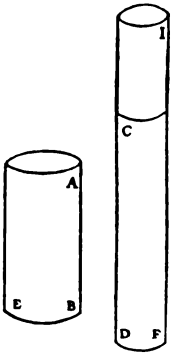


Fig. 11

cilindro AE, ya que si fuese igual, su superficie, en razón de la proposición precedente, sería mayor que [100] la superficie AE, y mucho mayor en el caso de que este mismo cilindro CF fuese más grande que el AE.

Supongamos ahora un cilindro ID, [de] igual [volumen] que AE. Según la proposición precedente, la superficie del ID será a la superficie del cilindro AE como la altura IF a la media proporcional de IF y AB. Pero siendo un dato del problema que la superficie AE es igual a la de CF, y teniendo las superficies de ID y CF la misma proporción que las alturas de IF y CD, se sigue que la altura CD es la media proporcional entre IF y AB. Además, al ser el cilindro ID [de] igual [volumen] que el cilindro AE, tendrán los dos la misma proporción con relación al cilindro CF. Pero ID es a CF como la altura IF a la altura CD. En consecuencia, el cilindro AE estará con respecto al cilindro CF en la misma proporción que la línea IF a la línea CD; es decir, que la línea CD a la AB, que es lo que se quería demostrar.

De aquí podemos colegir la razón de un hecho que suele causar estupor a la gente. Se trata de lo siguiente: si de un trozo de tela, más largo por un lado que por otro, se confecciona un saco con fondo de madera, como suele hacerse para meter dentro el trigo, entonces el saco tendrá más capacidad con sólo servirse de la siguiente treta: la parte más pequeña se la toma como altura mientras que utilizamos la parte más grande de la tela para rodear el fondo de madera. En caso contrario, la capacidad disminuiría. Supongamos, por ejemplo, que un lado de la tela midiese seis brazas mientras que el otro, doce. Pues bien, la capacidad del saco será mayor si se ciñe el fondo con la parte que mide doce brazas, dejando como altura la de seis brazas, que si se rodea el fondo con la de seis brazas, quedando la de doce como altura.

Ahora bien, de esta demostración, se sigue, además del conocimiento general de que por el primer procedimiento se le otorga al saco una capacidad mayor que por el segundo, el especial y particular conocimiento de la relación entre tales capacidades. A saber, la capacidad será tanto más grande cuanto más bajo sea el saco y tanto más pequeña cuanto más alto sea aquél. Así, siendo la tela, según las dimensiones que hemos supuesto, dos veces más larga que ancha, contendrá, cosida a lo largo, la mitad menos que si se la cose [101] en sentido contrario. Igualmente, si para hacer una cesta disponemos de una estera de una longitud de veinticinco brazas y de siete, por ejemplo, de ancha, no contendrá dicha cesta, doblada a lo largo sino siete veces la medida que, doblada en sentido inverso, contendría veinticinco veces.

SAGR. De este modo, y con gran placer, vamos adquiriendo continuamente nuevos conocimientos originales y no exentos de utilidad. Pero en lo que atañe a lo que acabáis de exponer, yo no creo realmente que entre las personas que carecen de cualquier conocimiento en geometría haya un cuatro por ciento que no se engañasen, en un primer momento, pensando que los cuerpos limitados por superficies iguales son exactamente iguales [en volumen]. Incurren en el mismo error cuando hablan de las superficies, ya que para evaluar, como ocurre con frecuencia, las extensiones relativas de diversas ciudades, piensan que saben suficiente si miden la extensión de su entorno, ignorando que dos recintos de la misma longitud pueden contener espacios tales que

uno es mayor que otro. Esto mismo no sólo ocurre con las superficies [de los polígonos] irregulares, sino también con las [de los] regulares. Así pues, los que tienen más lados tienen más capacidad que los que tienen menos. Así, y para acabar, el círculo, como polígono de lados infinitos, es más extenso en superficie que cualquier otro polígono de igual perímetro. Recuerdo haber visto esta demostración, con particular placer, estudiando la *Esferá* de Sacrobosco,* acompañada de un comentario muy documentado.

SALV. Ciertamente. También yo he conseguido dar con este pasaje y tuve ocasión de ver cómo, con una sola y breve demostración, se puede concluir que [102] el círculo es el más grande de todos los polígonos regulares isoperímetros; y por lo que a las otras figuras se refiere, las que tienen más lados son más grandes que las que tienen menos.

SAGR. Por lo que a mí respecta, me gustan tanto ciertas proposiciones y demostraciones selectas y nada triviales, que os pido, a riesgo de ser inoportuno, que me hagáis partícipe de ellas.

SALV. Con breves palabras os daré satisfacción, demostrando el siguiente teorema:

El círculo es media proporcional entre dos polígonos regulares cualquiera, semejantes entre sí, uno de los cuales le esté circunscrito y el otro le sea isoperímetro. Además, siendo [el área del círculo] menor que todos los circunscritos, aquellos que tienen más ángulos son menores que los que tienen menos e, inversamente, de todos los isoperímetros, los que tienen más ángulos son los mayores.

De dos polígonos iguales, A y B, sea A el polígono circunscrito al círculo A, siendo B isoperímetro [figura 12]. Afirmo que el círculo es media proporcional entre ellos. La razón es que, trazado el radio AC, el círculo es igual al triángulo rectángulo, uno de cuyos lados adyacente al ángulo recto es igual al radio AC mientras que el otro es igual a la circunferencia [del círculo]. Del mismo modo, el [103] polígono A es igual al triángulo rectángulo, uno de cuyos lados adyacentes al ángulo recto es igual a la recta AC y el otro al perímetro del mismo polígono.

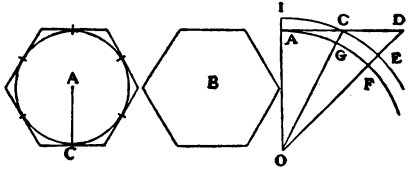


Fig. 12

Es evidente que el polígono circunscrito tendrá, con respecto al círculo, la misma proporción que tiene su perímetro con relación a la circunferencia del círculo; es decir, con respecto al perímetro del polígono B, que se supone igual a dicha circunferencia: Pero el área del polígono A es al área de B como el cuadrado del perímetro de A es el cuadrado del perímetro del mismo B (siendo, como son, figuras semejantes): El [área

* Joannes de Halifax o Holywood (Sacrobosco), vivió por el año 1230 y fue el autor de un manual bien construido, aunque elemental *De sphaera mundi* que obtuvo una gran difusión a partir del siglo XIII. Prueba de ello es que se hicieron de él unas treinta ediciones antes de 1500, pues se usaba como texto en las universidades.

del] círculo A, por lo tanto, es media proporcional entre los dos polígonos, A y B. Y, siendo el polígono A mayor que el círculo A, es evidente que tal círculo A es mayor que el polígono B, su isoperímetro y, en consecuencia, mayor que cualquiera de los polígonos regulares que sean isoperímetros suyos.

En cuanto a la otra parte de nuestro teorema, según la cual, de los polígonos circunscritos en un mismo círculo, el que tiene menos lados es mayor que el que tiene más, mientras que, inversamente, en los polígonos isoperímetros, el que tiene más lados es mayor que el que tiene menos lados, daremos la demostración que sigue.

En un círculo, cuyo centro es O y el radio OA, sea AD la tangente a dicho círculo. Supongamos que sobre esa tangente tomamos la longitud, AD, que será la mitad del lado del pentágono circunscrito, y una longitud, AC, que será la mitad del lado del heptágono. Tracemos las rectas OGC y OFD y, siendo el centro O y OC el radio, describamos el arco ECI. Dado que el triángulo DOC es más grande que el sector EOC, mientras que el sector COI es mayor que el triángulo COA, el triángulo DOC estará con respecto al triángulo COA en una proporción mayor que el sector EOC al sector COI, es decir, que el sector FOG al sector GOA; y *componendo et permutando*,* el triángulo DOA guarda mayor proporción con el sector FOA que el triángulo COA con el sector GOA. Y diez triángulos DOA, por su parte, mantendrán mayor proporción con respecto a diez sectores FOA, que catorce triángulos COA respecto a catorce sectores GOA; dicho de otra manera: el pentágono circunscrito tendrá mayor proporción con el círculo que la que tiene el heptágono; de lo que se desprende que el pentágono será mayor que el heptágono.

Imaginémonos, ahora, un heptágono y un pentágono del mismo perímetro que el propio círculo. Digo que el heptágono tiene un área mayor que la del pentágono. En efecto, siendo el área del círculo media [104] proporcional entre el pentágono circunscrito y el pentágono isoperímetro; e igualmente, entre el heptágono circunscrito y el isoperímetro, y habiéndose probado que el pentágono circunscrito es mayor que el heptágono circunscrito, tal pentágono estará, con respecto al círculo, en una relación mayor que el heptágono; es decir, el círculo estará, respecto de su pentágono isoperímetro, en relación mayor que con respecto a su heptágono isoperímetro. El pentágono, por tanto, es más pequeño que el heptágono isoperímetro, que es lo que se tenía que demostrar.

SAGR. Bellísima demostración y muy aguda. Pero ¿cómo hemos ido perdiéndonos en los abismos de la geometría, mientras estábamos considerando las objeciones propuestas por el señor Simplicio? Estas objeciones son todas muy dignas de consideración; de modo muy especial, la que se refiere a la condensación me parece dificilísima.

SALV. Si la condensación y la rarefacción son dos movimientos opuestos, hemos de convenir que, en el caso de que se dé una inmensa rarefacción, no se podrá negar una condensación no menos grande. Ahora bien, rarefacciones inmensas y —cosa que acentúa nuestra estupefacción— casi instantáneas, las vemos a cualquier hora del día. Cuando una pequeña cantidad de pólvora, en un disparo de artillería, se convierte en un volumen de fuego enorme, ¿no nos encontramos delante de una rarefacción sin límite? Y ¿qué decir, por otro lado, de la expansión, casi me atrevería a decir ilimitada, de su resplandor? Y si aquel fuego y este resplandor se juntasen, cosa que no es imposible, ya que antes se encontraban dentro de un pequeño espacio, ¿qué tipo de condensación tendríamos en este caso? Encontraréis, con sólo que penséis un poco, mil y una de tales ra-

* *Componendo* quiere decir aquí sumar a los numeradores de ambos términos de la desigualdad sus denominadores. *Permutando* quiere decir intercambiando los medios.

refacciones, las cuales se prestan, por otro lado, a ser observadas mucho mejor que las condensaciones, ya que las materias densas son más accesibles y están más al alcance de nuestros órganos. En este sentido, somos capaces de [105] manipular las maderas y de ver cómo se transforma en fuego y en luz, pero no vemos, sin embargo, que el fuego y la luz se condensen hasta constituirse en madera. Vemos que los frutos, las flores y otros muchos objetos sólidos transforman en aroma gran parte de su sustancia, pero no vemos, por su parte, que los átomos olorosos se reúnan para formar los sólidos correspondientes. Allí, sin embargo, donde la experiencia se revela impotente, hemos de recurrir a la razón; ella bastará para hacernos comprender no sólo el proceso de la rarefacción y resolución de los sólidos, sino también el de la condensación de sustancias muy tenues y rarificadas.

Trataremos también de estudiar cómo se realizan las condensaciones y rarefacciones de los cuerpos —de los que pueden condensarse y rarificarse— estudiando la manera según la cual pueden producirse tales fenómenos sin tener que introducir nociones tales como la del vacío y la de la penetrabilidad de los cuerpos; lo cual no excluye que, en la naturaleza, puedan existir cuerpos que no admitan tales accidentes, no dando lugar, consecuentemente, a lo que vos llamáis inconvenientes e imposibles. Y para acabar, señor Simplicio, me he tomado el trabajo, por condescender con los filósofos, de discurrir para entender de qué manera puedan darse los fenómenos de la condensación y de la rarefacción sin tener que recurrir al vacío y a la penetrabilidad de los cuerpos, efectos que vos negáis y aborrecéis, aunque, por mi parte, si vos los aceptáis, yo no me opondré con tanto empeño. Por eso os pido que o bien aceptéis los inconvenientes reseñados, o bien estéis de acuerdo con mis argumentaciones o bien encontréis otras más pertinentes.

SAGR. Por lo que se refiere a la negación de la penetrabilidad, yo estoy totalmente de acuerdo con los filósofos peripatéticos. En cuanto al vacío, me gustaría escuchar la demostración que da Aristóteles, así como su refutación; y también lo que vos, señor Salviati, le objetáis. El señor Simplicio me hará el favor de exponernos con todo detalle la prueba del Filósofo, y vos, señor Saviati, le responderéis.

SIMPL. Aristóteles, al menos en lo que yo recuerdo, arremete contra ciertos filósofos antiguos, quienes recurrían al vacío por considerarlo necesario para el movimiento, diciendo que éste no podría darse sin aquél. Aristóteles les replica demostrando que, muy al contrario, al tener lugar el movimiento (tal como veremos) es el vacío lo que hay que descartar. Su razonamiento discurre así: hace dos suposiciones, una de las cuales trata de los móviles con pesos diferentes, que se mueven en el mismo medio y la otra, de un mismo móvil moviéndose en medios diferentes. [106] Por lo que a la primera se refiere, supone que los móviles de peso diferente se mueven en el mismo medio con velocidades distintas, las cuales mantienen entre sí la misma proporción que sus pesos respectivos. De modo que, por ejemplo, un móvil diez veces más pesado que otro, se mueve con una velocidad diez veces mayor. En el segundo caso, parte del principio de que las velocidades de un mismo móvil, en medios diferentes, son inversamente proporcionales al espesor o densidad de tales medios. De modo que si suponemos, por ejemplo, que la densidad del agua es diez veces superior a la del aire, la velocidad en el aire, siempre según Aristóteles, sería diez veces mayor que la velocidad en el agua. Y de esta segunda suposición deriva lo siguiente: dado que lo tenue del vacío supera infinitamente la corporeidad, por muy sutil que sea, de cualquier medio pleno, todo móvil que se mueva en este medio pleno durante cierto tiempo, recorriendo cierto espacio, debe-

ría moverse por el vacío en un solo instante. Ahora bien, el movimiento instantáneo es imposible, luego es imposible que se dé el vacío como fundamento del movimiento.

SALV. Se ve que el argumento es *ad hominem*; es decir, contra los que hacían del vacío condición necesaria del movimiento, de modo que si yo concediera que el argumento es concluyente, concediendo al mismo tiempo que el movimiento no tiene lugar en el vacío, la hipótesis del vacío, tomada absolutamente y no en relación al movimiento, no queda, sin más, eliminada. Pero para decir aquello que podrían haber respondido esos filósofos antiguos, y a fin de que se vea mejor hasta qué punto es concluyente la demostración de Aristóteles, creo que podrían atacarse los dos supuestos negándolos simplemente. En lo que atañe al primero, dudo seriamente que Aristóteles haya hecho la experiencia consistente en tomar dos piedras, una de las cuales es diez veces más pesada que la otra, para dejarlas caer al mismo tiempo desde una altura, pongamos de cien brazas, y ver si descienden con velocidades tan diferentes que en el momento en que una está tocando el suelo, nos encontremos con que la otra no ha recorrido ni siquiera diez brazas.

SIMP. De sus mismas palabras se deduce, sin embargo, que él lo ha experimentado, ya que dice: «Vemos el más pesado». Ahora bien, tal *verse* alude a una experiencia llevada a cabo.

SAGR. Yo, sin embargo, señor Simplicio, que no [107] he hecho la prueba, os aseguro que una bala de cañón que pese cien, doscientas o más libras, no aventajará ni siquiera en un palmo en su llegada al suelo, a una bala de mosquete de media libra, aunque la altura de la caída sea de doscientas brazas.

SALV. Sin recurrir a otras experiencias, podremos probar claramente, sin embargo, con una demostración breve y concluyente, que no es verdad que un móvil más pesado se mueva a más velocidad que un móvil más liviano, con tal de que ambos sean de la misma materia, como es el caso, sin duda, de aquellos de los que habla Aristóteles. Pero decidme antes, señor Simplicio, si admitís que a todo cuerpo pesado en caída libre le corresponda una velocidad determinada, de modo tal que no se pueda aumentar o disminuir a no ser que le hagamos violencia o le pongamos alguna resistencia.

SIMP. Está fuera de toda duda que el mismo móvil en el mismo medio tiene una velocidad reglamentada y determinada por la naturaleza, la cual no podrá aumentarse a no ser por un impulso [*impeto*] nuevo ni disminuirse si no es recurriendo a algo que la obstaculice y la retarde.

SALV. Entonces, si nosotros tuviéramos dos móviles, cuyas velocidades naturales fuesen distintas, es evidente que si uniésemos ambos, el más rápido perdería velocidad por obra del más lento, mientras que éste aceleraría debido al más rápido. ¿Estáis de acuerdo con lo que acabo de decir?

SIMP. Me parece que las cosas deben, ciertamente, suceder así.

SALV. Pero si esto es así, y si es verdad, por otro lado, que una piedra grande se mueve, por ejemplo, con una velocidad de ocho grados y una piedra pequeña, con una velocidad de cuatro, si las unimos, el resultado de ambas, según lo dicho, será inferior a ocho grados de velocidad. Ahora bien, las dos piedras juntas dan por resultado una más grande que la primera que se movía con ocho grados de velocidad; de lo que se sigue que tal compuesto se moverá a más velocidad [108] que la primera de las piedras sola, lo cual contradice vuestra hipótesis. Veis, pues, cómo suponiendo que el móvil más pesado se mueve a más velocidad que el que pesa menos, concluyo que el más pesado se mueve a menos velocidad.

SIMP. Yo me encuentro completamente ofuscado, pues me parece que la piedra más pequeña unida a la mayor le da más peso, y no consigo explicarme cómo dándole más peso, no deba sumarle velocidad o, al menos, no disminuírsela.

SALV. En este punto volvéis a cometer otro error, señor Simplicio, porque no es cierto que la piedra más pequeña aumente el peso de la mayor.

SIMP. ¡Esto está fuera de mi alcance!

SALV. Estará a vuestro alcance cuando os haga ver el equívoco en el que os encontráis metido. Notad, ante todo, que hay que distinguir los cuerpos graves en movimiento de los mismos en estado de reposo. Una piedra grande, colocada sobre una balanza, no solamente pesará más si se le añade otra piedra, sino que con adjuntarle sólo una brizna de estopa; aumentará su peso las ocho o diez onzas del peso de la estopa. Pero si, por el contrario, dejáis caer libremente, desde cierta altura, la piedra y, atada a ella, la estopa ¿creéis que el peso de la estopa, añadido al de la piedra, acelerará el movimiento de ésta o más bien que lo que hará es disminuir su velocidad, sosteniéndola en parte? Sentimos sobre nuestras espaldas el peso de un objeto cuando intentamos oponernos al movimiento que sé produciría si cayese, pero si somos nosotros mismos los que descendemos a la velocidad a la que caería de modo natural dicho cuerpo ¿creéis que se nos echaría encima y sentiríamos su peso? ¿No veis que esto sería como querer herir de una lanzada a alguien que huyera delante de nosotros a la misma velocidad o más rápido que nosotros mismos? Sacad la conclusión, por tanto, de que en la caída libre y natural, la piedra más pequeña no presiona con su peso a la mayor y, consecuentemente, no le añade peso alguno, como sería el caso en estado de reposo.

SIMP. ¿Y si se posase la piedra mayor sobre la pequeña?

[109] SALV. Aumentaría el peso de la otra si su movimiento fuese más rápido. Pero hemos visto ya de modo concluyente que si la más pequeña fuese más lenta, reduciría un tanto la velocidad de la mayor, de forma que la suma de ambas daría por resultado una caída menos veloz, a pesar de ser más grande, cosa que va contra vuestra suposición. Concluyamos, por tanto, que los móviles, grandes o pequeños, se mueven a la misma velocidad si tienen el mismo peso específico [*gravità in spezie*].

SIMP. Vuestro razonamiento está, realmente, bien trabado. De cualquier forma, me resulta difícil creer que una gota de plomo pueda moverse a la misma velocidad que una bala de cañón.

SALV. Deberíais decir, más bien: y un grano de arena a la misma velocidad que una rueda de molino. No quisiera yo, señor Simplicio, que hiciérais como otros muchos y que, dislocando nuestro razonamiento de su objetivo principal, os agarráseis a algo que yo he dicho y que se aparte de la verdad tanto como el espesor de un cabello, queriendo esconder bajo tal cabello el error, del tamaño de una soga, cometido por otro. Aristóteles dice: «Una bola de hierro de cien libras, que cae de una altura de cien brazas, llega al suelo antes de que una bola de una libra haya descendido una sola braza». Yo, por mi parte, afirmo que las dos llegarán al mismo tiempo. Si hacéis la experiencia, podéis constatar que la más grande saca a la más pequeña una ventaja de dos dedos solamente; es decir, que en el momento en que la más grande toca el suelo, la otra está a una distancia de dos dedos. Estando así las cosas, ¿querríais esconder las noventa y nueve brazas de Aristóteles debajo de aquellos dos dedos y, poniendo de relieve mi pequeño error, pasar por alto aquel otro descomunal?

Afirma Aristóteles que móviles de diferente gravedad se mueven, en el mismo medio (en cuanto que su movimiento depende de la gravedad) con velocidades proporcio-

nales a sus pesos y lo ejemplifica por medio de móviles en los que considera; pura y simplemente, el efecto del peso, dejando de lado cualquier otra consideración, tanto en lo que atañe a las figuras como a los momentos [*momenti*] mínimos, cosas sobre las que el medio influye grandemente, alterando de esta manera el simple efecto de la gravedad. Por esa razón vemos que el oro, más pesado que cualquier otra materia, flota en el aire cuando se reduce a finísimas hojas. Lo mismo ocurre con las piedras molidas cuando se las convierte en un polvo muy sutil.

Pero si lo que pretendéis es dar a vuestra proposición [110] un valor universal, os es necesario demostrar que la proporción entre las velocidades se puede observar en todos los graves y que una piedra de veinte libras se mueve con una velocidad diez veces mayor que una piedra de dos libras. Ahora bien, yo os digo que esto es falso y que, cayendo de una altura de cincuenta o cien brazas, llegan al suelo al mismo tiempo.

SIMP. Tal vez si se tratara de alturas enormes de millares de brazas se seguiría aquello que en estaturas menores no se ve que ocurra.

SALV. Si Aristóteles lo hubiera entendido así, vos le echaríais encima un error más, que sería, a su vez, una mentira. Porque al no darse en tierra tales alturas verticales, es obvio que Aristóteles no podría haber realizado la experiencia, queriéndonos persuadir de haberla llevado a cabo, si dice que es posible observar tal efecto.

SIMP. En realidad, Aristóteles no se sirve de este principio, sino más bien del otro que, a mí criterio, no está expuesto a las mismas objeciones.

SALV. El otro principio no es menos falso que éste, y no dejo de maravillarme que vos mismo no os deis cuenta de su falsedad. Debíais de daros cuenta de que, si fuese verdad que el mismo móvil, en medios de diferente sutilidad y rarefacción, en suma; de diversa consistencia, como son, por ejemplo, el agua y el aire, se desplazase en el aire con una velocidad mayor que en el agua, según la proporción de la rarefacción del aire y de la del agua, se seguiría que cualquier móvil que descendiese a través del aire lo haría también a través del agua; lo cual es falso, ya que muchísimos cuerpos descienden en el aire mientras que en el agua no sólo, no descienden sino que emergen hacia la superficie.

SIMP. Yo no llego a captar la necesidad de vuestra consecuencia. Además, he de decir que Aristóteles se refiere a aquellos cuerpos que descienden tanto en un medio como en el otro, y no a los que descienden en el aire mientras que en el agua emergen.

SALV. Vos aportáis al filósofo una serie de defensas que él se guardaría muy bien de utilizar para no [111] agravar su primer error. Pero, decidme, si la consistencia del agua, o cualquier cosa que retrase el movimiento, guarda una proporción determinada con la consistencia del aire, que lo demora menos; y en caso de que se dé tal proporción, asignadle el valor que os plazca.

SIMP. Se da. Pongamos, ahora, que sea en una proporción de diez a uno y que, por tanto, la velocidad de un cuerpo que desciende en ambos elementos, tendrá una velocidad diez veces menor en el agua que en el aire.

SALV. Tomemos ahora uno de esos cuerpos que caen en el aire, pero no en el agua, como será el caso de una bola de madera. Os pido que le asignéis la velocidad de caída en el aire que más os guste.

SIMP. Demos a tal velocidad un valor de veinte grados.

SALV. Perfectamente. Es evidente que tal velocidad puede tener, con respecto a cualquier otra más pequeña, la misma proporción que la consistencia del agua con respecto a la del aire, siendo ésta una velocidad de solamente dos grados; de modo que, en buena lógica; conforme a la regla de Aristóteles, se debería concluir que la bola de ma-

dera que, en el aire, medio cuya resistencia es diez veces menor que la del agua, desciende a una velocidad de veinte grados, en el agua debería descender a dos grados sin subir desde el fondo a la superficie que es lo que realmente ocurre. A no ser que quisierais decir que el ascenso a la superficie de la madera en el agua, es lo mismo que descender a una velocidad de dos grados, cosa que yo no creo. Pero si la bola de madera no cae al fondo, supongo que me concederéis que podríamos encontrar otra bola de una sustancia distinta a la de la madera que descendiera en el agua a una velocidad de dos grados.

SIMP. Naturalmente que podría encontrarse, pero de una materia mucho más pesada que la madera.

SALV. Ahí es adonde quería llegar yo. Pero esta segunda bola, que en el agua desciende a una velocidad de dos grados, ¿a qué velocidad descenderá en el aire? Es necesario (si queréis respetar el axioma de Aristóteles) que respondáis que su velocidad será de veinte grados. Ahora bien, veinte grados de velocidad es la que habéis asignado vos mismo a la bola de madera, por lo que ésta y la otra, mucho más pesada, se moverán en el aire a la misma velocidad. Pero, ¿cómo hará concordar el filósofo esta conclusión con aquella otra, también suya, de que los móviles de peso diferente se mueven en el mismo medio a distinta velocidad, siendo la diferencia proporcional a sus pesos? Además, sin recurrir a profundas consideraciones, [112] ¿cómo es que no habéis observado alguna vez ciertos accidentes muy corrientes y palpables y cómo es que no os habéis dado cuenta de que, dados dos cuerpos, uno de los cuales se mueve en el agua a una velocidad cien veces mayor que el otro, en el aire se mueve a una velocidad que no supera en una centésima a la del otro? Así, por ejemplo, un huevo de mármol, que descenderá en el agua a una velocidad cien veces mayor que un huevo de gallina, si lo dejamos caer junto con éste en el aire desde una altura de veinte brazas, no le sacará una distancia superior a cuatro dedos. Aquel cuerpo, en suma, que tardará tres horas para llegar hasta el fondo en diez brazas de agua, atravesará diez brazas de aire en el tiempo que dura una o dos pulsaciones, mientras que otro cuerpo (como sería, por ejemplo, una bola de plomo) las atravesará en un tiempo fácilmente menor del doble.

Pienso que llegados a este punto, señor Simplicio, comprenderéis que no hay lugar para más distinciones u objeciones. Lleguemos a la conclusión, por lo tanto, de que el argumento de Aristóteles contra el vacío no es válido. De concluir algo sería esto: la imposibilidad de espacios vacíos notablemente grandes, los cuales ni yo supongo ni creo que los antiguos supusieran que se daban en la naturaleza, aunque se podrían producir violentamente, como parece seguirse de diversas experiencias, que nos llevaría demasiado lejos en este momento enumerar.

SAGR. Aprovecharé la ocasión de que el señor Simplicio calla para decir yo, por mi parte, alguna cosa. Acabáis de demostrar con toda claridad cómo no es cierto que móviles de distinto peso se muevan en el mismo medio con velocidades proporcionales a sus pesos, sino, más bien, con la misma velocidad, con tal de que estos cuerpos sean de la misma sustancia o, al menos, del mismo peso específico y no (me parece a mí) de pesos específicos diferentes (porque no [113] pienso que vuestra intención fuese probarnos que una bala de corcho cae a la misma velocidad que una bala de plomo). Habéis demostrado también con toda evidencia que no es verdad que el mismo móvil, en medios de distinta resistencia, presente una rapidez o lentitud con la misma proporción que aquellas resistencias. Sería muy grato para mí escuchar cuáles son las proporciones observadas tanto en un caso como en el otro.

SALV. Bellos problemas son éstos, en los que he pensado muchas veces. Os diré lo que pensé al respecto y lo que saqué en limpio. Después de haberme asegurado de que no es cierto que el mismo móvil, en medios de diferente resistencia, se mueva a una velocidad proporcional a la penetrabilidad de dichos medios ni que, en el mismo medio, móviles de distinto peso mantengan entre sus velocidades la misma proporción que entre sus pesos (me refiero aquí a pesos específicos diferentes) comencé a poner en relación estos dos tipos de sucesos y a observar qué es lo que ocurriría con móviles de diferente peso, colocados en medios con resistencias distintas. Pude comprobar entonces que la desigualdad de las velocidades era siempre, en los medios más resistentes, mayor que en los más penetrables y, en un grado tal, que dos móviles que descendieran en el aire diferirán poquísimo en su velocidad de caída, mientras que en el agua, el uno se moverá a una velocidad diez veces mayor que el otro. Más aún, habrá algún móvil que descienda rápidamente en el aire y que no sólo no descienda en el agua, sino que permanezca inmóvil del todo o incluso que se desplace de abajo hacia arriba; y es que podrá, encontrarse algún tipo de madera o algún nudo o raíz que permanezca en reposo en el agua, aunque en el aire descienda rápidamente.

SAGR. Muchas veces he intentado, con no poca paciencia, dar a una bola de cera; que por sí misma no cae al fondo, un peso que sea equivalente al del agua, añadiéndole una cierta cantidad de granos de arena, a fin de que dicha bola permaneciese inmóvil en el agua. Jamás, por mucho que lo intentase, pude conseguirlo. De ahí que me pregunte si existe algún cuerpo sólido lo suficientemente similar al agua en gravedad como para que, por naturaleza, una vez colocado en el agua, pueda quedar suspendido en cualquier lugar.

SALV. En esto, como en tantas otras operaciones, son bastante más hábiles muchos animales que nosotros. Y, en vuestro caso, los peces hubieran podido haberos enseñado, al estar tan capacitados en este ejercicio, que pueden, a su arbitrio, encontrar un punto de equilibrio, no sólo en un cierto tipo de agua, sino en aguas realmente distintas, bien sea por su propia [114] naturaleza o porque estén más o menos turbias o saladas, lo que introduce diferencias bastante notables. Se equilibran, digo, de una manera tan exacta que, sin hacer el menor movimiento, permanecen quietos en cualquier sitio. Lo consiguen, creo yo, sirviéndose del instrumento del que para tal fin les ha sido dado por la naturaleza; esto es, sirviéndose de aquella vesícula que tienen en el cuerpo y que, por un conducto bastante estrecho, llega hasta su boca. De este modo, según sus necesidades, expulsan una parte del aire contenido en dicha vesícula o, por el contrario, nadando hasta la superficie, aspiran cierta cantidad de aire, haciéndose de este modo más o menos pesados que el agua y equilibrándose a su gusto.

SAGR. Con otra artimaña conseguí yo engañar a algunos amigos, delante de los cuales presumí de haber colocado la bola de cera en perfecto equilibrio con el agua. Habiendo colocado en el fondo del vaso una parte de agua salada y encima de ésta el agua dulce les mostré la bola que permanecía inmóvil a media altura, mientras que, empujada hacia el fondo o colocada en la superficie, en ninguno de los dos sitios permanecía, sino que volvía a la zona del medio.

SALV. Esta experiencia no está exenta de utilidad, ya que los médicos, cuando se ocupan de las diversas cualidades del agua y, entre éstas, de modo especial de distinguir la mayor o menor ligereza o peso de ésta o aquélla, se sirven de una bola semejante, ajustada de tal modo, que quede ambigua, por decirlo de alguna manera, en lo que a la ascensión o descenso se refiere. Por mínima que sea la diferencia de peso entre las dos

aguas, la bola descenderá en una mientras que subirá en la otra. Esta experiencia es tan exacta que si añadimos dos granos de sal solamente a seis libras de agua, bastará para que suba hasta la superficie la bola que antes había caído hasta el fondo. Os diré más aún: para confirmaros de la exactitud de esta experiencia y para daros, al mismo tiempo, una prueba evidente de que el agua no opone resistencia alguna a la división de sus partes, os diré que efecto semejante puede obtenerse, no solamente aumentando su densidad mezclando el agua con alguna sustancia más pesada, sino también calentándola y enfriándola tan sólo un poco; con una operación tan mínima como es el infundir cuatro gotas de otra agua un poco más caliente o un poco más fría en seis libras de agua se conseguirá que la bola suba o baje. La bola [115] descenderá si se ha echado agua más caliente y subirá si la infusión ha sido de más fría. Ved ahora hasta qué punto se engañan aquellos filósofos que quieren poner en el agua viscosidad o cierta adherencia de partes que la hiciera resistente a la división y a la penetración.

SAGR. He leído argumentos muy concluyentes acerca de este tema en un tratado de nuestro académico.* Me queda, sin embargo, un escrúpulo nada despreciable y del que no soy capaz de desprenderme. Y es que si no existe ninguna resistencia o cohesión entre las partes del agua, ¿cómo se pueden sostener esas grandes y abultadas gotas de agua, especialmente sobre las hojas de las coles, sin aplanarse y deslizarse?

SALV. A pesar de que no hay la menor duda de que quien ha obtenido una conclusión verdadera puede dar solución a todas las objeciones que se le pongan, no seré tan arrogante como para considerarme capaz de hacerlo. Pero tampoco mi impotencia debe arrojar sombras sobre el resplandor de la verdad. He de confesar, ante todo, que yo tampoco sé cómo puedan sostenerse esos glóbulos de agua a pesar de su tamaño y su relieve, pero sí sé con certeza que no deriva de la cohesión interna de sus partes. De donde se sigue que la causa de tal efecto hay que buscarla fuera.

Que la causa no sea interna puedo demostrarlo, además de con las experiencias ya vistas, con otra de una enorme eficacia. Si las partes de esa gota de agua que se sostiene alzada mientras está rodeada de aire tuvieran una razón interna para obrar así, con mucha mayor razón se sostendrían si se tuvieran rodeadas por un medio en el que tuvieran menos propensión a descender que en el aire que las envuelve. Ahora bien, un medio tal sería cualquier fluido más pesado que el aire, como, por ejemplo, es el vino. Se podría, pues, echar vino alrededor de aquella gota de agua, sumergiéndola con la elevación cada vez mayor del nivel del vino sin que las partes del agua, aglutinadas por la viscosidad interna, tuvieran que disociarse. Ahora bien, no es esto lo que en este caso ocurre, sino todo lo contrario: apenas el vino que se ha vertido toque la gota de agua, ésta, sin esperar que suba mucho su nivel, se disolverá y se extenderá, quedando debajo del líquido que se le ha echado si es éste vino tinto. La causa buscada es, pues, externa y tal vez haya que achacar tal efecto al aire que lo rodea.

En realidad, se observa, entre el aire y el agua, un gran desacuerdo, cosa que he constatado a través de otra experiencia. Se trata de lo siguiente: si lleno de agua un globo de cristal en el que se ha hecho un agujero tan pequeño como el grosor de una paja

* Sin duda se trata de una alusión a la obra de Galileo, *Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua o che in quella si muovono* (1612). En ese tratado inicia, tras los hallazgos del *Sidereus nuntius*, su ataque demoledor contra el marco conceptual aristotélico comenzando por oponer a las proporcionalidades aristotélicas las diferencias de densidades. También se menciona allí el problema de las gotas de agua abordado en el texto un poco más adelante, llegando a tomar en consideración algo así como un cierto efecto de tensión superficial de los líquidos.

[116] y si, una vez lleno, lo vuelco con el agujero hacia abajo, el agua, a pesar de su peso y prontitud para descender en el aire, y el aire, igualmente dispuesto a elevarse en el agua dada su extrema ligereza, no se ponen de acuerdo, la una para caer, saliendo por el orificio, y el otro para subir, entrando por el mismo. Por el contrario, permanecen, más bien, los dos hostiles y desconfiados. Si presento, por el contrario, a aquel orificio un vaso con vino tinto, que es en una medida casi insensible más ligero que el agua, lo veremos inmediatamente elevarse lentamente a través del agua en forma de trazos rojizos, mientras que el agua, con la misma lentitud, descenderá por el vino sin mezclarse hasta que el globo esté completamente lleno de vino, por lo que el agua caerá toda al fondo del vaso colocado debajo. Por todo ello, ¿qué otra cosa decir, que se pueda concluir de lo dicho, sino que hay una incompatibilidad entre el agua y el aire, misteriosa para mí, aunque tal vez...?

SIMP. Me dan ganas de reír al ver la antipatía que el señor Salviati tiene por la palabra antipatía, que ni siquiera la nombra, siendo tan apropiada para resolver la dificultad.

SALV. Pues bien, si así le place al señor Simplicio que sea ésta la solución a nuestra duda, y sin dilatarnos más en nuestras digresiones, volvamos a nuestro propósito. Hemos visto ya que las diferencias de velocidad de los móviles con pesos distintos son cada vez mayores a medida que los medios atravesados ofrecen más resistencia. Más aún, en el mercurio, el oro no solamente cae hasta el fondo a más velocidad que el plomo, sino que es él sólo el que desciende, mientras que los otros metales y las piedras todas permanecen en la superficie flotando. En las bolas de oro, de plomo, de cobre, de pórfido y de otras materias pesadas, sin embargo, será casi insensible la diferencia de sus velocidades en el aire ya que una bola de oro, al cabo de una caída desde una altura de cien brazas, no aventajará, con toda seguridad, a una bola de cobre en cuatro dedos. Habiendo visto, repito, todo esto, yo llegaría a la conclusión de que si se eliminara absolutamente la resistencia del medio, todos los cuerpos descenderían a la misma velocidad.

SIMP. Esto es mucho decir, señor Salviati. Yo no creeré jamás que en el vacío mismo, si en él fuese posible el movimiento, un copo de lana se mueva a la misma velocidad que un trozo de plomo.

SALV. Despacio, señor Simplicio. Ni vuestra dificultad es tan difícil de percibir ni yo tan poco perspicaz como para no haberme dado cuenta de ella, por lo que he tratado, consecuentemente, de buscarle [117] solución. Voy, en fin, a explicarme y vos me comprenderéis si queréis prestarme atención. Estamos intentando investigar lo que les ocurriría a móviles con pesos muy diferentes en un medio cuya resistencia fuese nula, de modo que cualquier diferencia de velocidad que tuviera lugar entre dichos móviles, habría que ponerla en relación, únicamente, con la desigualdad de sus pesos. Solamente un espacio completamente vacío de aire y de cualquier otro cuerpo, por muy sutil y penetrable que fuese, sería capaz de mostrarnos, sin ningún género de dudas, aquello que andamos buscando. Pero, ya que no disponemos de un espacio semejante, observemos qué es lo que ocurre en los medios más sutiles y menos resistentes, poniéndolo en relación con lo que ocurre en los medios menos sutiles y más resistentes. Si llegamos a constatar, efectivamente, que los móviles de diferentes pesos se mueven a velocidades cada vez menos distintas entre sí a medida que los medios atravesados son cada vez menos resistentes, y que, finalmente, en el medio más tenue de todos, aunque no sea todavía el vacío, la desigualdad de las velocidades entre móviles con pesos extremadamente desiguales es pequeñísima y casi inobservable, me parece que podremos

admitir como conjetura altamente probable que en el vacío sus velocidades serían absolutamente iguales.

Consideremos, pues, lo que sucede en el aire. Aquí, a fin de que dispongamos de un cuerpo cuya superficie esté bien determinada y sea de una materia ligerísima, tomaremos, para nuestro propósito, una vejiga hinchada, en donde el aire que hay dentro pesará nada o casi nada en un medio compuesto de aire, ya que poco se podrá comprimir. Así pues; el peso de esta vejiga se reducirá sólo al peso de una membrana muy fina que no equivaldrá siquiera a la milésima parte del peso de un volumen de plomo del mismo tamaño que la vesícula hinchada. Estos dos objetos, señor Simplicio, dejados caer desde una altura de cuatro o seis brazas, ¿qué ventaja pensáis que sacará en su caída el plomo a la vesícula? Tened la seguridad que su ventaja no será el triple, ni siquiera el doble, aunque vos la supondríais mil veces más veloz.

SIMP. Pudiera ser que al comienzo de la caída (es decir, en las primeras cuatro o seis brazas) ocurriese lo que acabáis de decir; pero, más adelante, si el movimiento se prolongase suficientemente, me parece que el plomo dejaría detrás de sí a la vejiga no sólo, de doce partes del espacio, seis, sino ocho o diez también.

SALV. Lo mismo creo yo, y no dudo de que en [118] distancias enormes el plomo podría haber recorrido cien millas antes que la vesícula hubiera recorrido una sola. Pero esto, señor Simplicio de mi alma, que presentáis como una objeción a mi proposición, es, por el contrario, lo que más la confirma. Mi intención (vuelvo a repetirlo) es la de explicar que la diferencia de velocidades, en móviles de distinto peso, no depende de estas diferencias de peso, sino más bien de accidentes externos y, concretamente, de la resistencia del medio, de modo que, si se elimina tal resistencia, todos los móviles se moverían con el mismo grado de velocidad. Y esto lo deduzco yo principalmente de aquello que vos precisamente admitís y que es muy cierto; a saber, que para móviles con pesos muy diferentes, la diferencia de velocidad aumenta cada vez más a medida que son mayores los espacios que atraviesan; efecto que no se produciría si dependiese de la diferencia de los pesos, ya que, al ser éstos siempre los mismos, la proporción entre los espacios recorridos debería permanecer siempre constante, mientras que si el movimiento se continúa, vemos cómo va creciendo siempre dicha proporción. De este modo, un móvil de enorme peso, en la caída de una braza, no aventajará al más ligero la décima parte de tal espacio, mientras que si la caída es de doce brazas le sacará una ventaja de un tercio y en la de cien le aventajará un noventa por ciento, etc.

SIMP. Perfectamente. Pero, siguiendo vuestro razonamiento, si la diferencia de peso en móviles de pesos diversos, no puede ser la causa del cambio proporcional de velocidad, supuesto que los pesos no varían, tampoco el medio, que tomamos siempre como idéntico, podrá causar ninguna alteración en la relación de las velocidades.

SALV. Con mucha agudeza ponéis una objeción a lo que acabo de decir, siendo indispensable que le dé una respuesta. He de decir, por tanto, que un cuerpo pesado tiene, por naturaleza, un principio intrínseco que lo mueve hacia el centro común de los graves (esto es, hacia el centro de nuestro globo terrestre) con movimiento continuamente acelerado, y siempre igualmente acelerado; es decir, que en tiempos iguales se añaden nuevos impulsos iguales y nuevos grados de velocidad. Pero hay que entender que esto se cumple con la condición de que se eliminen todos los obstáculos accidentales y externos, entre los cuales hay uno que no podemos eliminar: es la resistencia que ofrece el medio pleno y que el móvil, en su [119] caída, ha de abrir y separar hacia los lados. A este movimiento transversal, el medio, aunque sea fluido, penetrable y en reposo,

opone una resistencia mayor o menor según que deba abrirse a más o menos velocidad para dejar paso al móvil. Este, al irse acelerando continuamente, como ya he indicado, por su propia naturaleza, encuentra como consecuencia una resistencia cada vez mayor por parte del medio, retardándose por ello y disminuyendo los grados de velocidad adquiridos. Finalmente, y como consecuencia, la velocidad alcanza un punto tal, y la resistencia del medio tal magnitud, que ambas llegan a equilibrarse, eliminando la aceleración y reduciendo al móvil a un movimiento constante y uniforme, en el que se mantendrá ya siempre. El aumento de la resistencia del medio, pues, tiene lugar, no porque cambie de esencia, sino porque se altera la velocidad con la que tiene que abrirse y apartarse de lado para permitir el paso del cuerpo que cae y que va continuamente acelerándose.

Ahora bien, al ver la gran proporción que existe entre la resistencia del aire y el poco momento de la vejiga y lo pequeña que es con respecto al enorme peso del plomo, llego al firme convencimiento de que si se suprimiese totalmente el aire —lo cual sería dar a la vesícula una gran facilidad y al plomo una ventaja bien pequeña— los dos caerían a la misma velocidad.

Supuesto, pues, este principio según el cual, en un medio en donde, por ser el vacío o por lo que fuera, no hubiese resistencia alguna que se opusiera a la velocidad del movimiento, de modo que la velocidad de todos los móviles fuese la misma, nosotros podríamos determinar congruentemente las relaciones entre las velocidades de los móviles semejantes y desemejantes en el mismo medio y en medios diversos plenos y, por tanto, resistentes. Conseguiremos este propósito si examinamos lo que la pesadez del medio sustrae a la del móvil, cuyo peso es el instrumento gracias al cual se abre camino, apartando las partes de éste hacia los lados, operación que no tiene lugar en el vacío, de suerte que aquí no habría que esperar diferencia alguna debida a los diversos pesos. Y como es evidente que el medio aligera los cuerpos inmersos en él en proporción al peso de un volumen igual de su propia materia, obtendremos lo que buscamos si disminuimos, en la misma proporción, la velocidad de los móviles que en el medio no resistente (tal y como hemos supuesto) serían iguales.

Supongamos, por ejemplo, que el plomo sea diez mil veces más pesado que el aire, mientras que la madera [120] de ébano es solamente mil veces más pesada. A las velocidades de estos dos cuerpos, que tomadas absolutamente, es decir, eliminando cualquier resistencia, serían iguales, sustrae el aire, al plomo, un grado sobre los diez mil, y uno de los mil a la madera de ébano o diez de diez mil. Así pues, cuando el plomo y el ébano caigan en el aire desde cualquier altura, que recorrerían en tiempos iguales si se suprimiese la resistencia del aire, éste quitará uno a los diez mil grados de velocidad del plomo, mientras que de los diez mil grados del ébano restará diez. Esto es tanto como decir que si dividimos la altura de la caída en diez mil partes, cuando el plomo llegue al suelo, se encontrará el ébano diez o tal vez nueve partes más atrás, de las diez mil partes en cuestión. Pero ¿qué otra cosa significa esto sino que una bola de plomo que cae desde una torre de una altura de doscientas brazas, aventajará en menos de cuatro dedos a una bola de ébano que cae desde la misma altura? El ébano pesa mil veces más que el aire, mientras que la vejiga hinchada de la que hablamos pesa solamente cuatro veces más. El aire, por tanto, sustrae uno de los mil grados de la intrínseca y natural velocidad del ébano; pero a la de la vejiga, que tomada absolutamente sería la misma, él aire le quita uno sobre cuatro. De ahí que, en el momento en que la bola de ébano, cayendo desde la altura de la torre, toque el suelo, la vejiga no haya recorrido más que los tres cuartos de dicha altura.

El plomo es doce veces más pesado que el agua, mientras que el marfil, solamente dos. El agua, pues, sustrae de sus velocidades absolutas, que serían iguales, al plomo la duodécima parte, mientras que al marfil le sustrae la mitad, de modo que cuando el plomo haya descendido once brazas en el agua, el marfil no habrá descendido sino seis. Si seguimos esta regla, pienso que las experiencias se ajustarán mucho mejor a nuestros cálculos que a los de Aristóteles.

Dando esto por supuesto, para calcular la velocidad de un móvil en diversos medios fluidos, no compararemos las diferentes resistencias de los medios, sino que consideraremos en qué medida excede el peso del móvil al peso de los medios. Así, por ejemplo, el estaño es mil veces más pesado que el aire y diez veces más pesado que el agua. Si dividimos, pues, la velocidad absoluta del estaño en mil grados, esta velocidad, al sustraerle el aire la milésima parte, será de novecientos noventa y nueve grados, mientras que en el agua se moverá solamente con novecientos grados, dado que el agua le sustrae la décima parte de su peso.

Tomemos ahora un sólido un poco más pesado que el agua, como sería, por ejemplo, la madera de encina. [121] Si una bola de esta madera pesa, pongamos por caso, mil dracmas, otro tanto [en volumen] de agua pesará novecientos cincuenta, y lo mismo de aire, sólo dos. Es evidente que, suponiendo que la velocidad absoluta de la bola fuese de mil grados, en el aire no sería sino de novecientos noventa y ocho y en el agua quedaría reducida a cincuenta, dado que el agua le arrebata de los mil grados de peso, novecientos cincuenta, no dejándole más que cincuenta del peso total. Un sólido tal se movería, por tanto, en el aire a una velocidad casi veinte veces mayor que en el agua, puesto que lo que supera su peso al del agua es la vigésima parte de su propio peso.

Llegados a este punto me gustaría que consideráramos lo siguiente: ya que en el agua no pueden descender sino aquellos cuerpos que tienen un peso específico superior al de aquélla y, consecuentemente, muchos cientos de veces más pesados que el aire, si tratamos de encontrar la relación de sus velocidades en el aire y en el agua, podemos admitir, sin caer en un error notable, que el aire no disminuye de manera apreciable el peso absoluto ni, por consiguiente, la velocidad absoluta de tales cuerpos. De aquí que, después de haber determinado en cuánto exceden su peso al del agua, cosa que no ofrece grandes dificultades, diremos que su velocidad en el aire es a su velocidad en el agua como su peso total a lo que excede éste al peso del agua. Así, por ejemplo, si una bola de marfil pesa veinte onzas y lo mismo de agua, diecisiete, la velocidad del marfil en el aire es a su velocidad en el agua más o menos como veinte es a tres.

SAGR. Mucho he aprendido en una materia curiosa por sí misma y sobre la que, aunque sin resultado, he pensado hasta fatigar mi mente. Lo único que faltaría, para poner en práctica estas especulaciones, es encontrar el modo de conocer cuál sea el peso del aire con respecto al del agua, y, consecuentemente, con respecto al de los otros cuerpos pesados.

SIMP. Pero si descubriese que el aire, en vez de peso, lo que tiene es ligereza, ¿qué es lo que habría que decir de los razonamientos, por lo demás muy ingeniosos, que acabamos de escuchar?

SALV. Lo que habría que decir es que serían realmente aéreos, ligeros y vanos. Pero, ¿os atreveríais a poner en duda que el aire tenga peso cuando tenéis un texto bien claro de Aristóteles que lo afirma, diciendo que todos los elementos, incluido el aire mismo —con la excepción del fuego— tienen peso? La prueba es, añade él, que un pellejo inflado pesa más que si está desinflado.

[122] SIMP. Que un odre o balón hinchado pese más es algo que achacaría, no al peso del aire, sino a los diversos vapores espesos que se mezclan con él en estas nuestras bajas regiones, razón por la cual yo diría que aumenta el peso del odre.

SALV. Por favor, no digáis eso y mucho menos se lo hagáis decir a Aristóteles. Porque si, hablando él de los elementos, tratara de persuadirme de que el aire es un elemento que tiene peso y si, intentando probármelo experimentalmente, me dijese: «Toma un odre, llénalo de vapores espesos y podrás observar cómo aumenta su peso», yo le respondería que pesaría todavía más si se lo llenase de salvado. Pero añadiría yo inmediatamente que tales experiencias prueban que el salvado y los vapores espesos son cuerpos pesados, pero por lo que al elemento aire se refiere, no habría salido de dudas más que antes. La experiencia de Aristóteles, por tanto, es buena y su proposición verdadera. No diría, sin embargo, lo mismo de la afirmación, fundada también en los hechos, de cierto filósofo,* cuyo nombre no recuerda, pero que estoy seguro haber leído y que intenta probar que el aire es más pesado que ligero y la razón que da es que lleva más fácilmente los cuerpos graves hacia abajo que los ligeros hacia arriba.

SAGR. Buen razonamiento, a fe mía. Y así, por tal razón, el aire debe ser mucho más pesado que el agua, ya que los cuerpos pesados pueden llevarse con mucha más facilidad hacia abajo por el aire que por el agua, y los ligeros más fácilmente hacia arriba por ésta que por aquél. Más aún, infinidad de cuerpos pesados, que en el agua suben, en el aire, descienden. Además, que el peso del odre, señor Simplicio, se deba a los vapores espesos o al aire puro, esto en nada cambia nuestro propósito, ya que lo que nosotros buscamos es lo que sucede a los cuerpos que se mueven en nuestra región vaporosa.

Volviendo, sin embargo, a aquello que más me preocupa, quisiera yo, a fin de instruirme perfecta y absolutamente en la materia que nos ocupa, que quedara bien firme que el aire es no sólo pesado (cosa que la doy por cierta) sino, si es posible, conocer cuál es su peso. Así que, señor Salviati, si podéis satisfacerme una vez más, os pido que me hagáis tal favor.

SALV. Que el aire tiene un peso positivo y no, como algunos han creído, ligereza, la cual tal vez no se dé en materia alguna, nos lo muestra de manera concluyente la experiencia del balón hinchado [123] propuesta por Aristóteles. Y es que si se diera en el aire la cualidad de ligereza absoluta y positiva, la compresión del aire, al multiplicarla, aumentaría su ligereza y, en consecuencia, su propensión a moverse hacía arriba, mientras que la experiencia nos muestra lo contrario. En lo que a la otra cuestión se refiere, y que trata del modo de estudiar el peso del aire, os expondré cuál ha sido mi manera de proceder. He cogido un frasco de cristal de bastante capacidad con el cuello estrecho y lo he enfundado en un dedal de cuero bien atado a la parte angosta del frasco, habiendo colocado en el extremo superior de dicho dedal una válvula de balón sólidamente atada. Por esta válvula y con la ayuda de una jeringa, he introducido a presión en el frasco una gran cantidad de aire. Como el aire se presta a condensarse mucho, se puede hacer entrar en un solo frasco el contenido de dos o tres frascos más, aparte del que aquél naturalmente contiene. Después, he pesado con mucha precisión en una balanza muy exacta, tal frasco con el aire allí comprimido, ajustando el peso por medio de arena muy fina. Habiendo abierto, después, la válvula y dejando salir el aire encerrado violentamente en el frasco, lo he colocado sobre una balanza. Habiéndolo encontrado notablemente aligerado, he ido sustrayendo del contrapeso cierta cantidad de arena, de-

* G. Boni, uno de los maestros que Galileo tuvo en Pisa.

jándola aparte, de modo que la balanza quedase en equilibrio por medio del contrapeso restante. No hay ninguna duda de que el peso de la arena quitada es el del aire que se había introducido por la fuerza en el frasco, para dejarlo salir más tarde. Hasta el momento, sin embargo, de lo único que me asegura esta experiencia es de que el aire, violentamente contenido en el recipiente, pesaba lo mismo que la arena retirada. Pero lo que el aire pesa exactamente en relación al agua o a cualquier otro cuerpo pesado, es algo que por el momento no lo sé y no lo puedo saber hasta que no mida la cantidad [volumen] del aire comprimido. Para ello hay que encontrar un método preciso. Según mi método, pienso que se puede proceder de dos maneras. Una de ellas, es coger un frasco parecido al primero, de cuello estrecho, atando a dicho cuello fuertemente otro tubo de cuero; éste empalmará su extremidad con la válvula del otro frasco, quedando atado a ésta por medio de un nudo muy firme. Al segundo frasco se le hará un agujero en el fondo; por dicho agujero pasará un punzón de hierro gracias al cual podremos, cuando queramos, abrir la válvula en cuestión para que pueda salir el aire [124] sobrante del otro frasco que habremos pesado previamente. El segundo frasco, por su parte, debe de estar lleno de agua.

Habiendo dispuesto todo de la manera dicha, abriremos la válvula con la ayuda del estilete. El aire, al salir con impetuosidad, pasará al vaso de agua, arrojándola fuera por el agujero del fondo. Es evidente que la cantidad de agua expulsada de tal modo, será igual al volumen y cantidad del aire salido del otro vaso. Dejando de lado este agua, se pesará de nuevo la vasija, aliviada ya del aire comprimido (doy por supuesto que ésta se había pesado antes con dicho aire comprimido), y quitando, del modo ya explicado, la arena sobrante, es obvio que esta arena da el peso justo de un volumen de aire igual al volumen del agua que ha salido de la vasija. Pesaremos después este agua y veremos cuántas veces contiene su peso al de la arena conservada, pudiendo establecer, sin error, las veces que es más pesada el agua que el aire. Aquélla no será diez veces solamente, como parece que creía Aristóteles, sino casi más de cuatrocientas veces, como lo muestra nuestra experiencia.

El otro método es más rápido, no necesitando más que una sola vasija, esto es, la primera dispuesta del mismo modo que antes. Esta vez no introducimos más aire además del que naturalmente contiene, sino que le echaremos agua, sin dejar salir la menor cantidad de aire. De este modo, el aire, al tener que dejar sitio al agua que le viene encima, tendrá que comprimirse, por fuerza. Después de haber introducido toda el agua que sea posible, y que sin gran violencia podrá alcanzar las tres cuartas partes de la capacidad del frasco, la colocaremos sobre la balanza pesándola con sumo cuidado. Después de esto, manteniendo la vasija con el cuello hacia arriba, se abrirá la válvula, dando salida al aire, del que saldrá afuera precisamente una cantidad igual al agua que estaba contenida en el frasco. Una vez que ha salido el aire, volvemos a colocar en la balanza la vasija ya aligerada por encontrarse libre del aire. Sustrayendo del contrapeso el peso sobrante obtendremos el peso del volumen del aire que será igual al del agua introducida en el frasco.

SIMP. No se puede negar que los artificios por vos imaginados son muy sutiles e ingeniosos. Pero mientras me parece que dan satisfacción completa al entendimiento, me dejan bastante perplejo por otra parte, ya que siendo indudablemente verdadero que los elementos no son ni ligeros ni pesados en sus propios lugares naturales [*regioni*], no puedo llegar a entender cómo y dónde aquella porción de aire que parecía pesar, *v. gr.*, cuatro dracmas de arena, pueda guardar después en el aire ese mismo peso, que tiene, [125] sin embargo, su contrapeso de arena. Me parece, más bien, que la experiencia ha-

bría que llevarla a cabo no en el aire, sino en un medio en donde el mismo aire pudiera ejercitar su capacidad de pesar si es que realmente la posee.

SALV. Es ciertamente aguda la objeción del señor Simplicio, por lo que es necesario o bien dejarla como insoluble o encontrar una solución no menos sutil. Aunque el aire comprimido pesaba, cómo lo hemos visto, lo mismo que la arena, dejará de pesar una vez puesto en libertad en su elemento, mientras que la arena conservará evidentemente su peso. Por esa razón, para realizar tal experiencia convenía elegir un lugar y un medio en donde el aire, no menos que la arena, pudiera pesar; porque, como tantas veces se ha dicho, el medio sustrae del peso de cualquier cuerpo sumergido en él el peso de una porción de dicho medio igual al volumen del cuerpo inmerso; de modo que el aire le quita todo el peso al aire. Para realizar, por tanto, la experiencia con todo rigor, habría que hacerla en el vacío, en donde todo cuerpo ejercería toda su gravedad, sin disminución alguna. Así que si nosotros pesáramos, señor Simplicio, una porción de aire en el vacío ¿quedaríais asegurado y convencido del hecho?

SIMP. Sin duda alguna, sólo que se trata de desear o de buscar lo imposible.

SALV. Será bien grande el favor que me deberéis si realizo yo esta vez, en gracia vuestra, lo imposible. No quiero, sin embargo, venderos lo que ya os he dado, porque en la experiencia que acabo de describiros hemos pesado el aire en el vacío y no en el aire o en cualquier otro medio lleno. Si al cuerpo inmerso en un medio fluido se le quita algo de su peso, proviene esto, señor Simplicio, de que el medio se resiste a dejarse abrir, a dejarse apartar para ser finalmente elevado; testimonio de lo cual es su prontitud en llenar el espacio que ocupaba tan pronto como el cuerpo inmerso lo abandona; porque si el medio no se resistiese a ningún efecto de tal inmersión, nada haría en contra de aquélla. Decidme ahora, cuando tenéis en el aire el frasco, lleno ya con el mismo aire, que se encuentra contenido naturalmente, ¿qué división, qué separación o, en definitiva, qué cambio puede padecer el aire del medio exterior por efecto del aire suplementario, que se infunde, por la fuerza, en el frasco? ¿Aumenta, acaso, el frasco de modo que el aire del medio tenga que retirarse para dejarle sitio? Ciertamente, [126] no. Podemos, sin embargo, afirmar que el aire introducido en el recipiente no queda inmerso en el aire circundante, al no ocupar espacio alguno, sino que es como si lo metiéramos en el vacío. Más aún, lo metemos ahí realmente, ya que se coloca en los vacíos que no llena totalmente el aire no condensado. No soy capaz, verdaderamente, de ver diferencia alguna entre dos naturalezas de medio interior y medio exterior, cuando en ésta el exterior no presiona en modo alguno al interior y en aquélla, el interior no hace nada para rechazar al exterior. Tales son las condiciones de cualquier materia en el vacío y del aire comprimido en el recipiente. El peso, por tanto, que encontramos en el aire condensado es el mismo que encontraríamos si estuviera esparcido libremente en el vacío. Bien es verdad que el peso de la arena utilizada como equilibrante lo hemos obtenido al aire libre y que, en el vacío, habría sobrepasado la justa medida. Hay que decir, pues, que el aire pesado es, en realidad, algo más pesado que la arena que sirvió de contrapeso; es decir, de lo que pesaría la misma cantidad de aire en el vacío.[1]

1. En este punto, en un ejemplar anotado de la edición original, se halla la siguiente nota de Galileo: *Sagr.* Una discusión muy aguda, que resuelve un problema maravilloso, porque muestra breve y concisamente cómo se puede obtener el peso de un cuerpo en el vacío mediante una pesada en el aire. La explicación es la siguiente: cuando un cuerpo está inmerso en el aire, pierde peso en una cantidad igual al peso de un volumen [*mole*] de aire equivalente al volumen [*mole*] de dicho cuerpo. Por lo tanto, si añadimos a un cuer-

[127] SIMP. Me parecía, ciertamente, que las experiencias descritas dejaban todavía algo que desear, pero ahora me veo completamente tranquilizado.

SALV. Lo que yo he expuesto hasta el momento y de manera particular, lo que hace a las diferencias de peso que, por muy grandes que sean, no afectan en nada a las diferentes velocidades de los móviles, de modo que en lo que éstas dependen de sus pesos, todos deberían moverse a la misma velocidad; todo esto, repito, es tan nuevo y tan inverosímil a primera vista que si no hubiera forma de elucidarlo y hacerlo más claro que la luz del día, más valdría callarse y no decir nada. Pero como ya he abierto la boca, es necesario que no se me escape ninguna experiencia ni ningún argumento que lo pueda ratificar.

SAGR. No sólo ésta, sino otras muchas de vuestras proposiciones están tan alejadas de las opiniones y doctrinas comúnmente aceptadas que si se les diera publicidad, suscitarían un buen número de opositores dada la innata inclinación de los hombres a no ver de buen grado que otros descubran con sus propios medios verdades o errores, que habían pasado desapercibidos para ellos. Dándoles el título de innovadores doctrinarios, tan poco grato a muchos oídos, se las ingenian para cortar los nudos que no pueden deshacer y para hacer saltar, con minas subterráneas, los edificios que habían construido, con los instrumentos [128] habituales, pacientes trabajadores. Pero como nos encontramos nosotros lejos de pretensiones semejantes, las experiencias y los razonamientos aducidos hasta el momento nos bastan para que quedemos tranquilos. En el caso, sin embargo, de que tengáis experiencias y razones aún más palpables, las escucharemos nosotros con sumo agrado.

SALV. La experiencia consistente en tomar dos cuerpos tan diferentes de peso como se pueda, haciéndolos caer desde cierta altura para observar así si sus velocidades son iguales, presenta alguna dificultad, ya que si la altura es grande, el medio, que bajo la presión del cuerpo que cae se abrirá siendo empujado lateralmente, opondrá un freno mucho mayor al escaso momento de un móvil muy ligero que a la gran fuerza [*violenza*] de uno muy pesado. De este modo, el cuerpo ligero, en un espacio largo, quedará muy retrasado. Y si, por el contrario, la altura es pequeña, se podría muy bien pensar o que no hay diferencia alguna de velocidad, o que es inobservable, en caso de haberla.

Es esta la razón que me ha impulsado a repetir muchas veces las caídas en alturas muy pequeñas, acumulando así un número suficiente de aquellas diferencias mínimas de tiempo, que tal vez existiesen entre la llegada al suelo del cuerpo más pesado y la llegada del más ligero, de forma que, una vez unidas, dieran un tiempo no sólo obser-

---

po, sin expandirlo, una cantidad de aire igual a la que desplaza y lo pesamos, obtendremos su peso absoluto en el vacío ya que, sin aumentar su tamaño, su peso ha aumentado justo en la cantidad que pierde por su inmersión en aire.

Por lo tanto, cuando hacemos entrar una cierta cantidad de agua en una vasija que ya contiene su cantidad normal de aire, sin permitir que dicho aire escape, es evidente que esta cantidad normal de aire se comprimirá y condensará en un espacio más reducido para dejar lugar al agua que está siendo introducida; también es evidente que el volumen en que así se ha comprimido el aire es igual al volumen del agua añadida. Si se pesa la vasija en el aire en estas condiciones, es manifiesto que el peso del agua aumentará en el de un volumen igual de aire; por lo tanto, el peso total de agua y de aire así obtenido es igual al peso del agua sola en el vacío.

Consignemos ahora el peso del conjunto de la vasija y dejemos que escape el aire comprimido; pesemos lo que queda; la diferencia de estos dos pesos será el peso del aire comprimido; tendremos entonces el agua sola en el vacío. Para hallar el peso del agua tendremos que sacarla de la vasija, pesar a ésta sola, y sustraer este peso del del conjunto del aire y la vasija. Está claro que el resto será el peso del agua sola en el aire.

vable sino notoriamente observable. Además, para darme la posibilidad de captar movimientos extraordinariamente lentos, en los que la resistencia del medio altera mucho menos el efecto del simple peso, se me ha ocurrido hacer descender a los móviles sobre un plano inclinado, no muy elevado con respecto a la horizontal y sobre el cual, tan bien como en la caída vertical, se podrá ver cómo se comportan los cuerpos con pesos diferentes. Además, y matizando el experimento, he querido eliminar los obstáculos que pudiesen derivarse del contacto de estos móviles con el plano inclinado. Finalmente, he cogido dos bolas, una de plomo y la otra de corcho, siendo aquélla cien veces más pesada que ésta. Até, después, cada una a dos cordones iguales, muy delgados y de una longitud de cuatro o cinco brazas, colgándolas a cierta altura. Habiendo separado, luego, las dos bolas de la perpendicular, las he dejado que se pusieran en marcha al mismo tiempo; entonces, siguiendo las circunferencias de los círculos descritos por los cordones, sus radios han pasado más allá de la perpendicular, para volver, después, atrás por el mismo lugar. Y repitiendo más de cien veces estas idas y venidas, han demostrado de modo palpable [129] que la bola más pesada se adecua de tal modo al ritmo de la más ligera que ni en cien vibraciones ni tampoco en mil tomaría aquélla la más mínima delantera [*minimo momento*], sino que ambas marchan al mismísimo paso.

La operación descrita manifiesta también la acción del medio, el cual, acarreando algún obstáculo al movimiento, disminuye bastante más [la amplitud de] las oscilaciones del corcho que las del plomo, sin hacerlas, no obstante, más o menos frecuentes. Más aún, si los arcos descritos por el corcho no fuesen más que de cinco o seis grados, mientras que los del plomo, de cincuenta o sesenta, las oscilaciones se producirían en los mismos tiempos.

SIMP. Si esto es así, ¿cómo, entonces, no ha de ser la velocidad del plomo mayor que la velocidad del corcho, al recorrer aquél sesenta grados en su camino mientras que éste ha recorrido apenas seis?

SALV. Pero, ¿qué diríais, señor Simplicio, si los dos realizaran su viaje al mismo tiempo cuando el corcho, apartado de la perpendicular en treinta grados, tuviera que atravesar un arco de sesenta grados y el plomo, alejado solamente en dos grados del centro de sus oscilaciones, tuviera que recorrer un arco de cuatro grados? ¿No sería, en este caso, más veloz el corcho? Pues bien, es esto último lo que la experiencia nos enseña. Pero tened esto bien presente: apartado el péndulo de plomo de la vertical cincuenta grados, por ejemplo, si lo dejamos caer desde ahí, vuelve a la vertical, sobrepasándola en otros cincuenta grados, más o menos, para describir de este modo un arco de casi cien grados. Volviendo, después, hacia atrás por sí mismo, describe otro arco un poco más pequeño; continúa este vaivén, y después de un gran número de oscilaciones, acaba, finalmente, quedando en reposo. Cada una de tales oscilaciones tiene lugar en tiempos iguales, lo mismo la de los noventa grados como la de cincuenta, de veinte, de diez o de cuatro, de modo que, como consecuencia de ello, la velocidad del móvil va languideciendo continuamente, ya que va recorriendo en tiempos iguales, arcos cada vez más pequeños.

Un efecto parecido, si no igual, se obtiene suspendiendo el corcho de un hilo de la misma longitud, sólo que el corcho llega a estar en reposo después de un número menor de vibraciones, al ser menos capaz, debido a su ligereza, de superar el obstáculo del aire. De cualquier modo, sus oscilaciones, grandes o pequeñas, se hacen en tiempos iguales entre sí e iguales también a los tiempos de las oscilaciones del plomo. De don-

de se puede concluir, que si el plomo recorre un arco de cincuenta grados y el corcho uno de diez, [130] entonces el corcho es más lento que el plomo. Podrá ocurrir, por el contrario, que el corcho recorra cincuenta grados mientras que el plomo no recorra sino sólo diez o seis, de modo que, en tiempos distintos, el móvil más rápido será unas veces el plomo y otras el corcho. Pero, si los mismos móviles recorren, en tiempos iguales, arcos iguales, se puede afirmar con seguridad que sus velocidades son iguales.

SIMP. Me parece que este razonamiento es válido y al mismo tiempo no me lo parece, y siento en mi mente una confusión tal, producida por el movimiento de estos dos móviles, ya que unas veces uno es más rápido o más lento o mucho más lento que el otro, que no llegó a ver con claridad cómo se puede decir que sus velocidades son siempre las mismas.

SAGR. Permitidme, señor Salviati, que diga dos palabras. Decidme, señor Simplicio, si admitís que se puede decir con certeza absoluta que las velocidades del corcho y del plomo son iguales siempre que los dos cuerpos, puestos en movimiento al mismo tiempo desde el mismo punto de partida y moviéndose por las mismas inclinaciones, recorran siempre espacios iguales en tiempos iguales.

SIMP. Es algo que está fuera de dudas y que no se puede negar.

SAGR. Ahora bien, ocurre con los péndulos, que cada uno de ellos recorre sesenta grados, después cincuenta, treinta, diez, ocho, cuatro, dos, etc. Y cuando ambos recorren el arco de sesenta grados, lo recorren en el mismo tiempo; también recorren en el mismo tiempo el arco de cincuenta grados; y lo mismo ocurre con el arco de treinta, con el de diez y con los restantes. Se puede, por tanto, concluir que la velocidad del plomo en el arco de sesenta grados es igual a la velocidad del corcho en el arco que tiene los mismos sesenta grados y que sus velocidades son iguales tanto en el arco de cincuenta grados como en cualquier otro. Con esto no se dice que la velocidad de los péndulos en el arco de sesenta grados sea la misma que la velocidad en el arco de cincuenta, ni que ésta sea igual a la del arco de treinta, etc. Las velocidades son, más bien, siempre menores en los arcos también menores, cosa que nos muestra la experiencia, ya que podemos ver cómo el mismo móvil emplea el mismo tiempo para recorrer el arco grande de sesenta grados, el de cincuenta y el arco pequeño de diez, y que, en suma, los recorren todos en [131] tiempos iguales. Es, pues, cierto que el plomo y el corcho van retardando el movimiento a medida que disminuyen los arcos, pero, sin alterar su acuerdo, mantienen siempre la igualdad de sus velocidades al recorrer los mismos arcos.

He querido añadir esto para tener la seguridad de haber entendido bien el pensamiento del señor Salviati y no porque creyese que el señor Simplicio tuviese necesidad de una explicación más clara que la dada por el señor Salviati. La que éste nos ha expuesto es, como es ya su costumbre, meridiana. En efecto, al resolver en muchas ocasiones algunos problemas no sólo oscuros a primera vista, sino que incluso parecían contradecir la naturaleza y la verdad, sirviéndose para ello de razonamientos u observaciones o experiencias muy banales o excesivamente familiares para todo el mundo, ha dado ocasión (como he oído decir a gentes distintas) a algunos de los profesores más estimados, a pasar por alto sus descubrimientos, teniéndolo como despreciables por depender de fundamentos demasiado bajos y vulgares; como si la condición más estimable y la más admirable de las ciencias demostrativas no fuese el porvenir y progresar a partir de principios muy conocidos, comprendidos y aceptados universalmente.

Pero, por lo que a nosotros respecta, no dejemos de saciarnos con estos alimentos ligeros. El señor Simplicio ha quedado tranquilizado y ha comprendido y admitido que

el peso inherente a los diversos móviles no tiene parte ninguna en la diversificación de sus velocidades, de modo que tales velocidades serían las mismas si sólo dependiesen de sus pesos. Decidnos, ahora, señor Salviati, de dónde provienen, según vuestra opinión, las desigualdades que se manifiestan sensiblemente en el movimiento y responded a la objeción que os puso el señor Simplicio, a la que me sumo yo, según la cual, la velocidad de una bala de cañón es mayor que la de un pequeño trozo de plomo, siendo la diferencia de sus velocidades insignificante, comparada con aquella con la que la contrapondré. Hay móviles de la misma materia, algunos de los cuales, de mayor tamaño, emplearán menos de lo que dura una pulsación para recorrer, al descender en cierto medio, determinado espacio, mientras que otros, más pequeños, no lo recorrerán ni en una hora ni en cuatro, ni siquiera en veinte. Tal es el caso de las piedras y de la arena fina y, sobre todo, de esa arena muy fina que enturbia el agua, en la que no llega a descender más de dos brazas durante muchas horas, mientras que los guijos, que no son sino un poco más gruesos, van al fondo en una pulsación.

SALV. La acción del medio a la hora de retardar la caída de los móviles, tanto más acusada cuanto que el peso específico del móvil es menor, la hemos explicado ya, al mostrar que esto ocurre merced a la sustracción del peso. Pero que un mismo medio puede, de forma tan acentuada, reducir la velocidad de [132] móviles diferentes sólo en tamaño, aunque tengan la misma materia y la misma forma, exige para su explicación un razonamiento más agudo que el requerido para entender por qué la forma más dilatada del móvil o cualquier movimiento que el medio lleve a cabo contra el móvil disminuye la velocidad de éste. La causa del problema que nos ocupa consiste en las rugosidades y porosidades que, normalmente, tal vez necesariamente, presentan las superficies de los cuerpos sólidos. Cuando dichos cuerpos se ponen en movimiento, las rugosidades van chocando con el aire o con el medio de que se trate. Un signo evidente de tales fricciones es el zumbido que producen los cuerpos, por muy pulidos que estén, cuando corren velozmente por el aire. No sólo zumbidos, sino ruidos y silbidos es lo que nos hacen oír si se encuentran en ellos algunas cavidades o prominencias más relevantes. Se puede constatar cómo todo cuerpo sólido redondo hace un poco de viento cuando gira en un torno. Más todavía, ¿no oímos un zumbido notable de tono muy agudo cuando una peonza gira en el suelo a gran velocidad? El tono de este silbido se hace más grave a medida que la velocidad de giro disminuye poco a poco; fenómeno sólo explicable por los roces con el aire de las asperezas, por pequeñas que sean, de su superficie. No se puede dudar de que, en la caída de los cuerpos, tales asperezas causarán una disminución de la velocidad de los móviles, tanto mayor cuanto mayor sea la superficie de esos cuerpos, como es el caso de los sólidos más pequeños en proporción a los mayores.

SIMP. Un momento, por favor, porque aquí empiezo a no ver claro, ya que aunque comprendo y admito que el roce del medio contra la superficie del móvil cause retraso al movimiento y en mayor medida cuando (en igualdad de condiciones) sea mayor la superficie, no llego a entender, sin embargo, por qué razón llamáis más grande a la superficie de los cuerpos más pequeños. Por otro lado, si, como vos afirmáis, cuanto mayor sea la superficie mayor también es el retraso, los sólidos más grandes deberían retrasarse más, cosa que no ocurre. Esta objeción se podrá resolver, naturalmente, con facilidad diciendo que si bien el cuerpo más grande tiene mayor superficie, también posee mayor peso. En consecuencia, el impedimento que la superficie mayor opone al peso mayor no supera al impedimento de la superficie menor de tal suerte que la velo-

cidad del sólido más grande vaya disminuyendo. Por todo ello, no veo razón alguna por la que se deba alterar la igualdad [133] de las velocidades, ya que en la medida en que disminuye el peso motor, disminuye la capacidad de retrasar de la superficie.

SALV. Daré respuesta unitariamente a todas vuestras objeciones. Admitís, señor Simplicio, sin discusión, que si dados dos móviles iguales, de la misma materia y figura, los cuales, sin duda alguna, se desplazarían a la misma velocidad), se le redujera a uno de ellos el peso y su superficie en la misma proporción (conservando la semejanza de la figura) no por eso disminuiría la velocidad por muy pequeño que se le hubiera hecho.

SIMP. Ciertamente, me parece que es eso lo que se seguiría, si nos atenemos, al menos, a vuestra doctrina, según la cual, el mayor o menor peso no tiene efecto alguno sobre la aceleración de retraso del movimiento.

SALV. Y esto mismo lo siga manteniendo. Admito también lo que habéis dicho, de lo que me parece que se deduce que si el peso de un móvil disminuye más que su superficie, se produciría cierto retraso en el movimiento del móvil así empequeñecido; retraso que iría aumentando conforme mayor fuese la disminución del peso respecto a la de la superficie.

SIMP. Nada tendría que objetaros a esto.

SALV. Pues bien, sabed señor Simplicio que en los sólidos no se puede disminuir la superficie en la misma proporción que el peso, conservando la semejanza de las figuras. Es evidente, en efecto, que si un cuerpo grave disminuye, su peso decrecerá tanto como su volumen, y que si el volumen disminuye más que la superficie (permaneciendo la misma forma) el peso debe disminuir más que la superficie.

Ahora bien, la geometría nos enseña que la proporción entre los volúmenes de dos sólidos semejantes es mucho mayor que la que se da entre sus superficies. Para hacéroslo comprender más fácilmente, os lo explicaré, sirviéndome de un caso concreto. Imaginaos, por ejemplo, un dado, uno de cuyos lados tenga, digamos, dos dedos de longitud, de forma que cada una de sus caras tenga cuatro dedos cuadrados y las seis —o sea toda su superficie—, veinticuatro dedos cuadrados. Imaginad, después, que el mismo dado sea dividido, con tres cortes, convirtiéndolo en ocho dados pequeños. La arista de cada uno de ellos tendrá un dedo, una superficie, un dedo cuadrado, y la [134] superficie total, seis dedos cuadrados, mientras que la superficie total del dado, antes de dividirse, era de veinticuatro dedos cuadrados. Podéis ver, pues, que la superficie del dado pequeño es la cuarta parte de la superficie del dado grande (siendo seis la cuarta parte de veinticuatro), mientras que ese mismo dado sólido es sólo un octavo del grande; el volumen, y consecuentemente el peso, disminuye, por lo tanto, mucho más que la superficie.

Si subdividís, ahora, el dado pequeño en otros ocho, la superficie total de cada uno de éstos será de un dedo y medio cuadrado; es decir, la decimosexta parte de la superficie del primer dado, mientras que su volumen, sin embargo, será solamente la sexagesimocuarta parte del volumen total.

Ved, por tanto, cómo han bastado dos divisiones para que los volúmenes disminuyan cuatro veces más que sus superficies; y si prosiguiéramos nosotros las subdivisiones, hasta reducir nuestro primer sólido a polvo fino, nos encontraríamos con que el peso de estos átomos mínimos ha disminuido cientos y cientos de veces más que sus superficies. Y esto que acabo de ejemplificaros con los cubos, puede aplicarse a todos los sólidos que sean semejantes entre sí, cuyos volúmenes son sesquiálteros [*sesquialtera*] de sus superficies.

Veis así que la oposición del contacto de la superficie del móvil con el medio crece en mayor proporción en los móviles pequeños que en los mayores. Si añadimos que las

asperezas de las superficies pequeñísimas de esos polvos finos no son, tal vez, menores que las de las superficies de los sólidos más grandes, pulidas con diligencia, ved qué fluido ha de ser el medio, careciendo de cualquier resistencia a dejarse abrir, pues cede el paso a fuerzas tan débiles. Notad, además, señor Simplicio, que no me equivoqué, cuando dije, no hace mucho, que la superficie de los cuerpos pequeños es, proporcionalmente, mayor que la de los más grandes.

SIMP. He quedado totalmente convencido, y tened por seguro que si hubiera de comenzar mis estudios, seguiría el consejo de Platón y comenzaría por las matemáticas, las cuales, como puedo verlo, proceden con mucho escrúpulo y no admiten como algo cierto sino aquello que se demuestra con todo rigor.

SAGR. Ha sido para mí un gran placer este razonamiento. Pero, antes de que sigamos adelante, me gustaría conocer el sentido de un término que es nuevo para mí. Acabáis de decir que los sólidos semejantes entre sí están en proporción *sesquiáltera* con respecto a sus superficies. He seguido y he entendido [135] bien vuestra proposición con su demostración correspondiente, en la que se prueba que las superficies de los sólidos semejantes son proporcionales a la segunda potencia de sus lados y, por otra parte, que estos mismos sólidos son proporcionales a la tercera potencia de los mismos lados. Ahora bien, la proporción de los sólidos con respecto a su superficie, no recuerdo que se haya nombrado siquiera.

SALV. V. S. se responde a sí mismo y aclara su propia duda, ya que lo que es el cubo de una cosa, de la que otra es el cuadrado, ¿no es *sesquiáltero* de este cuadrado? Sin duda alguna. Ahora bien, si las superficies están en razón al cuadrado y los sólidos en razón al cubo de las longitudes, ¿no podemos decir que los sólidos están en razón *sesquiáltera* con respecto a las superficies?

SAGR. He entendido perfectamente. Me quedaría todavía por preguntaros algunos otros detalles acerca de los temas que se han tratado; pero si andamos de digresión en digresión, tardaremos mucho en llegar al principal objeto de nuestra discusión; es decir, a aquellas cuestiones pertinentes a las diversas propiedades que condicionan la resistencia de los sólidos a la fractura. Tomemos de nuevo, si os parece, el hilo de los objetivos que al principio nos trazamos.

SALV. V. S. dice bien, pero los temas tan numerosos y variados que hemos examinado, nos han robado tanto tiempo, que poco nos queda hoy para consagrarlo a nuestro otro tema principal, que comporta además una gran cantidad de demostraciones geométricas que deben considerarse con atención. Estimo, por consiguiente, que sería mejor, tal vez, diferir la reunión hasta mañana, tanto por la razón que acabo de exponer como porque así podría traer conmigo algunos folios, en los que he anotado ordenadamente los teoremas y los problemas en los que se enuncian y se demuestran las diversas proposiciones que se refieren a nuestro tema. Dudo mucho que pueda exponerlos de memoria con el método debido.

SAGR. Me sumo con mucho gusto a ese parecer y tanto más al poder pediros que nos aclaréis, para acabar así la sesión de hoy, algunas dudas que me quedan acerca de la materia de la que tratábamos hace poco. Una de ellas se refiere a si el obstáculo que opone el medio puede ser suficiente como para hacer cesar la aceleración de un cuerpo de materia muy pesada, de gran volumen y de figura esférica. Digo [136] *esférica*, para escoger así aquella figura que contiene mayor volumen en la menor superficie; menos sujeta, consecuentemente, a la acción retardante del Medio. Otra duda se refiere a las vibraciones de los péndulos y esto tiene diversos aspectos: uno atañe a si todas estas vi-

braciones, grandes, medianas y pequeñas, se realizan real y exactamente en tiempos iguales. Y otra, finalmente, a la proporción que se da entre los tiempos de los móviles colgados de hilos desiguales; me refiero a los tiempos de sus vibraciones.

SALV. Bellos problemas son estos y lo mismo que ocurre en todos los de este género, me pregunto si uno cualquiera de ellos no traerá detrás de sí demasiadas consecuencias verdaderas y curiosas como para discutirlas, dado lo avanzado del día.

SAGR. Si tienen el mismo interés que los precedentes, sería feliz consagrándoles tantos días, que no tantas horas, como de éstas nos faltan hasta la noche. Pienso que el señor Simplicio no se aburrirá con tales razonamientos.

SIMP. Sin duda que no, y de modo especial si se trata de cuestiones naturales acerca de las cuales no se leen opiniones o demostraciones de otros filósofos.

SALV. Voy, pues, con la primera cuestión, afirmando sin rastro alguno de duda, que no hay esfera tan grande ni de materia tan pesada que la resistencia del medio, por muy penetrable que sea, no frene su aceleración, reduciéndola a la larga a un movimiento uniforme. La experiencia misma nos da una prueba muy clara. Y es que si un cuerpo, en su caída, fuese capaz, al prolongarse su movimiento, de adquirir el grado de velocidad que fuese, ninguna velocidad que le confiriese un motor externo, podría ser tan grande como para que la rechazara o se desembarazara de ella gracias a la resistencia del medio. Así, una bala de cañón que cayese por el aire desde una altura, por ejemplo, de cuatro brazas, alcanzando, supongamos, una velocidad de diez grados, y que, a esta misma velocidad, entrase en el agua, si el obstáculo del agua fuese impotente para evitar el impulso de la bala, ésta la acrecentaría o, al menos, la mantendría hasta el fondo.

No es esto, sin embargo, lo que vemos que ocurre; vemos, por el contrario, que el agua, aunque sólo tuviera algunas brazas de profundidad, la frena y [137] debilita de tal modo que golpeará suavemente el lecho del río o del lago. Es, pues, evidente que aquella velocidad de la que el agua ha podido despojarla en un recorrido tan breve, no se la dejaría adquirir ni siquiera en una profundidad de mil brazas. ¿Por qué, entonces habría de permitirle adquirirla en mil codos para perderla, después, en sólo cuatro? Más aún, ¿no se ve cómo el enorme ímpetu de la bola, lanzada por el mismo cañón, se debilita al atravesar sólo unas brazas de agua, de modo que, sin ningún perjuicio para el navío, el proyectil apenas llega a golpearlo?

El mismo aire, aunque sea muy sutil, disminuye también la velocidad de caída del móvil, por muy pesado que sea, como podemos comprenderlo bien con las experiencias que siguen. Si disparamos desde la cima de una torre muy alta un tiro de arcabuz en dirección hacia el suelo, la bala tocará tierra con menos fuerza que si descargáramos el arcabuz desde una altura de cuatro o seis brazas solamente; lo cual muestra con evidencia que el impulso con el que partió la bala desde el cañón, descargado en lo más alto de la torre, ha ido disminuyendo al descender a través del aire. Se sigue de aquí, que la caída desde una altura cualquiera, por grande que sea, no es suficiente para comunicar aquella velocidad, de la que se ve privada por la resistencia del aire cuando, de una u otra manera, se la había conferido.

Del mismo modo, el destrozo que causará en una muralla una bala, disparada por una culebrina desde una distancia de veinte brazas, no creo que lo hiciese cayendo verticalmente desde cualquier distancia, por inmensa que ésta sea. Pienso, por todo ello, que hay un límite para la aceleración de todo móvil natural que parta del estado de reposo, y que el obstáculo que opone el medio acaba por reducirlo a un movimiento uniforme, en el que ha de mantenerse ya siempre.

SAGR. Las experiencias aducidas parecen realmente cumplir su objetivo y no veo, por otro lado, qué es lo que podría oponer vuestro adversario, a no ser que negara que tales experiencias se den en cuerpos de volúmenes grandísimos y no menos pesados, o que afirmase que una bala de cañón, que cae del orbe lunar o de la región más alta del aire, produciría un choque más violento que el que consigue un cañón.

SALV. No hay duda de que muchas son las objeciones que pueden hacerse y de que no todas pueden [138] refutarse con experiencias. Por lo que hace a lo que acabáis de decir, parece razonable pensar que un cuerpo pesado que cae desde una cierta altura habrá adquirido al llegar al suelo tanto impulso como el que sería necesario para elevarlo hasta la altura desde la que cae. Esto se ve claramente en el caso de un péndulo bastante pesado, el cual, dejado a su propio impulso desde cincuenta o sesenta grados por encima de la vertical, adquiere una velocidad y una fuerza que es suficiente para empujarlo precisamente hasta la misma altura, exceptuando, naturalmente, lo que la resistencia del aire le ha quitado.

Si queremos colocar, por tanto, la bala de cañón a una altura tal que fuese suficiente para hacerla adquirir la velocidad que le da el fuego al lanzarla, debería bastar el tirarla hacia abajo, según la vertical, observando, después, si al caer de nuevo su golpe es equivalente al producido por un tiro a corta distancia. Creo ciertamente que no sería tan fuerte, ni mucho menos, el golpe. Estimo, pues, que la velocidad de la bala, al salir del cañón, es de aquellas que la resistencia del aire no le permitiría nunca alcanzar mientras descendiese con movimiento natural, partiendo del estado de reposo y desde la altura que queramos.

Paso ahora a considerar los otros problemas, referentes a los péndulos, materia que a más de uno le parecerá muy árida, y de modo especial a aquellos filósofos que están siempre enfrascados en los secretos más profundos de la naturaleza. No quiero, sin embargo, despreciarlos, animado por el ejemplo de Aristóteles mismo, de quien admiro, por encima de todo, el no haber dejado, se podría decir, sin tocar cualquier materia que merezca consideración.

Y ahora, estimulado por vuestras preguntas, pienso que podré exponeros algunas de mis ideas que atañen a la música; materia de la mayor nobleza, de la que tan grandes hombres han escrito, incluido el mismo Aristóteles, quien propone a este respecto no pocos curiosos problemas. Si deduzco, pues, una vez más, de experiencias fáciles y al alcance de los sentidos, las razones de las maravillas que ocurren en materia de sonidos, tengo el derecho de esperar que mis razonamientos os sean gratos.

SAGR. No solamente agradables sino que, por lo que a mí se refiere, ardientemente deseados, puesto que siendo un enamorado de todos los [139] instrumentos musicales y bastante versado en lo que a la armonía se refiere, he sido siempre incapaz de explicarme por qué me agradan estas o aquellas consonancias más que otras e incluso algunas no sólo no me agradan, sino que me producen un profundo desagrado. Por otro lado, el problema tan manido de las dos cuerdas, templadas al unísono, de tal forma que si se toca una, vibra y suena la otra, permanece para mí sin solución, cosa que me ocurre también en lo que atañe a las razones armónicas y otras particularidades.

SALV. Vamos a ver si estos péndulos nuestros pueden sacarnos de todas estas dificultades. En lo que atañe a la primera dificultad, y que se pregunta si un mismo péndulo realiza todas sus oscilaciones con toda exactitud y rigor, sean ellas muy grandes, medianas o muy pequeñas, en tiempos completamente iguales, yo me atengo a lo que he oído ya de la boca de nuestro académico. Este demuestra, en efecto, que el móvil que

descendiese según las cuerdas que se encuentran bajo cualquier arco, las recorrería todas, necesariamente, en tiempos iguales, tanto la cuerda subtendida por ciento ochenta grados (o sea, todo el diámetro) como las subtendidas por cien, sesenta, diez, doce grados, medio grado o cuatro minutos, siempre que se entienda que todas tengan como término el punto más bajo que toca el plano horizontal.

Por lo que se refiere a los móviles que descienden por los arcos de estas mismas cuerdas, que están por encima de la horizontal, pero que no sean mayores que un cuarto de círculo (es decir, noventa grados) la experiencia muestra, del mismo modo, que todos los recorrerán en tiempos iguales, pero más breves, sin embargo, que los tiempos empleados para recorrer las cuerdas. Tal efecto tiene, a primera vista, algo de sorprendente, ya que parece que es precisamente lo contrario lo que tendría que ocurrir. Y es que al ser los mismos los dos términos, el del principio y el del final, del movimiento y siendo la línea recta el camino más corto que une a dichos términos, parece razonable pensar que el movimiento realizado por la línea recta debería serlo en el tiempo más corto. Por el contrario, no es éste el tiempo más corto y, en consecuencia, el movimiento más rápido es el que corresponde al recorrido por el arco del que es cuerda la línea recta.

En cuanto a la relación entre los tiempos de las oscilaciones de los móviles que cuelgan de hilos de longitud diferente, dichos tiempos se encuentran en razón *subdupla* de las longitudes de los hilos; o dicho de otra manera, las longitudes están en proporción a la segunda potencia [*duplicata proporzione*] de los tiempos; es decir, están en proporción a los cuadrados de los tiempos. Si queremos, por ejemplo, que el período de oscilación de un péndulo sea el doble del de otro, es necesario que el hilo del primero sea, en lo que a la longitud se refiere, cuatro veces mayor que el [140] segundo. Igualmente, para que, en el tiempo de una oscilación de un péndulo, otro haga tres, el hilo del primero ha de ser nueve veces más largo que el del segundo. De lo que se sigue que las longitudes de los hilos tienen, entre sí, la misma proporción que los cuadrados de los números de oscilaciones que tienen lugar en el mismo tiempo.

SAGR. Si he entendido bien, yo podría, entonces, conocer rápidamente la longitud de una cuerda, que cuelga de una altura todo lo grande que se quiera, aunque la parte superior se encontrase fuera del alcance de mi vista y sólo se viera la extremidad de la parte de abajo. Y es que si yo ato a la parte de abajo de la cuerda en cuestión un peso bastante considerable, haciéndolo oscilar a un lado y a otro, mientras un amigo va contando sus oscilaciones, al mismo tiempo que yo me encargo de contar las oscilaciones de otro móvil colgado de una cuerda cuya longitud es de un brazo exacto, el número de las vibraciones de estos dos péndulos que tienen lugar en un mismo tiempo me permitirán obtener la longitud de la cuerda.

Supongamos, por ejemplo, que en el tiempo en que mi amigo ha contado veinte oscilaciones de la cuerda larga, haya contado yo doscientas cuarenta en la mía, que tiene una longitud de un brazo. Elevados al cuadrado los números veinte y doscientos cuarenta, que dan 400 y 57.600, respectivamente, puedo decir que la cuerda larga contiene 57.600 veces la longitud contenida 400 veces la mía. Dado que mi cuerda no tiene sino una sola braza, al dividir 57.600 por 400 obtengo 144, pudiendo decir que la cuerda tiene 144 brazas de longitud.

SALV. Y no os engañaréis ni siquiera en una pulgada, especialmente si contáis un gran número de vibraciones.

SAGR. V. S. me da frecuentemente ocasión de admirar la riqueza, al mismo tiempo que la gran liberalidad de la naturaleza, cuando de cosas tan familiares, me atrevería in-

cluso a decir, de cosas tan viles, obtenéis conocimientos tan curiosos y originales y, en muchos casos, muy alejados de lo que uno puede imaginarse. Miles de veces he observado atentamente las vibraciones, de modo especial las de las lámparas que en ciertas iglesias cuelgan de cuerdas larguísimas y que, inadvertidamente, ha puesto alguno en movimiento. Lo más que he sacado de tal observación es que he visto lo improbable que es la opinión de aquellos que pretenden que movimientos de este tipo son mantenidos y prolongados por la acción del medio, o sea, del aire, porque me parece que el aire tendría mucho juicio y muy poco que hacer para [141] consumir horas y horas de tiempo empujando con tal regularidad aquí y allá un peso colgado. Pero en cuanto a deducir que este mismo móvil, colgado de una cuerda de cien brazas de longitud, separado del punto más bajo a veces noventa grados y otras uno o medio grado sólo, debería emplear el mismo tiempo en recorrer tanto el arco pequeño como el más grande, es cosa que no se me habría ocurrido nunca; más aún, todavía ahora me parece algo imposible. Pero, una vez más, estoy esperando escucharos con el deseo de que vuestras experiencias, simples y minuciosas, me den razón tal de aquellos problemas musicales que puedan, en parte al menos, tranquilizar mi mente.

SALV. Antes de cualquier otra cuestión, hay que hacer notar que cada péndulo tiene un tiempo de oscilación limitado y fijado de tal modo que sería algo imposible hacer que se moviera con otro período que no sea el que, por naturaleza, le corresponde. Que tome en su mano quien quiera la cuerda en donde está atado el peso y que intente todo lo que le plazca aumentar o disminuir la frecuencia de las oscilaciones: trabajo vano. Por el contrario, nos será suficiente con soplar sobre un péndulo, aunque tenga un peso enorme y esté en reposo, para imprimirle movimiento; movimiento que irá haciéndose bastante considerable si reiteramos nuestros soplidos, con tal de que lo hagamos a intervalos que se correspondan con los tiempos propios de sus vibraciones. Y es que si de un primer soplido le hemos separado medio dedo de la vertical, al añadirle uno más en el momento en que, retornando hacia nosotros, comenzaría su segunda oscilación, le imprimiremos un nuevo movimiento; y así sucesivamente con otros soplidos, con tal de que se los demos en el momento oportuno y no cuando se nos viene encima el péndulo (de esta forma, en vez de secundar el movimiento, lo que haríamos sería impedírselo). Continuando la serie de impulsiones, le daremos al péndulo una cantidad de movimiento [*impeto*] tal que sería necesaria una fuerza muy superior a la de un soplido para pararlo.

SAGR. Yo he observado durante mi infancia que con estas impulsiones dadas a tiempo un hombre solo hacía sonar una campana muy grande, mientras que para pararla se agarraban a la cuerda cinco o seis hombres y todos salían por el aire, sin poder todos ellos controlar las impulsiones que uno solo, de modo muy regular, le había imprimido.

SALV. Es este un ejemplo que aclara mi pensamiento [142] y que no menos que mis premisas viene como anillo al dedo para dar razón de este maravilloso problema de la cuerda de la cítara o del címbalo, la cual mueve y hace realmente sonar otra cuerda, no sólo la templada al unísono, sino a la octava y a la quinta. Una vez tocada, la cuerda comienza y continúa sus vibraciones durante todo el tiempo en que nosotros percibimos su resonancia. Tales vibraciones imprimen en el aire circundante ondulaciones tremolantes, las cuales se extienden a través de grandes espacios, yendo a golpear todas las cuerdas del mismo instrumento, e incluso de otros que estén cercanos. La cuerda, que está afinada al unísono con aquella que ha sido tocada, comienza, al primer golpe, a moverse un poco, al estar dispuesta a vibrar con el mismo período. Y añadiéndole un

segundo, tercero, veinte y muchos más, uniéndose todos en intervalos precisos, acaba recibiendo la misma vibración que la de la primera cuerda, pudiéndose constatar que sus vibraciones tienen la misma amplitud que las de la cuerda primera motriz.

La ondulación que se va propagando por el aire mueve y hace vibrar no sólo a las cuerdas, sino también a cualquier otro cuerpo que esté dispuesto a tremolar y a vibrar con la misma frecuencia de la primera cuerda; de modo que si fijamos al borde del instrumento algunos trozos de cerda o cualquier otra materia flexible, veremos, al tocar el clavicordio, cómo tremola tal o cual cuerpo si es que tocamos la cuerda cuyas vibraciones tienen la misma frecuencia que la suya: los otros no se moverán cuando suene esta cuerda ni aquél tampoco sonará inducido por otra cuerda.

Si con el arco se toca fuertemente una cuerda grave de una viola en las proximidades de un vaso de vidrio limpio y fino, si el tono de la cuerda corresponde al del vaso, éste vibrará y su sonido será perceptible. Que el movimiento ondulatorio se extiende en las proximidades del medio ambiente, alrededor del cuerpo que resuena, puede verse claramente si se hace resonar el vaso en el que se ha echado agua, frotando el borde con la yema del dedo, ya que entonces se percibe que las ondas se van formando en el agua con una perfecta regularidad. Lo mismo se verá, e incluso mejor, si se fija la parte baja del vaso al fondo de un recipiente bastante ancho y en el que el agua alcance hasta el borde del vaso, porque haciéndolo resonar con el mismo procedimiento del dedo de antes, aparecerán las ondas muy ordenadas, expandiéndose a gran velocidad y a gran distancia alrededor [143] del vaso. Muchas veces me ha ocurrido que, al hacer sonar del modo indicado un baso bastante grande y casi lleno de agua, he podido ver, primero, la formación en el agua de ondas muy regulares y, después, si sucedía que el tono del vaso saltaba a una octava más alta, también podía verse que en el mismo instante cada una de las ondas se dividía en dos: hecho que prueba con claridad meridiana que las relaciones numéricas que expresan los intervalos de la octava están en proporción de dos a uno.

SAGR. Lo mismo me ha ocurrido a mí también más de una vez, con gran placer y no sin provecho, ya que permanecí durante mucho tiempo perplejo acerca de la razón [*forme*] de las consonancias, al no parecerme que las explicaciones que dan comúnmente los autores que hasta el momento han escrito sobre la música fuesen lo suficientemente concluyentes. Dicen éstos que el diapasón, es decir, la octava, tiene la proporción de dos a uno; la diapente, a la que nosotros llamamos quinta, de tres a dos, etc.; porque si, estando una cuerda tensa en el monocordio, se hace vibrar primero toda ella y después la mitad, poniéndole en medio una cejilla, se oye la octava; y si se coloca la cejilla en un tercio de la cuerda entera, tocándola primero entera y luego los dos tercios, se obtiene la quinta; de aquí concluyen que la octava depende de la proporción de dos a uno y la quinta de la proporción de tres a dos. Esto, repito, no me parecía suficiente para poder afirmar con toda exactitud que la proporción dos a uno y tres a dos sean las razones [*forme*] naturales de la octava y de la quinta. Los motivos de este rechazo os los doy ahora: tres son los métodos que poseemos para hacer más agudo el tono de una cuerda. El primero es acortarla; el segundo, estirarla o, mejor dicho, afinarla más, y el tercero es hacerla más delgada. Conservando la misma tensión y el mismo grosor de la cuerda, si queremos obtener la octava, será necesario acortarla la mitad; es decir, tocarla primero toda y después sólo la mitad. Pero si, sin modificar la longitud y el grosor, queremos hacerla subir a la octava, no es suficiente el doblar su tensión, sino que habrá que cuadruplicarla, de modo que si antes estaba tensa con el peso de una libra, ahora habrá

que emplear un peso de cuatro libras para que tenga el tono agudo de la octava. Finalmente, si la longitud y la tensión no se modifican, pero queremos obtener la octava con la ayuda de una cuerda más delgada, será necesario que el grosor de esta cuerda sea la cuarta parte de la otra cuerda más grave.

Todo esto que he afirmado de la octava, esto es, que su razón, calculada fijándonos en la tensión o en el grosor de la cuerda, es el cuadrado de la que se obtiene de la longitud, puede aplicarse al resto de [144] los intervalos musicales. De este modo, aquello que nos da la longitud en la proporción de tres a dos, o dicho de otro modo, haciendo sonar la cuerda entera primero y después los dos tercios, lo obtendremos elevando al cuadrado la proporción de dos a tres, tomando la proporción de nueve a cuatro, supuesto que lo intentemos calcular a partir de la tensión o del grosor. Si la cuerda grave está tensa por el peso de cuatro libras, será necesario para hacer aguda la cuerda no seis, sino nueve; y en cuanto al grosor, habrá que aumentarlo en la proporción de nueve a cuatro para conseguir la quinta. Una vez establecidas estas experiencias con toda certeza, no veía que tuvieran ninguna razón los sagaces filósofos para establecer que la razón de la octava sea la de dos a uno más bien que de cuatro a uno y la de la quinta, la de tres a dos en vez que la de nueve a cuatro.

Puesto que es completamente imposible numerar las vibraciones de una cuerda, a causa de la enorme frecuencia de aquéllas, me hubiera seguido preguntando con la misma perplejidad si es verdad que la cuerda en la octava, y, por tanto, más aguda, hace, en el mismo tiempo, un número de vibraciones doble de las que hace la más grave. Pero las ondas, permaneciendo todo el tiempo que nosotros queramos, una vez que hemos hecho sonar y vibrar el vaso, me han demostrado con toda evidencia que desde el momento en que el tono del vaso sube una octava, vemos ante nuestros ojos cómo surgen otras ondas más pequeñas, las cuales, con una gran precisión, cortan en dos a cada una de las primeras.

SALV. Es ésta una bellísima observación que nos permite distinguir, una a una, las ondas producidas por las vibraciones del cuerpo que resuena, y que después se propagan por el aire hasta alcanzar el tímpano de nuestro sonido. La posibilidad, sin embargo, de verlas y observarlas en el agua no dura más que el tiempo que frotemos con el dedo; y aun así, durante este tiempo, no son permanentes, sino que aparecen y se disuelven en un cerrar de ojos, ¿no sería, entonces, una buena idea producir ondas que, con toda nitidez, permanecieran durante largo tiempo, o incluso meses y años, de modo que pudiésemos medirlas y contarlas fácil y cómodamente?

SAGR. Verdaderamente, una tal invención la consideraría yo gran cosa.

SALV. Tal invención fue obra del azar; mí único mérito es el de haber observado el caso, de haberlo tomado a mi cuenta, considerándolo como si hubiera venido como apoyo de una noble especulación, aunque fuese el resultado, en sí mismo, de una necesidad bastante plebeya.

[145] Al pulir con un cincel de hierro afilado una chapa de latón, con el objeto de quitarle algunas manchas, mientras movía el cincel con velocidad, sentí una o dos veces, entre el rechinar de aquél, un silbido que brotaba con mucha fuerza y claridad. Miré entonces la chapa y pude observar una larga y bien ordenada serie de rayaduras muy finas, paralelas entre sí y separadas, las unas de las otras, por intervalos rigurosamente iguales. Volví a repetir la misma operación más y más veces y pude darme cuenta que los cortes solamente aparecían sobre la plancha cuando ésta silbaba debido al roce del cincel. Pero cuando se hacía una pasada sin silbido no había ni la más

mínima sombra de tales rayaduras. Repitiendo, después, una y otra vez el juego, y frotando unas veces con más velocidad y otras con menos, ocurría que el silbido tomaba un tono más agudo o más grave. Observé también que los surcos que quedaban en el metal eran más numerosos cuando el sonido era, a su vez, más agudo, mientras que los más espaciados respondían a los sonidos graves; y si alguna vez el mismo raspado se hacía a mayor velocidad hacia el final en vez de al principio, se percibía cómo se agudizaba también el sonido, así como que las estrías se iban acercando entre sí, aunque siempre en un perfecto orden y manteniendo una equidistancia absoluta. Además, cuando los raspados producían silbidos, sentía cómo temblaba en mi puño el cincel, al mismo tiempo que recorría mi mano una especie de vibración. En fin, el hierro se comportaba igual que nosotros cuando hablamos, primero en voz baja y después en voz alta; y es que cuando emitimos aire sin articular un sonido, no sentimos que se produzca en la garganta y la boca movimiento alguno, mientras que, por el contrario, sentimos una sacudida grande en la laringe lo mismo que en toda la garganta cuando decimos algo en voz alta, especialmente si lo hacemos en tono fuerte y grave.

También noté, en cierta ocasión, que dos de las cuerdas del clavicordio vibraban al unísono con otros dos silbidos, producidos raspando del modo antes indicado, de tonos de lo más distanciados; el intervalo que los separaba era de una quinta perfecta. Midiendo, después, los intervalos de las rayaduras resultantes de uno y otro de los raspados, se veía que cuarenta y cinco de los unos ocupaban el mismo espacio que treinta de los otros, siendo ésta precisamente la razón que se atribuye a la diapente. Pero aquí, antes de continuar, he de advertiros que, de las tres maneras de hacer el tono más agudo, la que vos [146] achacáis a la finura de la cuerda hay que atribuirla, sin ningún género de dudas, al peso. En efecto, la alteración que provendría del grosor se da cuando las cuerdas son de la misma materia. De este modo, una cuerda hecha de tripa, para dar la octava ha de ser cuatro veces más gruesa que otra cuerda también de tripa; y una cuerda de latón, cuatro veces más gruesa que otra de latón también; pero si lo que yo quiero es obtener la octava de una cuerda de tripa con una cuerda de latón, no habré de hacerla cuatro veces más gruesa, sino, más bien, cuatro veces más pesada que la otra; de modo que aquélla de metal no será, en lo que al grosor respecta, cuatro veces más gruesa, sino cuatro veces más pesada, por lo que puede ser que tal cuerda sea a veces más delgada que la de tripa capaz de dar una octava más alta. De aquí que si a dos clavicordios se les ponen cuerdas, a uno de oro y al otro de latón, teniendo ambos la misma longitud, grosor y tensión, al ser el oro casi el doble de pesado, resultará que el clavicordio de oro será aproximadamente una quinta más grave que el otro. Notemos aquí cómo el peso del móvil opone más resistencia al movimiento que su grosor, contra lo que más de uno juzgaría a primera vista; porque podría suponerse que es más razonable pensar que la resistencia del medio a dejarse penetrar debe retrasar más la velocidad de un móvil voluminoso y ligero que uno pesado y delgado; en este caso, no obstante, sucede todo lo contrario.

Pero, volviendo a nuestro tema inicial, digo que las razones de los intervalos musicales no tienen como causa próxima e inmediata la longitud, tensión o grosor de las cuerdas, sino, más bien, la relación numérica de las vibraciones de las ondas del aire, que golpean el tímpano de nuestro oído, el cual, bajo el efecto de tal choque, vibra él también con las mismas frecuencias. Una vez dejado en claro este punto, tal vez podamos encontrar una razón suficientemente válida del hecho de que, de estos sonidos tan diferentes en tono, algunos pares son recibidos por nuestros sentidos con sumo agrado,

otros con menor agrado, mientras que otros nos hieren con un considerable desagrado; todo lo cual no hace sino dar razón de las consonancias más o menos perfectas y de las disonancias. La molestia producida por estas últimas tendría su origen, creo yo, en las pulsaciones discordantes de dos tonos diferentes que golpean a destiempo nuestro tímpano; y serán especialmente crueles las disonancias si los tiempos de las vibraciones son [147] inconmensurables. Una disonancia de este tipo se produciría si, de dos cuerdas al unísono, se toca una con una parte de la otra y que sería a la cuerda entera como el lado del cuadrado a su diagonal: disonancia semejante al intervalo de cuarta aumentada o quinta disminuida. Consonantes y agradables al oído, por el contrario, serán aquellos pares de sonidos que golpeen el tímpano con cierto orden. Tal orden exige, en primer lugar, que las percusiones hechas en el mismo tiempo sean conmensurables en número, a fin de que la membrana del tímpano no tenga que estar sometida al continuo suplicio de plegarse de dos formas distintas, de modo que pueda adaptarse a golpes siempre discordes. La primera, por tanto, y más agradable de las consonancias, será la octava, dado que a cada percusión que dé la nota grave sobre el tímpano corresponden dos percusiones de la aguda; o lo que es lo mismo, a la vibración de la cuerda aguda se unirá, una cada dos veces, la vibración de la cuerda grave y, de todas las percusiones, la mitad se ponen de acuerdo para golpear simultáneamente, mientras que las vibraciones de las dos cuerdas al unísono llegan todas siempre juntas, y al ser como una cuerda sola, no hacen consonancia alguna. La quinta también produce placer, puesto que a cada dos pulsaciones de la cuerda grave corresponden tres de la aguda, de lo que se sigue que, si se cuentan las vibraciones de la cuerda aguda, una de cada tres concuerda con una vibración de la cuerda grave; es decir, dos aisladas se interponen entre cada par de las concordantes; y en la cual se interponen tres. En la segunda, o sea, en el tono que está en la relación de nueve a ocho, una sola vibración sobre nueve de la cuerda aguda concuerda con otra de la cuerda grave; todas las restantes son discordantes, el tímpano sufre al recibirlas y el oído las juzga disonantes.

SIMP. Quisiera ver explicado todo lo dicho de una manera más clara.

SALV. Sea esta línea AB [figura 13] la longitud de onda de una vibración de la cuerda grave, y la línea CD la de una cuerda aguda que da la octava con la otra; dividamos la línea AB en su punto medio y llamémosle E. Es evidente que, comenzando a moverse las cuerdas en los extremos A y C, cuando la vibración aguda haya alcanzado el extremo D, la otra estará todavía en el punto medio E, el cual, al no ser el término del movimiento, no golpea en el momento en que tal cosa ocurra en D. La vibración aguda vuelve, después, de D a C, mientras que la otra pasa de E a B, por lo que las dos percusiones en B y en C coinciden sobre el tímpano. Reiterándose las vibraciones siguientes semejantes, se podrá concluir que CD [148] acabará, una vez sobre dos, al mismo tiempo que la vibración AB. En cuanto a las percusiones de los extremos, éstos coincidirán siempre con la percusión de uno de los extremos C y D, y será siempre el mismo; cosa evidente, ya que si suponemos que A y C golpean juntos, mientras que A pasa a B, C pasa a D, para volver a C, de modo que B y C golpean simultáneamente; y mientras que B vuelve a A, C pasa por D, volviendo a C, de forma que las percusiones de A y C se hacen al mismo tiempo.

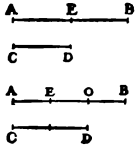


Fig. 13

Imaginemos ahora que las líneas AB y CD son las vibraciones que producen la diapente y cuyos tiempos están en la razón de tres a dos. Dividamos AB, vibración de la

cuerda grave, en tres partes iguales, en E y O, y supongamos que las vibraciones comienzan al mismo tiempo, en los extremos A y C. No hay dificultad alguna en ver que en el momento en que el golpe que se produzca en el extremo D, la vibración AB no habrá llegado más que a O, por lo que el tímpano sólo percibirá la sacudida en D. Durante la vuelta de D a C, la otra vibración pasa de O a B, retrocediendo después a O, tras haber pulsado en B, producida precisamente sola y a contratiempo (cosa digna de tener en cuenta). Y es que, habiendo supuesto que las primeras pulsaciones se dan al mismo tiempo en los extremos A y C, la segunda ha debido de producirse sola en el extremo D, después del tiempo necesario para que se diese el tránsito CD, es decir AO; pero la siguiente, que tiene lugar en B, queda separada de la precedente sólo en la distancia que media entre O y B y que es la mitad. Continuando, después, el retorno de O a A, mientras de C se pasa a D, se producen dos percusiones simultáneamente en A y D.

Vienen después otros períodos semejantes a éstos descritos; es decir, con la interposición de dos pulsaciones aisladas de la cuerda aguda y una percusión de la cuerda grave, también en solitario e intercalándose entre aquellas dos solitarias de la cuerda aguda. De modo que si nos imaginamos el tiempo dividido en momentos [*momenti*], es decir, en partículas mínimas iguales, y suponiendo que en el curso de los dos primeros se pase de A y de C, en donde, como hemos dicho, coinciden dos percusiones, a O y D, en donde se ha producido una percusión; que durante el tercer y cuarto momento se pase de D a C, golpeando en C, y, por otro lado, se pase de O a B y se vuelva a O golpeando en B; y que, finalmente, en el quinto y sexto momento, se pase de O y C a A y D, percutiendo en las dos, tendremos distribuidas en el tímpano las pulsaciones en este orden: primero las de las dos cuerdas en el mismo instante; dos momentos más tarde, una sola; en el tercer momento, otra, [149] igualmente sola; en el cuarto, otra solitaria también; y dos momentos más tarde, o sea, en el sexto, dos pulsaciones unidas. Y aquí se acaba el período y, por decirlo de alguna forma, la anomalía; y este período se repite una y otra vez.

SAGR. No puedo estar callado más tiempo. Me resulta necesario expresar el placer que yo siento al ver cómo se me da razón de una manera tan perfecta de los efectos ante los cuales me he encontrado, durante tanto tiempo, en tinieblas y ciego. Ahora entiendo yo por qué dos notas al unísono no difieren de una sola en absoluto; entiendo también por qué la octava es la consonancia principal y tan parecida al unísono que se la toma por tal y de esta guisa acompaña a las otras. Semejante al unísono he dicho, y es que si bien las vibraciones de las cuerdas al unísono golpean todas en unión, las de la cuerda grave, en la octava, van siempre acompañadas de las de la cuerda aguda, con la interposición de otra de estas últimas, la cual, solitaria y a la misma distancia de sus vecinas, no añade, por así decirlo, nada al juego, por lo que esta consonancia resulta sin gracia y sin fuerza. Pero la quinta, con aquellos contratiempos de los que hablamos, y con la interposición entre los pares de las pulsaciones simultáneas, de dos solitarias de la cuerda aguda y una solitaria de la cuerda grave, y estas tres pulsaciones dándose a intervalos iguales a la mitad del tiempo que transcurre entre las vibraciones pares y las vibraciones solitarias de la cuerda aguda, produce una titilación y un cosquilleo en la membrana del tímpano, que atemperando la dulzura del sonido con algunos matices amargos, da al mismo tiempo la impresión de un beso y un mordisco.

SALV. Como veo que V. S. tiene tanto placer en estas primicias de nuestra conversación, es necesario que os muestre cómo el ojo, él también, y no solamente el oído, puede tener los mismos gustos que aquél. Colgad bolas de plomo o de cualquier otro cuer-

po grave, de tres hilos de distinta longitud, pero tales que, durante el tiempo en que el más largo habrá vibrado dos veces, el más corto haga cuatro y el mediano tres, cosa que tendrá lugar si el más largo tiene dieciséis palmos u otras medidas cualesquiera, el mediano nueve y el más pequeño cuatro. Separadlos a todos juntos de la perpendicular y dejadlos caer después: veréis entonces cómo se entrecruzan y se encuentran en un vago desorden, pero de manera tal que a cada cuarta vibración del más largo los tres restantes llegarán juntos al término de su recorrido; partirán, después, otra vez para comenzar así el mismo movimiento. Esta mezcla de vibraciones corresponde a lo que sería para el oído las de las tres cuerdas, la más alta de las cuales sería la octava y la del medio la [150] quinta. Y si con la misma disposición se manipulan las longitudes de los otros hilos, de modo que sus vibraciones correspondan a las de los otros intervalos musicales, con tal de que sean consonantes, se verán otros tipos de entrecruzamientos, y siempre tales que en tiempos determinados y después de un número determinado de vibraciones, todos los hilos (sean éstos tres o cuatro) se armonizarán para llegar al mismo tiempo al término de sus vibraciones para comenzar desde allí, otra vez, un período igual. Pero si las vibraciones de los dos o más hilos son inconmensurables, de modo que no vuelvan jamás unidos al punto de partida después de un número determinado de oscilaciones o, sin que sean inconmensurables, de modo que no vuelvan jamás unidos al punto de partida después de un número determinado de oscilaciones o, sin que sean inconmensurables, retornan después de largo tiempo y un gran número de vibraciones, entonces la vista se confunde en el orden desordenado de un enredo sin ley, igual que el oído recibe con disgusto los golpes intempestivos de las vibraciones del aire que golpean el tímpano sin orden ni concierto.

Pero ¿a dónde, señores, nos hemos dejado arrastrar durante tantas horas, llevados por tantos y variados problemas y razonamientos? Es ya de noche, y de la materia que queríamos examinar poco, poquísimo o nada hemos tratado; más aún, nos hemos desviado de tal modo que apenas me acuerdo de la introducción del principio y de los pequeños pasos que dimos como hipótesis y principio de las demostraciones que habrían de seguir.

SAGR. Será, pues, mejor que pongamos fin por hoy a nuestros razonamientos y dejemos que nuestros espíritus recobren la calma en el reposo de la noche, para volver mañana (si V. S. tiene el gusto de hacernos tal favor) a las consideraciones deseadas y propuestas como tema fundamental.

SALV. No dejaré de estar presente aquí a la misma hora de hoy para estar a vuestra disposición y disfrutar con ella.

FIN DE LA JORNADA PRIMERA

JORNADA SEGUNDA

[151] SAGR. Mientras el señor Simplicio y yo estábamos esperando la llegada de V. S., tratábamos de recordar la última consideración que propusisteis como principio y fundamento de las conclusiones que intentabais demostrarnos; se refería a la resistencia que oponen todos los cuerpos sólidos a la fractura y que depende de cierto aglutinante, el cual mantiene las partes unidas entre sí de tal modo que sólo ceden y se separan bajo la acción de un poderoso empuje. Intentamos, después, encontrar la causa de tal coherencia, que en algunos sólidos es fortísima, y nos pareció ser ésta, principalmente, el vacío; esto nos dio pie a que hiciéramos una serie de digresiones, las cuales nos ocuparon durante todo el día, alejándonos del tema que en un principio se propuso y que era, como he dicho, la consideración de la resistencia que muestran los sólidos a la fractura.

SALV. Me acuerdo perfectamente. Y tomando de nuevo el hilo de nuestro razonamiento, diremos que cualquiera que sea la resistencia que oponen los cuerpos sólidos, bajo la acción de una fuerza, a la fractura, no hay, al menos, duda alguna de que se da tal resistencia; y aunque esta resistencia es muy grande contra una fuerza aplicada longitudinalmente, es normalmente menor si se trata de una fuerza que actúa transversalmente. Así, por ejemplo, una vara de acero o de vidrio será capaz de resistir longitudinalmente un peso de mil libras, mientras que un peso de cincuenta libras la romperá si fijamos la vara, en ángulo recto con respecto a una pared. Es este segundo tipo de resistencia el que hemos de [152] considerar, intentando descubrir en qué proporción se encuentra en los prismas y cilindros, iguales o no en figura y tamaño, siendo, sin embargo, del mismo material. En esta discusión tomaré como principio suficientemente conocido de la mecánica aquel según el cual se demuestra que una de las propiedades de una barra o, según nuestra terminología, una palanca, es la de que la fuerza está con respecto a la resistencia en una proporción inversa a la que se da entre las distancias que separan el punto de apoyo de la fuerza y resistencia mismas.

SIMP. Esto lo demostró Aristóteles, antes que ningún otro, en su *Mecánica*.

SALV. No tengo inconveniente en que le concedamos la prioridad cronológica, pero por lo que se refiere al rigor de la demostración, me parece que se le debe anteponer, y con gran diferencia, Arquímedes, ya que de una sola proposición de éste, demostrada en su libro *Del equilibrio*,* dependen no sólo las leyes de la palanca, sino también de la mayor parte del resto de los instrumentos mecánicos.

* *Arquímedes*, traducción de T. L. Heath, pp. 189-220.

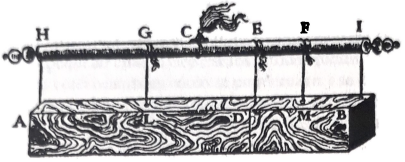


Fig. 14

SAGR. Pero, puesto que este principio es fundamental para todo aquello que tenéis la intención de demostrarnos, ¿no sería sumamente oportuno que nos dieseis la prueba completa de tal supuesto con tal de que no nos lleve, a poder ser, mucho tiempo?

SALV. Como yo también pienso que es esto lo que ha de hacerse, será mejor que os introduzca en el campo de todas las consideraciones que seguirán, de una manera un tanto diferente a la empleada por Arquímedes. En primer lugar, suponiendo que pesos iguales colocados en balanzas con brazos también iguales se mantienen en equilibrio (principio también supuesto por el mismo Arquímedes), pasaré a probaros, más tarde, que es igualmente verdadero que pesos desiguales permanecen en equilibrio si los brazos de la balanza tienen una longitud inversamente proporcional a los pesos colgados de tales brazos. Es lo mismo que ocurre cuando se colocan pesos iguales a distancias iguales o —lo que es igual— pesos desiguales a distancias que sean inversamente proporcionales a los respectivos pesos.

Con el fin de hacer más claro lo que estoy diciendo, dibujaré [figura 14] un prisma o cilindro sólido, AB, que cuelga de los extremos de la barra HI, sostenido por los hilos HA e IB. Es evidente que si lo cuelgo todo del hilo C, situando éste en el punto medio de la balanza HI, el prisma AB permanecerá en equilibrio, ya que una de las mitades de su peso está a un lado y la otra mitad al otro del punto de suspensión C, lo cual es conforme al principio que hemos supuesto. [153] Supongamos ahora que se divide el prisma en partes desiguales por el plano que pasa a través de la línea D, siendo la parte DA mayor que la parte DB una vez realizada la división —y permaneciendo las partes del prisma en el mismo lugar y posición con respecto a la línea HI— atemos un hilo, ED, en el punto E, de modo que sostenga las partes del prisma AD y DB; no cabe la menor duda de que, al no haberse hecho ninguna mutación local en el prisma con relación a la balanza HI, el prisma permanecerá en el estado de equilibrio que ya poseía. Y en la misma situación permanecerá todavía si la parte del prisma que ahora cuelga de los dos extremos por medio de los hilos AH y DE fuese sostenida por un solo hilo, GL, colocado en el punto medio; y, del mismo modo, la otra parte, DB, no cambiará su posición si es sostenida en su punto medio por el hilo FM. Si quitamos ahora, pues, los hilos HA, ED e IB, y dejamos sólo los dos hilos GL y FM, seguiremos manteniendo el mismo equilibrio de antes, con tal de que permanezca también el punto de suspensión C. Pero consideremos, llegados a este punto, que tenemos dos cuerpos pesados, AD y DB, que cuelgan de los extremos G y F de la balanza GF, en la que el equilibrio tiene lugar en el punto C, de modo que la línea CG es la distancia que va desde el punto C al punto de suspensión del cuerpo pesado AD, mientras que la otra parte, CF, es la distancia a la que pende el otro cuerpo grave, DB. Lo único que nos queda por demostrar, pues, es que estas distancias están entre sí en razón inversa a sus pesos; es decir, la distancia GC

es a la distancia CF como el prisma DB es al prisma DA. Tal enunciado hemos de probarlo de la siguiente forma: al ser la línea GE la mitad de la línea EH, mientras que la EF es la mitad también de la EI, toda la longitud GF será la mitad de toda la línea HI, e igual, por tanto, a CI. Si sustraemos ahora la parte común CF, el resto, GC, será igual al resto FI; es decir, a FE. Si, además, añadimos a ambas CE, GE y CF serán iguales. Ahora bien, como GE es a EF, FC es a CG; y como GE es a EF así el duplo al duplo, es decir, HE a EI; o dicho de otra manera, el prisma AD al prisma DB. En consecuencia, igualando las razones y conmutando [*convertendo*], como la distancia GC es a la distancia CF, así es el peso BD es al peso DA, que es lo que se quería demostrar.

[154] Si estamos de acuerdo en lo dicho hasta aquí, pienso que no tendréis la menor dificultad en admitir que los dos prismas, AD y DB, estén en equilibrio en torno al punto C, ya que la mitad de todo el sólido AB está a la derecha de la suspensión C, y la otra mitad está colocada a la izquierda; de este modo, podemos observar algo equivalente a dos pesos iguales dispuestos y colocados a distancias iguales. Si los dos prismas, AD y DB, se transformaran, después, en cubos o esferas, o en cualquier otra figura (con tal de que no cambiemos los puntos de suspensión G y F) no creo que haya nadie que pueda dudar de que en tal caso seguirían permaneciendo en equilibrio en el punto C, puesto que es algo demasiado evidente que el cambio de la figura no trae consigo cambio de peso, siempre que no varíe la cantidad de materia. De todo esto podemos inferir la conclusión general de que dos pesos, cualesquiera que sean, permanecen en equilibrio a distancias inversamente proporcionales a sus pesos.

Una vez establecido este principio, quisiera haceros notar, antes de que pasemos a otras materias, que estas fuerzas, resistencias, momentos [*momenti*], etc., pueden considerarse en abstracto y separados de la materia, o, también, en concreta y asociados a la materia. De esta forma, aquellas propiedades que pertenecen a las figuras, consideradas como inmateriales, sufrirán una serie de modificaciones en el caso de que les añadamos la materia y, consecuentemente, el peso. Así, por ejemplo, si [figura 15] nos imaginamos una palanca, que vamos a llamar BA, la cual, apoyándose en el punto de apoyo E, es utilizada para levantar una piedra de mucho peso, D, es evidente, según el principio que acabamos de demostrar, que la fuerza aplicada en el extremo B será suficiente para equilibrar la resistencia del peso D con tal de que la intensidad de su fuerza [*momento*] mantenga con la de D la misma proporción que tiene la distancia AC con la distancia CB; y esto es cierto en tanto que no consideremos otras fuerzas que no sean la sola potencia B y la resistencia D, como si la misma palanca fuese inmaterial y carente de peso. Si tenemos en cuenta, sin embargo, el peso de la palanca misma, instrumento que unas veces será de madera y otras de [155] hierro, es obvio que si añadimos a la fuerza B dicho peso, se alterará la proporción, por lo que habrá que expresarla de distinta forma. Antes de seguir adelante, por tanto, hemos de ponernos de

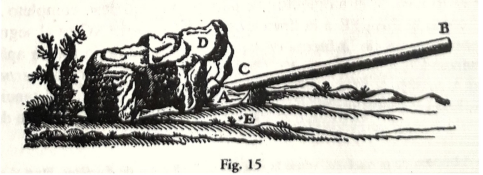


Fig. 15

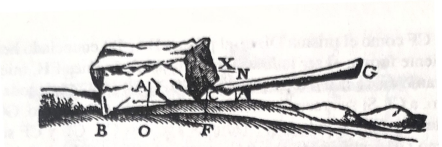


Fig. 16

acuerdo en cómo distinguir entre estos dos puntos de vista; cuando consideremos el instrumento en abstracto, es decir, prescindiendo del peso de su propia materia, diremos que lo estamos *tomando absolutamente*, mientras que si unimos a esas figuras simples y absolutas la materia, incluyendo el peso, llamaremos a tales figuras, así unidas con su respectivo material, *momento o fuerza compuesta*.

SAGR. He de romper forzosamente el propósito que tenía de no permitir más digresiones, pero no sería capaz de concentrarme en lo que sigue si no consigo quitarme de en medio cierta duda que me ha brotado y que es la siguiente: me parece que V. S. compara la fuerza colocada en B con el peso total de la piedra, una parte de cuyo peso, y tal vez la más grande, se apoya, me parece a mí, en el plano horizontal, de modo que...

SALV. He entendido perfectamente; no necesita. añadir nada más V. S. Tenga, sin embargo, presente que yo no he mencionado el peso total de la piedra, sino que he hablado, más bien, de la intensidad [*momento*] que ejerce sobre el punto A, extremidad de la palanca BA, el cual es siempre menor que el peso total de la piedra, variando según la forma y la altura a la que se eleva la piedra.

SAGR. Mi objeción se ha desvanecido, pero me nace una nueva curiosidad: para una comprensión completa de esta materia, me gustaría que se me demostrara, si es posible, cómo se puede averiguar qué parte del peso total es sostenida por el plano subyacente y cuál es la parte que se apoya en el extremo de la palanca A.

SALV. Puesto que puedo daros satisfacción con pocas palabras, no dejaré de hacerlo. Hagamos, con este objeto, una pequeña figura [figura 16]; imaginándonos que el centro de gravedad es A, el cual se apoya en el plano horizontal por medio de la extremidad B, mientras que en el otro extremo se sostiene gracias a la palanca CG. Supongamos que el punto de apoyo está en N y la potencia se aplica en G. Desde el centro, A, y desde el extremo de la palanca, C, tracemos las perpendiculares AO y CF. Sostengo que el momento [*momento*] del peso total está, con respecto al momento [*momento*] de la potencia aplicada en G, en la razón compuesta de la que tienen la distancia GN con respecto a la distancia NC y la de FB con respecto a BO. Tracemos el segmento X cuya razón por respecto a NC es la misma que la FB y la BO; dado que todo el peso A es sostenido por las dos [156] fuerzas colocadas en B y en C, la fuerza B es a la C como la distancia FO es a la OB; sumando, por tanto, las dos fuerzas B y C (o lo que es lo mismo, el momento [*momento*] total del peso completo A) son a la fuerza en C como la línea FB a la línea BO; es decir, como NC es al segmento X; el momento, por su parte, de la fuerza en C es al momento de la fuerza aplicada en G como la distancia GN a la distancia NC. Se sigue de aquí, por la razón *perturbata** que el peso total A es al momento de la fuerza aplicada en G como la distancia GN es al segmento X. La razón de GN a X, por su parte, está compuesta de la razón de GN a NC

* Para la definición de *perturbata*, véase la edición de Todhunter de *Euclides*, libro V, definición 20.

y de la de NC a X; es decir, de FB a BO. En consecuencia, el peso A tiene, con respecto a la fuerza que lo sostiene en G la razón compuesta que se da entre GN y NC, por una parte, y FB y BO, por otra; que es lo que había que demostrar.

Volviendo, ahora, a nuestro tema del principio, una vez que lo que se ha dicho hasta el momento ha quedado claro, se podrá entender sin dificultad:

PROPOSICIÓN I

Un prisma o cilindro sólido de cristal, acero, madera o cualquier otra materia frágil, que sea capaz de sostener un peso muy considerable si se le ata longitudinalmente, se romperá si se le aplica transversalmente (como hemos indicado no hace mucho), aunque el peso sea sensiblemente menor, y tanto más cuanto más supere su longitud a su grosor.

Imaginémonos [figura 17] un prisma sólido, ABCD, fijo en una pared por su parte AB, mientras que el otro extremo sostiene la fuerza del peso E, dando por supuesto siempre que el muro está vertical y el prisma o cilindro está fijo a la pared, formando ángulo recto con ella); es evidente que si se rompe el cilindro, la fractura tendrá lugar en el punto B, que es donde el borde del muro actúa como punto de apoyo de la palanca BC, que es donde se aplica la fuerza; el grosor del sólido BA; por otro lado, es la otra parte de la palanca, en la que se ha colocado la resistencia. Esta resistencia consiste en la separación que ha de hacerse entre la parte del sólido BD, que está fuera del muro, y la parte que está dentro. De todo lo dicho hasta ahora se sigue que la magnitud de la fuerza [*momento*] colocada en C es a la magnitud [*momento*] de la resistencia, consis-

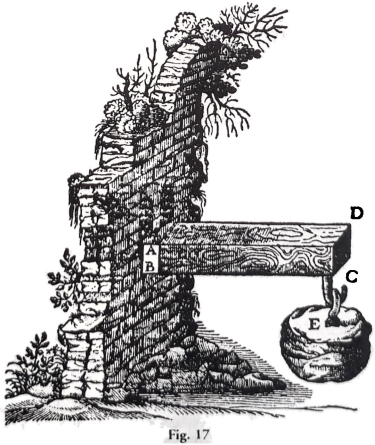


Fig. 17

tente en el grosor del prisma (es decir, en la cohesión de la base BA con la de sus partes contiguas), como [157] la longitud CB es a la mitad de BA. Ahora bien, la resistencia absoluta a la fractura, que opone el prisma BD (esta resistencia absoluta es la que tiene lugar cuando la tracción se hace longitudinalmente, de forma que sean iguales el movimiento del cuerpo que mueve y el del movido) guarda con la resistencia a dejarse romper por obra de la palanca BC, la misma razón que tiene la longitud BC con la mitad de AB en el caso de un prisma, mientras que en el caso de un cilindro sería el radio de su base. Es ésta, pues, nuestra primera proposición.*

Tened presente que esto que acabo de decir hay que entenderlo considerando que hemos prescindido del propio peso del sólido BD, tomado como carente de peso. Si quisiéramos, por el contrario, tener en cuenta su peso, tomándolo conjuntamente con el peso E, deberíamos añadir al peso E la mitad del peso del sólido BD, de modo que siendo, por ejemplo el peso de BD de dos libras y el peso de E de diez libras, habremos de considerar el peso de E como siendo de once libras.

SIMP. ¿Y por qué no como si fuese de doce?

SALV. El peso E, mi querido señor Simplicio, que cuelga del extremo C, presiona sobre la palanca BC con toda su intensidad [*momento*] de diez libras. Del mismo modo, si se hubiese colgado del mismo punto sólo el peso BD, la presión ejercida con toda su intensidad [*momento*] sería equivalente a dos libras. Pero, como bien veis, este sólido está distribuido uniformemente a lo largo de toda la longitud BC, de donde se sigue que las partes más cercanas al extremo B pesan menos que las que están más alejadas. Si contrarrestamos, por tanto, unas y otras, el peso de todo el prisma se puede considerar como concentrado sobre su centro de gravedad, el cual corresponde al centro de la palanca BC. Ahora bien, un peso que cuelga del extremo C tiene una intensidad [*momento*] que es el doble del que tendría si colgara del [158] medio. Si consideramos, pues, los *momentos* de ambos en cuanto colocados en el extremo C, entonces hemos de añadir al peso E la mitad del peso del prisma.

SIMP. He comprendido perfectamente; más aún, si no me engaño, me parece que la fuerza de los dos pesos, BD y E, colocados de esta manera, tendría la misma intensidad [*momento*] que si todo el peso de BD, juntamente con el doble de E, se colgara de la mitad de la palanca BC.

SALV. Así es, justamente, y es cosa que no conviene olvidar. Podemos, entonces, comprender:

PROPOSICIÓN II

Cómo y en qué proporción resista más una vara, o mejor dicho, un prisma más ancho que grueso, a dejarse romper, cuando la fuerza se aplica según su anchura en vez de según su grosor.

Para comprenderlo mejor [figura 18] supongamos una regla *ad* cuya anchura es *ac* y cuyo grosor, bastante más pequeño, es *cb*. La cuestión que nos planteamos es: ¿por qué

* Un error fundamental introducido implícitamente en esta proposición y que se arrastra a lo largo de toda la discusión de la segunda jornada consiste en no advertir que, en dicha viga, debe haber equilibrio entre las fuerzas de tensión y de compresión en cualquier sección transversal. El punto de vista correcto parece

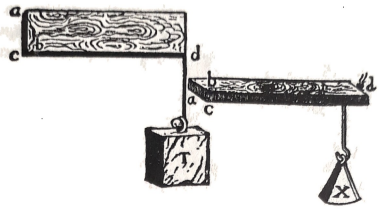


Fig. 18

si la queremos romper de canto, como era el caso de la primera figura, sostendrá el gran peso T, mientras que si se la coloca de plano, como en la segunda figura, no será capaz de resistir el peso X, mucho menor que el peso T? Todo esto es evidente si tenemos presente que, en un caso, el punto de apoyo está en la línea *bc*, mientras que el otro está en la *ca*, siendo iguales las distancias de las fuerzas aplicadas tanto en un caso como en el otro; es decir, la longitud *bd*. Pero, en el primer caso, la distancia de la resistencia al punto de apoyo, que está en la mitad de la línea *ca*, es mayor que la distancia en el otro caso, ya que ésta es la mitad de *bc*. La fuerza del peso T, por su parte, ha de ser mayor que la X en la misma proporción en que la mitad de la anchura *ca* es mayor que la mitad del grosor *bc*, dado que la primera actúa como brazo de palanca de *ca*, mientras que la segunda lo es de *cb*, con el fin de superar la misma resistencia; o lo que es lo mismo: la resistencia de todas las fibras de la base *ab*. La conclusión que se impone, por tanto, es que la misma regla o el mismo prisma que sea más ancho que grueso ofrecerá mayor resistencia a la fractura de canto que de plano y según la proporción que guarden la anchura y el grosor.

Es el momento para comenzar a investigar.

PROPOSICIÓN III

Cuál es la proporción según la cual va creciendo la intensidad [momento] del propio peso [gravità], con relación a la resistencia a la fractura propia de un prisma o de un cilindro que se va alargando en sentido horizontal.

Pienso que este [159] momento va creciendo en proporción al cuadrado de tal alargamiento. Para demostrar lo que acabamos de decir [figura 19], supongamos un prisma o cilindro, AD, firmemente unido al muro en su extremo A y colocado horizontalmente. Supongamos, ahora, que lo alargamos hasta E, al añadirle la parte BE. Es evidente

---

haber sido hallado por primera vez por E. Mariotte en 1680 y por A. Parent en 1713. Afortunadamente, este error no vicia las conclusiones de las proposiciones subsiguientes que sólo se refieren a las proporciones —y no a las fuerzas reales— de las vigas. Siguiendo a K. Pearson (*Historia de la elasticidad* de Todhunter) podemos decir que el error de Galileo consiste en suponer que las fibras del bloque en tensión son inextensibles. O, cometiendo un anacronismo, podemos decir que el error consiste en tomar la fibra inferior de la viga como eje neutro.

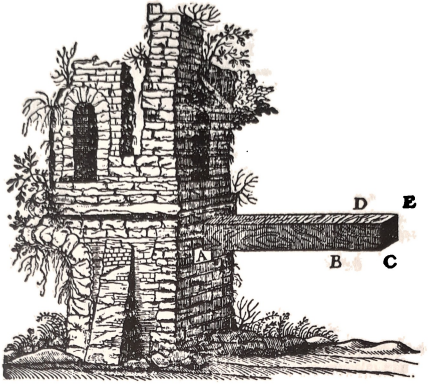


Fig. 19

que el aumento de la palanca AB hasta C aumentará también, sin más —esto es, tomado absolutamente—, la magnitud [*momento*] de la fuerza que tiende a producir la fractura en A según la proporción de CA a BA. Pero, además de esto, el peso del sólido añadido, AB, aumenta la intensidad [*momento*] del peso que presiona según la proporción del prisma AE al prisma AB, siendo tal proporción la misma que se da entre la longitud AC y la AB. Es claro, por tanto, que si unimos los dos aumentos, el de la longitud y el del peso, el *momento* compuesto de ambos es proporcional al cuadrado de cualquiera de los dos. Podemos concluir, en consecuencia, que las magnitudes de las fuerzas [*momenti delle forxe*] de prismas y cilindros del mismo grosor, pero de distinta longitud, están entre sí en proporción al cuadrado de sus respectivas longitudes, o lo que es lo mismo, son proporcionales a los cuadrados de sus longitudes.

[160] Mostremos, ahora, en segundo lugar, en que proporción aumenta la resistencia a la fractura en los prismas y cilindros, con tal de que mantengan la misma longitud al aumentar el grosor. Afirmo lo siguiente:

PROPOSICIÓN IV

En los prismas y cilindros de la misma longitud, pero de distinto grosor, la resistencia a la fractura crece en proporción al cubo de los diámetros de sus respectivos grosores, es decir, de sus bases.

Sean los cilindros en cuestión A y B [figura 20], cuyas longitudes iguales son DG y FH; sus bases son desiguales y los círculos de sus diámetros, CD y EF. Pues bien, afirmo que la resistencia que tiene el cilindro B a la fractura está, con respecto a la del cilindro A como el cubo del diámetro FE al cubo de DC. Y es que si consideramos la resistencia,

tanto la absoluta como la sencilla, que se da en las bases (esto es, en los círculos EF y DC) a dejarse romper por una fuerza que actúe longitudinalmente, no hay duda de que la resistencia del cilindro B es tanto mayor que la del cilindro A cuanto mayor es, a su vez, el círculo EF con respecto del círculo CD, ya que tantas más son, precisamente, las fibras, filamentos o partes cohesivas que mantienen unidas a las partes de los sólidos.

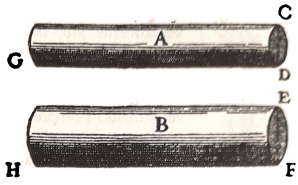


Fig. 20

Obervamos, por otra parte, que al hacer fuerza transversalmente, nos servimos de dos palancas, cuyas partes o distancias en las que se aplican las resistencias son los radios de los círculos DC y EF, mientras que los puntos de apoyo están situados en D y F; las otras partes o distancias en las que se aplican las resistencias son los radios de los círculos DC y EF, ya que las fibras esparcidas a lo largo de toda la superficie de los círculos actúan como si estuviesen en el centro. Teniendo en cuenta, por tanto, tales palancas, podremos comprender que la resistencia del centro de la base EF con respecto a la fuerza de H será tanto mayor que la resistencia de la base CD con respecto a la fuerza colocada en G (siendo las fuerzas G y H de las palancas iguales DG y FH) cuanto mayor sea el radio FE con respecto al radio DC. Así pues, la resistencia a la fractura crece en el cilindro B en relación a la resistencia del cilindro A según la proporción compuesta de los círculos EF y DC y de los radios respectivos, o dicho de otra manera, de sus diámetros. Ahora bien, los círculos son proporcionales al cuadrado de sus diámetros. En consecuencia, la proporción de las resistencias, que es el producto de sus radios, es el cubo de la proporción de [161] dichos diámetros, que es lo que tenía que demostrar. Y puesto que los cubos están en proporción a la tercera potencia de sus lados, podemos concluir, igualmente, que las resistencias de los cilindros de la misma longitud están entre sí, en la misma relación que los cubos de sus diámetros.

De lo que hemos demostrado podemos deducir, además, que:

COROLARIO

Las resistencias de los prismas y de los cilindros de la misma longitud están en proporción sesquiáltera con respecto a [los volúmenes de] los mismos cilindros.

Esto es evidente, ya que los [volúmenes de los] prismas y [de] los cilindros de la misma altura guardan entre sí la misma proporción que sus bases respectivas; es decir, el cuadrado de los lados o del diámetro de sus bases; las resistencias, a su vez (como se ha demostrado ya) están en una proporción equivalente al cubo de sus propios lados o diámetros. Por todo lo cual, la proporción de las resistencias es sesquiátera en relación a la proporción de los mismos sólidos, y consecuentemente, de los pesos de tales sólidos.

SIMP. Antes de continuar, me gustaría poder resolver una dificultad que me acucia. Se trata de lo siguiente: hasta el momento, no he visto que se haya mentado otro cierto tipo de resistencia, que me parece que va disminuyendo en los sólidos a medida que se

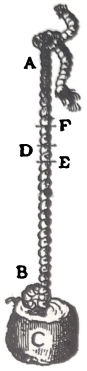


Fig. 21

alargan más y más, teniendo esto lugar no sólo cuando se utilizan transversalmente, sino también longitudinalmente. Es así como vemos que una cuerda muy larga es mucho menos apta para sostener un gran peso que si fuese más corta; de ahí infiero yo que una vara de madera o de hierro podrá sostener bastante más peso si es corta que si es muy larga, suponiendo siempre que la usemos longitudinalmente y no de modo transversal, teniendo igualmente en cuenta su propio peso, que en el caso de la más larga es mayor.

SALV. Si os he entendido bien, sospecho que, en este punto, señor Simplicio, os engañáis, como les ocurre a otros muchos, si queréis decir que una cuerda de una longitud, por ejemplo, de cuarenta brazas, no puede sostener el peso que podría sostener una cuerda de una o dos brazas.

SIMP. Es esto precisamente lo que quería decir y, por el momento, me parece bastante probable.

SALV. Yo, por mi parte, pienso que no sólo es improbable, sino que es falso, y me parece que no me será difícil el convenceros de vuestro error. Supongamos una cuerda, AB, atada por arriba en A mientras tenemos en el otro extremo el peso C, cuya fuerza ha de ser capaz de romper la cuerda. Mostrarme, señor Simplicio, el lugar concreto en el que ha de tener la ruptura [figura 21].

[162] SIMP. Digamos que en D.

SALV. Os pregunto ahora por qué razón ha de romperse en D.

SIMP. Porque en este punto la cuerda no es suficientemente fuerte como para sostener, digamos, cien libras de peso, que es el equivalente a la parte DB y a la piedra C.

SALV. De modo que cada vez que dicha cuerda hubiera de resistir en el punto D las cien libras en cuestión, en D acabaría por romper.

SIMP. Así lo creo.

SALV. Pero, decidme ahora: quien colgase el mismo peso no al final de la cuerda B, sino cerca del punto D, como sería el caso en E, o si atara la cuerda no a la altura de A, sino un poco más arriba de D, como sería el caso en F, decidme, repito, si el punto D sentiría el mismo peso de cien libras.

SIMP. Lo sentiría con tal de que se incluya con la piedra C el trozo de cuerda EB.

SALV. Entonces, si la cuerda sufre en el punto D la tracción de las susodichas cien libras, se rompería según vuesta suposición. Sin embargo, FE es una pequeña parte de toda la cuerda AB; ¿cómo habremos de decir, por tanto, que la cuerda más larga sea más débil que la más corta? Consolaos, pues, de haber caído en un error en el que habéis tenido muchos compañeros, por lo demás muy inteligentes, y sigamos adelante.

Habiendo demostrado que en los prismas y los cilindros aumenta la intensidad de la fuerza de fractura [*il lor momento sopra le propie resistenze*] según los cuadrados de sus longitudes (manteniendo siempre, sin embargo, el mismo grosor) y habiendo demostrado igualmente que los que son de la misma longitud, pero de diferente grosor, aumentan su resistencia según la proporción de los cubos de los lados o diámetros de sus bases, pasamos, por tanto, a investigar qué es lo que ocurre a esos sólidos que son de diferente longitud y grosor al mismo tiempo. En éstos observo que:

PROPOSICIÓN V

Los prismas y los cilindros que difieren en longitud y en grosor tienen una resistencia a la fractura que es directamente proporcional a los cubos de los diámetros de sus bases e inversamente proporcional a sus longitudes respectivas.

[163] Sean [figura 22] dos cilindros tales ABC y DEF. Pues bien, afirmo que la resistencia del cilindro AC es a la resistencia del cilindro DF como es la proporción compuesta del cubo del diámetro AB al cubo del diámetro DE y la proporción de la longitud EF es a la longitud de BC. Hagamos que EG y BC sean iguales, siendo H la tercera proporcional de las líneas AB y DE, mientras que I es la cuarta proporcional; siendo también I a S como EF es a BC. Puesto que la resistencia del cilindro AC es a la resistencia del cilindro DG como el cubo de AB al cubo de DE; esto es, como la línea AB es a la línea I; y puesto que la resistencia del cilindro DG es a la resistencia del cilindro DF como la longitud FE es a la EG; es decir, como la línea I es a la línea S, consecuentemente, por igualdad de proporciones, la resistencia del cilindro AC es a la resistencia del cilindro DF como la línea AB a la línea S. Ahora bien, la línea AB tiene, con respecto a la línea S, la proporción compuesta que se da entre AB e I, por una parte, y entre I y S, por otra. Por todo lo cual, la resistencia del cilindro AC tiene, en relación a la resistencia del cilindro DF, la proporción compuesta que se da entre AB e I (o lo que es lo mismo, entre el cubo de AB y el cubo de DE) y la que se da entre la línea I y la S; es decir, entre la longitud de EF y la longitud de BC, que es lo que quería demostrar.

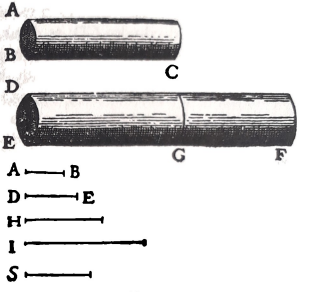


Fig. 22

Después de haber demostrado esta proposición, quisiera que consideráramos lo que ocurre en el caso de cilindros y prismas semejantes. De éstos hemos de demostrar cómo:

PROPOSICIÓN VI

En el caso de cilindros y prismas semejantes, los momentos compuestos [momenti composti], *es decir, lo que resulta de [multiplicar] sus pesos* [gravità] *y sus longitudes, actuando éstas como palancas, tienen entre sí la proporción* sesquiáltera *de la que se da entre las resistencias de sus bases respectivas.*

A fin de demostrar esto, dibujemos [figura 23] los dos cilindros semejantes AB y CD. Mi proposición es que la proporción que la intensidad [*momento*] de la fuerza del cilindro AB para vencer la resistencia de su base B mantiene con la intensidad de la fuerza [*momento*] de CD para vencer la [164] resistencia de la suya, D es *sesquiáltera* de la que tiene la misma resistencia de la base B con respecto a la resistencia de la base, D.

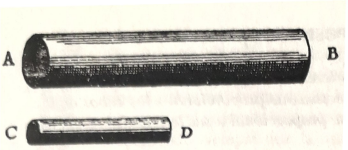


Fig. 23

Y puesto que las magnitudes de las fuerzas [*momenti*] de los sólidos AB y CD para superar las resistencias de sus respectivas bases, B y D, son el resultado de sus pesos [*gravità*] y de las fuerzas de sus palancas, siendo la fuerza de la palanca AB igual a la fuerza de la palanca CD (esto es debido a que la longitud AB es al radio de la base, B, como la longitud CD es al radio de la base D, a causa de la semejanza de los cilindros) se sigue que el momento [*momento*] total del cilindro AB es al momento [*momento*] total del cilindro CD como el peso [*gravità*] sólo del cilindro AB lo es al peso [*gravità*] sólo del cilindro CD; es decir, como el mismo volumen del cilindro AB con respecto al mismo volumen de CD. Ahora bien, éstos se encuentran en una proporción que es el cubo de los diámetros de sus bases respectivas, B y D; por otra parte, las resistencias de las mismas bases, estando entre sí en la misma relación que las mismas bases, están, consecuentemente, en una proporción que es el cuadrado de sus diámetros respectivos. Los momentos [*momenti*] de los cilindros, consecuentemente, están en proporción *sesquiáltera* con respecto a las resistencias de sus bases respectivas.

SIMP. Esta proposición me resulta, ciertamente, no sólo novedosa, sino verdaderamente inesperada y, a primera vista, muy alejada de lo que podría haber pensado, ya que siendo tales figuras semejantes en todos los demás aspectos, hubiera tenido yo como algo cierto que también la intensidad de las fuerzas [*i momenti*] con respecto a las resistencias de dichos cilindros habría de mantener la misma proporción.

SAGR. Es ésta la prueba de aquella proposición que al principio de nuestra conversación dije que me parecía plagada de sombras.

SALV. Lo que os sucede ahora, señor Simplicio, me ocurrió durante cierto tiempo a mí, al creer que las resistencias de los sólidos que son semejantes eran igualmente semejantes, hasta que cierta observación, no muy precisa al principio, me hizo ver que los sólidos que son semejantes no mantienen entre sí una relación que sea proporcional a su tamaño, ya que los que eran más grandes estaban más expuestos a sufrir choques violentos, del mismo modo que los hombres corpulentos salen peor parados en sus caídas [165] que los niños pequeños. Como decíamos, además, al principio, vemos cómo una viga grande o una columna se hace añicos, cosa que no ocurre si se trata de una viga pequeña o de un pequeño cilindro de mármol, aunque todos caigan de la misma altura. Fue esta observación la que me llevó a investigar aquello que ahora estoy intentando demostrar: algo verdaderamente admirable, ya que entre las infinitas figuras sólidas que son semejantes no hay ni siquiera dos en las que la intensidad de la fuerza [*i momenti*] en relación a las resistencias de los mismos se encuentren en la misma proporción.

SIMP. Me hacéis recordar algo que aparece en un pasaje de Aristóteles en sus *Cuestiones mecánicas*, cuando trata de explicar por qué cuanto más largas son las varas de madera tanto más frágiles son y más se doblan, aunque las que son más cortas sean más delgadas y las largas más gruesas. Si mal no recuerdo, encuentra la razón de esto en la palanca simple.

SALV. Cosa certísima es ésa; pero, puesto que la solución no parece que elimine del todo las dudas, monseñor de Guevara,* quien con sus agudísimos comentarios ha enri-

* Obispo de Teano (1561-1641).

quecido e iluminado verdaderamente aquella obra, se extiende con razonamientos muy pertinentes para solucionar todas las dificultades. Sin embargo, queda perplejo a la hora de abordar el punto que nos atañe; o sea, si al aumentar en la misma proporción las longitudes y grosor de dichas figuras sólidas haya que mantener la misma relación en lo que se refiere a su fuerza y resistencia tanto a la fractura como a la flexión. Después de haberlo pensado mucho, he llegado a las conclusiones que inmediatamente he de comunicaros. Antes de nada, demostraré que:

PROPOSICIÓN VII

Entre los prismas o cilindros pesados [gravi] y semejantes, hay uno y sólo uno que llega a encontrarse (a consecuencia de su propio peso) en un estado límite entre romperse y mantenerse todavía entero, de modo que todo aquel que sea más grande incapaz de sostener su propio peso, se romperá, mientras que todo el que sea más pequeño opondrá alguna resistencia a la fuerza que se haga para romperlo.

Supongamos [figura 24] que AB es un prisma pesado [*grave*], el más largo posible capaz de sostener su propio peso; de forma que si se alarga lo más mínimo, se romperá. Afirmo, entonces, que este prisma es único entre todos los que son semejantes (y que son infinitos), capaz de [166] mantenerse en ese estado ambiguo [en el límite entre romperse y no romperse]; de tal modo que cualquier prisma que fuese más grande se rompería bajo la presión de su mismo peso, mientras que si fuese más pequeño no sólo no se rompería, sino que podría ser capaz de resistir incluso un peso adicional al suyo propio. Supongamos ahora, el prisma CE, semejante y mayor que AB. Mi proposición es que tal prisma no podrá mantenerse intacto, sino que se romperá bajo la acción de su propio peso [*gravità*]. Tomemos ahora una parte, CD, de la misma longitud que AB; y puesto que la resistencia de CD es a la de AB como el cubo del grosor de CD al cubo del grosor de AB, es decir, como el prisma CE al prisma AB (puesto que son semejantes), el peso de CE, consecuentemente, es lo más que puede ser sostenido en una longitud como es la del prisma CD. Ahora bien, la longitud de CE es mayor, por lo que el prisma CE acabará rompiéndose. Tomemos, ahora, un prisma más pequeño, FG; se podrá demostrar, del mismo modo (suponiendo que FH es igual a BA) que la resistencia de FG es a la de AB como el prisma FG es al prisma AB, en el caso de que la distancia AB, es decir, FH, sea igual a la distancia FG. Sabemos, sin embargo, que es mayor; luego el momento [*momento*] del prisma FG aplicado en G no es suficiente para romper el prisma FG.

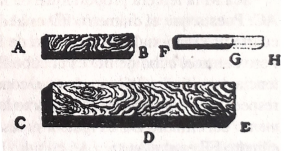


Fig. 24

SAGR. Ha sido una clarísima y breve demostración, haciendo concluyente la verdad y necesidad de una proposición que, a primera vista, parecía tan poco verosímil. Sería necesario, por tanto, alterar no poco la proporción que media entre la longitud y el grosor del prisma más grande, haciéndolo más grueso y acotándolo, si queremos reducirlo

al estado límite [*ancipite*] entre mantenerse y romperse. Pienso que la investigación de tal estado podría ser tan ingeniosa como la anterior.

SALV. Mucho más y mucho más laboriosa. Lo sé muy bien, ya que he tenido que emplear mucho tiempo en encontrarla. Ahora mismo os haré partícipes de ella.

PROPOSICIÓN VIII

Dado un cilindro o prisma que tenga la mayor longitud compatible con no acabar rompiéndose debido a su propio peso, y dada una longitud mayor encontrar el grosor de otro cilindro o prisma que bajo la longitud dada sea el único y el mayor capaz de resistir su propio peso.

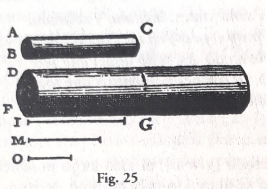


Fig. 25

Supongamos [figura 25] que sea BC el cilindro más grande capaz de sostener su propio peso, siendo la [167] longitud DE mayor que la AC. Necesitamos encontrar el grosor del cilindro que, teniendo la longitud DE, sea el máximo capaz de resistir su propio peso. Sea I la tercera proporcional de las longitudes DE y AC; y como DE es a I, así sea el diámetro FD al diámetro BA. Tracemos ahora el cilindro FE. Mi proposición es la siguiente: entre todos los cilindros semejantes, FE es el mayor y el único capaz de sostener su propio peso.

Sea M la tercera proporcional de las líneas DE e I, y sea O la cuarta. Sea FG igual a AC. Puesto que el diámetro FD es al diámetro AB como la línea DE a I de las DE e I la cuarta proporcional es O, el cubo de FD será al cubo de BA como la línea DE a la O. Pero como el cubo de FD es al cubo BA así es la resistencia del cilindro DG a la resistencia del cilindro BC, por lo que, consecuentemente, la resistencia del cilindro DG con respecto a la del cilindro BC es como la línea DE con respecto a la O. Y puesto que el *momento* del cilindro BC es igual a su resistencia, si se consigue probar que el *momento* del cilindro FE es al *momento* del cilindro BC como la resistencia DF lo es a la resistencia BA (es decir, como el cubo de FD es al cubo de BA, o sea, como la línea DE es a la O), habremos obtenido lo que buscábamos: que el *momento* del cilindro FE es igual a la resistencia aplicada a FD. El *momento* del cilindro FE es al *momento* del cilindro DG como el cuadrado de la línea DE al de la AC; es decir, como la línea DE lo es a la I; pero el *momento* del cilindro DG es al *momento* del cilindro BC como el cuadrado de DF es al cuadrado de BA; es decir, como el cuadrado de DE es al cuadrado de la línea I, o sea, como el cuadrado de I es al cuadrado de M o, lo que es lo mismo, como I es a O. Por tanto, por igualdad de proporciones, el *momento* del cilindro FE es al *momento* del cilindro BC como la línea DE a la O; es decir, como el cubo de DF es al cubo de BA, o sea, como es la resistencia de la base DF a la resistencia de la base BA, que es aquello que buscábamos.

SAGR. Ésta, señor Salviati, es una demostración bien larga y muy difícil de fijarla en la memoria con sólo oírla una sola vez; por eso desearía que V. I. fuese tan amable de repetirla una vez más.

SALV. Haré lo que V. I. manda, pero tal vez sea mejor dar una demostración más rápida y breve, para lo cual habrá que dibujar una figura un tanto diversa.

[168] SAGR. Más grande será el favor, aunque tendréis a bien darme por escrito la que acabáis de demostrar, para que pueda examinarla de nuevo en mis ratos de ocio.

SALV. Lo haré con mucho gusto. Imaginemos ahora un cilindro, A [figura 26] cuya base tenga un diámetro que sea la línea DC, siendo este cilindro A el más grande que pueda sostener su propio peso. Intentamos encontrar un cilindro más grande y que sea el máximo y único capaz de sostenerse sin romperse. Imaginémonos un cilindro semejante a A, con la longitud supuesta, y llamémosle E, siendo el diámetro de su base KL, y MN la tercera proporcional de las líneas DC y KL. MN es, a su vez, el diámetro de la base del cilindro X, que tiene la misma longitud que el cilindro E. Pues bien, afirmo que este X es el que buscamos. Puesto que la resistencia DC es a la resistencia KL como el cuadrado de DC al cuadrado de KL, es decir, como el cuadrado de KL al cuadrado de MN, o sea, como el cilindro E al cilindro X, o como el *momento* E al *momento X*; y como la resistencia KL es a la resistencia MN como el cubo de KL al cubo de MN, o sea, como el cubo de DC al cubo de KL, es decir, como el cilindro A al cilindro E, o lo que es lo mismo, como el *momento A* al *momento E*, entonces por la «analogía perturbada» [*analogia perturbata*] la resistencia DC es a la MN como el *momento A* es al *momento X*. En consecuencia, el prisma X está con relación al prisma A en la misma proporción de *momento* y resistencia.

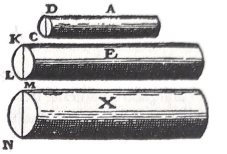


Fig. 26

Pero intentemos hacer una generalización del problema. La proposición será la siguiente:

Dado que un cilindro AC, cualquiera que sea la relación entre su momento y su resistencia, y sea la que sea la longitud de DE, encontrar el grosor del cilindro, cuya longitud supongamos que sea DE, de modo que su momento mantenga con respecto a su resistencia la misma proporción que el momento del cilindro AC mantiene con la suya.

Usando la figura 25 de la misma forma que antes, diremos que, puesto que el *momento* del cilindro FE tiene con respecto al *momento* de la parte DG la misma proporción que la línea DE con la línea I; y puesto que el *momento* del cilindro FG es al *momento* del cilindro AC como el cuadrado de FD al cuadrado de AB, es decir, como el cuadrado de DE al cuadrado de I, o sea, como el cuadrado de I al cuadrado de M, esto es, como la línea I a la línea O, [169] entonces, *ex aequali*, el momento del cilindro FE es al *momento* del cilindro AC como la línea DE a la O; es decir, como el cubo de FD al cubo de AB, o lo que es lo mismo, como la resistencia de la base FD a la resistencia de la base AB, que es lo que se tenía que demostrar.

De lo que se ha demostrado hasta el momento, como podéis ver, se infiere la imposibilidad de poder, no sólo en el arte sino en la misma naturaleza, aumentar los mecanismos hasta dimensiones inmensas, de modo que sería imposible fabricar naves, palacios o templos enormes, de tal forma que sus remos, patios, vigas, cerrojos y, en suma, todas sus partes constituyentes, pudiesen sostenerse. Así, tampoco podría la naturaleza hacer árboles de un tamaño desmesurado, ya que sus ramas acabarían por venirse abajo bajo su propio peso. Sería imposible, igualmente, construir estructuras óseas de hombres, ca-

ballos u otros animales, que pudiesen mantenerse y realizar sus propios menesteres, a no ser que se utilizara un material más duro y resistente que el normal, en caso de que no se les agrandaran tales huesos de modo tan desproporcionado que la figura y aspecto del animal en cuestión llegase a ser algo monstruosamente grande; lo cual, tal vez, intuyó nuestro sagaz poeta cuando, describiendo un grandísimo gigante, decía:

Imposible reconocer su altura,
Tan desmesuradamente grande es su grosor.*

Para poner un breve ejemplo de lo que estoy diciendo, dibujemos la figura de un hueso alargado solamente tres veces más de lo que era, pero habiendo aumentado su grosor en tal proporción que pudiese realizar en el animal grande la función que correspondería al hueso más pequeño en el animal también más pequeño [figura 27]. Por las figuras podéis ver qué desproporcionada es la figura del hueso agrandado. De aquí se deduce que quien quisiera mantener, en su inmenso gigante, las proporciones que se dan entre los miembros de un hombre normal, tendría o [170] bien que encontrar un material mucho más duro y resistente para formar así los huesos, o bien que admitir una disminución de su potencia en relación con la de los hombres de estatura normal; de otro modo, si su altura creciese de manera desmesurada, acabaría derrumbándose por obra de su propio peso. Esto se ve, de modo complementario, cuando observamos cómo, al disminuir los cuerpos, no disminuye en la misma proporción su fuerza, sino que, más bien, se hacen más resistentes al ser más pequeños. Por eso pienso que un perro pequeño podría llevar sobre sí dos o tres perros iguales a él, mientras que no creo que un caballo pudiese sostener ni siquiera un caballo de sus mismas medidas.

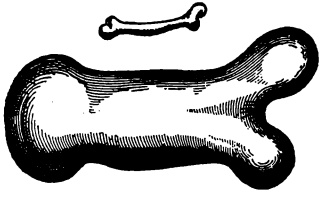


Fig. 27

SIMP. Si así están las cosas, me plantean graves problemas las moles inmensas que vemos en los peces, como es el caso de la ballena, que, según creo, son diez veces más grandes que un elefante y, sin embargo, se sostienen.

SALV. Vuestra objeción, señor Simplicio, me sugiere un aspecto, que me ha pasado inadvertido y que haría posible que los gigantes y otros animales enormes pudiesen mantenerse y moverse con tanta facilidad como los más pequeños. Esto se produciría si no sólo se añadiese fuerza a los huesos y al resto de las partes, cuyo oficio consiste en sostener tanto su propio peso como el que les toque sostener, sino que, permaneciendo la estructura de los huesos con las mismas proporciones, del mismo modo, por no decir más fácilmente, se mantendrían tales esqueletos con tal de que se disminuyera, proporcionalmente, el peso del material de los huesos mismos o de la carne o cualquier otra materia que sobre los huesos se apoye. Es de este segundo artificio del que se ha valido la naturaleza en la formación de los peces, haciendo sus huesos y músculos no sólo muy ligeros, sino carentes de peso [*gravità*].

* «Non si può compartir quanto sia lungo, / Si smisuratamente è tutto grosso.» Ariosto, Orlando Furioso, XVII, 30.

SIMP. Veo con claridad hacia donde se dirige vuestra argumentación. Queréis decir que, al ser el lugar en donde viven los peces el agua, la cual, debido a su densidad [*corpulenza*] o, como dicen otros, a causa de su pesantez [*gravità*] disminuye el peso [*peso*] de los cuerpos que en ella se sumergen. Por tal razón, la materia de la que están hechos los peces, al no pesar, puede ser sostenida por los huesos sin que éstos se resientan. Pero esto no es suficiente, puesto que aunque el resto de la sustancia del pez no pese, pesa, sin embargo, la materia de los huesos, como es obvio. Por eso, ¿quién afirmará que una costilla de ballena, que tiene una magnitud como la de una viga, no pesa muchísimo, de modo que si cae al agua se va [171] al fondo? Estas moles, por tanto, parece que no podrían sostenerse a sí mismas.

SALV. Vuestras objeciones son muy agudas, pero como respuesta a vuestra dificultad: ¿no habéis observado que los peces se mantienen firmes a su arbitrio, inmóviles bajo el agua sin descender hacia el fondo o elevarse hacia la superficie, sin ejercitar ninguna fuerza nadando?

SIMP. Es ésta una observación al alcance de todos.

SALV. El que los peces puedan permanecer firmes, inmóviles, bajo el agua es un argumento muy concluyente en el sentido de que el material de las partes de sus cuerpos corresponde al peso específico [*gravità in spezie*] del agua, de modo que si tienen partes más pesadas [*gravi*] que el agua, es absolutamente necesario que tengan otras tantas menos pesadas [*gravi*], con el fin de que se pueda producir el equilibrio.

Por eso, si los huesos son más pesados, es necesario que los músculos, o cualesquiera materia que constituyan el cuerpo, sean más ligeras, oponiéndose así con su ligereza al peso de los huesos, de forma que en los animales acuáticos sucederá precisamente lo contrario de lo que ocurre en los animales de tierra: en éstos, es tarea de los huesos sostener tanto su propio peso como el de la carne que los recubre, mientras que, en aquellos, es la carne la que sostiene no sólo su propia pesantez, sino la de los huesos también. Resolvemos así la perplejidad ante el hecho de que puedan darse en el agua animales vastísimos, cosa que no ocurre sobre la tierra; esto es, en el aire.

SIMP. Me habéis convencido; lo único que quiero añadir es que éstos que nosotros denominamos animales terrestres, con mayor razón deberían llamarse aéreos, ya que realmente es en el aire donde viven, por el aire están rodeados y aire es lo que respiran.

SAGR. Me complace la manera de razonar del señor Simplicio, tanto su objeción como la solución que ha dado. Puedo entender ahora con facilidad cómo uno de estos peces enormes, arrojado en tierra, tal vez no se podría mantener durante mucho tiempo, sino que resquebrajándose las ligazones de sus huesos, toda su masa se vendría abajo.

SALV. Es eso lo que me inclino a pensar, por el momento; y aproximadamente pienso lo mismo en lo que se refiere al caso de un gran navío, el cual, [172] cuando flota en el mar, no se derrumba bajo el peso y la carga de tantas mercancías y armamentos, mientras que en tierra firme, circundando por el aire, probablemente se derrumbaría. Pero continuemos adelante y demostremos cómo:

> *Dado un prisma o cilindro, justamente con su propio peso más toda la carga que es capaz de sostener, es posible encontrar aquella longitud máxima, más allá de la cual el cilindro se rompería debido a su propio peso.*

Supongamos [figura 28] el prisma AC, juntamente con su propio peso, y también el peso de D, el máximo que puede sostener, sin romperse, en su extremo C. El problema

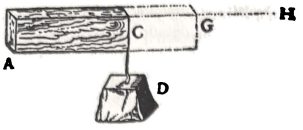


Fig. 28

es encontrar aquella longitud máxima hasta la que se puede alargar dicho prisma sin que se rompa. Ahora bien, como el peso del prisma AC es a la suma de los pesos de AC más el doble del peso D, así es la longitud CA a la AH, siendo AG la media proporcional entre ambas. Afirmo, pues, que AG es la longitud que buscamos. Dado que el momento del peso [*momento gravante*] D en C es igual al *momento* del peso doble de D, colocado en el punto medio de AC, el cual es a su vez el centro del *momento* del prisma AC, el *momento*, por tanto, de la resistencia del prisma AC, que está en A, equivale a dos veces el peso [*gravante*] de D más el peso de AC, aplicados en la mitad de AC. Y, puesto que acabamos de convenir que el *momento* de los pesos así situados (es decir, dos veces D más AC) es al *momento* de AC como la longitud HA a la AC, entre las que AG es la media [proporcional], entonces el *momento* de dos veces D más el *momento* de AC es al *momento AC* como al cuadrado de GA al cuadrado de AC. Ahora bien, el momento del peso [*momento premente*] del prisma GA es al momento de AC como el cuadrado de GA al cuadrado de AC. La longitud, consecuentemente, AG es la máxima que buscábamos; es decir, aquella que, alargado hasta ella, el prisma se mantendría todavía sin romperse, aunque se derrumbaría en cuanto pasara tal medida.

Hasta aquí, hemos examinado los *momentos* y las resistencias de los prismas y de los cilindros sólidos, en los que un extremo permanecía inmóvil mientras en el otro se aplicaba una fuerza con un peso que hacía presión, teniendo en cuenta tal peso sólo, este [173] peso más el peso del sólido mismo o, finalmente, el peso sólo del sólido sin más. Quisiera que viéramos ahora lo que ocurre cuando los mismos prismas o cilindros se apoyan en ambos extremos, o bien sobre un solo punto colocado entre los extremos.

Digo, en primer lugar, que el cilindro que soporta sólo su propio peso y que se le alarga hasta el máximo de longitud que pueda alcanzar, más allá de la cual se parte, o que se mantiene por un solo punto de apoyo colocado en el centro, o también por dos que se sitúen en los puntos extremos, digo, pues, que podrá tener una longitud doble de la que tendría si estuviera sujeto en una pared; esto es, si se sostuviese solamente en un solo extremo. Esto es bastante claro, por sí mismo, ya que si, en el cilindro ABC [figura 29], suponemos que su mitad, AB, es la longitud mayor capaz de sostenerse, teniendo su extremo sujeto en B, del mismo modo podrá sostenerse si, apoya-

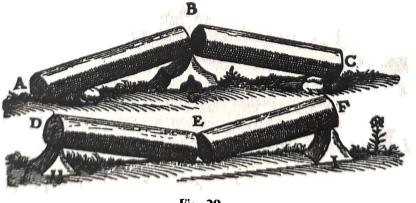


Fig. 29

do en el punto de apoyo G, la otra mitad, BC, le hace contrapeso. Del mismo modo, si la longitud del cilindro DEF es tal que solamente su mitad puede mantenerse fija en el extremo F, es evidente que, colocados los puntos de apoyo H e I bajo los extremos D y F, cualquier *momento* de fuerza o de peso que se añada en E, producirá ahí la ruptura.

Un problema más intrincado lo encontramos cuando, abstrayendo el peso [*gravità*] de tales sólidos, nos proponemos examinar si aquella fuerza o peso que aplicada en la mitad de un cilindro apoyado en sus dos extremos fuese suficiente para romperlo, podría hacer lo mismo si se aplicase en cualquier otro lugar; es decir, estando más cerca de uno de los dos extremos. Así, por ejemplo, si quisiéramos romper un bastón, agarrándolo, para ello, con las dos manos, una en cada extremo, y apoyándolo contra la rodilla, ¿se requeriría la misma fuerza, si en vez de colocar la rodilla en el punto medio, la colocáramos más cerca de uno de los dos extremos?

SAGR. Me parece que este problema lo trata Aristóteles en sus *Cuestiones mecánicas*.

[174] SALV. Lo que él busca no es precisamente lo mismo que buscamos nosotros, ya que él no intenta sino dar con la causa de por qué se necesita menor trabajo para romperlo, teniendo las manos en los extremos de la madera, es decir, lejos de la rodilla, que en el caso en que las manos estén a menor distancia. Da una explicación general, aduciendo como causa el que las palancas son más largas, pues se alargan los brazos al agarrar los extremos. Lo que nosotros nos preguntamos va más allá, ya que queremos saber si, colocando la rodilla en el medio o en cualquier otro punto y teniendo siempre las manos en los extremos, basta la misma fuerza en cualquiera de los puntos.

SAGR. A primera vista parecería que sí, dado que las dos palancas mantienen, de alguna manera, el mismo momento, ya que cuando una se hace más corta la otra se alarga.

SALV. Ved, sin embargo, lo fácilmente que uno es inducido al error y con cuánta cautela y circunspección conviene andar para no dejarse arrastrar por él. Lo que acabáis de decir y que parece, a primera vista, tan verosímil, examinado más atentamente es falso. El que la rodilla, que actúa como punto de apoyo de la palanca, se coloque o no en el medio trae consigo tales consecuencias, que aquella fuerza que sería suficiente para realizar la fractura en el medio, si se aplicase en otro sitio no lo conseguiría, aunque se le añadiese una fuerza cuatro, diez, cien o mil veces mayor. Hagamos una consideración general, primero, acerca de lo que acabamos de decir, para ver después la determinación específica de la proporción según la cual van cambiando las fuerzas, con el fin de conseguir la fractura mejor en un punto que en otro.

Dibujemos, primero [figura 30], la madera AB, que ha de romperse en su punto medio sobre el punto de apoyo C, y dibujemos el mismo cilindro, designado como DE, que ha de romperse por el punto de apoyo F, que se encuentra alejado del punto medio. Es evidente, antes de nada, que, siendo la distancia AC la misma que la BC, la fuerza será compartida del mismo modo en los extremos B y A. En segundo lugar, puesto que la distancia DF disminuye con respecto a la AC, el *momento* de la fuerza colocada en D disminuye igualmente en relación al momento de A, es decir, al aplicado en la distancia CA. Disminuye también según la proporción de la línea DF a la AC, por lo que se necesita, consecuentemente, aumentarlo, a fin de equilibrar o superar la resistencia de F. Ahora bien, la distancia DF puede ir disminuyendo *in infinitum* en relación a la distancia AC. Es necesario, por tanto, poder aumentar *in infinitum* la fuerza que haya de aplicarse [175] en D, de modo que se pueda equilibrar la resistencia en F. Por el contrario, a medida que aumenta la distancia FE con respecto a CB, hay que disminuir la

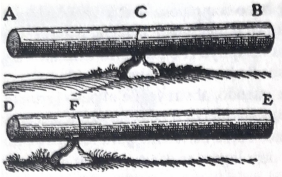


Fig. 30

fuerza que actúa en E de modo que se equilibre la resistencia en F; pero la distancia FE en relación la distancia CB no puede aumentarse indefinidamente con el simple adelanto del punto de apoyo F en dirección al extremo D, ni puede tampoco ser el doble de CB. En consecuencia, la fuerza que se necesita en E para equilibrar la resistencia en F ha de ser siempre más de la mitad de la fuerza que actúa en B. Se comprende, pues, que es necesario aumentar los *momentos* de la suma de las fuerzas que actúan en E y en D infinitamente a fin de equilibrar o superar la resistencia de F a medida que el punto de apoyo F se vaya aproximando al extremo D.

SAGR. ¿Qué podemos decir, señor Simplicio? ¿No debemos confesar que la geometría es el más poderoso instrumento para agudizar el ingenio y ponerlo a punto para discurrir y pensar? ¿No tenía muchísima razón Platón cuando exigía que sus alumnos antes que nada estuvieran bien impuestos en matemáticas? Yo mismo había comprendido muy bien las propiedades de la palanca y cómo a medida que aumentaba o disminuía su longitud aumentaba o disminuía, a su vez, la intensidad [*momento*] de la fuerza y de la resistencia; a pesar de esto, en lo que atañe al presente problema, me engañaba y no en una cosa de poco más o menos sino inmensamente.

SIMP. Comienzo, realmente, a darme cuenta de que la lógica, aunque instrumento indispensable para controlar nuestro razonamiento, no alcanza, en lo que a estimular la invención en la mente se refiere, la agudeza de la geometría.

SAGR. Me parece a mí que lo que la lógica nos enseña es si los razonamientos y las demostraciones que ya poseemos se han desarrollado concluyentemente; no creo, sin embargo, que nos ayude a encontrar los razonamientos y demostraciones concluyentes. Será mejor, de cualquier modo, que el señor Salviati nos demuestre la proporción según la cual va aumentando la intensidad [*momenti*] de las fuerzas para superar así la resistencia de la madera misma según los diversos lugares de fractura.

[176] SALV. La proporción que buscáis procede de tal modo que:

Si a lo largo de un cilindro se escogen dos puntos en los cuales se haya de producir la fractura de tal cilindro, las resistencias de dichos puntos son inversamente proporcionales a los rectángulos formados por las distancias de esos puntos [a los extremos].

Sean A y B [figura 31] las fuerzas mínimas capaces de producir la fractura del cilindro en C, siendo asimismo E y F las fuerzas mínimas capaces de producir la fractura en D. Afirmo que [la suma de] las fuerzas A y B es a [la suma de] las fuerzas E y F como el rectángulo ADB al rectángulo ACB. Pero la suma de las fuerzas A y B es a la suma de las fuerzas E y F como el producto de la suma de las fuerzas A y B con respecto a B, de B con respecto a F y de F con respecto a la suma de F y E. Pero como la suma de las fuerzas A y B es a la fuerza B, así es la línea DB con respecto a la BC; y como la fuerza F es a la

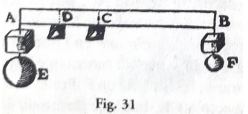


Fig. 31

suma de F y E así es la proporción de la línea DA en relación a la AB. En consecuencia, la suma de las fuerzas A y B y la suma de las fuerzas E y F están en una relación que es el producto de las tres; es decir, de BA con respecto a AC, de DB con BC y de DA con AB. Pero la proporción de DA a AC es el producto de DA con respecto a AB y de AB con respecto a AC. En consecuencia, la suma de las fuerzas A y B es a la suma de las fuerzas E y F como el producto de DA a AB y de DB a BC. Ahora bien, el rectángulo ADB tiene con respecto al rectángulo ACB la proporción que es el producto de DA con respecto a DB y de DB con respecto a BC. Por todo lo cual, la suma de las fuerzas A y B es a la suma de las fuerzas E y F como el rectángulo ADB al rectángulo ACB, que es lo mismo que decir que la resistencia que opera en C es a la resistencia que opone D a la fractura como el rectángulo ADB al rectángulo ACB, que es lo que había que probar.

[177] Como consecuencia de este teorema podemos resolver un problema muy curioso. Es el siguiente:

Dado el peso máximo que pueda mantener un cilindro o un prisma en su punto medio, en donde la resistencia es mínima, y dado un peso mayor que aquél, encontrar en dicho cilindro el punto en el cual este peso más grande es el máximo que se pueda sostener.

Supongamos [figura 32] que tal peso, que es mayor que el peso máximo que sea capaz de sostener el punto medio [D] del cilindro AB, tiene con respecto a dicho peso máximo la proporción que guarda la línea E con respecto a la línea F. El problema es encontrar aquel punto del cilindro que sostenga como máximo al peso en cuestión. Sea G la media proporcional entre E y F y supongamos que, así como E es a G, AD es a S; consecuentemente, S será menor que AD. Supongamos, ahora, que AD sea el diámetro de la mitad del círculo AHD, y en el que AH es igual a S. Unamos, después, H y D, siendo DR igual a HD. Mi proposición es que el punto que buscamos es R; es decir, el punto en el que el peso considerado, y que es mayor que el máximo que puede soportar el punto medio del cilindro D, sería el mayor que podría sostenerse.

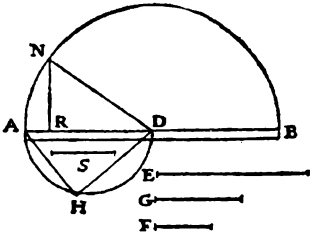


Fig. 32

Trácese el semicírculo ANB sobre la línea AB, trazando la perpendicular RN y uniendo los puntos N y D. Puesto que la suma de los cuadrados de RN y RD es igual al cuadrado de ND (es decir, al cuadrado de AD, esto es, a los de AH y HD) y el cuadrado de HD es igual al cuadrado de DR, entonces el cuadrado de NR (es decir, el rectángulo ARB) será igual al cuadrado de AH, esto es, al cuadrado de S. Pero el cuadrado de S es al cuadrado de AD como la línea F a la E, o sea, como el peso máximo soportado en D al peso mayor, por lo que este peso mayor se sostendrá en R como el peso máximo que se puede soportar, que es lo que intentábamos demostrar.

SAGR. He comprendido perfectamente y empiezo a pensar que, al ser el prisma AB cada vez más fuerte y resistente a la presión en las partes que se van alejando del punto medio, en el caso de vigas muy grandes y pesadas se podría correr una buena porción

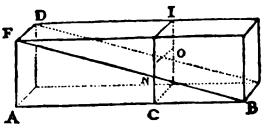


Fig. 33

hacia un extremo aligerando así sensiblemente el peso, cosa que en las techumbres de grandes [178] edificios sería de no poca utilidad y conveniencia. Y algo realmente interesante sería descubrir la forma que habría de tener aquel sólido que fuese capaz de tener todas sus partes igualmente resistentes, de modo que no fuese más fácil romperlo por medio de un peso que actuara en el centro que en cualquier otra parte de dicho sólido.*

SALV. Estaba, a punto precisamente, de deciros algo digno de notarse en este sentido. Haré una pequeña figura para que me comprendáis mejor [figura 33]. Sea DB un prisma, cuya resistencia a la fractura en el extremo AD bajo la acción de una fuerza en el extremo B es tanto menor que la resistencia que habría de encontrarse en CI cuanto menor sea la longitud CB con respecto a la BA, como hemos demostrado ya. Imaginemos, ahora, el mismo prisma sólo que cortado diagonalmente según la línea FB de tal modo que las caras opuestas sean dos triángulos, uno de los cuales —el que mira hacia nosotros— llamaremos FAB. Tal sólido tendrá propiedades diferentes de las estudiadas en el prisma; es decir, la resistencia a la fractura en el extremo C será menor que la que sé da en A, con respecto a la fuerza colocada en B, en la proporción en que la longitud de CB sea menor que la de BA. Esto lo probaremos fácilmente. Suponiendo que el corte CNO sea paralelo al otro corte AFD, la línea FD tendrá, en relación a la CN en el triángulo FAB, la misma proporción que la línea AB con respecto a la BC. Si suponemos, ahora, que en los puntos A y C están colocados los puntos de apoyo de las dos palancas, sus distancias, BA, AF, y BC, CN, serán semejantes. Ahora bien, la intensidad [*momento*] que tiene la fuerza colocada en B actuando a través de la distancia BA sobre la resistencia colocada en la distancia AF, la tendrá la misma fuerza en B con la distancia BC sobre la misma resistencia que se colocara en la distancia CN; pero la resistencia a superar en el punto de apoyo C, colocada a la distancia CN por la fuerza que actúa en B, es menor que la resistencia en A, tanto cuanto el rectángulo CO es menor que el rectángulo AD, esto es, cuanto la línea CN es menor que la AF; es decir, como la CB es menor que la BA. La resistencia, por tanto, a ser rota en C de la parte OCB es tanto menor que la resistencia de todo el DAB a ser roto en A, cuanto la longitud CB es menor que la de AB. Por obra de la diagonal, que corta por la mitad la viga o prisma DB, dejando de lado, claro está, una parte, nos queda una cuña o prisma triangular que es DFA. Tenemos también [179] dos sólidos que poseen propiedades opuestas: uno tiene tanta más resistencia cuanto más se acorta, mientras que el otro, al reducirse, no hace sino perderla en proporción a tal reducción. Siendo esto así, parece del todo razonable, más aún, inevitable, que se dé una línea que corte de tal manera que, al quitar el material superfluo, haga que el sólido obtenga una figura que posea la misma resistencia en cada una de sus partes.

SIMP. Es del todo necesario que la igualdad permanezca al pasar de lo más grande a lo más pequeño.

* El lector observará que aquí intervienen dos problemas diferentes. El sugerido en el último comentario de Sagredo es el siguiente: hallar una viga cuyo máximo esfuerzo tenga el mismo valor cuando una carga constante se desplace de un extremo al otro de la viga.

El segundo problema —el que Salviati procede a resolver— es el siguiente: hallar una viga en todas las secciones transversales de la cual el esfuerzo máximo sea el mismo para una carga constante en una posición fijada.

SAGR. La cuestión es ahora saber dónde hay que dar el corte, en este caso.

SIMP. Tengo la impresión de que es éste un asunto bastante fácil, puesto que si al cortar el prisma diagonalmente, dejando de lado la mitad, la figura que queda adquiere una propiedad que es, precisamente, la opuesta a la del prisma entero, de tal modo que en aquellos puntos en los que éste iba adquiriendo resistencia lo va perdiendo aquél en la misma proporción, me parece que tomando el camino del medio (es decir, quitando solamente la mitad de aquella mitad, que es la cuarta parte del todo) la figura que quede no ganará ni perderá resistencia en todos y cada uno de aquellos puntos en los que la pérdida y la ganancia de las otras figuras eran siempre iguales.

SALV. Os habéis equivocado, señor Simplicio. Como os lo he de demostrar, habréis de ver que lo que se puede cortar y eliminar en el prisma, sin debilitarlo, no es su cuarta parte, sino la tercera. Nos queda, sin embargo, ahora (que es lo que sugería el señor Sagredo) por investigar cuál es la línea por donde debe discurrir el corte. Demostraré que tal línea es parabólica. Antes, sin embargo, es necesario que demostremos cierto lema, y que es el siguiente:

Si se dan dos palancas o balanzas, divididas por sus puntos de apoyo, de modo que las dos distancias a las que actúan las potencias respectivas estén entre sí en proporción al cuadrado de las distancias a las que operan las resistencias, las cuales, a su vez, están entre sí en la misma proporción que sus distancias, entonces las potencias que las sostienen serán iguales.

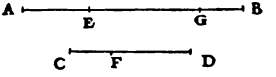


Fig. 34

Supongamos dos palancas, AB y CD [figura 34], divididas en sus puntos de apoyo *e* y F de tal modo que la distancia EB esté con la FD en la proporción del cuadrado de la distancia que se da entre EA y FC. Supongamos [180] también que las resistencias en A y C están en la misma proporción que EA y FC. Digo, entonces, que las potencias que en B y D han de sostener las resistencias A y C son iguales entre sí. Sea EG la media proporcional entre EB y FD: como BE es a EG así serán GE a FD y AE a CF; pero es esta proporción precisamente la que se ha supuesto que se da entre la resistencia de A y de C. Y puesto que como EG es a FD así AE a CF, *permutando*, como GE es a EA así será DF a FC. Pero (al estar divididas las dos palabras, DC y GA, proporcionalmente en los puntos F y E), si la potencia colocada en D equilibra la resistencia de C, equilibraría la misma resistencia C colocada en E, con tal de que se trasladase la potencia a G. Ahora bien, por hipótesis, la resistencia de A tiene con la de C la misma proporción que la AE con la CF, esto es, que BE con EG. En consecuencia, la potencia G, o lo que es lo mismo, D, colocada en B, soportará la resistencia colocada en A, que es lo que se tenía que demostrar.

Una vez que hemos comprendido esto, tracemos la parábola FNB en la cara FB del prisma DB, siendo B el vértice de la parábola que ha cortado dicho prisma. El sólido que queda estará incluido entre la base AD, el plano rectangular AG, la línea recta BG y la superficie DGBF, cuya curvatura sigue la

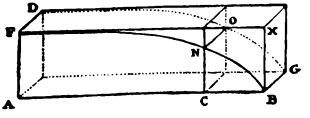


Fig. 35

de la parábola FNB. Lo que afirmo es que tal sólido tendrá la misma resistencia en cualquiera de sus puntos [figura 35]. Supongamos que el sólido en cuestión es cortado por el plano CO, paralelo del AD, y supongamos también que los puntos A y C son los puntos de apoyo de dos palancas una de las cuales tiene como brazos BA y AF mientras que la otra, BC y CN. Pero, puesto que en la parábola FBA, AB es a BC como el cuadrado de FA al cuadrado de CN, es evidente que la distancia BA de una de las palancas tiene con respecto a la distancia BC de la otra una proporción que es igual al cuadrado de la que se da entre la otra distancia AF y la CN. Y, puesto que la resistencia que ha de equilibrarse con la palanca BA guarda con la resistencia que ha de equilibrarse con la palanca BC la misma proporción que el rectángulo DA con el rectángulo OC, que a su vez es la misma proporción que la que se da entre la línea AF y la NC, las cuales son otras tantas distancias de la palanca, es obvio, por el lema ya expuesto, que la misma fuerza que, aplicada a la línea BG, equilibra la resistencia [181] DA, equilibrará también la resistencia CO. Lo mismo podrá demostrarse si se corta el sólido por cualquier otra sección. En consecuencia, este sólido parabólico es igualmente resistente por cualquiera de sus partes.

Se puede demostrar ahora que si se secciona el prisma siguiendo la parábola FNB, se elimina un tercio, porque la semiparábola FNBA y el rectángulo FB son las bases de dos sólidos que están comprendidos entre los dos planos paralelos, es decir, entre los rectángulos FB y DG, por lo que guardan entre sí la misma proporción que sus bases respectivas. Ahora bien, el [área del] rectángulo FB es vez y media [*sesquiáltero*] la semiparábola FNBA; por tanto, si cortamos el prisma siguiendo la parábola, se elimina la tercera parte. De todo lo cual puede verse cómo disminuyendo el peso en más de un treinta y tres por ciento, se pueden hacer techumbres de vigas sin que disminuya en un ápice su fuerza. Esto puede ser de gran utilidad en el caso de naves de gran tamaño, sobre todo, a fin de sostener las cubiertas, teniendo presente que en tales construcciones la ligereza es de suma importancia.

SAGR. Las ventajas que se derivan son tantas que sería prolijo, e incluso imposible, enumerarlas todas. Por mi parte, pasando esto por alto, me gustaría saber cómo es posible que la disminución de peso tenga lugar según las proporciones dichas. Entiendo perfectamente que el corte a través de la diagonal quite la mitad del peso; pero que el corte realizado de forma parabólica quite la tercera parte del prisma es algo que puedo creerlo por la confianza que me merece el señor Salviati; con todo, en este caso, me gustaría que en vez de tener fe pudiera tener ciencia.

SALV. Os gustaría tener la demostración de que lo que excede de un prisma al volumen de eso que nosotros hemos llamado sólido parabólico, es la tercera parte del prisma entero. Lo demostré ya en otra ocasión. Intentaré, de cualquier modo, acordarme de toda, la demostración, para la cual, según creo recordar ahora, me sirvió cierto lema de Arquímedes, recogido en su libro *De las espirales*.* Se trata de lo siguiente: dado el número de líneas que se quiera, diferentes en longitud unas de otras según una diferencia común que es igual a la más corta de tales líneas y dado, también, otro número igual de líneas, cada una de las cuales es igual a la más grande de las primeras, la suma de los cuadrados de todas estas líneas será menor que el triple de los cuadrados de las líneas primeras. Sin [182] embargo, será bastante más que el triple de las que quedan tras restar el cuadrado de la más grande.

* Para una demostración del teorema aquí citado, véanse las *Obras de Arquímedes* en la traducción de T. L. Heath (Cambridge University Press, 1897), pp. 107 y 162.

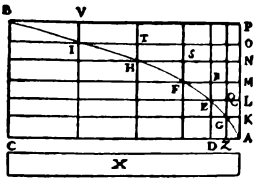


Fig. 36

Esto supuesto, inscribamos la línea parabólica AB en el rectángulo ACBP [figura 36]. Hemos de probar que el triángulo mixto BAP, cuyos lados son BP y PA, mientras que la base es la parábola BA, es la tercera parte de todo el rectángulo CP. En caso de que esto no sea cierto, ha de ser más grande o más pequeño que un tercio. Supongamos que sea menor, y llamemos X lo que le faltaría para ser un tercio. Si dividimos, después, sin interrupción, el rectángulo CP en partes iguales por medio de líneas paralelas a los lados BP y CA, llegaremos, al final, a partes tales que una de ellas ha de ser más pequeña que el espacio X. Ahora bien, supongamos que sea una de esas partes el rectángulo OB y hagamos pasar, a través de los puntos por los que las otras paralelas cortan la parábola, las paralelas a AP. Podemos circunscribir, ahora, en torno a nuestro triángulo mixto, una figura compuesta de rectángulos, como BO, IN, HM, FL, EK y GA; dicha figura será también menor que la tercera parte del rectángulo CP, ya que lo que excede tal figura con respecto al triángulo mixto es mucho menor que el rectángulo BO, el cual es también más pequeño que el espacio X.

SAGR. Más despacio, por favor, puesto que no veo cómo el exceso de esta figura circunscrita sobre el triángulo mixto sea mucho menor que el rectángulo BO.

SALV. ¿No es el rectángulo BO igual a todos esos rectángulos por los que pasa nuestra parábola? Me refiero a los BI, IH, HF, FE, EG y GA, de los que sólo una parte queda fuera del triángulo mixto. ¿No se ha supuesto, además, que el rectángulo BO es menor que el espacio X? Por tanto, si, como se nos podría objetar, el triángulo juntamente con X era igual a la tercera parte del rectángulo CP, la figura circunscrita, la cual añade al triángulo menos espacio que X, será menor aún que la tercera parte del mismo rectángulo CP. Ahora bien, esto no puede ser, ya que esta figura es mayor que la tercera parte. En consecuencia, no es cierto que nuestro triángulo mixto sea menor que un tercio del rectángulo.

[183] SAGR. Me habéis aclarado la dificultad que tenía. Es necesario, ahora, demostrar que la figura circunscrita es mayor que la tercera parte del rectángulo CP, tarea que no me parece nada fácil.

SALV. No, no hay gran dificultad. Dado que en la parábola el cuadrado de la línea DE tiene con respecto al cuadrado de la ZG la misma proporción que la línea DA con respecto a la AZ, que es la misma que tiene el rectángulo KE con respecto al rectángulo AG (al ser las alturas AK y KL iguales), la proporción que tiene, entonces, el cuadrado de ED en relación al cuadrado de ZG, o sea, el cuadrado de LA con respecto al cuadrado de AK, es la misma que tiene el rectángulo KE respecto del rectángulo KZ. De la misma manera, se puede demostrar que el resto de los rectángulos, LF, MH, NI y OB, están entre sí en la misma proporción que los cuadrados de las líneas MA, NA, OA y PA. Veamos, ahora, cómo la figura circunscrita está compuesta de algunos espacios que guardan entre sí la misma proporción que se da entre los cuadrados de las líneas que difieren entre sí según diferencias que son iguales a la mínima y cómo el rectángulo CP está compuesto de otros tantos espacios, cada uno de los cuales es igual al mayor, siendo todos los rectángulos iguales a OB. En consecuencia, según el lema de Arquímedes, la figura circunscrita es mayor que la tercera parte del rectángulo CP;

pero era también menor, lo cual es imposible; luego el triángulo mixto no es menor que un tercio del rectángulo CP.

Del mismo modo afirmo que no puede ser más grande. Y es que si es más grande que un tercio del rectángulo CP, supongamos también que el espacio X es igual a lo que sobre en el triángulo con respecto a la tercera parte del rectángulo CP; y hecha la división y subdivisión del rectángulo, reduciéndolo a rectángulos siempre iguales, se llegará a uno que será menor que el espacio X. Sea tal rectángulo, más pequeño que X, BO. Una vez que hemos inscrito en el triángulo mixto, al igual que antes, una figura compuesta de los rectángulos VO, TN, SM, RL y QK, esta figura no será tampoco menor que la tercera parte del rectángulo grande CP. Vemos que el triángulo mixto excede a la figura inscrita en menos de lo que aquél excede a la tercera parte del rectángulo CP, pues el exceso del triángulo respecto a la tercera parte del rectángulo CP es igual al espacio X, el cual es menor que el rectángulo BO, mientras que éste es menor aún que el exceso del triángulo con relación a la figura inscrita en éste. Y es que a tal rectángulo BO, son iguales todos los rectángulos AG, GE, EF, FH, HI e IB, siendo el exceso del [184] triángulo respecto a la figura inscrita menos que la mitad de todos estos últimos rectángulos. Excediendo el triángulo a la tercera parte del rectángulo CP (en un espacio equivalente a X), más de lo que excede a la figura inscrita, tal figura ha de ser mayor que la tercera parte del rectángulo CP. Ahora bien, es menor, según el lema que hemos supuesto, porque el rectángulo CP, en cuanto que es la suma de todos los rectángulos máximos, tiene, con respecto a los rectángulos que componen la figura inscrita, la misma proporción que la suma de todos los cuadrados de las líneas iguales a la máxima tiene, con respecto a los cuadrados de las líneas que tienen una diferencia común, una vez que hayamos eliminado el cuadrado de la máxima. Ahora bien (como sucede con los cuadrados), toda la suma de los máximos (que no es sino el rectángulo CP) es mayor que el triple de la suma de los que tienen una diferencia común —exceptuando el máximo— y que componen la figura inscrita. El triángulo mixto, en consecuencia, no es ni mayor ni menor que la tercera parte del rectángulo CP; es, por el contrario, igual.

SAGR. Ha sido una bella e ingeniosa demostración, y tanto más cuanto que nos da también la cuadratura de la parábola, al mostrarnos que es cuatro tercios [*sesquiterza*] del triángulo inscrito,* con lo que demostramos lo que Arquímedes demostró con dos series diferentes y admirables de proposiciones. Este mismo teorema ha sido demostrado, recientemente, por Luca Valerio,** el Arquímedes de nuestro tiempo, apareciendo su demostración en el libro que escribió acerca de los centros de gravedad de los sólidos.

SALV. Un libro que, realmente, no va a la zaga de los escritos por los geómetras más famosos tanto del presente como de los siglos pasados y que cuando cayó en las manos de nuestro académico le hizo desistir de continuar sus investigaciones sobre el mismo tema, ya que se dio cuenta de que todo estaba descubierto y perfectamente demostrado por el mismo señor Valerio.

SAGR. Yo estaba informado de esto por medio [185] del mismo académico, rogándole, entonces, que me permitiera ver sus demostraciones que ya había hallado antes de consultar el libro del señor Valerio; pero mi intento fue vano.

SALV. Tengo yo una copia de ellas y os la he de enseñar. Podréis así tener el placer de contemplar los distintos métodos que utilizan ambos para intentar llegar a las mis-

* Distíngase cuidadosamente entre este triángulo y el «triángulo mezclado» mencionado más arriba.

** Eminente matemático italiano, contemporáneo de Galileo.

mas conclusiones y sus demostraciones pertinentes. Algunas de estas demostraciones se explican de modo diferente aunque sean, de hecho, igualmente correctas.

SAGR. Tendré un gran placer en verlas y V. I., cuando vuelva a uno de nuestros encuentros regulares, me hará el favor de traerlas consigo. Pero, mientras tanto, considerando la resistencia de un sólido obtenido a partir de un prisma mediante un corte parabólico, operación no menos bella que útil en muchas obras de mecánica, sería buena cosa para los artesanos que tuvieran una regla fácil y cómoda que les permitiera trazar tal parábola sobre el plano de la misma.

SALV. Hay muchos modos de trazar tales líneas, pero hay dos, sin embargo, que aventajan al resto por muy fáciles que sean. Uno de ellos es verdaderamente maravilloso, puesto que con él (en menos tiempo que otro con la ayuda del compás sería capaz de trazar con precisión sobre el papel cuatro o cinco círculos de distinto tamaño) yo podría trazar treinta o cuarenta líneas parabólicas no menos exactas y perfectas que las circunferencias de aquellos círculos.

Tomo una bola de bronce absolutamente redonda, no más grande que una nuez. Esta bola lanzada sobre un espejo de metal, colocado verticalmente, aunque un poco inclinado, de modo que la bola pueda deslizarse a lo largo del espejo dejando así sus huellas en su movimiento, describe y señala una parábola muy sutil y muy fina, más ancha o más estrecha según que se haya lanzado desde una altura mayor o menor. Vemos, pues, mediante esta clara y concreta experiencia, que el movimiento de los proyectiles discurre de modo parabólico. Este efecto fue nuestro amigo el primero en observarlo y quien dio la demostración en su libro acerca del movimiento, que estudiaremos juntos en la próxima reunión. Para que la bola describa la parábola tal y como lo hemos dicho hay que calentarla y humedecerla un poco, cosa que se puede [186] hacer con la misma mano, de forma que deje más fácilmente sus huellas.

La otra manera de trazar la línea sobre el prisma es la siguiente. Sujétense dos clavos en una pared a una altura convenida y al mismo nivel. La distancia entre ellos ha de ser el doble de la anchura del rectángulo sobre el que queremos trazar la semiparábola. Colguemos de estos dos clavos una cadena muy fina y tan larga que su incurvación se extienda tanto como la longitud del prisma. Esta cadena se incurva formando una parábola,* de modo que si vamos punteando en la pared el camino que recorre tal cadena, tendremos así descrita una parábola entera, que podemos dividir en dos partes iguales trazando una línea vertical desde el punto medio a aquellos dos clavos. Transferir, después, tal línea, sobre las caras opuestas del prisma no tiene la menor dificultad, de modo que cualquier artesano medianamente experimentado puede hacerlo. Se podría, incluso, con la ayuda de las líneas geométricas trazadas por el compás** de nuestro amigo, ir punteando sobre la cara del prisma la misma línea.

Hemos demostrado hasta el momento tantas conclusiones referentes a la resistencia a la fractura de los sólidos al haber abierto por primera vez las puertas de tal ciencia, suponiendo conocida la resistencia ofrecida por el sólido a la tracción [*resistenza per diritto*], que podremos, consecuentemente, seguir adelante descubriendo más y más conclusiones cuyo número es infinito en la naturaleza. De momento, lo único que quiero añadir por hoy a nuestros razonamientos es el estudio de las resistencias de los sóli-

* Actualmente, es bien sabido que dicha curva no es una parábola, sino una catenaria, la ecuación de la cual fue dada por primera vez cuarenta y nueve años después de la muerte de Galileo, por Jacobus Bernoulli.

** El compás geométrico y militar de Galileo, descrito en la Edición Nacional, vol. 2.

dos vacíos, de los que se sirven, mil y una veces, tanto el arte como la naturaleza con el fin de aumentar en gran medida la solidez, sin aumentar, sin embargo, el peso. Así se ve en los huesos de los pájaros y de muchísimas cañas, las cuales son muy resistentes a doblarse y romperse. Si una brizna de paja, que sostiene una espiga más pesada que ella misma, estuviera hecha con la misma cantidad de materia, aunque maciza, [187] tendría mucha menos resistencia a la hora de doblarse o romperse. Por esta razón, el arte ha observado y lo ha confirmado la experiencia, que una lanza vacía o un tubo de madera o de metal es mucho más firme que si el mismo peso y longitud fuesen macizos, ya que en este caso serían más delgados. Es el arte el que se las ha ingeniado en vaciar las picas cuando quiere hacerlas fuertes y ligeras. Mostremos, por tanto, cómo:

Las resistencias de dos cilindros de la misma cantidad de materia [eguali] y de la misma longitud, uno de los cuales esté vacío y el otro sea macizo, guardan entre sí la misma proporción que sus diámetros.

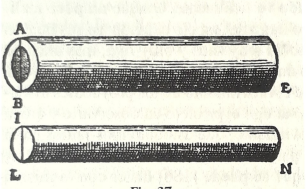


Fig. 37

Sea la caña o cilindro vacío AE [figura 37] mientras que el cilindro macizo es IN; ambos tienen el mismo peso y la misma longitud. Afirmo que la resistencia a la fractura de la caña AE tiene, con respecto a la resistencia del cilindro sólido IN, la misma proporción que el diámetro AB con el diámetro IL. Esto es bastante claro, puesto que siendo la caña y el cilindro iguales en cantidad de materia y en longitud, el círculo IL, base del cilindro, será igual a la rosquilla [*ciambella*] AB, base de la caña AB (llamo rosquilla [*ciambella*] a la superficie que queda si quitamos un círculo menor de un círculo concéntrico mayor), por lo que sus resistencias absolutas serán iguales. Pero, puesto que al romper transversalmente el cilindro IN, nos servimos de la longitud IN como palanca y del punto L como punto de apoyo, siendo el radio o el diámetro LI la contrapalanca, mientras que en la caña la parte de la palanca, esto es, la línea BE es igual a la LN, siendo la contrapalanca, más allá del punto de apoyo B, el radio o diámetro AB, se hace patente que la resistencia de la caña es superior a la del cilindro sólido en la proporción en la que el diámetro AB supera al diámetro IL; que es lo que [188] buscábamos. Por tanto, aumenta la solidez en la caña vacía más que en el cilindro sólido según la proporción de los diámetros, siempre y cuando sean ambos de la misma materia, peso y longitud. No estará de más, por tanto, que investiguemos qué es lo que ocurrirá en los casos en los que las cañas y cilindros sean, indistintamente, de la misma longitud, aunque con pesos desiguales y más o menos vacíos.

Demostraremos en primer lugar que:

Dada una caña vacía, se puede hallar un cilindro macizo (de resistencia) igual.

Es muy fácil realizar esta operación. Sea la línea AB [figura 38] el diámetro de la caña y CD el de la parte vacía. Aplíquese al círculo mayor la línea AE igual al diámetro CD y únase E con B. Puesto que en un semicírculo, AEB, resulta que el ángulo E es recto,

el [área del] círculo cuyo semidiámetro es AB será igual a [las áreas de] los dos círculos de diámetros AE, EB. Ahora bien, AE es el diámetro del hueco de la caña; por consiguiente, el [área del] círculo de diámetro EB será igual [en área] a la rosquilla AM, con lo que el cilindro sólido cuya base sea un círculo de diámetro EB será igual a la caña, teniendo la misma longitud. Una vez demostrado esto, podremos sin dificultad:

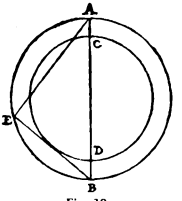


Fig. 38

Hallar en qué proporción están las resistencias de una caña y de un cilindro, cualesquiera que sean, con tal de que tengan la misma longitud.

Sea la caña ABE y el cilindro de igual longitud RSM [figura 39]. Se trata de encontrar la proporción que guardan entre sí sus respectivas resistencias. Hallemos, mediante la solución al problema anterior, el cilindro ILN igual a la caña y de la misma longitud. Sea la línea V cuarta proporcional de las líneas IL, RS (diámetros de las bases de los cilindros IN, RM). Lo que afirmo es que la resistencia de la caña AE es a la del cilindro RM [189] como la línea AB es a la V. Siendo la caña AE igual [en volumen] que el cilindro IN y de su misma longitud, la resistencia de la caña será a la del cilindro como la línea AB a la IL. Ahora bien, la resistencia del cilindro IN es a la del RM como el cubo IL al cubo RS, es decir, como la línea IL a la V. Así pues, *ex aequali*, la resistencia de la caña AE tiene con la del cilindro RM la misma proporción que tiene la línea AB con la V, que es lo que buscábamos.*

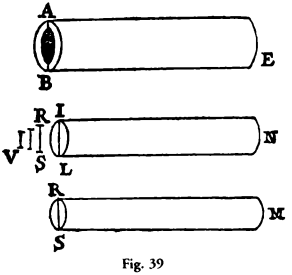


Fig. 39

FIN DE LA JORNADA SEGUNDA

* El modo brusco en que termina esta jornada pone de manifiesto su carácter inconcluso. Lo mismo ocurre con el poco ceremonioso comienzo de la siguiente, en la que ha de suponerse que Salviati lee el texto —originalmente latino— de nuestro académico, que se retoma en cada teorema.

JORNADA TERCERA

SOBRE EL MOVIMIENTO LOCAL

[190] Expongamos, ahora, una ciencia nueva acerca de un tema muy antiguo. No hay, tal vez, en la naturaleza nada más viejo que el movimiento y no faltan libros voluminosos sobre tal asunto, escritos por los filósofos. A pesar de todo esto, muchas de sus propiedades, muy dignas de conocerse, no han sido observadas ni demostradas hasta el momento. Se suelen poner de manifiesto algunas más inmediatas, como la que se refiere, por ejemplo, al movimiento natural [*naturalem motum*]* de los cuerpos que al descender se aceleran continuamente, pero no se ha demostrado hasta el momento la proporción según la cual tiene lugar tal aceleración. En efecto, que yo sepa nadie ha demostrado que un móvil que cae partiendo de una situación de reposo recorre, en tiempos iguales, espacios que mantienen entre sí la misma proporción que la que se da entre los números impares sucesivos comenzado por la unidad.**

Se ha podido observar que los cuerpos lanzados, es decir, los proyectiles, describan una linea curva de cierto tipo; ahora bien, que tal línea es una parábola no lo ha demostrado nadie. Que esto es así lo demostraré juntamente con otras muchas cosas, también dignas de ser conocidas; y lo que es todavía más importante, se abren las puertas de una inmensa e importantísima ciencia, de la que estas investigaciones nuestras pondrán los fundamentos. Otras mentes, más agudas que la mía, penetrarán, después, hasta sus lugares más recónditos.

Dividiremos lo que vamos a tratar en tres partes. En la primera, consideraremos aquello que atañe al movimiento constante o uniforme. En la segunda parte trataremos del movimiento uniformemente acelerado. En la tercera, finalmente, del movimiento violento, es decir, de los proyectiles.***

* A partir de Aristóteles, se conocían como movimientos naturales aquellos que correspondían a las cualidades ponderales de los cuerpos; es decir, los movimientos encargados de situar a los móviles en el lugar que les corresponde por naturaleza. Son violentos, por el contrario, los que los alejan de sus lugares naturales.

** Véase más adelante la demostración en el corolario I al teorema II.

*** Esta última parte será objeto de estudio en la cuarta jornada.

SOBRE EL MOVIMIENTO UNIFORME

[191] Sobre el movimiento constante o uniforme necesitamos una sola definición, que formulo así:

DEFINICIÓN

Por movimiento igual o uniforme entiendo aquel en el que los espacios recorridos por un móvil en tiempos iguales, cualesquiera que éstos sean [*quibuscumque*], son iguales entre sí.

ADVERTENCIA

Nos ha parecido oportuno añadir a la vieja definición (que habla simplemente del movimiento igual en cuanto que en tiempos iguales se recorren espacios iguales) la expresión *cualesquiera*, es decir, para todos los tiempos que sean iguales. En efecto, puede suceder que un móvil recorra espacios iguales en determinados tiempos iguales, mientras que distancias recorridas en fracciones de tiempo más pequeñas pueden no ser iguales, aunque lo sean dichos intervalos más pequeños. De la definición que acabamos de dar se siguen cuatro axiomas; a saber:

AXIOMA I

En el caso de uno y el mismo movimiento uniforme, el espacio recorrido en un tiempo mayor es mayor que el espacio recorrido durante un intervalo de tiempo menor.

AXIOMA II

En el caso de uno y el mismo movimiento uniforme, el tiempo durante el cual se recorre un espacio mayor es también mayor que el tiempo empleado para recorrer un espacio menor.

AXIOMA III

El espacio recorrido en un tiempo dado a mayor velocidad, es mayor que el espacio recorrido, en el mismo tiempo, a menor velocidad.

[192] AXIOMA IV

La velocidad con la que se recorre en un tiempo dado un espacio mayor, es mayor, a su vez, que aquella con la que se recorre, en el mismo tiempo, un espacio menor.

TEOREMA I. PROPOSICIÓN I

Si un móvil dotado de movimiento uniforme recorre dos espacios a la misma velocidad, los tiempos invertidos tendrán entre sí la misma proporción que los espacios recorridos.

Supongamos [figura 40] que un móvil recorre con movimiento uniforme las distancias AB y BC; el tiempo requerido para atravesar AB lo representaremos por DE, mientras que el requerido para atravesar BC, por medio de EF. Mi proposición es que la distancia AB es a la distancia BC como el tiempo DE es al tiempo EF.

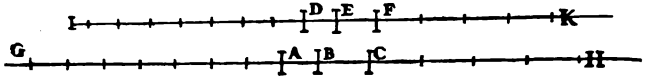


Fig. 40

Alarguemos tanto los espacios como los tiempos en dirección a G, H y a I, K, respectivamente. Dividamos, a su vez, AG en una serie de espacios iguales todos á AB, y de la misma manera dividiremos DI en una serie de intervalos de tiempo todos exactamente iguales a DE. Del mismo modo operaremos con CH, que será dividida en espacios equivalentes cada uno a BC, mientras que FK se dividirá en intervalos de tiempo equivalentes, cada uno también, a EF. Pues bien, la distancia BG y el tiempo EI serán múltiplos iguales cualesquiera de la distancia BA y del tiempo ED. De la misma manera, la distancia HB y el tiempo KE serán igualmente múltiplos cualesquiera de la distancia CB y del tiempo FE.

Dado que DE es el tiempo requerido para atravesar AB, el tiempo total EI será el que se requiere para atravesar toda la distancia BG y cuando el movimiento es uniforme, habrá en EI tantos intervalos de tiempo, equivalentes a DE, como espacios hay en BG, equivalentes cada uno a BA. De la misma forma, se infiere que KE representa el tiempo requerido para atravesar HB.

De cualquier forma, puesto que el movimiento es uniforme, se sigue que si la distancia GB es igual a la distancia BH, entonces el tiempo IE debe ser igual al tiempo EK; y si GB es mayor que BH, entonces [193] también IE será mayor que EK, mientras que si es menor el uno, menor será también el otro.* Tenemos, por tanto, cuatro cantidades: la primera es AB, la segunda es BC, la tercera es DE y la cuarta es EF. El tiempo IE y la distancia GB son múltiplos cualesquiera de la primera y de la tercera, es decir, de la distancia AB y del tiempo DE.

Ahora bien, se ha probado ya que las dos cantidades citadas en último lugar son iguales, mayores o menores que el tiempo EK y que el espacio BH, siendo éstos múltiplos cualesquiera de la segunda y de la cuarta. En consecuencia, la primera es a la segunda, o lo que es lo mismo, la distancia AB es a la distancia BC como la tercera es a la cuarta, es decir, como el tiempo DE es al tiempo EF.

* El método empleado aquí por Galileo es el de Euclides, establecido en la famosa definición 5 del libro V de sus *Elementos*, para la cual puede consultarse el artículo «Geometría» de la Enciclopedia Británica, 11.ª edición, p. 683.

TEOREMA II. PROPOSICIÓN II

Si un móvil recorre dos espacios en el mismo intervalo de tiempo, tales espacios tendrán entre sí la misma proporción que la que se da entre las velocidades. Y si los espacios están entre sí en la misma proporción que las velocidades, entonces los tiempos serán iguales.

Supongamos que AB y BC [figura 40] representen las dos distancias que son atravesadas en el mismo intervalo de tiempo, siendo recorrida la distancia AB con la velocidad DE, por ejemplo, y la distancia BC es a la distancia BC con la velocidad EF. En tal caso, afirmo que la distancia AB es a la distancia BC como la velocidad DE es a la velocidad EF. Y es que si tomamos múltiplos iguales de ambas distancias y velocidades, como lo hicimos antes, es decir, GB e IE, de AB y DE, respectivamente, haciendo lo mismo con HB y KE de BC y EF, entonces se puede inferir, de la misma forma que lo hicimos más arriba, que los múltiplos GB e IE son menores, iguales o mayores que los múltiples iguales de BH y EK. Es así como queda demostrado el teorema.

TEOREMA III. PROPOSICIÓN III

Si la misma distancia es recorrida con velocidades desiguales, entonces los intervalos de tiempo de los móviles son inversamente proporcionales a sus velocidades.

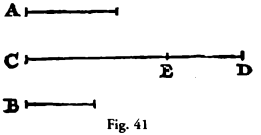


Fig. 41

Supongamos [figura 41] que A sea la mayor de las dos velocidades distintas y B, la más pequeña. Supongamos también que el movimiento que corresponde a las dos atraviesa el espacio dado CD. Afirmo, entonces, que el tiempo [194] que se requiere para atravesar la distancia CD a la velocidad A es el tiempo necesario para atravesar la misma distancia a la velocidad B, como la velocidad B es a la velocidad de A. Supongamos, además, que CD sea a CE como A es a B. Ahora bien, de lo dicho anteriormente se sigue que el tiempo que se necesita para atravesar la distancia entera CD a la velocidad A es el mismo que el que se necesita para recorrer enteramente CE a la velocidad B. Pero el tiempo requerido para atravesar la distancia CE a la velocidad B es al tiempo que se necesita para atravesar la distancia CD, a la misma velocidad, como CE es a CD; luego el tiempo en el que se cubre CD, a la velocidad A, es al tiempo en el que se cubre CD, a la velocidad B, como CE es a CD, es decir, como la velocidad B es a la velocidad A.

TEOREMA IV. PROPOSICIÓN IV

Si dos cuerpos se mueven con una velocidad uniforme, pero a diferente velocidad, las distancias por ellos recorridas en tiempos desiguales están, entre sí, en una proporción compuesta por las proporciones entre las velocidades y las proporciones entre los tiempos.

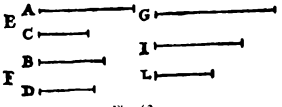


Fig. 42

Supongamos [figura 42] que los cuerpos que se mueven con una velocidad uniforme son E y F, y supongamos, igualmente, que la proporción de la velocidad del cuerpo E con respecto a la del cuerpo F es como A a B. Pero supongamos, ahora, que la proporción del tiempo empleado por el desplazamiento de F es al tiempo empleado por el movimiento de F como C es a D. Esto supuesto, lo que afirmo es que la distancia cubierta por E, a la velocidad A y en el tiempo C tiene con respecto al espacio atravesado por F, a la velocidad B en un tiempo D, una proporción que es el producto de la proporción de la velocidad A con respecto a la velocidad B por la proporción del tiempo C con respecto al tiempo D. Ahora bien, si G es la distancia atravesada por E a la velocidad A durante el intervalo de tiempo C, y si G es a I como la velocidad A es a la velocidad B, y si también el intervalo de tiempo C es el intervalo de tiempo D como I es a L, entonces lo que se infiere es que I es la distancia atravesada por F en el mismo tiempo en que G es recorrida por E, ya que G tiene con I la misma proporción que la que se da entre la velocidad de A y la de B. Como quiera que I está, con respecto a L, en la misma proporción que los intervalos de tiempo C y D, si I es la distancia atravesada por F durante el intervalo C, entonces L será la distancia recorrida por F durante el intervalo D a la velocidad B.

Pero la proporción de G a L es el producto de las proporciones de G a I y de I a L, es decir, de las proporciones de la velocidad de A con respecto a la velocidad de B y del intervalo de tiempo C con relación al intervalo de tiempo D.

[195] TEOREMA V. PROPOSICIÓN V

Si dos cuerpos se mueven con movimiento uniforme, pero sus velocidades son distintas, así como las distancias recorridas, entonces la proporción entre los tiempos será el resultado de la proporción entre las distancias por la razón inversa de las velocidades.

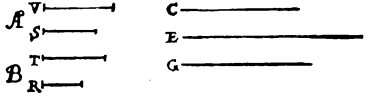


Fig. 43

Representémonos por medio de A y B [figura 43] los dos cuerpos en movimiento y sea la velocidad de A con respecto a la velocidad de B la misma que la proporción de V a T. Del mismo modo, consideremos las distancias recorridas según la proporción de S a R. Esto supuesto, afirmo que la proporción del intervalo de tiempo durante el cual se da el movimiento de A es, con respecto al intervalo de tiempo requerido por el movimiento de C, el producto de la proporción de la velocidad T en relación a la velocidad V por la proporción de la distancia S en relación a la distancia R.

Supongamos ahora que durante el intervalo de tiempo C se realiza el movimiento A y supongamos, igualmente, que el intervalo de tiempo C tiene, con respecto al intervalo de tiempo E, la misma proporción que la velocidad T con respecto a V.

Puesto que, por su parte, C es el intervalo de tiempo durante el cual A, a la velocidad V, recorre la distancia S y puesto que T, que es la velocidad B, es a la velocidad V como el intervalo de tiempo C es al intervalo de tiempo E, entonces E será el tiempo requerido por el cuerpo B para atravesar la distancia S. Si consideramos ahora que el intervalo de tiempo E es al intervalo de tiempo G como la distancia S es a la distancia R, se seguirá, entonces, que G es el tiempo que necesita B para atravesar el espacio R. Puesto que la proporción de C a G es el producto de las proporciones de C a E y de E a G, mientras que, por otro lado, la proporción de C a E es la inversa de la que se da entre las velocidades A y B, respectivamente, esto es, la proporción de T a V, y puesto que la proporción de E a G es la misma que se da entre las distancias S y R, respectivamente, hemos probado la proporción.

[196] TEOREMA VI. PROPOSICIÓN VI

Si dos cuerpos se mueven con un movimiento uniforme, la proporción de sus velocidades será la compuesta por el producto de la proporción de las distintas recorridas por la proporción de los tiempos tomados inversamente.

Representémonos por medio de A y B [figura 44] los dos cuerpos que se mueven uniformemente, estando las respectivas distancias por ellos recorridas en la proporción de V a T, mientras que los intervalos de tiempo están como S con respecto a R.

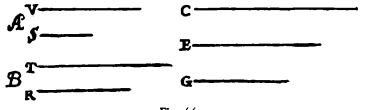


Fig. 44

Esto supuesto, lo que afirmo es que la velocidad de A estará con respecto a la velocidad de B en una proporción tal que es el producto de la proporción de la distancia V en relación a la distancia T y el intervalo de tiempo R con respecto al intervalo de tiempo S.

Supongamos que C es la velocidad a la que A recorre la distancia V durante el tiempo S; supongamos, igualmente, que la velocidad C tiene, con respecto a la otra velocidad E, la misma proporción que se da entre V y T; si esto es así, E será la velocidad a la que B recorre la distancia T durante el intervalo de tiempo S. Pero si la velocidad E es a la otra velocidad G como el intervalo de tiempo R es al otro intervalo de tiempo S, entonces G será la velocidad a la que el cuerpo B recorrerá la distancia T durante el intervalo de tiempo R. De este modo obtenemos tanto la velocidad C, con la cual el cuerpo A cubre la distancia V durante el tiempo S, como la velocidad G con la cual el cuerpo B recorre la distancia T durante el tiempo R. La proporción de C a G es el producto de la proporción de C a E y de E a G; la proporción de C a E es, por supuesto, la misma que se da entre la distancia V y la distancia T; mientras que la proporción de E a G es la misma que la proporción de R a S. La conclusión, por tanto, es la que habíamos anunciado.

SALV. Lo que acabamos de ver es todo lo que nuestro autor ha escrito sobre el movimiento uniforme [*equabile*]. Pasaremos ahora a hacer algunas consideraciones, más sutiles y originales, acerca del movimiento naturalmente acelerado, que es el que normalmente se da en los cuerpos pesados que caen libremente [*mobili gravi descendenti*]: he aquí el título y la introducción.

SOBRE EL MOVIMIENTO NATURALMENTE ACELERADO

[197] Hemos tratado en el apartado precedente de las propiedades del movimiento uniforme. Debemos, ahora, tratar del movimiento acelerado.

Ante todo, es necesario investigar y explicar la definición que corresponde con exactitud al movimiento acelerado que nos brinda la naturaleza. En efecto, aunque sea lícito imaginar arbitrariamente ciertas formas de movimiento e investigar las propiedades que de ellas se derivan (así, aquellos que se imaginaron líneas espirales o cóncavas originadas por determinados movimientos, han conseguido demostrar, de hecho, cosa que es digna de admirarse, sus propiedades, argumentando *ex suppositione*, a pesar de que la naturaleza no haga uso de tales movimientos), no obstante, y desde el momento que la naturaleza se sirve de una determinada forma de aceleración, en los cuerpos pesados en caída libre, hemos decidido estudiar sus propiedades, haciendo que la definición que hemos de dar acerca del movimiento acelerado en cuestión corresponda a la esencia del movimiento naturalmente acelerado. Esta correspondencia creemos haberla logrado al fin, después de largas reflexiones, especialmente si tenemos en cuenta que las propiedades que hemos ido demostrando sucesivamente [*a partir de nuestra definición*] parece que corresponden y coinciden exactamente con lo que los experimentos naturales nos ponen delante de nuestros sentidos. En suma, al estudio del movimiento naturalmente acelerado nos ha llevado, como agarrados de la mano, la observación de las costumbres y reglas que sigue la misma naturaleza en todas sus obras restantes, para cuya ejecución suele hacer uso de los medios más inmediatos, más simples y más fáciles. No puedo por menos de estar seguro de que no hay nadie que crea que se pueda nadar o volar de una manera más simple y más fácil que la que usan, por instinto natural, los peces y los pájaros.

Cuando observo, por tanto, una piedra que cae desde cierta altura, partiendo de una situación de reposo, que va adquiriendo poco a poco, cada vez más velocidad, ¿por qué no he de creer que tales aumentos de velocidad no tengan lugar según la más simple y evidente proporción? Ahora bien, si observamos con cierta atención el problema, no encontraremos ningún aumento o adición más simple que aquel que va aumentando siempre de la misma manera. Esto lo entenderemos fácilmente si consideramos la relación tan estrecha que se da entre tiempo y movimiento: del mismo modo que la igualdad y uniformidad del movimiento se define y se concibe sobre la base de la igualdad de los tiempos y de los espacios (en efecto, llamamos movimiento uniforme al movimiento que en tiempos iguales recorre espacios iguales), así también, mediante una subdivisión uniforme del tiempo, [198] podemos imaginarnos que los aumentos de velocidad tengan lugar con [la misma] simplicidad. [Podremos hacer esto] en cuanto determinemos teóricamente que un movimiento es uniformemente y, del mismo modo, continuamente acelerado, cuando, en tiempos iguales, se los tome de la forma que se quiera, adquiera incrementos iguales de velocidad. De este modo, si consideramos un número cualquiera de fracciones de tiempo iguales, a partir del primer instante en el que el cuerpo en movimiento abandona la posición de reposo y comienza a descender, el grado de velocidad adquirido en la primera y segunda fracción de tiempo, tomadas conjuntamente, es doble del grado de velocidad adquirido por el móvil en la primera fracción; mientras que el grado que se obtiene en tres fracciones de tiempo es el triple y el adquirido en cuatro, cuádruple del grado alcanzado en el primer tiempo, de modo que (para que quede más claro) si el móvil continuara su movimiento según el grado de in-

tensidad [*momento*] de velocidad adquirido en la primera fracción de tiempo y prosiguiera uniformemente con tal grado, este movimiento sería dos veces más lento que el que obtendría [el móvil] con el grado de velocidad adquirido en dos fracciones de tiempo. Por eso, creo que no nos apartamos en absoluto de la recta razón si admitimos que la intensidad de la velocidad crece según el incremento del tiempo [*la velocidad es proporcional al tiempo*].

Podemos, en consecuencia, admitir la siguiente definición del movimiento del cual hemos de tratar: llamo movimiento igualmente, o lo que es lo mismo, uniformemente acelerado a aquel que, partiendo del reposo, adquiere en tiempos iguales iguales incrementos de velocidad.

SAGR. Aunque no sería razonable que me opusiera a esta o a aquella definición dada por el autor que sea, puedo, sin embargo, sin ofender por ello, dudar que tal definición concebida y establecida en abstracto se adapte, coincida y se verifique en esa especie de movimiento acelerado que se da en los cuerpos graves que caen naturalmente. Y puesto que parece que el autor nos promete que tal como él lo ha definido, es el movimiento natural de los cuerpos graves, me gustaría quitar de en medio ciertas dificultades que oscurecen mi mente con el fin de entregarme, después, con mayor atención a las proposiciones y demostraciones correspondientes.

SALV. Me parece oportuno que V. S. y el señor Simplicio vayan adelantando las objeciones; son las mismas, me imagino, que se me iban ocurriendo a mí cuando vi por primera vez este tratado, siendo resueltas o bien por el mismo autor, en discusiones con él, o bien por mí mismo, dando vueltas a los problemas.

SAGR. Cuando me imagino un grave que cae desde el reposo, o sea, de la privación de toda velocidad, [199] y comienza a moverse acelerándose [*velocitando*] según la proporción en que aumenta el tiempo desde el primer instante del movimiento; así, por ejemplo, en ocho pulsaciones adquiriría ocho grados de velocidad, de la cual había ganado cuatro en la cuarta pulsación; en la segunda, dos; en la primera, uno...; al ser el tiempo subdivisible al infinito, se sigue que, en cuanto que la velocidad antecedente va disminuyendo siempre por tal razón, no habrá grado de velocidad tan pequeño o, dicho de otra manera, grado de lentitud [*tardità*] tan grande en el que no se encuentre el mismo móvil después de que parta de la lentitud infinita, esto es, del reposo. De este modo, si aquel grado de velocidad que tenía después de cuatro pulsaciones era tal que, manteniéndolo uniforme, hubiera recorrido dos millas en una hora, mientras que con el grado de velocidad alcanzado en la segunda pulsación habría hecho una milla en una hora, podemos concluir, entonces, que en los instantes de tiempo que se acercan cada vez más a aquel primero por el cual pasa del reposo al movimiento, estaría en una situación de lentitud tal que no conseguiría atravesar (si continuase moviéndose con una lentitud tan acusada) una milla en una hora, ni en un día, ni en un año, ni en mil; más aún, no avanzaría ni siquiera un palmo por mucho tiempo que dejemos discurrir. Parece que la imaginación se acomoda a este fenómeno con dificultad, mientras que los sentidos nos muestran que un grave, cuando cae, pasa inmediatamente a tener una velocidad notable.

SALV. Es ésta una de aquellas dificultades que, al principio, me dieron mucho que pensar; no obstante, en poco tiempo conseguí deshacerme de ella. Fue, precisamente, la misma experiencia, que es la que os suscita la dificultad, la que se encargó de resolvérmela. Decís que os parece que la experiencia muestra que apenas un grave ha salido de su posición de reposo adquiere una velocidad muy apreciable. Pues bien, yo os asegu-

ro que es esta misma experiencia la que os hace patente que los primeros movimientos [*impeti*] del cuerpo que cae, por muy pesado que sea, son enormemente lentos. Colocad un grave sobre una materia blanda y dejadlo allí sin que ejerza ninguna otra presión que no sea la de su propio peso. Es evidente que si lo elevamos uno o dos codos, para dejarlo caer, después, encima de la misma materia, ejercerá una nueva presión debida al golpe, mayor que la producida al principio por medio del peso solo. El efecto tendrá como causa tanto el móvil en su caída como la velocidad adquirida en dicha caída. Este efecto será cada vez mayor a medida que el golpe tenga lugar desde una altura mayor, esto es, a medida que la velocidad con la que se efectúa el golpe sea mayor. De este modo, podemos deducir sin error la velocidad de un grave que cae a partir de la cantidad y calidad del golpe. Pero, además, señores, ¿no es cierto que la maza que se deja caer sobre una estaca desde [200] una altura de cuatro codos, fijándola en tierra cuatro dedos, por ejemplo, si cae de una altura de dos codos la introducirá bastante menos, menos aún si cae desde la altura de un codo y mucho menos desde la altura de un palmo. Y, finalmente, si la elevamos a la altura de un dedo, ¿qué diferencia habrá con dejarla simplemente encima, sin que se dé golpe alguno? Poquísima, sin duda alguna; y una operación absolutamente imperceptible sería si se elevara a una altura equivalente al grosor de una hoja. Y dado que el resultado del golpe depende de la velocidad del cuerpo que golpea, ¿quién podrá dudar que el movimiento será lentísimo y casi mínima la velocidad allí donde su actuación es imperceptible? Veis, pues, cuánta es la fuerza de la verdad, ya que la misma experiencia, que en un principio parecía mostrarnos una cosa, una vez que la observamos más de cerca, nos asegura de lo contrario.

Pero sin que tengamos que conformarnos sólo con tal experiencia (que, sin duda alguna, es del todo concluyente), me parece que no es difícil captar con la sola razón la verdad expuesta. Imaginémonos una pesada piedra, que está en reposo en el aire; si se quita el soporte y se deja en libertad, al ser más pesada que el aire, comienza a descender, pero no con movimiento uniforme, sino que, siendo su movimiento lento al principio, se va, después, acelerando continuamente. Ahora bien, dado que la velocidad puede aumentar y disminuir sin límite, ¿qué es lo que me impediría creer que tal móvil, que parte de una lentitud infinita (pues tal es el reposo) alcance inmediatamente diez grados de velocidad, en vez de una velocidad de cuatro, de dos, de uno, de medio o de un centésimo? Escuchad, por favor. No pienso que no estuvieseis dispuestos a concederme que la adquisición de los grados de velocidad de la piedra que cae desde su estado de reposo pueda llevarse a cabo según el mismo orden que la disminución y pérdida de los mismos grados, si la piedra, impelida por alguna fuerza [*virtù*], fuese devuelta a la misma altura; si esto es posible, no veo por qué se pueda poner en duda que al disminuir la velocidad de la piedra ascendente, al ir consumiendo su velocidad, haya de pasar por todos los grados de lentitud, antes de llegar al estado de reposo.

SIMP. Pero si los grados de lentitud cada vez mayores son infinitos, entonces jamás llegarán a consumirse todos. De ahí que el grado ascendente en cuestión no llegará jamás al reposo, sino que se moverá infinitamente cada vez más despacio, cosa que no parece suceder.

SALV. Ocurriría esto, señor Simplicio, si el móvil permaneciera durante cierto tiempo en cada grado de velocidad; lo que ocurre simplemente es que pasa sin emplear más de un instante. Y puesto que en [201] cualquier intervalo de tiempo, por muy pequeño que sea, hay infinitos instantes, éstos serán siempre suficientes para corresponder a los infinitos grados con los que puede ir disminuyendo la velocidad.

Que un grave ascendente como el que estamos considerando no permanezca durante intervalo de tiempo alguno en un mismo grado de velocidad es algo que se puede poner de manifiesto de la siguiente manera: si, una vez asignado un intervalo de tiempo determinado, el móvil tuviese el mismo grado de velocidad, tanto en el primer instante de dicho tiempo como también en el último, desde este segundo grado podría elevarse igualmente hacia arriba un espacio semejante, de la misma manera que pasó del primer al segundo espacio; por la misma razón, pasaría del segundo al tercero para continuar, finalmente, su movimiento uniforme sin limitación alguna.

SAGR. Me parece que de los razonamientos que acabáis de aducir se podría obtener una solución apropiada a la discutida cuestión filosófica en la que se plantea cuál sea la causa de la aceleración del movimiento natural de los graves. Puesto que, según creo, en el caso del grave que es impelido hacia arriba, la fuerza [*virtù*] imprimida por el cuerpo que lo proyecta va disminuyendo continuamente. Esta fuerza, mientras sea superior a la que actúa en sentido contrario, o sea, a la gravedad, lo impulsa hacia lo alto. Ahora bien, una vez que hayan alcanzado una y otra un estado de equilibrio, el móvil deja de ascender pasando al estado de reposo, en el cual el impulso [*impeto*] que se le había imprimido no queda aniquilado sin más ni más, sino que comienza a desaparecer lo que antes prevalecía sobre la gravedad del móvil y que era la causa de que lo hiciera subir. Al ir disminuyendo este impulso [*impeto*] sobreañadido y comenzar, consecuentemente, a tomar ventaja el peso [*gravità*], empieza la caída con lentitud a causa de la fuerza [*virtù*] que traía impresa el móvil y buena parte de la cual permanece todavía en éste. Ahora bien, en cuanto que dicha fuerza va disminuyendo continuamente, siendo superada cada vez más por la gravedad, el resultado es la continua aceleración del movimiento.

SIMP. La idea es aguda, pero tiene más de sutil que de cierta, ya que, incluso en el caso de que fuese concluyente, no serviría sino para explicar aquellos movimientos naturales a los que les precede un movimiento violento, en los que queda aún activa parte de la fuerza [*virtù*] externamente aplicada. Allí, sin embargo, en donde no se da tal resto, sino que el móvil parte de un estado de reposo prolongado, el razonamiento pierde toda su fuerza.

SAGR. Me parece que os equivocáis y que esta distinción que hacéis, entre los dos casos, es superflua o, para decirlo con mayor rigor, no existe. Pero decidme, ¿puede un proyectil recibir, del cuerpo que lo lanza, mucha o poca fuerza [*virtù*] de modo que se le pueda hacer subir cien codos, veinte, cuatro o uno?

[202] SIMP. Sin duda alguna.

SAGR. No es menos cierto, por tanto, que tal fuerza imprimida por el móvil podrá superar la resistencia del peso [*gravità*] tan exiguamente que sólo lo eleve a la altura de un dedo. Finalmente, la fuerza del proyector puede ser tal que se equilibre con la resistencia del peso de forma que el móvil no salga lanzado, sino que quede simplemente sostenido. Así, si cogéis en vuestra mano una piedra, ¿qué hacéis si no es imprimirle una fuerza que la impele hacia arriba y que es equivalente al poder [*facoltà*] de su peso que la atrae hacia abajo? ¿No continuáis conservando esa fuerza impresa todo el tiempo que la sostenéis en vuestra mano? ¿Disminuye, acaso, dicha fuerza por mucho que la mantengáis en vuestra mano? Y este soportar que impide la caída de la piedra, ¿qué importa que se haga con vuestra mano, con una tabla o con una cuerda de la que cuelgue la piedra? Nada, en absoluto. Llegad, por tanto, señor Simplicio, a la conclusión de que el hecho de que preceda a la caída de la piedra un reposo grande o breve o instantáneo,

no trae consigo una diferencia, con tal de que la piedra no parta nunca sometida a una fuerza contraria a su gravedad y que sea suficiente para mantenerla en reposo.

SALV. No me parece éste el momento más oportuno para investigar la causa de la aceleración del movimiento natural y en torno a la cual algunos filósofos han proferido distantas opiniones. Algunos la han explicado por la proximidad al centro; otros, por la disminución de la parte del medio que queda por atravesar; otros, finalmente, por cierta impulsión del medio ambiente, el cual, al volver a cerrarse por detrás del móvil, lo va presionando y proyectando continuamente. Tales fantasías, aparte de otras muchas, habría que irlas examinando y resolviendo con bien poco provecho.

Por el momento es la intención de nuestro autor investigar y demostrar algunas propiedades del movimiento acelerado (sea cual sea la causa de tal aceleración), de tal modo que la intensidad [*momenti*] de su velocidad vaya aumentando, después de haber partido del reposo según aquella simplicísima proporción con la que aumenta la continuación del tiempo, que es lo mismo que decir que en tiempos iguales el móvil recibe iguales incrementos de velocidad. Y si nos encontramos con que las propiedades que serán demostradas más adelante se dan en el movimiento de los graves que caen naturalmente acelerados, podremos concluir que la definición que hemos supuesto incluye tal movimiento de los graves y que es cierto que la velocidad [*accelerazione*] de dichos graves va [203] aumentando en proporción al incremento del tiempo y de la duración del movimiento.

SAGR. Por lo que veo de momento, me parece que tal vez se podría haber definido el movimiento uniformemente acelerado con mayor claridad y sin variar el concepto, de la siguiente manera: movimiento uniformemente acelerado es aquel en el cual la velocidad va aumentando en la misma proporción en la que aumenta el espacio que atraviesa; de modo que, por ejemplo, el grado de velocidad adquirido por el móvil en una caída de cuatro codos sería el doble que la que habría adquirido si hubiese caído desde la altura de dos codos y éste, a su vez, el doble del que habría conseguido durante el espacio del primer codo. Y es que me parece fuera de toda duda que el grave que desciende desde la altura de seis codos posee y golpea con un impulso [*impeto*] que es doble del que tendría si hubiese caído desde la altura de tres codos, triple del que tendría si viniese de dos y séxtuplo si se tratara de un espacio de un solo codo.

SALV. Es para mí un consuelo considerable tener un compañero tal en el error. Más aún, vuestro razonamiento parece tan verosímil y probable que nuestro autor mismo no me negó, cuando se lo propuse, que él también había incurrido durante cierto tiempo, en la misma falacia. Lo que más tarde me maravilló de modo especial fue el darme cuenta de que dos proposiciones que parecen tan verosímiles (hasta el punto que, habiéndoselas propuesto a mucha gente, no he encontrado a nadie que no las admitiera sin reticencia) se muestran, con unas pocas palabras, no sólo como falsas, sino como imposibles.

SIMP. A decir verdad, yo me encontraría en el número de aquellos que lo concederían, ya que creo que un grave que cae *vires acquirat eundo* [adquiere fuerza mientras desciende], aumentando su velocidad en proporción al espacio, así como que la intensidad (momento) del choque del mismo cuerpo al caer, es el doble si viene desde una altura que sea el doble. Estas proposiciones me parece que hay que admitirlas sin ninguna duda o controversia.

SALV. Son, sin embargo, tan falsas e imposibles como lo es el que el movimiento se realice instantáneamente. Veamos una clara demostración de esto. Si las velocidades

son proporcionales a los espacios atravesados o por atravesar, tales espacios son recorridos en tiempos iguales; en consecuencia, si la velocidad con la que el cuerpo que cae recorre cuatro codos fue el doble de la velocidad con la que recorrió los dos primeros codos (precisamente en cuanto que una distancia es el doble de la otra), entonces los intervalos de tiempo de tales recorridos son iguales. Ahora bien, que un mismo móvil atraviese los cuatro y los dos codos en el mismo tiempo es algo que no puede [204] darse, a no ser que en el movimiento instantáneo. Nosotros vemos, no obstante, que el grave que cae realiza su movimiento en el tiempo, recorriendo en menos los dos codos que los cuatro. Es, por tanto, falso que su velocidad aumente en proporción al espacio.

Se puede demostrar con la misma claridad la falsedad de la otra proposición. Puesto que el cuerpo que golpea es el mismo, la única manera de determinar la diferencia e intensidad [*momento*] de los golpes proviene de las diferencias de velocidad. Así, si el cuerpo que cae de una altura doble golpease con doble intensidad [*momento*] sería necesario que golpease con el doble de velocidad. Ahora bien, el doble de velocidad recorre el doble de espacio en el mismo tiempo, mientras que nosotros observamos que el tiempo de la caída desde la altura mayor dura más.

SAGR. Presentáis conclusiones recónditas con gran evidencia y facilidad. Esta excesiva facilidad las hace de menor estima de lo que lo serían si se presentaran de una manera más complicada. Pienso que el pueblo estimaría menos un saber alcanzado con tan poco trabajo que el alcanzado con largas y abstrusas discusiones.

SALV. Si a aquellos que demuestran con gran brevedad y claridad las falacias de las proposiciones que se han tenido por verdaderas por todo el mundo, se les tratara solamente con desprecio, en vez de con agradecimiento, sería esto, todavía, un daño bastante soportable. Más desagradable y molesto es contemplar a algunos que, pretendiendo estar a la altura de quien sea en un determinado campo de estudio, tienen como verdadero cosas cuya falsedad otros, con un razonamiento breve y fácil, ponen al descubierto. No llamaría envidia yo a este sentimiento que tienen ciertas personas, la cual suele convertirse en odio e ira contra los descubridores de tales falacias. Pienso que se trata, más bien, de un ardiente deseo de mantener viejos errores en vez de recibir las verdades que se acaban de descubrir. Este deseo les induce, a veces, a escribir en contra de la verdad, aunque internamente la reconozcan como tal sólo con el fin de que el pueblo poco instruido no estime la obra de otras personas. Acerca de tales falacias, reputadas como verdaderas, pero fáciles de refutar, he escuchado no poco de boca de nuestro académico, y de alguna de ellas incluso he tomado nota.

SAGR. V. I. no deberá privarnos de ellas, comunicándonosla a su debido tiempo, haciendo incluso una sesión extraordinaria si fuese necesario. Por el [205] momento, recogiendo el hilo de nuestra conversación, me parece que, hasta el presente, lo que hemos hecho es establecer la definición del movimiento uniformemente acelerado, del que trataremos en lo que a continuación sigue. Tal definición es:

> *Llamamos movimiento igualmente, esto es, uniformemente acelerado, a aquel que, partiendo del reposo, adquiere, en tiempos iguales, iguales incrementos de rapidez [celeritatis momenta].*

SALV. Una vez establecida tal definición, el autor supone y postula como verdadero un solo principio, que es el siguiente:

Doy por supuesto que los grados de velocidad alcanzados por un mismo móvil, en planos diversamente inclinados, son iguales cuando las alturas de los mismos planos son también iguales.

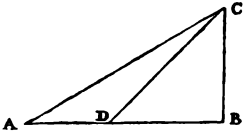


Fig. 45

Llamemos altura de un plano inclinado a la perpendicular que cae desde la parte superior de dicho plano sobre la línea horizontal, trazada por la parte inferior del mismo plano inclinado. A modo de ilustración [figura 45], sea la línea AB la horizontal, sobre la cual caen los dos planos inclinados CA y CD. A la perpendicular CB, que cae sobre la horizontal BA, el autor la denomina altura de los planos CA y CD. Supone él que los grados de velocidad de uno y el mismo móvil, que descienda por los planos inclinados CA y CD, serán iguales si los comparamos en los puntos finales A y D, al ser la altura de ambos planos la misma; esto es, CB. Lo mismo ha de entenderse con respecto al grado de velocidad que alcanzaría el mismo móvil en el punto B si cayese desde C.

SAGR. La verdad es que esta suposición me parece tan plausible que es digna de que se la acepte sin ninguna objeción, siempre y cuando supongamos también que queden fuera de consideración las resistencias externas posibles y que los planos sean lo suficientemente sólidos y tersos, así como que el móvil posea una figura absolutamente redonda, de modo que ni el móvil ni el plano tengan la menor aspereza. Si dejamos de lado todas estas resistencias y dificultades, mi razón me dice, con toda naturalidad, que una bola pesada y absolutamente redonda, que descendiera por las líneas CA, CD y CB alcanzaría los puntos terminales A, D y C con impulsos [*impeti*] iguales.

SALV. Vuestro razonamiento es sumamente plausible, pero me gustaría aumentar por medio de la experiencia las probabilidades de esto que nos parece verosímil, a fin de que le falte muy poco para que sea equivalente a una exacta demostración.

[206] Imaginaos que esta página sea una pared erigida verticalmente, con un clavo incrustado en ella [figura 46]. Desde dicho clavo se deja colgar una bola de plomo de dos o tres onzas mediante el finísimo hilo AB, cuya longitud es de dos o tres codos, quedando perpendicular a una línea horizontal, DC, que corte a escuadra la vertical AB. Este hilo está separado de la pared por una distancia aproximada de dos dedos. Si lle-

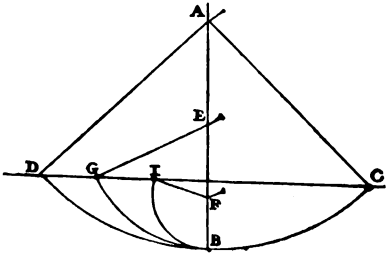


Fig. 46

vamos, después, el hilo AB, con la bola, hasta AC y lo dejamos caer libremente, veremos, en primer lugar, que desciende describiendo el arco CB de modo que, sobrepasando el punto B, recorrerá el arco BD, llegando casi a tocar la recta que habíamos trazado, CD. Si no llega a tocarla es por muy poco, siendo la causa de ello la resistencia que oponen el aire y el hilo. De todo esto podemos concluir perfectamente que el impulso que había adquirido la bola en el punto B, al recorrer el arco CB, fue suficiente como para elevarla por el arco BD hasta alcanzar la misma altura. Una vez repetido este experimento varias veces, fijemos un clavo en la pared muy cerca de la perpendicular AB, como podrían ser E o F, que sobresalga de la pared unos cinco o seis dedos. La finalidad de ello es que el hilo AC, al volver a llevar, como antes, a la bola C a través del arco CB, una que haya llegado a B chocará el hilo con el clavo E, viéndose obligado a describir el arco BG alrededor del centro E. Con esto podemos ver lo que puede hacer el mismo impulso [*impetu*], el cual, antes, desde el mismo punto B, hizo subir el mismo móvil a través del arco BD hasta la altura de la línea horizontal CD. Ahora, señores, podéis contemplar con placer que la bola se balancea hasta el punto G, y lo mismo sucedería si el choque se produjera más abajo, como sería en el punto F, en cuyo caso la bola describiría el arco BI, acabando siempre, sin embargo, su balanceo en la línea CD. Si el choque con el clavo tuviera lugar tan abajo que la parte del hilo que queda debajo del clavo no fuese lo suficientemente largo como para alcanzar la altura CD (lo cual ocurriría en el caso de [207] que el clavo estuviera más cerca del punto B que de la intersección de AB con CD), entonces el hilo saltaría sobre el clavo enrollándose en éste.

Este experimento no deja lugar a dudas, sobre la verdad del supuesto, ya que siendo los dos arcos, CB y DB, iguales y colocados de la misma manera, la intensidad [*momento*] de velocidad adquirida tras el descenso por el arco CB, es la misma que la adquirida a través del arco DB. Ahora bien, la intensidad de velocidad [*momento*] alcanzada en B después de recorrer el arco CB, es capaz de empujar hacia arriba al móvil en cuestión a través del arco BD. La intensidad [*momento*] de velocidad, por tanto, adquirida en la bajada por DB es igual a la que impulsa al móvil hacia D, a través de B. De modo que, en general, la intensidad [*momento*] de velocidad adquirida en el descenso por un arco es igual a la que puede hacer subir al mismo móvil por el mismo arco. Pero todas esas intensidades [*momenti*] de velocidad, que son las causantes de la subida por medio de los arcos BD, BG y BI, son iguales, puesto que son el producto de la misma intensidad [*momento*] de velocidad, que se adquiere en la caída CB, como muestra el experimento. Así pues, todas las intensidades [*momenti*] que se alcanzan en la bajada por los arcos DB, GB e IB son iguales.

SAGR. El razonamiento me parece concluyente del todo, y el experimento es tan apto para establecer el postulado, que podemos considerar como si se lo hubiera demostrado.

SALV. No quisiera, señor Sagredo, que nos ocupáramos más de lo debido de esta materia si pensamos, sobre todo, que hemos de aplicar lo que hemos dicho, especialmente a los movimientos que tienen lugar en las superficies planas. Aunque el experimento que hemos hecho nos muestra que la caída por el arco CB confiere al móvil una intensidad [*momento*] tal que pueda volver a llevarlo a la misma altura por cualquiera de los arcos BD, BG o BI, nosotros no podemos mostrar, con la misma evidencia, que lo mismo habría de ocurrir en el caso de que una bola totalmente redonda hubiese de descender a través de planos rectos, cuyas inclinaciones son, respectivamente, las mismas que las cuerdas de dichos arcos. Es de suponer, más bien, que al formarse

en el punto B ángulos producidos por estos planos, la bola que cae por la inclinación que corresponde a la cuerda CB, al encontrar obstáculo en los planos que descienden según las cuerdas BD, BG y BI, en su choque con éstos perdería impulso [*impeto*], no pudiendo, en su ascenso, alcanzar la altura de la línea CD. Si quitamos, sin embargo, el obstáculo que interfiere con el experimento, es algo fácil de captar que el impulso [*impeto*] (el [208] cual, efectivamente, adquiere fuerza en proporción a la cantidad de la caída) tendría fuerza suficiente como para hacer subir de nuevo al móvil hasta la misma altura. Tomemos, de momento, pues, esto como un postulado, cuya verdad sin sombras estableceremos más adelante al contemplar otras conclusiones, fundamentadas en tales hipótesis y que responden con toda exactitud a los experimentos. Una vez supuesto por el autor este único principio, pasa a las proposiciones, que demuestra con toda evidencia. La primera de las cuales es ésta:

TEOREMA I. PROPOSICIÓN I

El tiempo en el cual un espacio dado es recorrido por un móvil que parte del reposo con movimiento uniformemente acelerado, es igual al tiempo en el que aquel mismo espacio habría sido recorrido por el mismo móvil con un movimiento uniforme cuyo grado de velocidad fuese la mitad del grado de velocidad máximo alcanzado al final del movimiento uniformemente acelerado precedente.

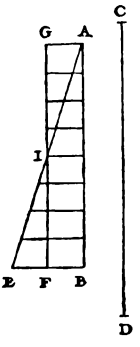


Fig. 47

Representémonos [figura 47] por medio de la línea AB el tiempo durante el cual atraviesa el espacio CD un móvil, cuyo movimiento desde el punto de reposo C es uniformemente acelerado. Representemos el valor máximo y final de la velocidad obtenida durante el intervalo AB con la línea EB, trazada en ángulo recto con respecto a la línea AB. Si trazamos, ahora, la línea AE, entonces todas las líneas que partan de los puntos equidistantes en AB y paralelas a BE, representarán el aumento del grado de velocidad, desde su inicio en el instante A. El punto F partirá, después, en dos la línea EB. Tracemos FG, paralela a BA, y GA paralela a FB; quedará así formado un paralelogramo, AGFB, que será igual [en área] al triángulo AEB, ya que el lado GF secciona por la mitad el lado AE por el punto I. Si las líneas paralelas del triángulo AEB se extendieren hasta GI, entonces la suma de todas las paralelas está contenida en el triángulo AEB, ya que las del triángulo IEF se corresponden con las que están contenidas en el triángulo GIA, mientras que las que están dentro del trapecio AIFB son comunes. Puesto que todos y cada uno de los instantes de tiempo del intervalo AB tienen su punto correspondiente en la línea AB, en donde las líneas paralelas trazadas y limitadas por el triángulo AEB representan el aumento de los grados de velocidad; y puesto que las paralelas que se encuentran dentro del rectángulo representan los grados de velocidad que no aumenta, sino que se mantiene constante, se [209] evidencia, entonces, de la misma manera, que las intensidades de velocidad [*momenta*] que toma el cuerpo en movimiento se pueden representar, en el caso del movimiento acelerado, por

el aumento de las paralelas del triángulo AEB, mientras que, en el caso del movimiento uniforme, por medio de las paralelas del rectángulo GB. Ocurre que la intensidad [*momentum*] que puede faltar en la primera parte del movimiento acelerado (estando representada la deficiencia de las intensidades de velocidad por las paralelas del triángulo AGI) se completa con las intensidades que manifiestan las paralelas del triángulo IEF.

Se pone de manifiesto de todo lo dicho que espacios iguales serán atravesados en tiempos iguales por dos cuerpos, uno de los cuales, partiendo del reposo, se mueve con una aceleración uniforme, mientras que la intensidad de velocidad del otro, que se mueve con velocidad uniforme, es un medio de la intensidad máxima que alcanzaría con movimiento acelerado.

TEOREMA II. PROPOSICIÓN II

Si un móvil cae, partiendo del reposo, con un movimiento uniformemente acelerado, los espacios por él recorridos en cualquier tiempo que sea están entre sí como el cuadrado de la proporción entre los tiempos, o lo que es lo mismo, como los cuadrados de los tiempos.

Representemos el tiempo [figura 48] que comienza en el instante A por medio de la línea recta AB, en la que tomamos dos intervalos de tiempo cualquiera, llamándolos AD y AE. HI representará la distancia a través de la cual cae el cuerpo, partiendo del estado de reposo, con un movimiento uniformemente acelerado. Si HL representa el espacio atravesado durante el intervalo de tiempo AD y HM el cubierto durante el intervalo AE, entonces el espacio MH está con respecto al espacio LH en una proporción que es al cuadrado de la proporción del tiempo AE con respecto al tiempo AD; podemos decir también, simplemente, que las distancias HM y HL tienen la misma proporción que los cuadrados de AE y AD. Tracemos la línea AC de modo que forme un ángulo cualquiera con la línea AB; desde los puntos D y E tracemos las líneas paralelas DO y EP. De estas dos líneas, DO representa la velocidad máxima alcanzada durante el intervalo de tiempo AD, mientras que EP representa el máximo de velocidad obtenido durante el intervalo AE. Ahora bien, se ha probado ya que, en lo que atañe a atravesar distancias, es lo mismo que un cuerpo caiga desde su posición de reposo con un movimiento uniformemente acelerado o que caiga durante un intervalo de tiempo igual con una velocidad constante, que sea la mitad de la velocidad máxima alcanzada durante el movimiento acelerado. Se sigue de aquí, pues, que las distancias HM y HL son las mismas que las que serían recorridas, en los intervalos [210] de tiempo AE y DA, por velocidades uniformemente aceleradas iguales a un medio de las representadas por DO y EP, respectivamente. Si, por tanto, se puede mostrar que las distancias HM y HL están en la misma proporción que los cuadrados de los tiempos AE y DA, nuestra proposición habrá sido probada.

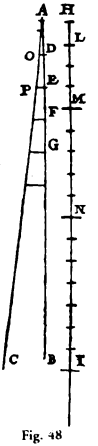


Fig. 48

En la cuarta proposición del primer libro se demostró que los espacios recorridos por dos cuerpos con movimiento uniforme guardan entre sí una proporción que es igual al producto de la proporción de las velocidades por la proporción de los tiempos. Pero,

en este caso, la proporción de las velocidades es la misma que la proporción de los tiempos (puesto que la proporción de AE a AD es la misma que la de la mitad de EP a la mitad de DO o la de EP a DO). En consecuencia, la proporción de los espacios recorridos es la misma que la proporción de los tiempos al cuadrado, que es lo que se trataba de demostrar.

Es patente, por tanto, que la proporción de las distancias es el cuadrado de la proporción de las velocidades finales, es decir, de las líneas EP y DO, ya que éstas están entre sí como AE y AD.

COROLARIO I

Se sigue claramente de aquí que, si desde el primer instante o inicio del movimiento hubiéramos tomado sucesivamente un número cualquiera de tiempos iguales, como, por ejemplo, AD, DE, EF, FG, en los cuales se recorran los espacios HL, LM, MN, NI, estos espacios estarán entre sí como los números impares *ab unitate*; es decir; como 1, 3, 5, 7: es ésta efectivamente, la proporción entre los excesos de los cuadrados de las líneas que se sobrepasan igualmente y cuyo sobrante es igual a la más pequeña de ellas; es decir, entre los números cuadrados consecutivos *ab unitate*. Por lo tanto, cuando los grados de velocidad aumentan, en tiempos iguales, según la serie de los números naturales, los espacios recorridos, en los mismos tiempos, adquieren incrementos según la serie de los números impares *ab unitate*.

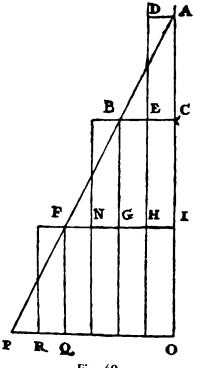


Fig. 49

SAGR. Suspended, por favor, la lectura un momento, pues le estoy dando vueltas a una idea que se me acaba de ocurrir. Para explicarla, y en bien de la claridad mía y vuestra, la ilustraré con un dibujo [figura 49]. Por medio de la línea AI quiero representar el transcurso del tiempo, partiendo del primer instante en A. Aplicando después en A, según un ángulo cualquiera, la recta AF y uniendo los puntos terminales I y F, mientras que se divide el tiempo AI en su mitad, C, trazo la paralela a IF, CB. Si consideramos, después, la línea CB como el grado máximo de la velocidad que, a partir del reposo en el primer instante de tiempo A, fue en aumento según el incremento que se manifiesta en las paralelas a BC, trazadas en el triángulo ABC (que es lo mismo que decir que la velocidad aumenta en proporción al tiempo), entonces admito sin ninguna dificultad, en vista de los argumentos dados hasta el momento, que el espacio recorrido por el móvil que cae con el incremento de velocidad descrito será igual al espacio que recorrería el mismo móvil durante el mismo intervalo de [211] tiempo AC con movimiento uniforme, cuyo grado de velocidad fuese igual a EC, que es la mitad de BC.

Imaginemos ahora que el móvil que cae con movimiento acelerado y que se encuentra en el instante C tiene el grado de velocidad BC. Es evidente que si tal móvil continuase moviéndose con el mismo grado de velocidad BC, sin más aceleración, atravesaría, en el tiempo siguiente CI, un espacio que es el doble del que pasó en el

mismo tiempo AC con el grado de velocidad uniforme EC, que es, a su vez, la mitad del grado BC. Pero, puesto que el móvil desciende con una velocidad que va aumentando uniformemente siempre en todos los tiempos iguales, en el tiempo subsiguiente añadirá al grado de velocidad CB las correspondientes intensidades [*momenti*] de velocidad creciente según las paralelas del triángulo BFG, que es igual al triángulo ABC; de modo que, añadiendo al grado de velocidad GI la mitad del grado FG, el mayor de los adquiridos en el movimiento acelerado y de los determinados por las paralelas del triángulo BFG, obtendremos el grado de velocidad IN, con el que se habría desplazado en el tiempo CI si el móvil hubiera hecho el recorrido con movimiento uniforme. Este grado IN, al ser el triple del EC, nos hace pensar que el espacio recorrido en el segundo tiempo CI debe ser triple del recorrido en el primer tiempo CA. Y si nos imaginamos que a AI se le suma otra parte semejante de tiempo IO, de forma que el triángulo aumente hasta APO, es evidente que si el movimiento continuara durante el intervalo de tiempo IO con el grado de velocidad IF, que ha sido obtenido durante el tiempo AI con un movimiento acelerado, al ser tal grado IF el cuádruple de EC, el espacio recorrido en el tiempo IO sería el cuádruple del recorrido durante el primer intervalo de tiempo AC. Pero, si continuamos aumentando la aceleración uniforme en el triángulo FPQ, que es semejante a ABC, el cual, tomado como movimiento uniforme, añadiría un grado de velocidad igual a EC, una vez añadido el grado QR, que es igual a EC, obtendremos toda la velocidad uniforme que ha tenido lugar en el tiempo IO y que es el quíntuple de la velocidad uniforme desarrollada durante el primer intervalo de tiempo AC. En consecuencia, con este sencillo cálculo se ve también que los espacios recorridos en tiempos iguales por un móvil que, partiendo del reposo, va adquiriendo velocidad en proporción al aumento del tiempo, están entre sí como los números impares *ab unitate* 1, 3, 5;* y si tomamos en total los espacios atravesados, el recorrido en el doble de tiempo es el cuádruple del recorrido en la mitad; el recorrido en el tiempo triple es nueve veces y, en suma, los espacios atravesados están en una proporción que es la segunda potencia de los tiempos; es decir, están en la proporción de los cuadrados de los tiempos.

SIMP. A mí, ciertamente, me ha complacido más esta argumentación simple y clara del señor Sagredo que la para mí oscura demostración del autor, de modo que estoy plenamente convencido de que la cosa es tal y como se la ha expuesto, una vez que se ha aceptado la definición de movimiento uniformemente acelerado. Pero que sea tal la aceleración de la que se sirve la naturaleza en lo que atañe al movimiento de la caída de los graves, es algo, en mi opinión, un tanto dudoso por el momento. Pienso que tanto por lo que a mí respecta como por aquellos que piensan como yo, es éste el momento oportuno de presentar algunos de esos experimentos de los que se dice que abundan y que en muchos casos concuerdan con las conclusiones que se han demostrado.

SALV. Vos, como un verdadero hombre de ciencia, exigís algo muy razonable. Es éste el modo de actuar de aquellas ciencias que aplican las demostraciones matemáticas a los fenómenos [*conclusioni*] naturales, como es el caso de la perspectiva, de la astronomía, de la mecánica, la música y otras muchas, las cuales confirman sus principios, que

* Como ilustración de la mayor elegancia y brevedad de los métodos analíticos modernos, se puede obtener el resultado de la proposición II directamente a partir de la ecuación fundamental

$$s=1/2g(t22-t21)=g/2(t2+t1)(t2-t1)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y s el espacio recorrido entre los instantes $t1$ y $t2$=I; si $t2-t1$ es un segundo, entonces $s=g/2(t2+t1)$, donde $t2+t1$ es siempre un número impar, ya que es la suma de dos números consecutivos de la sucesión de los números naturales.

son los fundamentos de toda la estructura subsiguiente, con experimentos bien establecidos. Espero, de cualquier forma, que no os parezca una pérdida de tiempo el haber discutido con cierto detenimiento acerca de este primer y fundamental principio sobre el cual se apoya la inmensa máquina de infinitas conclusiones, sacadas por el autor, de las que sólo una pequeña parte aparecen en este libro. Bastante habrá hecho aquél con abrirnos de par en par la puerta hasta ahora cerrada a mentes bien capaces. Por lo que se refiere a los experimentos, no han sido pasados tampoco por alto por parte del autor; con el fin de dejar bien probado que la aceleración de los graves que caen de modo natural se da en la proporción antes desarrollada, me he visto muchas veces en su compañía, a fin de probarlo de la siguiente manera.

En un listón o, lo que es lo mismo, en un tablón de una longitud aproximada de doce codos, de medio codo de anchura más o menos y un espesor de tres dedos, hicimos una cavidad o pequeño canal a lo largo de la cara menor, de una anchura de poco más de un dedo. Este canal, tallado lo más recto posible, se había hecho enormemente suave y liso, colocando dentro un papel de pergamino lustrado al máximo. Después, hacíamos descender por él una bola de bronce muy dura, bien redonda y pulida.

[212] Habiendo colocado dicho listón de forma inclinada, se elevaba sobre la horizontal una de sus extremidades, hasta la altura de uno o dos codos, se pareciera, y se dejaba caer (como he dicho) la bola por dicho canal, tomando nota como en seguida he de decir del tiempo que tardaba en recorrerlo todo. Repetimos el mismo experimento muchas veces para asegurarnos bien de la cantidad de tiempo y pudimos constatar que no se hallaba nunca una diferencia ni siquiera de la décima parte de una pulsación. Establecida exactamente esta operación, hicimos que esa misma bola descendiese solamente por una cuarta parte de la longitud del canal en cuestión. Medido el tiempo de la caída, resulta ser siempre, del modo más exacto, precisamente la mitad del otro. Haciendo después el experimento con otras partes, bien el tiempo de la longitud completa con el tiempo de la mitad, con el de dos tercios, con el de 3/4 o con cualquier otra fracción, llegábamos a la conclusión, después de repetir tales pruebas una y mil veces, que los espacios recorridos estaban entre sí como los cuadrados de sus tiempos. Esto se podía aplicar a todas las inclinaciones del plano, es decir, del canal a través del cual se hacía descender la bola. Observamos también que los tiempos de las caídas por diversas inclinaciones del plano guardan entre sí de modo riguroso una proporción que es, como veremos después, la que les asignó y demostró el autor.

En lo que a la medida del tiempo se refiere, empleamos una vasija grande llena de agua, sostenida a una buena altura y que, a través de un pequeño canal muy fino, iba vertiendo un hilillo de agua, siendo recogido en un vaso pequeño durante todo el tiempo en que la bola descendía, bien por todo el canal o sólo por alguna de sus partes. Se iban pesando después en una balanza muy precisa aquellas partículas de agua recogidas del modo descrito, con lo que las diferencias y proporciones de los pesos nos iban dando las diferencias y las proporciones de los tiempos. Ocurría esto con tal exactitud que, como he indicado, tales operaciones, repetidas muchísimas veces, jamás diferían de una manera sensible.

SIMP. Hubiera sido para mí una gran satisfacción haber estado presente en tales experimentos, pero teniendo por cierta vuestra diligencia al realizarlos y vuestra fidelidad en referirlos, no tengo ningún escrúpulo en aceptarlos como del todo probados y verdaderos.

SALV. Entonces podremos tomar el hilo de nuestra lectura de nuevo y seguir adelante.

[213] COROLARIO II

Se sigue, en segundo lugar, que si se toman, a partir del comienzo del movimiento, dos espacios cualesquiera, recorridos en tiempos cualesquiera, los tiempos respectivos estarán entre sí como cualquiera de los dos espacios está con respecto a la media proporcional entre los dos espacios dados.

Si tomamos dos distancias, ST y SY [figura 50], medidas desde el punto inicial S, la media proporcional de las cuales es SX, el tiempo de la caída por ST es el tiempo de la caída por SY como ST es a SX. Se puede decir también que el tiempo de caída a través de SY es al tiempo de caída a través de ST como SY es a SX. Ahora bien, dado que se ha demostrado que los espacios recorridos están en la misma proporción que los cuadrados de los tiempos y, además, dado que la proporción del espacio SY con respecto al espacio ST es el cuadrado de la proporción de SY a SX, se sigue que la proporción de los tiempos de caída a través de SY y ST es la proporción de las respectivas distancias SY y SX.

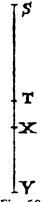


Fig. 50

ESCOLIO

Tengamos presente que lo demostrado hasta el momento con respecto a las caídas verticales, se cumple del mismo modo también en los movimientos que se realizan sobre planos inclinados, sea cual fuere tal inclinación. Se ha supuesto, efectivamente, que en estos últimos los grados de velocidad [*accelerationis gradus*] aumentan siempre según la misma proporción, es decir, según el aumento del tiempo, o lo que es lo mismo, según la serie de los números naturales.*

[214] SALV. Llegados a este punto, señor Sagredo, quisiera que me fuese permitido una vez más, a no ser que sea excesivamente tedioso para el señor Simplicio, interrumpir por un momento la lectura que estamos haciendo, con el fin de que pueda explicar un poco más lo dicho y demostrado hasta el momento, recurriendo a algunas de las conclusiones sobre mecánica que aprendí de nuestro académico. Así podré abundar y confirmar mejor la verdad del principio que antes examinamos con razonamientos verosímiles y experimentos; o, lo que es mas importante, trataré de demostrarlo geométricamente, probando primero un solo lema fundamental en la investigación de los impulsos [*impeti*].

SAGR. Si es tal lo que va a ofrecernos V. S., no habría tiempo que no gastase a gusto con este fin, al tratarse de confirmar y establecer de una vez por todas esta ciencia del movimiento. Por lo que a mí se refiere, no sólo os concedo que podáis satisfacernos en [215] este particular, sino que os ruego que deis descanso cuanto antes a la curiosidad que me habéis despertado. Pienso que otro tanto ocurrirá al señor Simplicio.

SIMP. Sin duda alguna.

SALV. Puesto que lo permitís, considérese, en primer lugar, como un hecho del todo conocido que las intensidades [*momenti*] o las velocidades de un mismo móvil son diversas si tienen lugar sobre planos de distinta inclinación; la máxima se alcanza siguiendo

* El fragmento de diálogo entre este escolio y el teorema siguiente fue elaborado por Viviani, siguiendo una sugerencia de Galileo. Véase la Edición Nacional, VIII, 23.

la vertical, mientras que en las otras inclinaciones va disminuyendo tal velocidad cuanto más se alejan de dicha verticalidad, esto es, cuanto más oblicuamente se inclinan. De ahí que el impulso [*impeto*], la tendencia [*talento*], la energía [*energia*], es decir, la intensidad [*momento*] de la caída va disminuyendo en el móvil a causa del plano sobre el que dicho móvil se apoya y desciende.

Para hacer más claro lo que quiero decir, imaginémonos la línea [figura 51] AB, trazada perpendicularmente con respecto a la horizontal AC. Colóquese después la misma en diversas inclinaciones con respecto a la horizontal, de modo que se vaya plegando y formando las AD, AE, AF, etc. Lo que afirmo es que el impulso [*impeto*] máximo y total del grave al descender, que tiene lugar por el plano perpendicular BA, es menor si lo hace por DA, menor todavía por EA y va disminuyendo sucesivamente en el caso de FA, para desaparecer, finalmente, del todo en la horizontal CA, donde el móvil es indiferente con respecto tanto al movimiento como al reposo, no teniendo, por sí mismo, tendencia a moverse hacia ninguna parte ni ofrece tampoco ninguna resistencia a ser movido. Y es que así como es imposible que un grave o un conjunto de graves se mueva de modo natural hacia arriba, separándose del centro común hacia donde tienden todos los graves, es imposible que se mueva espontáneamente, a no ser que se trate de un movimiento por el cual se vaya acercando al centro común al que acabamos de hacer referencia. De ahí que no haya ningún impulso [*impeto*] o intensidad de la tendencia al ascenso [*momento*] en un móvil situado horizontalmente, ya que en esta superficie todos sus puntos están igualmente alejados del centro común.

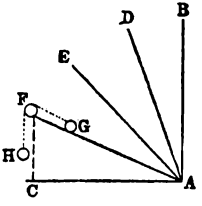


Fig. 51

[216] Una vez aclarado este cambio de impulso [*impeto*], es necesario que explique ahora lo que, en un antiguo tratado de mecánica escrito en Padua por nuestro académico para uso exclusivo de sus alumnos, fue demostrado profusa y concluyentemente cuando estudió el origen y la naturaleza de esta maravillosa máquina que es el tornillo. Se estudia cuál sea la proporción del cambio del impulso [*impeto*] al variar las diversas inclinaciones de los planos, como, por ejemplo, la del plano inclinado AF, cuya altura con respecto a la horizontal es la línea FC. Tal FC es aquella línea a través de la cual el impulso [*impeto*] de un grave y la intensidad de su tendencia a descender [*momento del descendere*] alcanzan su máximo. Nos preguntamos, ahora, cuál es la proporción que se da entre esta intensidad [*momento*] y la del mismo móvil al caer por el plano inclinado FA. Pues bien, afirmo que la proporción que buscamos es la inversa de las longitudes en cuestión: es éste el lema que ha de preceder al teorema que espero poder demostrar más tarde.

Es evidente que el impulso [*impeto*] de caída de un grave es igual a la resistencia o fuerza mínima que basta para impedir su movimiento y pararlo. Para calcular dicha fuerza y resistencia, y poder así medirlas, he de servirme del peso [*gravità*] de otro móvil. Imaginémonos ahora que sobre el plano FA colocamos el móvil G, conectado con el peso H por medio de una cuerda que pasa por encima del punto F; tengamos presente, además, que el móvil H ascenderá o descenderá por la perpendicular una distancia que es la misma que la que el móvil G pueda subir o bajar por el plano inclinado AF; sólo que esta distancia no será igual al ascenso o descenso perpendicular del móvil G,

ya que sólo de este modo el mismo G (del mismo modo que cualquier otro móvil) ejercita su resistencia. Esto es evidente, puesto que si consideramos que en el triángulo AFC el movimiento del móvil G, al subir por ejemplo de A a F, está compuesto por la línea transversal horizontal AC y la perpendicular CF, y dado que, por otra parte, en la horizontal, como se ha dicho, su resistencia a ser movido es nula [217] (ya que con tal movimiento no tiene ni pérdida ni aumento por lo que a la propia distancia del centro común de las cosas graves atañe, pues en la horizontal la distancia se mantiene siempre la misma), se sigue que la única resistencia que se encuentra es la que corresponde a tener que ascender por la vertical CF. Supuesto, pues, que el grave G, al moverse de A a F, ofrece resistencia solamente en cuanto asciende a través de la distancia vertical CF, mientras que el otro grave, H, baja necesariamente por la vertical todo lo que es el espacio FA, y dado que tal proporción de ascenso y descenso se mantiene siempre la misma, sea poco o mucho el movimiento de tales móviles (ya que éstos están atados), podemos afirmar categóricamente que en el caso de equilibrio, es decir, cuando los cuerpos no se muevan, las intensidades [*momenti*], las velocidades o sus tendencias al movimiento [*propensioni al moto*], es decir, los espacios que serían recorridos por ellos en el mismo tiempo, han de estar en una proporción que es inversa a la de sus pesos [*gravità*], como se ha demostrado en todos los casos de movimientos mecánicos.* De modo que será suficiente para impedir el descenso de G que H sea tanto menor en peso que aquél cuanto menor es proporcionalmente el espacio CF que el espacio FA. Por tanto, si el grave G es al H como FA es a FC, se seguirá un estado de equilibrio, es decir, serán iguales las intensidades [*momenti*] [de las tendencias a descender] de los graves H y G, con lo que cesará todo movimiento de los móviles en cuestión.

Y puesto que estamos de acuerdo en la equivalencia del impulso [*impeto*], la energía [*energia*], la intensidad [*momento*] o la propensión al movimiento y la fuerza o resistencia mínima suficiente para detenerlo, y puesto que hemos concluido que el grave H es capaz por sí solo de evitar el movimiento del grave G, se sigue que el peso más pequeño H, el cual ejerce su [tendencia al descenso con una] intensidad total por la vertical FC, será la medida precisa de la intensidad [*momento*] parcial que ejerce el peso mayor G por el plano inclinado FA. Ahora bien, la medida de la intensidad [*momento*] total del mismo grave G es su propio peso (puesto que para impedir el descenso de un grave se requiere contrarrestarlo con otro grave igual, con tal de que este segundo pueda moverse verticalmente con libertad). En consecuencia, el impulso [*impeto*] o intensidad parcial [*momento parziale*] de G a lo largo del plano inclinado FA, es al impulso máximo y total [*impeto massimo e totale*] del mismo G a través de la vertical FC, como el peso H al peso G; es decir, por construcción, como es la vertical FC, que es la altura del plano inclinado, al mismo plano inclinado FA: que es el lema que se quería demostrar y que fue supuesto como algo conocido por nuestro autor, como veremos, en la segunda parte de la proposición sexta del presente tratado.

SAGR. De lo que nos ha mostrado V. S. hasta el momento, me parece que se puede deducir con facilidad, argumentando *ex aequali in proportione perturbata*, que las intensidades de velocidad [*momenti*] del mismo móvil a lo largo de planos diversamente

* Una formulación aproximada del principio de trabajo virtual enunciada por Johannes Bernoulli en 1717.

inclinados, como lo son FA y FI, y que tengan la misma altura, están entre sí en una proporción inversa a las longitudes de los planos.

[218] SALV. Conclusión muy cierta. Una vez establecido este punto, pasaré ahora a demostrar el teorema, que dice así:

Los grados de velocidad de un móvil que desciende con movimiento natural desde la misma altura, por planos con la inclinación que se quiera, son iguales siempre al tocar la horizontal, con tal de que se hayan retirado todo tipo de obstáculos.

Hemos de tener presente, antes de nada, que se ha establecido que en un plano de la inclinación que sea, un móvil que parte del reposo va ganando velocidad, o cantidad de impulso [*quantità dell'impeto*] en proporción directa al tiempo (según la definición que sobre el movimiento naturalmente acelerado dio el autor). De ahí que, como ha demostrado en la proposición anterior, las distancias recorridas son proporcionales a los cuadrados de los tiempos y, consecuentemente, a los grados de velocidad. Como fueron los impulsos [*impeti*] en el primer movimiento, tales serán las proporciones de los grados de velocidad ganados en el mismo tiempo, puesto que tanto éstos como aquéllas aumentan con la misma proporción en el mismo tiempo.

Supongamos ahora [figura 52] el plano inclinado AB, cuya altura sobre la horizontal CB es la perpendicular AC. Sabemos que, como se ha demostrado hace unos momentos, el impulso [*impeto*] de un móvil por la vertical AC es al impulso [*impeto*] del mismo por el pleno inclinado AB como AB es a AC. En el plano inclinado AB tomemos AD como tercera proporcional de AB y AC; entonces el impulso [*impeto*] a través de AC es al impulso [*impeto*] por AB, es decir, por AD, como AC es a AD. Por esta razón, el móvil, en el mismo tiempo que atravesaría el espacio vertical AC, atravesaría también el espacio AD del plano inclinado AB (puesto que las intensidades de velocidad [*momenti*] están en la misma proporción que los espacios). También el grado de velocidad en C tendrá, con respecto al grado de velocidad en D, la misma proporción que se da entre AC y AD. El grado de velocidad en B, por su parte, está, con respecto al mismo grado en D, como el tiempo requerido para atravesar AB con respecto al tiempo requerido para atravesar AD, según la definición de movimiento acelerado, mientras que el tiempo que se necesita para recorrer AB es al tiempo necesitado en AD como la misma AC, que es la media proporcional entre BA y AD, a AD, según el último corolario de la segunda proposición. En consecuencia, los grados de velocidad en B y en C guardan la misma proporción con respecto a D que la que se da entre AC y AD, lo cual quiere decir que son iguales, que es lo que queríamos demostrar.

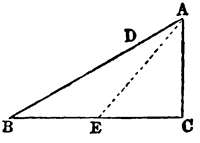


Fig. 52

Con lo dicho podremos demostrar mucho mejor la siguiente proposición del autor, que es la tercera, y en la que se vale del siguiente principio: el tiempo requerido para atravesar un plano inclinado es al que se necesita para atravesar la vertical como la longitud del plano inclinado a la de la vertical.

[219] Según el segundo corolario de la segunda proposición, si BA representa el tiempo que se requiere para recorrer AB, entonces el tiempo para pasar AD será igual a la media proporcional entre tales distancias, es decir, AC. Pero si AC es el tiempo que

se necesita para recorrer AD, será también el tiempo que se necesita para recorrer AC al ser las distancias AD y AC recorridas en tiempos iguales; de modo que si BA representa el tiempo que se necesita para recorrer AB, AC será el requerido para AC. Consecuentemente, así como AB es a AC, del mismo modo es el tiempo que se necesita para atravesar AB al tiempo para atravesar AC.

Con la misma argumentación se podrá probar que el tiempo que se necesita para pasar AC es al tiempo que se necesita para pasar el plano inclinado AE, como AC es a AE. Por tanto, *ex aequali* [*in proportione perturbata*], el tiempo para recorrer el plano inclinado AB es al tiempo del otro plano AE como la distancia AB a la distancia AE, etc.*

Se podría todavía, continuando con el mismo teorema, y como bien verá el señor Sagredo, demostrar inmediatamente la sexta proposición del autor. Pero dejemos ya de hacer digresiones, pues tal vez le hayan parecido demasiado tediosas, aunque, ciertamente, sean de mucho provecho por lo que respecta a la cuestión del movimiento.

SAGR. Me ha sido, por el contrario, de sumo agrado y muy necesaria para la perfecta inteligencia del principio que tratamos.

SALV. Continuaré, pues, la lectura del texto.**

[220] TEOREMA III. PROPOSICIÓN III

Si uno y el mismo móvil se mueve, partiendo del reposo, sobre un plano inclinado y a lo largo de uno vertical, teniendo ambos la misma altura, los tiempos de los movimientos estarán entre sí como las longitudes [respectivas] del plano y de la vertical.

Supongamos [figura 53] que AC sea el plano inclinado y AB la perpendicular, teniendo ambas la misma altura, que llamaremos BA; digo, entonces, que el tiempo de caída de uno y el mismo móvil a lo largo del plano AC está en una proporción, con respecto al tiempo de caída a través de la perpendicular AB, que es la misma que se da entre la longitud de AC y la de AB. Supongamos, ahora, que DG, EI y LF sean unas líneas paralelas a la horizontal; se sigue, entonces, de lo que precede que un móvil que parta de A adquirirá la misma velocidad en el punto G que en D, ya que en los dos casos la vertical de la caída es la misma. De igual manera, las velocidades en I y en E serán las mismas; lo mismo ocurrirá con las velocidades en L y en F. En general, podremos decir que las velocidades en los puntos extremos de cualquiera de las paralelas, trazadas desde cualquier punto de AB al punto correspondiente de AC, serán iguales.

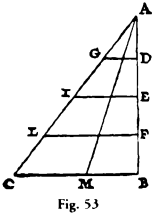


Fig. 53

Por tanto, los dos espacios AC y AB serán recorridos con los mismos grados de velocidad. Ahora bien, [221] se ha probado ya que si dos espacios son recorridos por un móvil con los mismos grados de velocidad, entonces la proporción de los tiempos de la

* Expresando este razonamiento en notación moderna y evidente, se tiene AC = 1/2 gt2c y AD = 1/2 AC/AB gt2/d. Si $AC^2 = AB \cdot AD$, se sigue inmediatamente que $t_d = t_c$.

** Fin del añadido de Viviani.

caída será la proporción de los mismos espacios. En consecuencia, el tiempo de caída a lo largo de AC es al que corresponde a AB como la longitud del plano AC es a la distancia vertical AB. Q. E. D.

[222] SAGR. Me parece que se podría demostrar clara y brevemente esto mismo, basándonos en lo ya demostrado, es decir, que el espacio recorrido por los movimientos acelerados [*somma del moto accelerato*] AC y AB es igual al movimiento uniforme cuyo grado de velocidad sea la mitad del grado máximo CB. Habiendo sido atravesados, pues, los dos espacios [223] AC y AB con el mismo movimiento uniforme, se hace patente, según la primera proposición del primer libro, que los tiempos de la caída estarán entre sí como los mismos espacios.

COROLARIO*

Se puede inferir de lo dicho, que los tiempos empleados para descender a lo largo de planos diversamente inclinados con tal de que tengan la misma altura, están entre si como sus longitudes respectivas.

Si tomamos otro plano, AM, desde A hasta la horizontal CB, también se demuestra que el tiempo por AM es al de por AB como la distancia AM a la AB. Como el tiempo por AB es al tiempo por AC, así AB es a AC. Por tanto, *ex aequali*, como AM es a AC, así es el tiempo por AM al tiempo por AC.

TEOREMA IV. PROPOSICIÓN IV

Los tiempos de caída a lo largo de planos de la misma longitud pero de diferente inclinación están entre sí en una proporción que es la inversa de la raíz cuadrada de sus alturas.

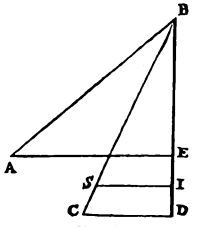


Fig. 54

Tracemos [figura 54] desde el punto único B los planos BA y BC, teniendo ambos la misma longitud, pero diferente inclinación. Supongamos que AE y CD sean líneas horizontales trazadas para encontrarse con la perpendicular [224] BD, represente BE la altura del plano AB y BD la del plano BC. Por otro lado, BI será la media proporcional de BD y BE; entonces la proporción de BD a BI es igual a la raíz cuadrada de la proporción de BD a BE. Pues bien, afirmo que la proporción de los tiempos de caída a lo largo de BA y BC es la proporción que se da entre BD y BI, de modo que el tiempo de caída a través de BA está relacionado con la altura del otro plano BC, es decir, con BD, como el tiempo a través de BC está relacionado con la altura BI. Debemos probar, ahora, que el tiempo de caída por BA es al tiempo que se emplea por BC como la longitud BD es a la longitud BI.

* Hay que suponer que Salviati comienza a leer de nuevo.

Sea IS paralela a DC. Puesto que se ha demostrado que el tiempo de caída por BA es al de la vertical BE como BA es a BE y también que el tiempo por BE es al de BD como BE es a BI y, de igual manera, que el tiempo a lo largo de BD es al tiempo a través de BC como BD es a BC o como BI es a BS, se sigue, *ex aequali*, que el tiempo a través de BA es al tiempo que se necesita para pasar BC, como BA es a BS o como BC es a BS. De cualquier forma, BC es a BS como BD es a BI, por lo que nuestra proposición queda probada.

TEOREMA V. PROPOSICIÓN V

La proporción entre los tiempos de las caídas por planos de diversa inclinación, longitud y altura es el producto de la proporción de las respectivas longitudes por la raíz cuadrada de la inversa de sus alturas.

Tracemos los planos AB y AC [figura 55] con diferentes inclinaciones, longitudes y alturas. Mi proposición, entonces, es que la proporción entre los tiempos de la caída a lo largo de AC y de AB es igual al producto de la proporción de AC a AB por la raíz cuadrada de la proporción inversa de sus alturas.

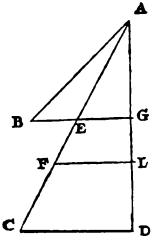


Fig. 55

Sea AD una perpendicular con respecto a la cual se trazan las líneas horizontales BG y CD, mientras que AL es la media proporcional de las alturas AG y AD. Desde el punto L, tracemos una línea horizontal que encuentre a AC en F; lógicamente, AF será la media proporcional entre AC y AE. Ahora bien, puesto que el tiempo de caída a lo largo de AC es al tiempo de caída a través de AE como la longitud de AF es a la de AE, y dado que el tiempo para atravesar AE es al que se necesita para recorrer AB como AE es a AB, es evidente que el tiempo para pasar AB como AF es a AB.

[225] Nos falta por demostrar que la proporción de AF a AB es igual al producto de la proporción de AC a AB por la proporción de AG a AL, que es la proporción inversa de la raíz cuadrada de las alturas DA y GA. Ahora bien, es evidente que si consideramos la línea AC en conexión con AF y AB, la proporción de AF a AC es la misma que la de AL a AD, o de AG a AD, la cual es la raíz cuadrada de la proporción de las alturas AG y AD; pero la proporción de AC a AB es la proporción de las alturas mismas, con lo que queda demostrado el teorema.

TEOREMA VI. PROPOSICIÓN VI

Si desde el punto más alto o más bajo de un círculo levantado verticalmente sobre el horizonte se trazan planos inclinados, cualesquiera que sean, hasta la circunferencia, los tiempos de caída a lo largo de tales planos serán iguales.

Sobre la línea horizontal GH [figura 56] construyamos un círculo vertical. Desde su punto más bajo —el punto tangente a la línea horizontal— tracemos el diámetro FA y,

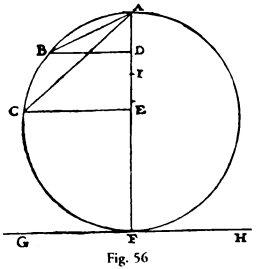


Fig. 56

desde el punto más alto, A, tracemos planos inclinados a B y C, que son puntos cualquiera de la circunferencia; en tal caso, los tiempos de caída a lo largo de tales planos serán iguales. Tracemos, ahora, BD y CE, que son perpendiculares al diámetro, siendo AI la media proporcional de las alturas de los planos AE y AD. Puesto que los rectángulos FAE y FAD son respectivamente iguales a los cuadrados de AC y AB, mientras que el rectángulo FAE es al rectángulo FAD como AE es a AD, se sigue que el cuadrado de AC es al cuadrado de AB como la longitud AE es a la longitud AD. Pero, puesto que la longitud AE es a la longitud AD como el cuadrado de AI es al cuadrado de AD, lo que se deduce es que los cuadrados de las líneas AC y AB están entre sí como los cuadrados de las líneas AI y AD; de aquí también que la longitud de AC sea a la longitud de AB como AI es a AD. Ahora bien, se ha demostrado antes que la proporción del tiempo de caída a lo largo de AC con respecto al de AB es igual al producto de las dos proporciones, AC y AB, por una parte, y AD y AI, por otra; pero esta última proporción es la misma que la que se da entre AB y AC, por tanto, la proporción del tiempo de caída por AC con el tiempo de caída por AB es como el producto de las dos proporciones: AC a AB y AB a AC. La proporción de estos tiempos es, consecuentemente, la de la igualdad, con lo que queda demostrada nuestra proposición.

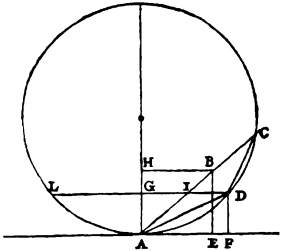


Fig. 57

Utilizando los principios de la mecánica [*ex Mechanicis*], se puede obtener el mismo resultado, o sea, que un móvil en su caída necesitará el mismo tiempo para atravesar las distancias CA y DA, tal [226] como se indica en la siguiente [figura 57]. Supongamos que BA es igual a DA y tracemos, después, las perpendiculares BE y DF. Se sigue de los principios de la mecánica que la intensidad del peso [*momentum ponderis*] que actúa a lo largo del plano inclinado ABC es a la intensidad total [*momentum totale*] como BE es a BA. Igualmente, la intensidad del peso por el plano AD es a la intensidad total como DF es a DA o también a BA. La intensidad del peso, por tanto, de este mismo grave por el plano DA es a la que se da en el plano ABC como la longitud DF es a la longitud BE. Por esta razón, este mismo grave atravesará, en el mismo tiempo, según la segunda proposición del primer libro, los espacios de los planos CA y DA, los cuales están entre sí como las longitudes de BE y DF. Ahora bien, se puede mostrar que CA es a DA como BE es a DF. El móvil que cae, por tanto, atravesará los dos recorridos, CA y DA, en tiempos iguales.

Además, el hecho de que CA sea a DA como BE es a DF se puede demostrar de la siguiente manera: unamos C y D; a partir de D, tracemos la línea DGL, paralela a AF y que corta la línea AC en I; desde B, tracemos la línea BH también paralela a AF; en este

caso, el ángulo ADI será igual al ángulo DCA, dado que abarcan los arcos iguales LA y DA, y puesto que el ángulo DAC es común, los lados de los triángulos equiángulos CAD y DAI que forman ángulos iguales serán proporcionales entre sí. Por tanto, como CA es a DA así DA es a IA, esto es, como BA es a IA o como HA es a GA o, lo que es lo mismo, como BE es a DF.

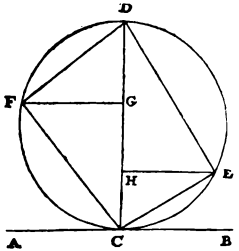


Fig. 58

La misma proposición se puede demostrar, con más facilidad, de la siguiente manera: en la línea horizontal AB [figura 58] tracemos un círculo cuyo diámetro, DC, es vertical. Desde la parte superior de este diámetro, tracemos un plano inclinado que se extienda hasta alcanzar la circunferencia. Afirmo, entonces, que un móvil empleará el mismo tiempo tanto si cae por el plano DF como si cae por el diámetro DC. Veámoslo: tracemos FG, paralela a AB y perpendicular a DC; unamos FC; puesto que el tiempo de caída a lo largo [227] de DC es al de DG como la media proporcional de CD y GD es a GD, y puesto que DF es media proporcional de DC y DG, siendo el ángulo DFC, inscrito en un semicírculo, un ángulo recto y siendo FG perpendicular a DC, se sigue que el tiempo de caída por DC es al de DG como la longitud FD es a GD. Ahora bien, se ha demostrado ya que el tiempo de caída por DF es al de DG como la longitud DF es a DG; los tiempos, por tanto, de caída por DF y DC tienen con el tiempo de caída por DG la misma proporción.

De la misma manera se puede demostrar que si uno traza la cuerda CE desde el punto más bajo del diámetro, traza también la línea EH, paralela a la horizontal, y une los puntos E y D, entonces el tiempo de la caída por EC será igual que el tiempo de caída por el diámetro DC.

COROLARIO I

De lo dicho se infiere que los tiempos de caída a lo largo de todas las cuerdas trazadas desde los extremos C o D, son iguales entre sí.

COROLARIO II

Se sigue también de lo dicho que si desde un mismo punto parten una perpendicular y un plano inclinado, tales que los tiempos de descenso a lo largo de los mismos sean iguales, dicha perpendicular y plano inclinado se inscribirán en un semicírculo, cuyo diámetro es la misma perpendicular.

COROLARIO III

Se infiere, además, que los tiempos de los movimientos que tienen lugar sobre los planos inclinados son iguales cuando las alturas de partes iguales de tales planos estén en-

tre sí como las longitudes de los mismos planos: se ha demostrado, efectivamente, en la penúltima figura, que los tiempos de descenso por CA y DA son iguales cuando la altura de AB, igual a AD o, lo que es lo mismo, BE, es a la altura DF como CA a DA.

SAGR. Detenga V. S., por favor, un momento la lectura de lo que sigue, de modo que pueda encontrar cierta claridad acerca de una idea que me está dando vueltas en la cabeza y que, aunque no sea una [228] falacia, no deja de ser una broma graciosa, como son todas aquellas que se refieren a la naturaleza o a la necesidad.

Es evidente que si, desde un punto determinado de un plano horizontal, se traza una serie de líneas que se extienden infinitamente en todas las direcciones y si suponemos que sobre cada una de ellas se mueve un punto con velocidad uniforme, partiendo dichos puntos del mismo lugar, al mismo tiempo y con la misma velocidad, entonces se hará manifiesto que cada uno de esos puntos móviles configurará la circunferencia de una serie de círculos cada vez mayores y que tienen siempre como centro el primer punto al que nos hemos referido. Es algo parecido a lo que ocurre con las pequeñas olas de agua estancada después que se tira desde cierta altura una piedrecita, cuyo impacto sirve para que comience el movimiento en todas las direcciones y que constituye el centro de todos los círculos que se vayan formando, cada vez más grandes, como resultado de aquellas olas. Pero si nos imaginamos, ahora, un plano vertical, desde cuyo punto más alto trazamos líneas inclinadas con cualquier ángulo prolongadas infinitamente y a lo largo de ellas suponemos que descienden móviles graves con movimiento naturalmente acelerado y con la velocidad apropiada a la inclinación de su plano, ¿en qué lugar de las líneas los veremos nosotros en cada instante, siempre que supongamos que tales móviles en su caída son siempre visibles? Es aquí donde comienza mi sorpresa, ya que las demostraciones precedentes me aseguran que todos se verán siempre en la misma circunferencia de cada uno de los círculos que van aumentando a medida que se alejan, en su descenso, del punto en que comenzó el movimiento. Para hacerme comprender mejor, tomemos a A [figura 59] como el punto más alto del que descienden líneas según la inclinación que se quiera, tales como AF y AH, siendo la perpendicular AB. Si tomamos en ésta dos puntos, C y D, con ellos como centro, se describirán círculos que pasen por el punto A, cortanto las líneas inclinadas en los puntos F, H, B y E, G, I. Se hace patente, por las demostraciones que preceden, que, al partir al mismo tiempo del punto A, cuando uno de los móviles que descienden por tales líneas esté en E, el otro estará en G y el otro en I; de este modo, si [229] continúan descendiendo, acabarán por encontrarse, en el mismo tiempo, en F, H y B; éstos, o un infinito número de móviles, que continuaran moviéndose a través de infinitas inclinaciones, se encontrarían siempre y sucesivamente en las mismas circunferencias, las cuales irían aumentando cada vez más infinitamente. De las dos especies, pues, de movimiento de los que se sirve la naturaleza nace con una admirable semejanza y diversidad la generación de infinitos círculos: una se coloca, como en su sede y principio, en el centro de los infinitos círculos concéntricos, mientras que la otra está situada en el contacto que un número infinito de círculos excéntricos tienen en su parte superior; el primero de estos dos movimientos es pro-

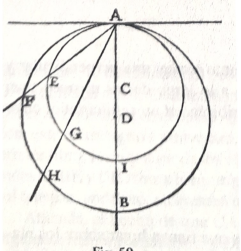


Fig. 59

ducido por movimientos que son iguales y uniformes, mientras que el segundo, por movimientos que no son ni uniformes ni iguales entre sí, sino que varían unos respecto a otros según que sean diferentes las inclinaciones. Más aún, si desde los dos puntos elegidos como origen del movimiento trazamos ahora una serie de líneas, no sólo a lo largo de planos horizontales y verticales sino en toda las direcciones, entonces, del mismo modo que en el caso de las que tenían su origen en un solo punto la producción de círculos tenía lugar yendo aquéllos siempre en aumento, así también aquí comienzan en un solo punto y se produce un número infinito de esferas o, mejor, una sola esfera que irá aumentando su volumen sin límite alguno; y esto de dos maneras: bien teniendo su origen en el centro o bien en la circunferencia de tales esferas.

SALV. La consideración es realmente bellísima y digna de la inteligencia del señor Sagredo.

SIMP. Por mi parte, aunque he entendido al menos las dos formas en que se producen los círculos y las esferas con sus dos diversos movimientos naturales, no acabo de comprender del todo el efecto resultante del movimiento acelerado y su demostración correspondiente; el que uno pueda tomar como origen del movimiento tanto el centro último como lo más alto de la esfera, me hace pensar que en estas verdaderas y admirables conclusiones puede esconderse algún gran misterio; y digo misterio porque me refiero a la creación del universo (ya que se dice que es de forma esférica) y a la mansión de la primera causa.

SALV. No veo objeción alguna contra semejante creencia; sin embargo, tales reflexiones, tan profundas, pertenecen a una doctrina mucho más alta que la nuestra. Nosotros hemos de darnos por satisfechos siendo de aquellos artesanos inferiores que descubren y extraen de la cantera los mármoles, en los cuales, después, los ingeniosos escultores hacen aparecer imágenes maravillosas, que permanecían escondidas en bruto e informes. Ahora, si os place, seguiremos adelante.

[230] TEOREMA VII. PROPOSICIÓN VII

Si las alturas de dos planos tuviesen entre sí una proporción como el cuadrado de las longitudes de los mismos planos, los móviles que, partiendo del reposo, descendieran por tales planos, los atravesarán en tiempos iguales.

Tomemos [figura 60] dos planos con diferentes longitudes e inclinaciones, AE y AB, cuyas alturas son AF y AD. Sea AF con respecto a AD como el cuadrado de AE es al cuadrado de AB. Afirmo que un móvil que parta del reposo en A atravesará los planos AE y AB en tiempos iguales. Tracemos, desde la línea vertical, las líneas paralelas horizontales EF y BD, esta última cortando AE en G. Puesto que FA es a DA como el cuadrado de EA al de AB y FA es a DA como EA es a GA, se sigue que AE es a GA como el cuadrado de EA al cuadrado de BA. De ahí que BA sea media proporcional entre EA y GA. Y puesto que el tiempo de la caída a lo largo de AB tiene con respecto al tiempo por AG la misma proporción que se da entre AB y AG, y puesto que también el tiempo de la caída por AG

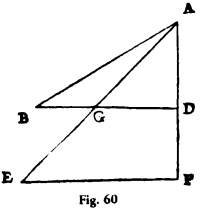


Fig. 60

es al tiempo por AE como AG es a la media proporcional entre AG y AE, que es AB, se sigue, *ex aequali*, que el tiempo a lo largo de AB es al tiempo por AE como AB es a sí misma; luego los tiempos son iguales, que era lo que había que demostrar.

TEOREMA VIII. PROPOSICIÓN VIII

De los planos delimitados por un mismo círculo, erigido sobre la horizontal, aquellos que acaban en el extremo inferior o superior del diámetro perpendicular, poseen tiempos de caída iguales al tiempo de caída a lo largo del diámetro. Por el contrario, en aquellos planos que no llegan a tocar el diámetro, los tiempos son más breves. Finalmente, en los planos que cortan el diámetro, los tiempos son mayores.

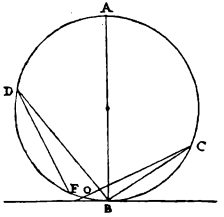


Fig. 61

Sea AB el diámetro vertical [figura 61] de un círculo que toca el plano horizontal. Se ha demostrado ya que los tiempos de caída a lo largo de los planos trazados desde cualquiera de los puntos terminales A o B son iguales. [231] Con el fin de demostrar que el tiempo de descenso por el plano DF, que no llega a tocar el diámetro, es menor, podemos trazar el plano DB, más largo pero menos inclinado que DF. Se infiere de aquí que el tiempo por DF es menor que por DB y, consecuentemente, que por AB. De la misma manera, sabemos ya que el tiempo de caída por CO, que corta el diámetro, es mayor, ya que es más largo aunque menos inclinado que CB; luego se demuestra lo que queríamos demostrar.

TEOREMA IX. PROPOSICIÓN IX

Si a partir de un punto de una línea horizontal, se trazan dos planos de la inclinación que se quiera y tales planos son cortados por una línea que forme con ellos ángulos alternativamente iguales a los ángulos formados por estos mismos planos y la horizontal, entonces los movimientos a lo largo de estas partes cortadas por dicha línea tendrán lugar en tiempos iguales.

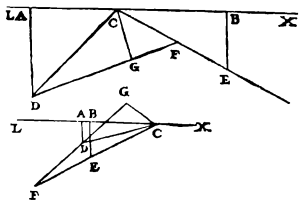


Fig. 62

A través del punto C de la línea horizontal X [figura 62], tracemos dos planos, CD y CE, con una inclinación cualquiera. En un punto de la línea CD construyamos el ángulo CDF, igual al ángulo XCE. Hagamos que la línea DF corte el plano CE en F, de

modo que los ángulos CDF y CFD sean alternativamente iguales a XCE y LCD. Afirmo, entonces, que los tiempos de caída por CD y CF son iguales. Puesto que el ángulo CDF es igual al ángulo XCE por construcción, es evidente que el ángulo CFD debe ser igual al ángulo DCL. Y es que si el ángulo común DCF es sustraído de los tres ángulos del triángulo CDF, que son iguales a dos rectos (y a los cuales son también iguales todos los ángulos que se puedan construir alrededor del punto C en la parte más baja de la línea LX) quedará en el triángulo los dos ángulos CDF y CFD, iguales a los dos ángulos LCD y XCE; pero, por hipótesis, los ángulos CDF y XCE son iguales; luego el ángulo que queda, CFD, es igual al residuo DCL. Supongamos ahora que CE es igual a CD; desde los puntos D y E tracemos DA y EB, perpendicularmente a la línea horizontal XL; y desde el punto C tracemos CG, perpendicular a DF. Puesto que el ángulo CDG es igual al ángulo ECB, y puesto que DGC y CBE son ángulos rectos, se sigue que los triángulos CDG y CBE son equiángulos. En consecuencia, DC es a CG como CE es a EB. Pero DC es igual a CE, y, por tanto, CG es igual a EB. Y puesto que también los ángulos en C y en A, en el triángulo DAC, son iguales a los ángulos en F y G, en el triángulo CGF, tenemos entonces que CD es a DA como FC es a CG y, *permutando*, DC es a CF como DA es a CG o, lo que es lo mismo, como DA es a BE. Así, la proporción de las alturas de los planos [232] iguales CD y CE es la misma que la proporción de las longitudes DC y CF. Por tanto, y según el corolario primero de la proposición sexta, los tiempos de caída por estos planos serán iguales, que es lo que había que demostrar.

También podemos probar lo anterior de la siguiente manera: tracemos [figura 63] FS perpendicularmente a la línea horizontal AS. Puesto que el triángulo CSF es semejante al triángulo DGC, tenemos entonces que SF es a FC como CG es a CD. Y puesto que el triángulo CFG es semejante al triángulo DCA, resulta que FC es a CG como CD es a DA. De aquí que, *ex aequali*, SF sea a CG como CG es a DA. Por tanto, CG es media proporcional entre SF y DA, mientras que DA es a SF como el cuadrado de DA es al cuadrado de CG. Y dado que el triángulo ACD es semejante al triángulo CGF, tenemos que DA es a DC como GC es a CF y, *permutando*, DA es a CG como DC es a CF, luego el cuadrado de DA es al cuadrado de DG como el cuadrado de DC es al cuadrado de CF. Ahora bien, se ha demostrado que el cuadrado de DA es al cuadrado de CG como DA es a SF, luego el cuadrado de DC es al cuadrado de CF como DA es a FS, pero, de la proposición siete antes mencionada, según la cual las alturas DA y FS de los planos CD y CF están entre sí como los cuadrados de las longitudes de los planos, se sigue que los tiempos de caída a lo largo de tales planos serán iguales.

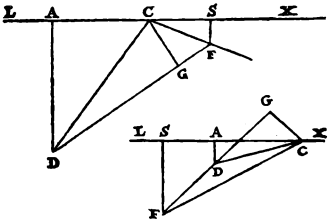


Fig. 63

TEOREMA X. PROPOSICIÓN X

Los tiempos de los movimientos que tienen lugar en planos diversamente inclinados pero de la misma altura, están entre sí como las longitudes de los

mismos planos, tanto si los movimientos se desarrollan a partir del reposo como si son precedidos por movimientos que se inician a partir de la misma altura.

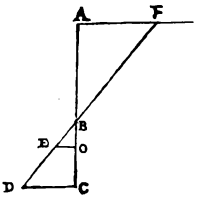


Fig. 64

Supongamos que los caminos del descenso [figura 64] tengan lugar por ABC y ABD hasta el plano horizontal DG, de modo que los descensos por BD y BC sean precedidos por el descenso a través de AB. Afirmo, entonces, que el tiempo de la caída por BD es al tiempo de la caída por BC como la longitud BD es a BC. [233] Tracemos ahora la línea horizontal AF y prolonguemos DB hasta que corte esta línea en F. Sea FE la media proporcional entre DF y FB y tracemos EO paralela a DC; AO será, entonces, la media proporcional entre CA y AB. Si representamos ahora el tiempo de caída por AB por medio de la longitud AB, entonces el tiempo de caída por FB será representado por la distancia FB; así, también el tiempo de caída por todo el espacio AC será representado por la media proporcional AO, mientras que FE representará el tiempo de caída por la distancia FD. De aquí que el tiempo de caída por el resto, BC, será representado por BO y el que tiene lugar por el resto, BD, por medio de BE. Pero, puesto que BE es a BO como BD es a BC, se sigue que si nosotros dejamos que los móviles desciendan primero por AB y FB o, lo que es lo mismo, por el trazo común AB, entonces los tiempos del descenso por BD y BC estarán, entre sí, como las longitudes BD y BC.

Ahora bien, hemos probado ya antes que el tiempo de la caída desde el punto de reposo B, a través de BD, es al tiempo que dura el descenso por BC como la longitud BD es a la longitud BC. De aquí que los tiempos de la caída a lo largo de diferentes planos, que tengan una altura igual, están entre sí como las longitudes de tales planos, independientemente de que el movimiento parta del estado de reposo o sea precedido por una caída desde la misma altura, que es lo que queríamos demostrar.

TEOREMA XI. PROPOSICIÓN XI

Si el plano sobre el que tiene lugar el movimiento a partir del reposo se divide en dos partes cualesquiera, entonces el tiempo del movimiento a lo largo de la primera parte está, con respecto al tiempo del movimiento a lo largo de la parte restante, como la longitud de la primera parte al exceso que sobre ella tiene la media proporcional entre el plano entero y aquella primera parte.

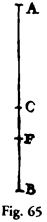


Fig. 65

Supongamos [figura 65] que la caída tiene lugar, desde el punto de reposo A, a través de toda la distancia AB, la cual está dividida en un punto cualquiera, C, por ejemplo. Supongamos también que AF sea la media proporcional entre toda la longitud BA y la primera parte AC; entonces CF será el sobrante de la media proporcional sobre la primera parte AC. Ahora bien, lo que afirmo es que el tiempo que dura la caída por AC será al tiempo del subsiguiente descenso por CB como la longitud AC es a la longitud CF. Esto es evidente, ya que el tiempo por AC es al tiempo por la distancia completa AB como AC es a la media pro-

porcional AF. En consecuencia, *dividiendo,* el tiempo por AC será al tiempo por el resto CB como AC es a CF. Si representamos el tiempo de la caída por AC mediante la longitud AC, entonces el tiempo de descenso a lo largo de CB estará representado por CF.

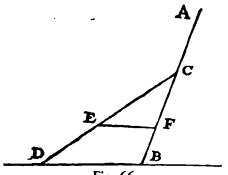


Fig. 66

[234] En el caso de que el movimiento no tenga lugar por la línea recta ACB [figura 66], sino por la quebrada ACD hasta alcanzar la horizontal BD, y si trazamos desde F la línea horizontal FE, se podrá probar, de la misma manera, que el tiempo empleado en recorrer AC es al tiempo empleado en la línea inclinada CD como AC es a CE. Y es que el tiempo a lo largo de AC es al tiempo a lo largo de CB como AC es a CF. Ahora bien, se ha demostrado ya que el tiempo por CB, después del descenso a través de la distançia AC, es al tiempo por CD, después del descenso a lo largo de la misma distancia AC como CB es a CD, o como CF es a CE. Por tanto, *ex aequali,* el tiempo por AC será al tiempo por CD como la longitud AC es a la longitud CE.

TEOREMA XII. PROPOSICIÓN XII

Si un plano vertical y un plano inclinado cualquiera se cortan entre sí en el espacio comprendido entre dos líneas horizontales, y si se toman las medidas proporcionadas de cada uno de ellos y las respectivas partes comprendidas entre el punto común de intersección y la línea horizontal superior, entonces el tiempo del movimiento a lo largo de la perpendicular estará, con respecto al tiempo requerido para atravesar la parte superior de la perpendicular seguida de la parte inferior del plano secante, en la misma proporción que la longitud total de la vertical con respecto a la longitud compuesta por la media proporcional tomada sobre la perpendicular y el exceso de toda la longitud del plano inclinado sobre su propia media proporcional.

Sean [figura 67] AF y CD dos planos horizontales, superior e inferior, respectivamente, entre los cuales quedan cortados la perpendicular AC y el plano inclinado DF, y llamemos B al punto de intersección de tales planos. Sea AR la media proporcional entre FD y su parte superior FB. Afirmo que el tiempo del descenso por toda la perpendicular AC es al tiempo del descenso a lo largo de su parte superior AB seguida de la parte inferior del plano inclinado, esto es, BD, como la longitud AC es a la media proporcional en la vertical, es decir, AR, más la longitud SD, que representa el exceso de todo el plano DF sobre su media proporcional FS.

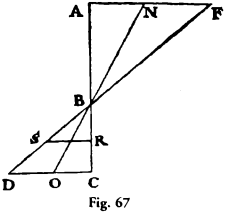


Fig. 67

Unamos los puntos R y S, obteniendo así la línea horizontal RS. Ahora bien, puesto que el tiempo de la caída a lo largo de todo el espacio AC es al tiempo de la caída por la parte AB como CA es a la media proporcional AR, se sigue entonces que si acordamos que el tiempo del descenso por AC sea representado por la distancia AC, entonces el tiempo del descenso por la distancia AB estará representado por AR, mientras el

tiempo de descenso por el resto, BC, estará representado por RC. Pero si se supone que el tiempo por AC es la longitud AC, entonces el tiempo por FD será la distancia FD. Podemos inferir, de la misma manera, que el tiempo que dura el descenso por BD, cuando es precedido por una caída a lo largo de FB o [235] AB, es la distancia DS. Por tanto, el tiempo requerido para descender por AC es igual a AR más RC, mientras que el tiempo del descenso por la quebrada ABD será igual a AR más SD, que es lo que había que demostrar.

Lo mismo puede probarse si en vez de un plano vertical se toma cualquier otro plano, como NO, por ejemplo. La demostración sería la misma.

PROBLEMA I. PROPOSICIÓN XIII

Dada una línea perpendicular, trácese un plano inclinado tal que, teniendo la misma altura que la perpendicular, el movimiento sobre tal plano tenga lugar, después de la caída a lo largo de la perpendicular, en un tiempo que sea igual al empleado en el descenso a lo largo de la perpendicular por un móvil que parta del reposo.

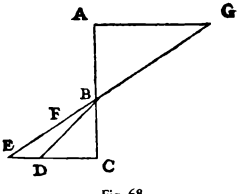


Fig. 68

Supongamos [figura 68] que AB es la perpendicular dada. Prolonguemos esta línea hasta C, haciendo que BC sea igual a AB, y tracemos las líneas horizontales CE y AG. Se trata de trazar un plano, desde B hasta la línea horizontal CE, en el que el movimiento tras la caída desde A se realice en el mismo tiempo que el movimiento por AB a partir del reposo en A.

Sea CD igual a BC y tracemos la línea BD, haciendo que la línea BE sea igual a la suma de BD y DC. Digo que BE es el plano que buscamos. Prolonguemos EB hasta que corte la línea horizontal AG por G. Sea GF la media proporcional entre GE y GB; entonces, EF es a FB como EG es a GF, y el cuadrado de EF es al cuadrado de FB como el cuadrado de EG es al cuadrado de GF, o sea, como EG es a GB. Pero EG es dos veces GB; luego el cuadrado de EF es dos veces el cuadrado de FB. Igualmente, el cuadrado de DB es el doble del cuadrado de BC. En consecuencia, EF es a FB como DB es BC y, *componendo et permutando*, EB es a DB más BC como BF es a BC. Ahora bien, EB es igual a DB más BC, luego BF es igual a BC, o lo que es lo mismo, a BA. Si convenimos en que la longitud AB habrá de representar el tiempo de caída a lo largo de AB y GB a lo largo de GB, entonces GF representará el tiempo por toda la distancia GE. Por tanto, BF representará el tiempo de descenso por la diferencia de tales recorridos, es decir, BE, después de la caída de G, o sea, A, que era lo que había que hacer.

[236] PROBLEMA II. PROPOSICIÓN XIV

Dada una perpendicular y dado un plano inclinado con respecto a ella, determinar en la parte superior de la perpendicular una longitud tal que el tiempo empleado para recorrerla a partir del reposo, resulte igual al tiempo empleado en recorrer el plano inclinado, después de la caída a través de dicha parte de la perpendicular.

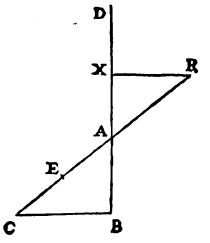


Fig. 69

Sean AC el plano inclinado y OB la perpendicular [figura 69]. Se nos pide que encontremos, en la parte de la vertical AD, una longitud que habrá de ser atravesada por un móvil, que caiga del reposo, en el mismo tiempo que se necesita para que ese mismo móvil recorra el plano AC después de la caída por esa longitud. Tracemos la horizontal CB y tracemos AE de modo que BA más el doble de AC sea a AC como AC es a AE. Tracemos también AR de modo que BA sea a AC como EA es a AR. Desde R, tracemos ahora RX, perpendicular a DB. Afirmo que X es el punto que buscamos. Y es que, puesto que BA más el doble de AC es a AC como AC es a AE, se sigue, *dividendo*, que BA más AC es a AC como CE es a AE. Dado que BA es a AC como EA es a AR, tenemos, *componendo*, que BA más AC es a AC como ER es a RA. Pero BA más AC es a AC como CE es a AE, luego CE es a AE como ER es a RA, esto es, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como CR es a RE. Hemos visto, por otra parte, que RE es la media proporcional entre CR y RA. Además, puesto que se ha supuesto que BA es a AC como EA es a AR, y puesto que, por triángulos semejantes, tenemos que BA es a AC como XA es a AR, se sigue que EA es a AR como XA es a AR. De aquí que EA y XA sean iguales. Pero si suponemos que el tiempo de la caída a través de RA lo hemos de representar por medio de la longitud RA, entonces el tiempo de la caída por RC será representado por la longitud RE, que es la media proporcional entre RA y RC. De la misma manera, AE representará el tiempo de la caída por AC después de la caída a través de RA o a través de AX. Ahora bien, el tiempo del descenso por XA es representado por la longitud XA, mientras que RA representará el tiempo a través de RA. Se ha demostrado ya, por otro lado, que XA y AB son iguales; luego tenemos lo que buscábamos.

PROBLEMA III. PROPOSICIÓN XV

Dada una perpendicular y un plano inclinado con respecto a ella, determínese en la prolongación de la parte inferior de la perpendicular una longitud tal que el tiempo empleado en recorrerla resulte igual al tiempo empleado en recorrer el plano inclinado tras la caída a lo largo de la perpendicular dada.

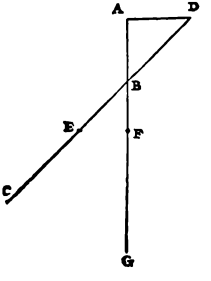


Fig. 70

Representemos [figura 70] por medio de AB la línea vertical, mientras que BC representa el plano inclinado. Se nos pide que encontremos una longitud en la perpendicular, debajo de su punto de intersección, la cual, después de la caída desde A, será atravesada empleando el mismo tiempo que se necesita para BC, después [237] de un descenso idéntico desde A. Tracemos la horizontal AD y cortemos la prolongación de CB en D. Sea DE la media proporcional entre CD y DB; construyamos, por

otro lado, BF igual a BE, mientras que AG es la tercera proporcional de BA y AF. Afirmo que BG es la distancia que atravesará un móvil, después de caer por AB, en el mismo tiempo que se requiere para el plano BC después del mismo descenso preliminar. Si suponemos que el tiempo de caída a lo largo de AB es representado por AB, entonces el tiempo para DB será representado por DB. Y dado que DE es la media proporcional entre BD y DC, la misma DE representará el tiempo de descenso a lo largo de toda la distancia DC, mientras que BE representará el tiempo requerido para la diferencia entre los dos recorridos, es decir, BC, con tal de que en cada caso la caída se haga desde el punto de reposo D o A. De la misma manera, podemos inferir que BF representará el tiempo del descenso a través de la distancia BG, después de la misma caída preliminar; pero BF es igual a BE, luego el problema queda resuelto.

TEOREMA XIII. PROPOSICIÓN XVI

Si en un punto convergen las longitudes de un plano inclinado y de una perpendicular, siendo tales que resulten iguales los tiempos de los movimientos a lo largo de ellos a partir del reposo, entonces un móvil que caiga de una altura cualquiera más elevada recorrerá más rápidamente la longitud del plano inclinado que el de la perpendicular.

Supongamos [figura 71] que EB es la línea vertical y CE el plano inclinado, partiendo ambos del punto común E y siendo recorridos, tanto la una como el otro, en el mismo tiempo por un móvil que inicie su recorrido en el punto de reposo E. Prolonguemos la línea vertical hacia arriba hasta tocar cualquier punto, A por ejemplo, desde donde se dejan caer los móviles. Pues bien, afirmo que después de la caída a través de AE, el plano inclinado EC será atravesado en menos tiempo que la perpendicular EB. Unamos CB, tracemos la horizontal AD y prolonguemos CE hasta que corte a ésta en D. Sea DF la media proporcional entre CD y DE, [238] mientras que AG es la media proporcional entre BA y AE. Tracemos ahora FG y DG. Puesto que los tiempos de descenso a lo largo de EC y EB, partiendo del punto de reposo E, son iguales, se sigue que, según el corolario segundo de la proposición sexta, el ángulo formado en C es un ángulo recto. Ahora bien, también el ángulo formado en A es un ángulo recto, así como los ángulos formados en el vértice E. De aquí que los triángulos AED y CEB sean equiángulos y los lados que forman ángulos iguales sean proporcionales. Podemos inferir, por tanto, que BE es a EC como DE es a EA. En consecuencia, el rectángulo BAE es igual al rectángulo CED. Y puesto que el rectángulo CDE supera al rectángulo CED en lo que es el cuadrado de ED y dado que el rectángulo BAE

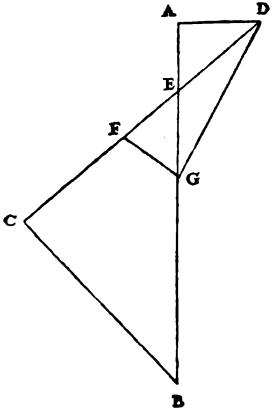


Fig. 71

supera al rectángulo BEA en el cuadrado de EA, se infiere que lo que sobrepasa el rectángulo CDE al rectángulo BAE o, lo que es lo mismo, lo que excede el cuadrado de FD al cuadrado de AG, será igual a lo que excede el cuadrado de DE al cuadrado de AE; exceso que es igual al cuadrado de AD. Por tanto, el cuadrado de FD es igual al cuadrado de GA más el cuadrado de AD, siendo a su vez igual al cuadrado de GD. De aquí que DF sea igual a DG y que el ángulo DGF sea igual al ángulo DFG, mientras que el ángulo EGF es menor que el ángulo EFG y el lado opuesto EF es menor también que el lado opuesto EG. Si acordamos ahora representarnos el tiempo de la caída a través de AE por medio de la longitud AE, entonces el tiempo por DE estará representado por DE. Pero, puesto que AG es la media proporcional entre BA y AE, se sigue que AG representará el tiempo del descenso a través de toda la distancia AB, mientras que la diferencia EG representará el tiempo de la caída, desde el reposo en A, a lo largo de la diferencia EB.

De igual manera, EF representará el tiempo del descenso por EC, tras el descenso por ED o cayendo desde EA. Ahora bien, se ha demostrado ya que EF es menor que EG; luego el teorema queda probado.

COROLARIO

Por esta y la precedente proposición se hace patente que, después de la caída desde una parte superior, el espacio que se recorre a lo largo de la perpendicular en el mismo tiempo que el empleado en recorrer un plano inclinado dado, es menor que el espacio recorrido en un tiempo igual al empleado en recorrer el plano inclinado, sin ninguna caída precedente desde la parte superior; es mayor, no obstante, que el mismo plano inclinado.

Puesto que hemos demostrado ya que el móvil que proviene de la parte superior A [figura 72] atravesará el plano EC en menos tiempo que EB, es evidente que el espacio a lo largo de EB, el cual será recorrido durante un tiempo igual al de la caída a lo largo de EC, será menor que todo el de EB. Que este espacio perpendicular es mayor que la longitud del plano inclinado EB se pone de manifiesto en la figura que hicimos en la precedente proposición, en la cual la longitud vertical BG es recorrida en el mismo tiempo que BC, después de la caída por AB. Que BG es mayor [239] que BC se demuestra de la siguiente manera: dado que BE y FB son iguales, mientras que BA es menor que BD, se deduce que FB estará con respecto a BA en una proporción mayor que la que se da entre EB y BD. *Componendo*, FA guarda con BA una proporción que es mayor que la que guarda ED con DB; pero FA es a AB como GF es a FB (puesto que AF es la media proporcional entre BA y AG) e igualmente, ED es a BD como CE es a EB; luego GB tiene una proporción con FB mayor que la que guardan CB y BE. En consecuencia, GB es mayor que BC.

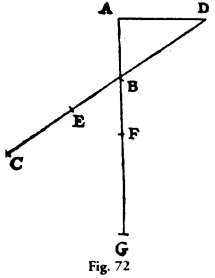


Fig. 72

PROBLEMA IV. PROPOSICIÓN XVII

Dada una perpendicular y un plano inclinado con respecto a aquélla, señalar en dicho plano una parte tal que por ella descienda un móvil, después de caer

a lo largo de la perpendicular, recorriéndola en un tiempo que sea igual al empleado en atravesar la misma perpendicular partiendo del reposo.

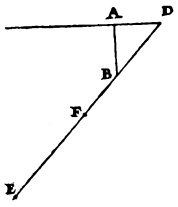


Fig. 73

Sea AB la línea vertical y BE el plano inclinado [figura 73]. Se nos pide que determinemos en BE una distancia tal que un móvil, después de caer por AB, la atraviese en un tiempo igual al requerido para atravesar la perpendicular misma, AB, partiendo del reposo.

Tracemos la línea horizontal AD y prolonguemos el plano hasta que encuentre a dicha línea en D. Tomemos FB como igual a BA y sea BD a DF como FD a DE. Digo que el tiempo de la caída a lo largo de BE, después de la caída a través de AB, es igual al tiempo del descenso, desde el reposo A, a través de AB. Puesto que si suponemos que la longitud AB representa el tiempo de caída a lo largo de AB, entonces el tiempo de caída por DB será representado por el tiempo DB; y dado que BD es a FD como DF es a DE, se sigue que DF representará el tiempo de caída a lo largo de todo el plano DE, mientras que BF representará el tiempo a través de la parte BE desde D. Pero el tiempo de la caída a lo largo de BE, después de la caída por DB, es el mismo que después de la caída por AB; luego el tiempo de la caída por BE, después de AB, será BF, o, lo que es lo mismo, será igual al tiempo del descenso por AB, desde el reposo en A, que es lo que había que hacer.

[240] PROBLEMA V. PROPOSICIÓN XVIII

Dado en la perpendicular un espacio cualquiera, recorrido desde el inicio del movimiento en un tiempo determinado, y dado otro tiempo menor cualquiera, se nos pide que determinemos, en la perpendicular misma, otro espacio [de la misma longitud que el precedente] que sea recorrido en el tiempo menor dado.

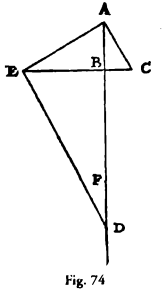


Fig. 74

Llamemos a la perpendicular A y en esta línea vertical [figura 74] tomemos el espacio AB, siendo éste atravesado por un móvil que cae desde el reposo A durante un tiempo que podemos representárnoslo por AB. Tracemos la línea horizontal CBE y en ésta, BC representará el intervalo dado de tiempo que es más corto que AB. Se nos pide que encontremos en la perpendicular mencionada una distancia que sea igual a AB y que se recorra en un tiempo que sea igual a BC. Juntemos los puntos A y C. Puesto que BC es menor que BA, se sigue que el ángulo BAC es menor que el ángulo BCA. Construyamos, ahora, el ángulo CAE igual a BCA y sea E el punto en donde AE corta la línea horizontal. Tracemos ED en ángulo recto con AE y cortando a la vertical en D. Sea ahora DF igual a BA. Afirmo que FD es la parte de la perpendicular que atravesará un móvil que parte del reposo en A, durante el tiempo dado BC. Y es que si en el triángulo AED se traza una perpendicular desde el ángulo recto en E hasta el

lado opuesto AD, entonces AE será la media proporcional entre DA y AB, mientras que BE será la media proporcional entre BD y BA, o entre FA y AB (ya que FA es igual a DB). Ya que hemos supuesto que el tiempo de la caída a través de AB será representado por la distancia AB, se sigue que AE o EC representará el tiempo del descenso por toda la AD, mientras que EB representará el tiempo por AF. Consecuentemente, el resto, BC, representará el tiempo de la caída a través de la distancia que queda, FD, que era de lo que se trataba.

[241] PROBLEMA VI. PROPOSICIÓN XIX

Dado, sobre una perpendicular, un espacio cualquiera recorrido desde el inicio del movimiento, y dado el tiempo de la caída, se pide encontrar el tiempo en el cual el mismo móvil recorrerá sucesivamente otro espacio igual, tomado en una parte cualquiera de la misma perpendicular.

En la línea vertical AB [figura 75] tomemos una distancia cualquiera, AC, a partir del punto de reposo A, y tomemos también otro espacio, DB, igual al anterior, en cualquier parte, escogida al azar. Supongamos que el tiempo de la caída a lo largo de AC esté representado por medio de AC. Se nos pide que encontremos el tiempo que es necesario para atravesar DB, después de la caída desde el punto de reposo A. Describamos ahora el semicírculo AEB en torno a toda la línea AB; desde el punto C tracemos la perpendicular a AB, CE. Unamos los puntos A y E, siendo entonces la línea AE mayor que EC. Hagamos EF igual a EC. Afirmo que la diferencia FA representará el tiempo requerido para la caída a lo largo de DB. Puesto que AE es la media proporcional entre BA y AC, y puesto que AC representa el tiempo de la caída por AC, se sigue que AE representará el tiempo por toda la distancia AB. Y puesto que CE es la media proporcional entre DA y AC (pues DA es igual a BC) se sigue que CE, es decir, EF, representará el tiempo del descenso por AD. De ahí que la diferencia AF represente el tiempo de la caída por la diferencia OB, que era lo que había que demostrar.

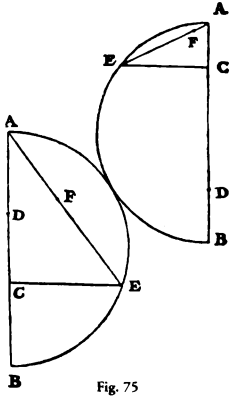


Fig. 75

COROLARIO

Se infiere de lo dicho que si se supone que el tiempo empleado en recorrer un espacio cualquiera, a partir del reposo, es igual al mismo espacio, el tiempo empleado en recorrerlo, después de que se haya recorrido ya otro espacio, será igual a lo que sobrepasa la media proporcional entre el espacio añadido más el espacio dado, y éste, a la media proporcional entre el primer espacio y el espacio añadido.

Así, por ejemplo, supuesto que [figura 76] el tiempo del movimiento por AB, a partir del reposo en A, sea AB, en el momento que se añada el espacio AS, el tiempo del movimiento por AB después del movimiento por SA será igual a lo que sobrepasa la media proporcional entre SB y BA, a la media proporcional entre BA y AS.

Fig. 76

[242] PROBLEMA VII. PROPOSICIÓN XX

Dado un espacio cualquiera y tomando sobre el mismo una parte tras el comienzo del movimiento, determínese otra porción al final del movimiento que sea recorrida en el mismo tiempo que la primera parte dada.

Sea [figura 77] la distancia dada CB y CD la parte de ésta tomada desde el comienzo del movimiento. Se nos pide hallar otra parte, al final en B, que sea atravesada en el mismo tiempo que la parte que hemos tomado al principio, CD. Sea BA la media proporcional entre BC y CD, y sea CE la tercera proporcional de BC y CA. Afirmo, entonces, que EB será la distancia que, después de la caída desde C, será atravesada en el mismo tiempo que CD mismo. Si suponemos que CB ha de representar el tiempo a lo largo de toda la distancia CB, entonces BA (que es, naturalmente, la media proporcional entre BC y CD) representará el tiempo a lo largo de CD. Y puesto que CA es la media proporcional entre BC y CE, se sigue que CA será el tiempo a través de CE, pero toda la longitud CB representa el tiempo por toda la distancia CB. Por tanto, el resto BA será el tiempo a lo largo del resto EB, tras la caída desde C; pero esta misma BA era el tiempo de la caída por CD. En consecuencia, las distancias CD y EB serán atravesadas partiendo del punto de reposo, C, en tiempos iguales, que era lo que había que encontrar.

Fig. 77

TEOREMA XIV. PROPOSICIÓN XXI

Si tiene lugar una caída a lo largo de una perpendicular, partiendo del reposo, y si se toma, desde el comienzo del movimiento, una porción recorrida en un tiempo cualquiera y a la que sigue un movimiento desviado sobre un plano arbitrariamente inclinado, el espacio que, sobre dicho plano, es recorrido en un tiempo igual al de la caída precedentemente desarrollada a lo largo de la perpendicular, será más del doble, pero menos del triple que el espacio ya recorrido a lo largo de la perpendicular.

Sea AB [figura 78] una línea vertical trazada por debajo de la línea horizontal AE. La caída tendrá lugar desde el reposo A. Tomemos ahora una parte cualquiera, AC. A través de C se trazará el plano inclinado CG, a lo largo del cual continuará el movimiento después de la caída por AC. Digo que la distancia atravesada a lo [243] largo de este plano CG, durante un tiempo igual al de la caída a través de AC, es más que el doble, pero menos que el triple, de esta distancia AC. Tomemos CF como igual a AC y prolonguemos el plano CG hasta que toque a la línea horizontal en E. Hagamos que CE sea a EF como EF a EG. Si suponemos ahora que el tiempo de caída a lo largo de AC está

representado por la longitud AC, entonces CE representará el tiempo del descenso por CE, mientras que CF o CA representarán el tiempo del descenso por CG. Nos queda ahora por demostrar que la distancia CG es más que el doble, pero menos que el triple, que la distancia CA misma. Dado que CE es a EF como EF es a EG, se sigue que CE es a EF como CF es a FG; pero EC es menor que EF, luego CF será menor que FG y GC será más del doble que FC o AC. Y puesto que FE es menor que dos veces EC (ya que EC es mayor que CA o CF) tenemos, entonces, que GF es menor que el doble de FC y también que GC es menor que el triple de CF o CA, que era lo que había que demostrar.

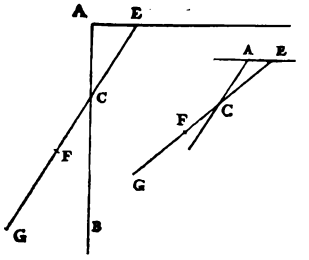


Fig. 78

Esta proposición se podía haber enunciado de una manera más general, puesto que lo que se ha demostrado ya en el caso de una perpendicular y un plano inclinado vale también para el caso de un movimiento por un plano de la inclinación que sea seguido de un movimiento a lo largo de un plano cualquiera de menor inclinación, como se puede ver en la figura correspondiente. El método de la prueba es el mismo.

[244] PROBLEMA VIII. PROPOSICIÓN XXII

Dados dos tiempos desiguales y dado un espacio vertical recorrido a partir del reposo en el más corto de los dos tiempos dados, se nos pide que tracemos un plano inclinado desde el extremo superior de la perpendicular hasta la horizontal por el que descienda el móvil en un tiempo que sea igual al mayor de los dos tiempos dados.

Representemos el tiempo mayor por medio de A y por B el más corto [figura 79], mientras que CD representará la longitud de la caída vertical a partir del punto de reposo, durante el tiempo B. Se nos pide trazar, partiendo del punto C, un plano con una inclinación tal que sea atravesado en el tiempo A.

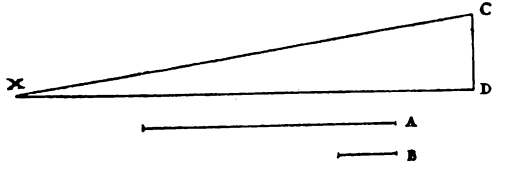


Fig. 79

Tracemos, desde el punto C y hasta la línea horizontal, una línea, CX, de una longitud tal que B sea a A como CD es a CX. Es evidente que CX es el plano a lo largo del cual descenderá el móvil en el tiempo dado A. Y es que se ha demostrado ya que el

tiempo de descenso a lo largo de un plano inclinado está con respecto al tiempo de caída por su vertical en la misma proporción que la longitud del plano a su altura. Por tanto, el tiempo por CX es al tiempo por CD como la longitud CX es a la longitud CD, es decir, como el tiempo A es al tiempo B. Pero se ha demostrado ya que B es el tiempo que se necesita para atravesar la distancia vertical CD, partiendo del reposo. En consecuencia, A es el tiempo requerido para el descenso a lo largo del plano CX.

PROBLEMA IX. PROPOSICIÓN XXIII

Tomando en la perpendicular un espacio que sea recorrido en un tiempo cualquiera, partiendo del reposo, trazar, desde el extremo inferior de este espacio, un plano inclinado sobre el cual, después de la caída a lo largo de [245] la perpendicular, se recorra en el mismo tiempo un espacio igual a un espacio dado cualquiera, con tal de que sea superior al doble, pero inferior al triple, del espacio recorrido a lo largo de la perpendicular.

Sea AS [figura 80] una línea vertical cualquiera y AC tanto la longitud de la caída vertical, desde el punto de reposo A, como el tiempo requerido para realizar este descenso. Sea IR una distancia mayor que el doble, pero menor que tres veces AC. Se nos pide que tracemos un plano por el punto C con una inclinación tal que el móvil, después de su caída a través de AC, atraviese, durante el tiempo AC, una distancia igual a IR. Tomemos ahora RN y NM, ambos iguales a AC. Tracemos, a través del punto C, un plano, CE, que encuentre la horizontal AE en un punto tal que IM sea a MN como AC es a CE. Prolonguemos el plano hasta O y tomemos CF, FG y GO iguales a RN, NM y MI, respectivamente. Digo, entonces, que el tiempo por el plano inclinado CO, después de la caída a través de AC, es igual al tiempo del descenso, desde el punto de reposo A, a través de AC. Puesto que OG es a GF como FC es a CE, se sigue que, componendo, OF es a FG, u OF es a FC, como FE es a EC. Puesto que un antecedente es a su consecuente como la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, tenemos que OE es a EF como EF es a EC. Así pues, EF es la media proporcional entre OE y EC. Como determinamos representar el tiempo de la caída por AC con la longitud AC, se sigue que EC representará el tiempo a lo largo de EC, mientras que EF el tiempo por toda la distancia EO. Por su parte, la diferencia CF representará el tiempo a lo largo de la diferencia CO; pero CF es igual a CA, luego la cuestión queda resuelta. La razón de ello es que el tiempo CA es el tiempo de la caída desde el reposo en A a través de CA, y CF (que es igual a CA) es el tiempo requerido para atravesar CO después del descenso por EC o después de la caída por AC.

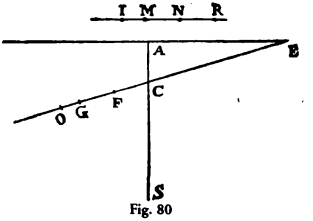


Fig. 80

Debe notarse, sin embargo, que la misma solución puede alcanzarse si el movimiento antecedente tiene lugar, no a lo largo de la perpendicular, sino a través de un plazo

inclinado. Este caso se ilustra en la [246] figura que sigue, donde el movimiento antecedente se da a lo largo del plano inclinado AS, por debajo de la horizontal AE. La demostración es igual que la anterior.

ESCOLIO

Si se considera atentamente la cuestión, se verá claramente que cuanto menos falta a la línea dada IR para alcanzar el triple de la línea AC, tanto más se acerca a la perpendicular el plazo inclinado sobre el cual ha de tener lugar el segundo movimiento. Finalmente, a lo largo de esta perpendicular se recorre, en un tiempo igual a AC, un espacio que es el triple de AC. En efecto, cuando IR esté próxima del triple de AC, IM será casi igual a MN; y puesto que, por construcción, AC es a CE, como IM es a MN, resulta que CE es un poco mayor que CA y, en consecuencia, el punto E está próximo al punto A y CO forma con CS un ángulo muy agudo, tanto que casi coinciden ambas líneas.

Si, por el contrario, la línea dada IR fuese superior, sólo en muy poco, al doble de la AC, IM, a su vez, será una línea cortísima; de lo cual se sigue que también AC será muy pequeña en comparación con CE, que habrá de ser muy larga, de modo que casi coincida con la línea horizontal que pasa por C. Podemos inferir de lo dicho que si en la figura que adjuntamos [figura 81], después del descenso por el plazo inclinado AC, el movimiento se continúa a lo largo de la línea horizontal, como sería el caso de CT, el espacio que recorrería sucesivamente el móvil, en un tiempo igual al de la caída, sería exactamente el doble que la distancia AC.

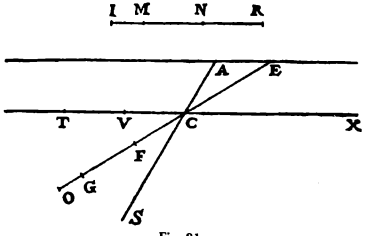


Fig. 81

Llegados a este punto parece, además, que sea apropiado un razonamiento como el precedente: es evidente, en efecto, que puesto que OE es a EF como FE es a EC, precisamente FC mide el tiempo de la caída por CO. Si, además, la línea horizontal TC, que es el doble de CA, se divide por la mitad en V, prolongada en dirección a X, se extenderá hasta el infinito antes de que pueda encontrarse con la prolongación de AE. En consecuencia, la proporción de la línea infinita TX con respecto a la infinita VX no será distinta de la proporción que se da entre la infinita VX y la infinita XC.

Esta misma conclusión podíamos haberla alcanzado siguiendo otro procedimiento, esto es, volviendo a la misma línea de argumentación desplegada en la demostración de la proposición primera. Tomemos, en efecto, el [247] triángulo ABC [figura 82], en el que las paralelas a la base BC representan los grados de velocidad incrementados continuamente a medida que aumenta el tiempo; tales paralelas, al ser infinitas, del mismo modo que son infinitos los puntos en la

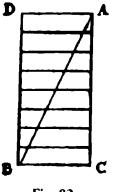


Fig. 82

línea AC y los instantes de un tiempo cualquiera, darán origen a la superficie misma del triángulo. Si suponemos que el movimiento continúa durante un tiempo igual, pero no con movimiento acelerado, sino uniforme, según el grado máximo de la velocidad adquirida, representada por BC, los grados de velocidad formarán un agregado similar al paralelogramo ADBC, que es el doble del triángulo ABC. Por tanto, el espacio recorrido en el mismo tiempo, con grados de velocidad iguales entre sí, será el doble del espacio recorrido con los grados de velocidad representados por el triángulo ABC. Ahora bien, en un plano horizontal, el movimiento es uniforme, con tal de que no intervenga ninguna causa que lo acelere o lo retarde. Se concluye, por tanto, que el espacio CT [de la figura 81], recorrido en un tiempo igual al tiempo AC, es el doble del espacio AC. En efecto, este último es recorrido con movimiento acelerado a partir del reposo, según las paralelas del triángulo; aquél, por el contrario, es recorrido según las paralelas del paralelogramo, las cuales, si se toman en su infinitud, son el doble que las infinitas paralelas del triángulo.

Además, se puede suponer con razón que, sea el que fuere el grado de velocidad que se dé en un móvil, queda por naturaleza indeleblemente impreso en él con tal de que no intervengan causas externas que lo aceleren o retarden; tal estado constante sólo ocurre en el plano horizontal. En efecto, en los planos inclinados descendentes se encuentra presente una causa de aceleración, mientras que cuando la inclinación se considera hacia arriba, lo que está presente es una causa de deceleración. Se sigue de aquí, igualmente, que el movimiento sobre el plano horizontal tiene también la propiedad de ser eterno, ya que si es uniforme no aumenta ni disminuye, ni mucho menos cesa. Además, puesto que hay un grado de velocidad que adquiere el móvil en su caída natural que es, por naturaleza indeleble y eterno, hay que tener presente que si después de la caída a través de un plano inclinado descendente se desvía el móvil hacia otro plano inclinado, esta vez considerado de abajo hacia arriba, entonces interviene sobre este último plano una causa de deceleración, ya que sobre tal plano el mismo móvil está sujeto ahora a la influencia de la deceleración mencionada. Por eso nos encontramos en tal caso con una mezcla de propiedades opuestas; es decir, el grado de velocidad que se ha adquirido en la bajada precedente, el cual, por sí mismo, haría que el móvil se moviese infinitamente con movimiento uniforme y, por otro lado, la tendencia natural hacia abajo [*deorsum*] según la proporción de la aceleración propia de todos los cuerpos de este caso. Si investigamos, por tanto, qué es lo que ocurre cuando el móvil, después de la caída por un plano inclinado, pasa a un plano que lo hace subir, parecerá del todo razonable el admitir que el máximo grado de velocidad adquirido en la bajada se conservará siempre el mismo en el plano ascendente. En el ascenso, de cualquier forma, le sobreviene la inclinación natural hacia abajo [*deorsum*], [248] es decir, un movimiento acelerado, partiendo del reposo, que sigue una proporción determinada. Con el fin de disipar las oscuridades que puedan surgir en lo que estamos diciendo, recurramos a alguna figura que nos ayude a ser más claros [figura 83].

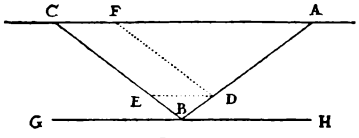


Fig. 83

Imaginémonos que el descenso tenga lugar sobre el plano descendente AB, y que el movimiento continúe, inmediatamente, a través de otro plano ascendente BC. Hemos

de suponer, ante todo, que los dos planos son iguales en longitud y colocados de modo que formen ángulos iguales con la línea horizontal GH. Sabemos ya que un móvil que desciende por AB, partiendo del reposo, A, adquiere grados de velocidad en proporción al incremento del tiempo. Sabemos también que el grado de velocidad adquirido en B es el máximo y que le pertenece por naturaleza de modo inmutable, siempre y cuando estén ausentes causas externas de aceleración o deceleración. La aceleración a la que nos referimos es aquella a la que estaría sometido el móvil si continuase moviéndose a lo largo de la prolongación del mismo plano, mientras que cuando hablamos de deceleración se trata de aquella que sufriría el móvil una vez transportado por el plano BC. Ahora bien, sobre el plano horizontal GH, el movimiento continuaría uniformemente al infinito con el grado de velocidad adquirido en B, después de su caída desde A. La velocidad, por su parte, sería tal que, en un tiempo igual al tiempo del descenso por AB, el móvil recorrería, por el plano horizontal, una distancia que sería el doble del mismo AB.

Imaginémonos ahora que el mismo móvil y con el mismo grado de velocidad se mueva con movimiento uniforme sobre el plano BC, de tal forma que también sobre éste, en un tiempo igual al tiempo del descenso por AB, recorra por la prolongación de BC una distancia que fuera el doble del mismo espacio AB. Tengamos presente, sin embargo, que apenas comience a subir le sobreviene, por su misma naturaleza, lo mismo que le ocurre al moverse desde A sobre el plano AB; es decir, un movimiento de descenso, a partir del reposo, según los mismos grados de aceleración en virtud de los cuales, como ya sucedió en el plano AB, descendía en el mismo tiempo por un plano ascendente que tuviera la misma longitud que aquél. Es evidente, a causa de la confluencia de movimiento ascendente uniforme y movimiento descendente acelerado, que el móvil será lanzado por el plano BC hasta el extremo C, según los mismos grados de velocidad, de modo que ambas velocidades serán iguales. Tomemos dos puntos cualquiera, D y E, que estén en la misma distancia del ángulo B. Podemos inferir que el descenso a través de DB tendrá un lugar en un tiempo que es igual al tiempo del movimiento ascendente por BE. Tracemos DF paralela a BC. Sabemos ya que, después del descenso por AD, el móvil ascenderá a través de DF. Ahora bien, si después de D el móvil se moviera sobre la línea horizontal DE, el impulso [*impetus*] en E sería igual al impulso en D; subiría, por tanto, desde E hasta C; luego el grado de velocidad en D es igual al grado de velocidad en E.

De todo lo dicho podemos deducir, por tanto, que si un móvil desciende por un plano inclinado cualquiera y continúa, Después, su [249] movimiento a través de un plano ascendente, el móvil, en virtud del impulso [*impeto*] adquirido, llegará a una altura igual a la que aquél tenía con respecto a la horizontal. Así, por ejemplo [figura 84], si el descenso tiene lugar por AB, el móvil continuará su movimiento por el plano ascendente BC hasta la línea horizontal ACD; y esto no sólo si los planos tienen la misma inclinación, sino también en el caso en que las inclinaciones sean desiguales, como en el plano BD, por ejemplo. En efecto, hemos dado antes por supuesto que los grados de velocidad que se adquieren sobre planos diversamente inclina-

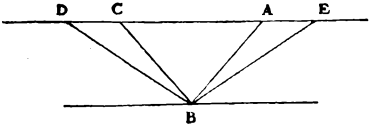


Fig. 84

dos son iguales con tal de que sea la misma la altura de dichos planos. Así, si la inclinación de los planos EB y BD fuese la misma, el descenso por EB sería capaz de empujar al móvil, que corre por el plano BD, hasta el punto D. Pero tal empuje tiene lugar a causa del impulso [*impetus*] de velocidad adquirido en el punto B. Ahora bien, el impulso en B es el mismo tanto si el móvil desciende a lo largo de AB como si desciende a través de EB. Se sigue, por tanto, que el móvil será empujado, por el plano BD después del descenso por AB, del mismo modo que después del descenso por EB. El tiempo de la subida a lo largo de BD es, de cualquier forma, mayor que el tiempo de subida por AB, del mismo modo que el descenso por EB emplea más tiempo que el descenso por AB. Además, se ha demostrado ya que la proporción entre los tiempos es la misma que la que se da entre las longitudes de los planos. Nos queda por investigar ahora cuál es la proporción que guardan los espacios recorridos en tiempos iguales sobre planos con diferentes inclinaciones, pero de la misma altura; es decir, los que están incluidos dentro de las mismas paralelas horizontales. Pues bien, esto ocurre según la proporción siguiente:

TEOREMA XV. PROPOSICIÓN XXIV

Dados, en el espacio comprendido entre las mismas paralelas horizontales, una perpendicular y un plano inclinado trazado desde el extremo inferior de aquélla, el espacio recorre el móvil, tras la caída a lo largo de la perpendicular, por el plano ascendente, en un tiempo igual al tiempo de la caída, es mayor que la misma perpendicular y menor que el doble de la misma.

Sean BC y HG las dos paralelas horizontales conectadas por medio de la perpendicular AE [figura 85], EB, por su parte, representará el plano inclinado a lo largo del cual tiene lugar el movimiento después de que el móvil haya caído a lo largo de AE, siendo desviado desde E hacia B. Afirmo, entonces, que en un tiempo igual al de la caída por AE, el móvil ascenderá por un plano inclinado a través de una distancia que es mayor que AE y menor que el doble de AE. Tomemos ED como igual a AE y sea EB a BD como BD es a BF. Demostraremos, en primer lugar, que F es el punto al que será llevado el móvil [250] después de la desviación de E hacia B, y esto durante un tiempo que es igual al de la caída a través de AE. Después, hemos de demostrar que la distancia EF es mayor que EA, aunque menor que el doble de la misma EA.

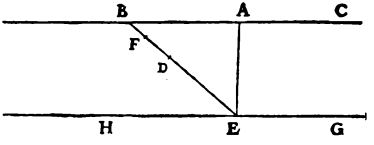


Fig. 85

Si representamos el tiempo de la caída por AE con la longitud AE, entonces el tiempo del descenso por BE, o lo que es lo mismo, el ascenso por EB será representado por la distancia EB. Ahora bien, puesto que DB es la media proporcional entre EB y BF, y puesto que BE es el tiempo del descenso por toda la distancia BE, se sigue que BD será el tiempo del descenso a lo largo de BF, mientras que el resto, DE, será el tiempo del descenso por el resto FE. El tiempo del descenso a lo largo de la caída desde el punto

de reposo en B es el mismo que el tiempo del ascenso desde E hastá F, después del cambio en E, con la velocidad adquirida durante la caída por AE o por BE. Por tanto, DE representa el tiempo empleado por el móvil para pasar de E hasta F después de la caída desde A hasta E, a lo largo de EB. Ahora bien, por construcción, ED es igual a AE, con lo que démostramos la primera parte.

Pero dado que EB entera es a BD entera como la parte DB es a la parte BF, tenemos que la EB entera es a la BD entera como el resto ED es al resto DF. Ahora bien, EB es mayor que BD, luego ED es mayor que DF y EF es menor que el doble de DE o de AE.

Lo mismo sucede cuando el movimiento inicial tiene lugar no a lo largo de una perpendicular, sino sobre un plano inclinado. La prueba es la misma con tal de que el plano ascendente sea menos inclinado, es decir, más largo que el plano descedente.

TEOREMA XVI. PROPOSICIÓN XXV

Si después de la caída a lo largo de un plano inclinado, el movimiento continúa sobre el plano horizontal, el tiempo de la caída a través del plano inclinado estará, con respecto al tiempo del movimiento por una parte cualquiera del plano horizontal, como el doble de la longitud del plano inclinado a la parte del plano horizontal en cuestión.

Sea CB una línea horizontal cualquiera y AB un plano inclinado [figura 86]. Después del descenso a lo largo de AB, continúese el movimiento a través de una distancia horizontal dada, BD. Digo que el tiempo de descenso por AB es al tiempo empleado en atravesar BD como la proporción que se da entre el doble de AB y BD. Supongamos que BC es igual al doble de AB; se sigue, entonces, de la proposición anterior que el tiempo del descenso a lo largo de AB es igual al tiempo requerido para atravesar BC. Ahora bien, el tiempo por BC es al tiempo [251] por DB como la longitud CB es a la longitud BD. De ahí que el tiempo del descenso a lo largo de AB sea al tiempo de BD como el doble de la distancia AB a la distancia BD.

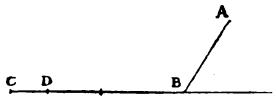


Fig. 86

PROBLEMA X. PROPOSICIÓN XXVI

Dada una perpendicular entre líneas paralelas horizontales y dado un espacio mayor que dicha perpendicular, pero menor que el doble de la misma, trazar desde el extremo inferior de la perpendicular, en el espacio comprendido entre esas mismas paralelas, un plano tal que el móvil, si se proyecta sobre este plano después del descenso a lo largo de la perpendicular, recorra un espacio que sea igual al espacio dado y en un tiempo que sea igual al tiempo del descenso a través de la perpendicular.

Sea AB [figura 87] la distancia vertical que separa las dos líneas horizontales paralelas AO y BC. Sea FE mayor que BA y menor que el doble de la misma BA. Se nos pide que tracemos un plano a través de B, prolongándolo hasta la línea horizontal superior, que sea tal que un móvil, después de caer desde A hasta B, atraviese, al subir por el plano inclinado,

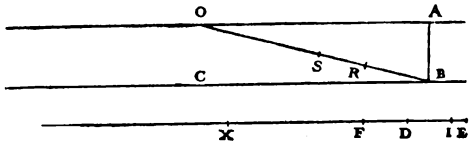


Fig. 87

una distancia igual a EF y en un tiempo que sea igual al de la caída por AB. Tomemos ED como igual a AB; entonces el resto DF será menor que AB, ya que toda la longitud EF es menor que el doble de la misma AB. Sea DI igual a DF, y sea EI a ID como DF es a FX. Desde el punto B, tracemos el plano BO, igual en longitud a EX. Digo que el plano BO es aquel a lo largo del cual después la caída por AB, atravesará un móvil la distancia dada FE en un tiempo igual al tiempo de la caída por AB. Tomemos BR y RD iguales a ED y DF, respectivamente. Dado que EI es a ID como DF es a FX, tenemos que, *componendo*, ED es a DI como DX es a XF, o lo que es lo mismo, como ED es a DF como EX es a XD, y como BO es a OR, y como [252] RO es a OS. Si representamos el tiempo de la caída por AB con la longitud AB, entonces OB representará el tiempo de descenso a lo largo de OB y RO estará en vez del tiempo por OS, mientras que el resto, BR, representará el tiempo necesitado por un móvil que parte del reposo en O para atravesar la distancia restante SB. Pero el tiempo de descenso por SB, partiendo del reposo en O, es igual al tiempo de ascenso de B a S, después de la caída a través de AB. De ahí que BO sea el plano que parte de B y a lo largo del cual un móvil, después de la caída por AB, atraviesa la distancia BS, igual a la distancia dada EF, en un tiempo BR o BA, que es lo que había que hacer. [253]

TEOREMA XVII. PROPOSICIÓN XXVII

Si un móvil desciende por planos que son desiguales pero de la misma altura, el espacio, que es recorrido en la parte inferior del plano más largo en un tiempo igual al empleado en recorrer todo el plano más corto, es igual al espacio compuesto por el mismo plano más corto y por aquella parte respecto a la cual el espacio más corto guarda una proporción como la que se da entre el plano mayor y lo que sobrepasa el plano mayor al menor.

Supongamos [figura 88] que AC es el plano más largo, AB el más pequeño y AD la altura común. En la parte inferior de AC tomemos CE, igual a AB. Por otro lado, sea CA a AE (es decir, a lo que sobrepasa el plano CA al AB) como CE es a EF. Digo que FC es la distancia que, después de la caída desde A, será atravesada durante un tiempo igual al requerido para descender por AB. Dado que CA es a AE como CE es a EF, se sigue que el resto EA es al resto AF como CA es a AE. Por tanto, AE es la media pro-

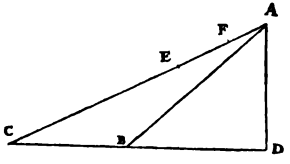


Fig. 88

porcional entre AC y AF. En consecuencia, si la longitud AB la empleamos para medir el tiempo de la caída a lo largo de AB, entonces la distancia AC medirá el tiempo de descenso a través de AC; pero el tiempo del descenso por AF es medido por la longitud AE y el que se emplea por FC lo mide EC. Ahora bien, EC es igual a AB, luego queda probado lo que intentábamos.

PROBLEMA XI. PROPOSICIÓN XXVIII

Sea la línea horizontal AG [figura 89] tangente a un círculo. Desde el punto de contacto, trácese el diámetro AB. Además, sean AE y EB dos cuerdas cualesquiera. Hay que determinar qué proporción guarda el tiempo de la caída por AB con respecto al tiempo de la caída a lo largo de las dos cuerdas, AEB.

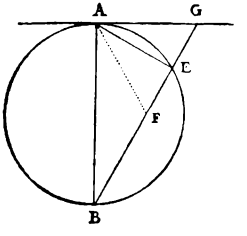


Fig. 89

Prolonguemos BE hasta que toque a la tangente en G y tracemos AF de forma que parta en dos el ángulo BAE. Digo que el tiempo por AB es a la suma de los tiempos a lo largo de AE y EB como la longitud AE es a la suma de las longitudes AE y EF. Dado que el ángulo FAB es igual al ángulo FAE, mientras que el ángulo EAG es igual al ángulo ABF, se infiere que todo el ángulo GAF es igual a la suma de los ángulos FAB y ABF. Ahora bien, el ángulo GFA es también igual a la suma de estos dos ángulos; luego la longitud GF es igual a la longitud GA. Puesto que el rectángulo BGE es igual al cuadrado de GA, será también igual al cuadrado de GF y las tres líneas BG, GF, GE serán proporcionales. Si nos ponemos de acuerdo en representar el tiempo de descenso por AE con la longitud AE, entonces la longitud GE representará el tiempo de descenso por GE, mientras que GF se referirá al tiempo de descenso a lo largo de toda la distancia GB. Así, EF representará también el tiempo a través de EB después de la caída desde G, o desde A a lo largo de AE. En consecuencia, el tiempo por AE o por AB es al tiempo por AEB como la longitud AE es a la suma de AE y EF.

Una prueba más corta consistiría en tomar como iguales GF y GA, haciendo así a GF media proporcional entre BG y GE. El resto de la demostración procedería como lo anterior.

TEOREMA XVIII. PROPOSICIÓN XXIX

Dado un espacio horizontal cualquiera desde cuyo extremo se alza una perpendicular en la que se toma una parte que sea igual a la mitad del espacio horizontal dado, el móvil que descienda desde tal altura y sea desviado sobre el plano horizontal recorrerá el espacio horizontal y la perpendicular, tomados juntos, en menos tiempo que el que emplearía en recorrer cualquier otra [254] parte de la perpendicular más el espacio horizontal mismo.

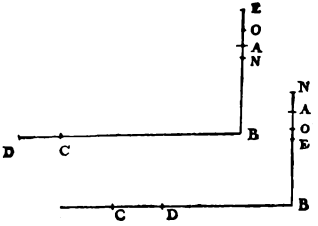


Fig. 90

Sea BC la distancia dada en un plano horizontal [figura 90]. En el extremo B, tracemos una perpendicular, en la que tomaremos BA, siendo ésta igual a la mitad de BC. Afirmo que el tiempo requerido para que un móvil, que parte del reposo, atraviese las dos distancias, AB y BC, es el menor de todos los tiempos posibles en los que puede ser atravesada la distancia BC junto con otra parte de la perpendicular, sea mayor o menor que AB.

Tomemos EB, mayor que AB, como en la primera figura, o menor que AB, como en la segunda. Lo que hay que demostrar es que el tiempo que se requiere para atravesar la distancia EB más BC es mayor que el que se necesita para AB más BC. Si suponemos que la longitud AB representará el tiempo por AB, entonces el tiempo empleado en atravesar la parte horizontal BC será AB, dado que BC es el doble de AB. En consecuencia, el tiempo que se necesita para ABC será el doble del de AB. Tomemos, ahora, el punto O de forma que EB sea a BO como BO a BA; en este caso, BO representará el tiempo de la caída a través de EB. De aquí que se vea con claridad que BO representa el tiempo a lo largo de BD después de la caída por EB. Tomemos ahora un punto N tal que DB sea a BC como EB es a BA o como OB es a BN. Dado que el movimiento horizontal es uniforme y puesto que OB es el tiempo empleado en atravesar BD, después de la caída a través de la misma altura EB. De ahí que sea evidente que OB más BN representa el tiempo para atravesar EB más BC. Y puesto que es doble de BA es el tiempo por AB más BC, lo único que hay que demostrar es que OB más BN es mayor que el doble de BA.

Como quiera que EB es a BO como BO es a BA, se sigue que EB es a BA como el doble de OB es al doble de BA. Además, puesto que EB es a BA como OB es a BN, se sigue que OB es a BN como el doble de OB es al doble de BA. Pero la proporción OB a BN se compone de las proporciones OB a BA y AB a BN; por tanto, AB es a BN como OB es a BA, esto es, BA es la medida proporcional entre BO y BN. En consecuencia, OB más BN es mayor que el doble de BA, que era lo que había que demostrar.

[255] TEOREMA XIX. PROPOSICIÓN XXX

Si desde un punto de una línea horizontal desciende una perpendicular y desde otro punto, tomado en la misma horizontal, se traza hasta la perpendicular un plano inclinado sobre el que el móvil emplee el tiempo más breve posible para descender hasta la perpendicular, tal plano será aquel que separa en la perpendicular un trozo igual a la distancia que se da entre el segundo punto tomado en la horizontal y el extremo de la perpendicular.

Sea AC [figura 91] una línea horizontal cualquiera y B un punto en ella desde el que se hace descender la línea vertical BD. Tomemos un punto cualquiera, C, en la línea horizontal, mientras que en la línea vertical tomamos la distancia BE como igual a BC.

Unamos C y E. Digo que de todos los planos inclinados que se pueden trazar desde el punto C, cortando la perpendicular, CE es aquel a lo largo del cual tiene lugar el descenso hasta la perpendicular en el tiempo más breve posible. Tracemos el plano CF que corta a la perpendicular encima de E y tracemos, igualmente, el plano CG que corte a la vertical por debajo de E; por otro lado, tracemos IK, paralela a la línea vertical, de manera que toque en C al círculo que se ha descrito teniendo a BC como radio. Hagamos que EK sea paralela a CF y prolonguémosla hasta tocar a la tangente después de cortar el círculo en L. Es evidente que el tiempo de la caída a lo largo de LE es igual al tiempo a lo largo de CE; pero el tiempo a través de KE es mayor que por LE; por tanto, el tiempo por KE es mayor que a través de CE. Ahora bien, el tiempo por KE es igual al tiempo por CF, dado que tienen ambas la misma longitud y la misma inclinación. Pues bien, se sigue, de la misma manera, que los planos CG e IE, que tienen la misma longitud e inclinación, serán atravesados en tiempos iguales. Y puesto que HE es menor que IE, el tiempo a lo largo de HE será menor que el tiempo a lo largo de IE. En consecuencia, el tiempo por CE (que es igual al tiempo por HE) será más breve que el tiempo por IE. Queda probado, pues, lo que se intentaba.

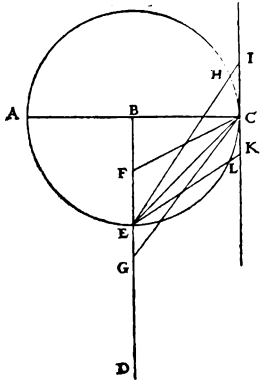


Fig. 91

TEOREMA XX. PROPOSICIÓN XXXI

Si una línea recta tuviese una inclinación cualquiera con respecto a la horizontal y se traza, desde un punto dado de la horizontal, un plano hasta la línea inclinada, [256] sobre cuyo plano tiene lugar el descenso más rápido posible, tal plano será aquel que divide por la mitad al ángulo comprendido entre las dos perpendiculares trazadas desde el punto dado, la una a la línea horizontal y la otra a la línea inclinada.

Sea CD [figura 92] una línea inclinada cualquiera con respecto a la horizontal AB y, desde un punto dado, A, de la horizontal, tracemos AC perpendicular a CD.

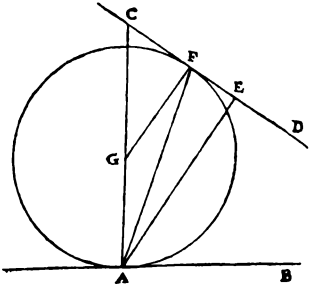


Fig. 92

Tracemos también FA de tal modo que dividamos en dos partes el ángulo CAE. Digo que, de todos los planos que se pueden trazar hasta A desde cualquiera de los puntos de la línea CD, AF es aquel en el que el descenso tiene lugar con mayor rapidez. Trácese FG, paralela a AE; los ángulos alternos internos GFA y FAE serán iguales. Por otro lado, también el ángulo EAF es igual al ángulo FAG. Por tanto, los lados GF y GA del triángulo FGA son iguales. En consecuencia, si describimos un círculo teniendo como centro G y GA como radio, este círculo pasará a través del punto F, tocando a la horizontal en el punto A y a la línea inclinada en el punto F ya que GFC es un ángulo recto, y tanto GF como AF son paralelas. Es evidente, por tanto, que todas las líneas trazadas desde el punto A a la línea inclinada, con la sola excepción de FA, se prolongarán más allá de la circunferencia del círculo, requiriendo más tiempo, en consecuencia, para atravesar cualquiera de ellas, que lo que se necesita para FA, con lo que se demuestra lo que se pretendía.

LEMA

Dadas dos circunferencias tangentes internamente una a la otra, si una recta cualquiera es tangente a la circunferencia interna y corta a la externa, entonces las tres líneas trazadas desde el punto de contacto de las circunferencias hasta los tres puntos de la línea recta tangente —es decir, al punto de contacto de ésta con la circunferencia interna y a los dos puntos de intersección de la misma con la circunferencia externa— formarán ángulos iguales, teniendo como vértice el punto de contacto de las circunferencias.

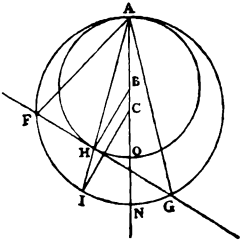


Fig. 93

Supongamos que los círculos se tocan en el punto A [figura 93], siendo B el centro del más pequeño, mientras que C es el [257] centro del más grande. Tracemos la línea recta FG que toque al círculo interno en H, mientras que al externo lo toca en F y en G. Tracemos también las tres líneas AF, AH y AG. Digo, entonces, que los ángulos contenidos por dichas líneas, FAH y GAH, son iguales. Prolonguemos AH hasta la circunferencia en I; desde el centro de cada círculo tracemos BH y CI. Unamos los centros B y C, y prolonguemos la línea hasta que alcance el punto de contacto en A, cortando los círculos en los puntos O y N. Ahora bien, las líneas BH y CI son paralelas, puesto que los ángulos ICN y HBO son iguales, siendo cada uno de ellos el doble de IAN. Puesto que BH, trazada desde el centro hasta el punto de contacto, es perpendicular a FG, se sigue que CI será también perpendicular a FG y que el arco FI será igual al arco IG. En consecuencia, el ángulo FAI es semejante al ángulo IAG, que era lo que había que demostrar.

TEOREMA XXI. PROPOSICIÓN XXXII

Si en una línea horizontal se toman dos puntos y a partir de uno de ellos se traza una línea inclinada cualquiera en dirección al otro punto, mientras que a partir de

este último se traza una línea recta que toque a la inclinada, determinando en ella una parte que sea igual a la distancia entre los dos puntos dados en la línea horizontal, entonces la caída a lo largo de esta recta tendrá lugar en menos tiempo que a lo largo de cualquier otra recta que se trace desde el mismo punto hasta tocar la línea inclinada mencionada. Si tomamos, después, dos líneas rectas cualesquiera que formen con la recta dada ángulos iguales por uno y otro lado, los tiempos de descenso serán iguales entre sí.

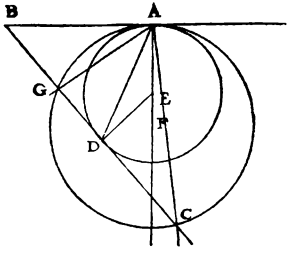


Fig. 94

Sean A y B [figura 94] dos puntos cualesquiera de la línea horizontal. Trácese a partir de B una línea recta inclinada, BC, y desde B tomemos una distancia, BD, que sea igual a BA. Unamos, después, los puntos A y D. Afirmo que el tiempo de descenso a lo largo de AD es menor que a lo largo de cualquier otra línea trazada desde A hasta la línea inclinada BC. Tracemos ahora desde el punto A la perpendicular a BA, AE, mientras que desde el punto D [258] trazamos DE, perpendicular a BD y que corta a AE en E. Dado que en el triángulo isósceles tenemos que los ángulos BAD y BDA son iguales, sus complementos, DAE y EDA, han de ser iguales. De aquí que si, con E como centro y EA como radio, describimos un círculo, éste habrá de pasar a través de D y tocar las líneas BA y BD en los puntos A y D. Y puesto que A es el extremo de la línea vertical AE, el descenso a lo largo de AD empleará menos tiempo que a lo largo de cualquier otra línea trazada desde la extremidad A hasta la línea BC, más allá de la circunferencia del círculo. De este modo probamos la primera parte de la proposición.

Si prolongamos la línea perpendicular AE y tomamos en ella un punto cualquiera, F, y con la distancia FA describimos un círculo, tal círculo, AGC, cortará la línea tangente en los puntos G y C. Unidas las líneas paralelas AG y AC, según la demostración precedente, se desviarán con ángulos iguales de la línea media AD. El tiempo de descenso a lo largo de cualquiera de estas líneas es el mismo, ya que parten del punto más alto, A, para acabar en la circunferencia del círculo, AGC.

PROBLEMA XII. PROPOSICIÓN XXXIII

Dados una perpendicular y un plano inclinado con respecto a aquélla, teniendo ambos la misma altura y el mismo extremo superior, se pide encontrar, a lo largo de la perpendicular y por encima de la extremidad que tienen en común, un punto tal que, si se deja caer desde él un móvil para desviarlo después a través del plano inclinado, dicho móvil recorrerá el plano en el mismo tiempo en el que recorrería la perpendicular si partiese del reposo.

Supongamos [figura 95] que AB es la línea vertical dada y AC un plano inclinado que tiene la misma altura que la anterior. Se nos pide que encontremos en la línea vertical, pro-

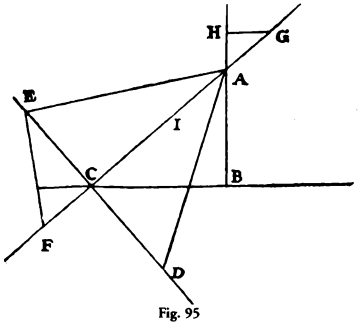


Fig. 95

longada por encima de A, un punto, cayendo desde el cual un móvil atravesaría la distancia AC en el mismo tiempo que se necesita para descender, desde el reposo en A, por la línea vertical dada AB. Tracemos ahora la línea DCE en ángulo recto con AC y tomemos CD como igual a AB. Unamos, al mismo tiempo, los puntos A y D; entonces será el ángulo ADC mayor que el ángulo CAD (puesto que el lado CA es mayor que AB o CD). Hagamos el ángulo DAE igual al ángulo ADE y tracemos la perpendicular a AE, EF; en tal caso, EF cortará al plano inclinado, prolongado en los [259] dos sentidos, en F. Sean AI y AG iguales a CF y por G trácese la línea horizontal GH. Afirmo, entonces, que H es el punto que buscamos.

Si suponemos que la longitud AB representa el tiempo de la caída a lo largo de la vertical AB, entonces AC representará, de la misma manera, el tiempo del descenso por AC, desde el punto de reposo A. Dado que en el triángulo rectángulo AEF la línea EC ha sido trazada desde el ángulo recto E, perpendicular a la base AF, se sigue que AE será la media proporcional entre FA y AC, mientras que CE será la media proporcional entre AC y CF, es decir, entre CA y AL. Ahora bien, puesto que AC representa el tiempo del descenso desde A a lo largo de AC, se sigue que AE será el tiempo a través de toda la distancia AF, mientras que EC será el tiempo a través de la AI. Pero puesto que en el triángulo isósceles AED el lado EA es igual al lado ED, se puede deducir que ED representará el tiempo de la caída por AF, mientras que EC es el tiempo de la caída por AI. Por tanto, CD, esto es, AB, representará el tiempo de la caída, desde el reposo A, a lo largo de IF, lo cual es lo mismo que decir que AB es el tiempo de la caída, desde G o desde H, a lo largo de AC.

PROBLEMA XIII. PROPOSICIÓN XXXIV

Dados un plano inclinado y una perpendicular, teniendo ambos el mismo extremo superior, encontrar en la prolongación de la perpendicular un punto más alto que dicho extremo común, tal que un móvil que caiga del mismo desviándose después hacia el plano inclinado, recorra ambos planos en un tiempo igual al que emplearía solamente en el plano inclinado, si partiese del reposo en el extremo superior de dicho plano.

Sean AC y AB un plano inclinado y una línea vertical, respectivamente, teniendo ambos el punto común más alto en A [figura 96]. Se nos pide que encontremos un punto en la línea vertical, por encima de A, que sea tal que un móvil [260] que caiga desde tal punto, dirigiendo su movimiento lo largo de AB, atraviese tanto la parte dada de la línea vertical como el plano AB en el mismo tiempo que se necesita para atravesar sólo el plano AB, partiendo del reposo A. Tracemos la línea horizontal BC y tomemos AN igual a AC; tomemos, igualmente, un punto, L, de forma que AB sea a BN como AL es a LC. Hagamos, ahora, AI igual

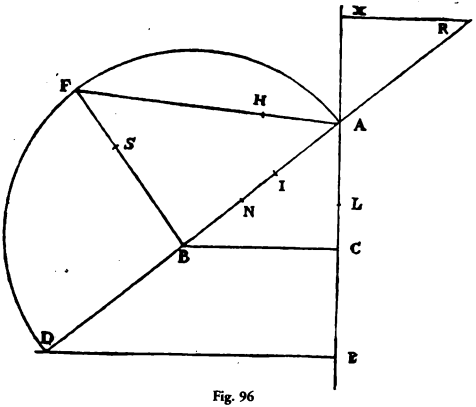


Fig. 96

a AL y escojamos el punto E de modo que CE, tomada en la línea vertical AC, sea la tercera proporcional entre AC y BI. Afirmo, entonces, que CE es la distancia que buscamos. De este modo, si se prolonga la línea vertical por encima de A y si la parte AX la tomamos como igual a CE, entonces un móvil que caiga desde AX atravesará la distancia XA más la AB en el mismo tiempo que el requerido para atravesar sólo AB, partiendo de A.

Tracemos XR paralela a BC y que corte a BA, prolongada hasta R. Seguidamente, tracemos ED, paralela a BC y que encuentre a BA prolongada hasta D. Tomando AD como diámetro, describamos un semicírculo. Desde B, tracemos BF perpendicular a AD y prolonguémosla hasta que encuentre la circunferencia del círculo. Obviamente, FB es la media proporcional entre AB y BD, mientras que FA es la media proporcional entre DA y AB. Sea BS igual a BI y FH igual a FB. Dado que AB es a BD como AC es a CE y dado [261] que FB es la media proporcional entre AB y BD, mientras que BI es la media proporcional entre AC y CE, se sigue que BA es a AC como FB es a BS: y puesto que BA es a AC o a BN como FB es a BS, tenemos que, *convertendo*, BF es a FS como AB es a BN o como AL es a LC. En consecuencia, el rectángulo formado por FB y CL es igual al rectángulo cuyos lados son AL y SF. Además, este rectángulo AL.SF es el sobrante del rectángulo AL.FB o AI.BF con respecto al rectángulo ALBS o AL.IB. Pero el rectángulo FB.LC es el sobrante del rectángulo AC.BF sobre el rectángulo AL.BF, ya que BA es a AC como FB es a BI. De aquí que lo que excede el rectángulo AB.BI al rectángulo ALBF o a ALFH, es igual a lo que excede el rectángulo ALFH al rectángulo AL.IB. Por tanto, el doble del rectángulo AI.FH es igual a la suma de los rectángulos AB.BI y AI.IB, o al doble de AI.FH, o lo que es lo mismo, al doble de AI.IB más el cuadrado de BI. Si añadimos el cuadrado de AL a cada lado, entonces el doble de AI.IB más el cuadrado de BI, más el cuadrado de AL, es igual al cuadrado de AB o, también, al doble de AI.FH más el cuadrado de AI. Añadamos, ahora, el cuadrado de BF a cada lado; en tal caso, el cuadrado de AB más el cuadrado de BF es igual al cuadrado de AF o, también, al doble de AI.FH más el cuadrado de AI más el cuadrado de BF, siendo igual también al doble

de AI.FH más el cuadrado de AI más el cuadrado de FH. Pero el cuadrado de AF es igual al doble de AH.HF, más el cuadrado de AH, más el cuadrado de HF. Si sustraemos el cuadrado de HF de cada uno de los lados, tenemos que el doble de AI.FH, más el cuadrado de AI es igual al doble de AH.HF, más el cuadrado de AH. Ahora bien, puesto que FH es un factor común de ambos rectángulos, se sigue que AH es igual a AI, ya que si AH fuese más grande o más pequeña que AI, entonces los dos rectángulos AH.HF, más el cuadrado de HA, serían más grandes o más pequeños que los dos rectángulos AI.FH más el cuadrado de IA, que va contra lo que se ha demostrado.

Si convenimos ahora en representar el tiempo de caída a lo largo de AB por medio de AB, entonces el tiempo por AC será, de la misma manera, medido por AC. Por su parte, IB, que es la media proporcional entre AC y CE, representará el tiempo por CE, o por XA, partiendo del reposo X. Puesto que AF es la media proporcional entre DA y AB, o entre RB y AB, y puesto que BF, que es igual a FH, es la media proporcional entre AB y BD, es decir, entre AB y AR, se sigue de la proposición precedente que la diferencia AH representa el tiempo de caída a lo largo de AB, sea del reposo R, sea después de la caída desde X, mientras que el tiempo del descenso por AB, desde el reposo A, es medido por la longitud AB. Pero se ha demostrado ya que el tiempo de caída por XA es medido por IB, mientras que el tiempo del descenso por AB, después de la caída a través de RA o de XA, es IA. Por tanto, el tiempo de descenso a lo largo de XA más AB, es medido por la longitud AB, la cual, naturalmente, también mide el tiempo de la caída, desde el reposo A, a lo largo de AB solamente, que era lo propuesto.

[262] PROBLEMA XIV. PROPOSICIÓN XXXV

Dada una perpendicular y una recta inclinada sobre la misma, determinar una parte en el plano inclinado que sea la única recorrida, a partir del reposo, en un tiempo igual al empleado en recorrer el mismo plano inclinado juntamente con la perpendicular.

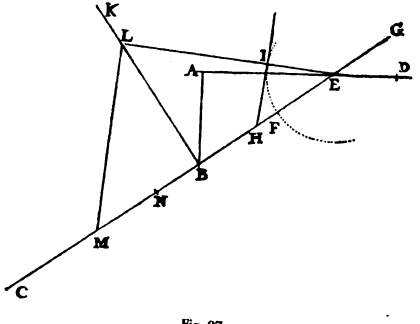


Fig. 97

Sea AB la línea vertical y BC el plano inclinado [figura 97]. Se nos pide que determinemos en BC una distancia que un móvil, partiendo del reposo, habría de atravesar en un tiempo que sería igual al que es empleado en la caída a lo largo de la vertical AB junto con la caída por el plano. Tracemos la línea horizontal AD que cortará en E la prolongación del plano inclinado CB. Tomemos BF igual a BA y, tomando también E como

centro y EF como radio, describamos el círculo FIG. Prolonguemos FE hasta que corte la circunferencia en G. Escojamos un punto tal que GB sea a BF como BH es a HF. Tracemos la línea HI, tangente al círculo I. En B, tracemos la línea BK, perpendicular a FC y que corta la línea EIL en L. Tracemos también LM, perpendicular a EL y que corte a BC en M. Digo, entonces, que BM es la distancia que un móvil, partiendo del reposo en B, atravesará en el mismo tiempo que se requiere para descender desde el punto de reposo A por las distancias AB y BM. Tomemos EN igual a EL; entonces, y dado que GB es a BF como BH es a HF, tenemos que, *permutando*, GB es a BH como BF es a HF, y, *dividendo*, GH es a BH como BH es a HF. En consecuencia, el rectángulo GH.HF es igual al cuadrado de BH; pero este mismo rectángulo es también igual al cuadrado de HI; por tanto, BH es igual a HI. Y puesto que, en el cuadrilátero ILBH, los lados HB y HI son iguales, y los ángulos en B y en I son ángulos rectos, se sigue que los lados BL y LI son [263] también iguales. Pero EI es igual a EF; por tanto toda la longitud LE, o NE, será igual a la suma de LB y EF. Si sustraemos, ahora, la parte común EF, el resto FN será igual a LB. Pero, por construcción, FB es igual a BA y, por consiguiente, LB será igual a AB más BN. Si convenimos, una vez más, en representar el tiempo de la caída por AB mediante la longitud AB, entonces el tiempo de descenso por EB será medido por EB. Además, puesto que EN es la media proporcional entre ME y EB, representará el tiempo de descenso a lo largo de toda la distancia EM; por tanto, la diferencia de esas distancias, BM, será atravesada, después de la caída desde EB, o desde AB, en un tiempo que es representado por BN. Pero como hemos supuesto ya que la distancia AB es la medida del tiempo de la caída por AB, el tiempo de descenso a través de AB y BM estará medido por AB más BN. Dado que EB mide el tiempo de la caída desde el reposo E a lo largo de EB, el tiempo desde el reposo A, a través de BM, será la medida proporcional entre BE y BM, es decir, BL. El tiempo, por tanto, requerido para recorrer AB más BM, partiendo del reposo en A, es AB más BN; pero el tiempo para BM sólo, partiendo del reposo en B, es BL; y, puesto que se ha demostrado ya que BL es igual a la suma de AB y BN, queda probada la proposición.

Otra prueba más corta es la siguiente: sea BC el plano inclinado y BA la vertical [figura 98]; desde B, tracemos una perpendicular a EC, prolongándola en los dos sentidos; tomemos BH igual a lo que sobrepasa BE a BA; hagamos el ángulo BHE; prolonguemos EL hasta que corte a BK en L; en L, tracemos LM perpendicular a EL y prolonguémosla hasta que toque a BC en M. Digo, entonces, que BM es la parte de BC que buscamos. Puesto que el ángulo MLE es un ángulo recto, BL será la media proporcional entre MB y BE, mientras que LE será la media proporcional entre ME y BE. Tomemos EN igual a LE; entonces, NE será igual a EL y también a LH, mientras que HB será igual a lo que sobrepasa NE a BL. Pero ocurre que HB es igual a lo que excede NE a la suma de NB y BA; por tanto, BN más BA es igual a BL. Si suponemos, ahora, que la longitud EB es la medida del tiempo de la caída por EB, el tiempo del descenso, desde el reposo B, por BM será

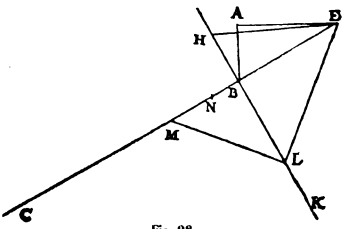


Fig. 98

representado por BL; pero si el descenso por BM se hace desde el reposo en E o en A, entonces el tiempo de descenso será medido por BN y AB medirá el tiempo por AB. Por tanto, el tiempo requerido para atravesar AB y BM, es decir, la suma de las distancias AB y BN, es igual al tiempo del descenso, desde el reposo en B, a lo largo de BM sólo, que era lo que había que demostrar.

[264] LEMA

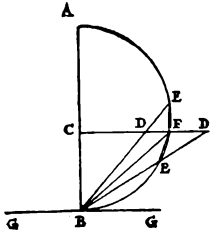


Fig. 99

Tracemos [figura 99] DC perpendicularmente al diámetro BA y desde el extremo B tracemos al azar la línea BED. Únanse F y B. Digo que FB es la media proporcional entre DB y BE. Unamos ahora los puntos E y F, mientras que a través de B se traza la tangente BG, la cual será paralela a CD. Puesto que el ángulo DBG es igual al ángulo FDB y puesto que el ángulo alterno de GBD es igual a EFB, se sigue que los triángulos FDB y FEB son semejantes; luego BD es a BF como FB es a BE.

LEMA

Sea AC una línea [figura 100] que es mayor que DF y sea la proporción de AB a BC mayor que la de DE a EF. Digo, entonces, que AB es mayor que DE. Y puesto que si AB tiene con respecto a BC una proporción que es mayor que la que se da entre DE y EF, entonces DE tendrá, con respecto a una longitud que sea menor que EF, la misma proporción que la que se da entre AB y BC. Llamemos a esta longitud mencionada EG; entonces, dado que AB es a BC como DE es a EG, se sigue, *componendo et convertendo*, que CA es a AB como GD es a DE. Ahora bien, puesto que CA es mayor que GD, se sigue que BA es mayor que DE.

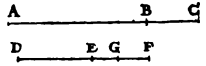
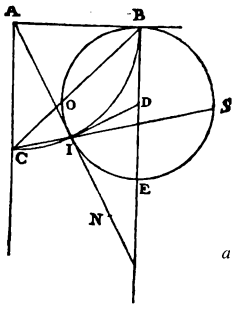


Fig. 100

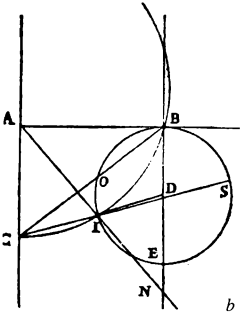
LEMA

Sea ACIB el cuadrante de un círculo [figura 101a]. Desde B trácese BE, paralela a AC; descríbase, después, el círculo BOES, tomando como centro un punto cualquiera de la línea BE. Dicho círculo tocará a AB en B y cortará [265] la circunferencia del cuadrante en I. Unamos, ahora, los puntos C y B; tracemos la línea CI, prolongándola hasta S. Digo, entonces, que la línea CI será siempre menor que CO. Unamos A e I, tocando el círculo BOE. Si se traza la línea DI, ha de ser igual a DB; pero dado que DB toca el cuadrante, DI será también tangente a éste, quedando en ángulo recto con respecto a AI; por otra parte, AI toca el círculo BOE en I. Y puesto que el ángulo AIC es mayor que el ángulo ABC, por cuanto que éste subtiende un arco mayor, se sigue que el ángulo SIN es mayor también que el ángulo ABC. Por consiguiente, el arco IES es más grande que el arco BO, mientras que la línea CS, al encontrarse más cerca del centro, es más larga que CB. En consecuencia, CQ es mayor que CI, puesto que SC es a CB como OC es a CI.

Lo mismo resultaría aún más claro si, como se ve en la segunda figura [101b], el arco BIC fuese menor que un cuadrante. En este caso, la perpendicular DB cortaría el círculo CIB; de este modo, cortaría también a DI, que es igual a BD; el ángulo DIA sería obtuso, por lo que la línea AIN cortaría también el círculo BIE. Comoquiera que el ángulo ABC es menor que el ángulo AIC, el cual es igual a SIN, y menor aún que el ángulo que forma la tangente con la línea SI en I, se sigue que el arco SEI es mucho mayor que el arco BO, que era lo que había que demostrar.



a



b

Fig. 101

TEOREMA XXII. PROPOSICIÓN XXXVI

Si desde el punto más bajo de un círculo erigido sobre la horizontal se traza un plano inclinado de modo que abarque un arco no mayor que un cuadrante, y si de los [266] extremos de tal plano se trazan otros dos planos inclinados a un punto cualquiera del arco, el descenso a lo largo de estos dos últimos planos tendrá lugar en menos tiempo que a lo largo del primer plano solo, y en menos también a lo largo de uno solo de estos dos planos; es decir, en menos tiempo también que por el inferior.

Sea CBD un arco [figura 102], que no sea mayor que un cuadrado, tomado desde el círculo vertical, cuyo punto más bajo es C; sea CD la cuerda que subtiende este arco, y tengamos, finalmente, otras dos cuerdas, trazadas desde C y D, hasta un punto cualquiera, B, del arco. Digo que el tiempo de descenso a lo largo de las dos cuerdas DB y BC es menor que a lo largo de DC o de sólo BC, si se parte del reposo en B. Desde el punto D, tracemos la línea horizontal MDA que corta a CB prolongada hasta A; tracemos DN y MC en ángulo recto con MD, y BN en ángulo recto BD. Describamos un semicírculo alrededor del triángulo rectángulo DBN; este semicírculo, DFBN, cortará DC en F. Escojamos el punto O de forma que DO sea la media proporcional entre CD y DF; de la misma manera, tomemos V de modo que AV sea la media proporcional entre CA y AB. Supongamos que la longitud ES represente el tiempo de descenso a lo largo de toda la distancia DC o BC (pues ambas requieren el mismo tiempo). Hagamos PR tal que CD sea a DO como PS a PR. PR representará, entonces, el tiempo en el cual un móvil, partiendo de D, atravesará la distancia DF, mientras que RS medirá el tiempo durante el cual será atravesada la distancia que queda, FC. Pero, puesto que PS es también el tiempo del descenso, desde el reposo B, a lo largo de BC, si tomamos T de forma que BC sea a CD como PS a PT, entonces PT medirá el tiempo del descenso de A a C, ya que hemos de-

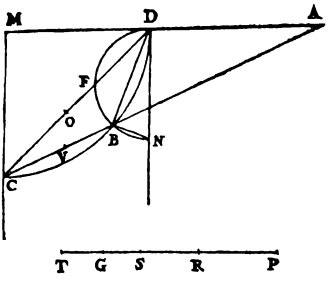


Fig. 102

mostrado en otro lugar [primer lema] que DC es la media proporcional entre AC y BC. Finalmente, tomemos el punto G de modo que CE sea a AV como PT es a PG, entonces PG será el tiempo del descenso de A a B, mientras que GT será el tiempo que resta del descenso a lo largo de BC, continuando el descenso de A hasta B. Pero, puesto que el diámetro DN del círculo DFN es una línea vertical, las cuerdas DF y DB serán atravesadas en el mismo tiempo; por [267] consiguiente, si se puede probar que un móvil habrá de atravesar BC, después de la caída por DB, en menos tiempo que FC, después del descenso por DF, se habrá probado el teorema.

Ahora bien, un móvil que descienda de D a lo largo de DB atravesará BC en el mismo tiempo que si viniera de A a través de AB, ya que el móvil adquiere la misma intensidad [*momentum*] de velocidad tanto si desciende por DB como por AB. De aquí que lo único que falte por probar sea que el descenso por BC, después de AB, es más rápido que por FC, después de DF. Hemos demostrado ya que GT representa el tiempo por BC, después de AB; también, que RS mide el tiempo por FC, después de DF. En consecuencia, hay que demostrar que RS es mayor que GT, lo cual se puede hacer de la siguiente manera: dado que SP es a PR como CD es a DO, se sigue, *invertendo et convertendo*, que PT es a TG como AC es a CV; por tanto, *ex aequali*, RS es a GT como OC es a CV. Pero, como se demostrará en seguida, OC es mayor que CV; de aquí que el tiempo RS sea mayor que el tiempo GT, que era lo que había que demostrar. Ahora bien, comoquiera que CF es mayor que CB, y FD menor que BA, se sigue que la proporción de CD a DF es mayor que la que se da entre CA y AB. Pero CD es a DF como CO es a OF, dado que CD es a DO como DO es a DF; por otro lado, CA es a AB como el cuadrado de CV al cuadrado de VB. Por tanto, la proporción entre CO y OF es mayor que la que se da entre CV y VB, y (según el lema precedente) CO es mayor que CV. Además, es evidente que el tiempo del descenso por DC es al tiempo por DBC como DOC es a la suma de DO y CV.

ESCOLIO

De lo demostrado hasta el momento, parece que se puede inferir que el movimiento más veloz [*lationem omnium velocissimam*] de un extremo a otro, no tiene lugar a lo largo de la línea más corta, sino a lo largo de un arco del círculo.* En efecto, en el cuadrante BAEC [figura 103], cuyo lado BC haya sido erigido sobre la horizontal, divídase el arco AC en un número cualquiera de partes iguales: AD, DE, EF, FG y GC; trá-

* Es bien sabido que la primera solución correcta para el problema del descenso más rápido bajo la condición de fuerza constante fue dada por Johannes Bernoulli (1667-1748).

cense desde C las cuerdas a los puntos A, D, E, F, G; trácense, asimismo, las cuerdas AD, DE, EF, FG y GC: es evidente que el movimiento a lo [268] largo de las cuerdas ADC es más rápido que a lo largo de sólo AC, o a lo largo de DC partiendo de D. Pero, a partir del reposo A, DC es recorrida más rápidamente que ADC; a lo largo de DEC, por su parte, desde el reposo en A, es verosímil que el descenso sea más rápido que a lo largo del recorrido DC sólo. De aquí que el descenso por las tres cuerdas, ADEC, exija menos tiempo que a través de las dos cuerdas ADC. Igualmente, después del descenso por ADE, el tiempo requerido para atravesar EFC es menor que el preciso para atravesar EC sólo. En consecuencia, el descenso es más rápido por las cuatro cuerdas ADEFC que por las tres ADEC. Finalmente, un móvil, después del descenso por ADEF, atravesará las dos cuerdas FGC más rápidamente que FC sólo. Así pues, a lo largo de las cinco cuerdas, ADEFGC, el descenso será más rápido que a lo largo de las cuatro, ADEFC. Consecuentemente, cuanto más se aproximen los polígonos inscritos a la circunferencia, tanto menor es el tiempo requerido para el descenso de A a C.

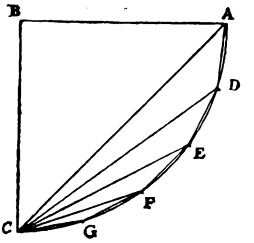


Fig. 103

Lo que se ha demostrado para un cuadrante vale también en el caso de arcos más pequeños; el razonamiento es el mismo.

PROBLEMA XV. PROPOSICIÓN XXXVII

Dados una perpendicular y un plano inclinado que tengan la misma altura, encontrar, en el plano inclinado, una distancia que sea igual a la perpendicular y que sea recorrido en el mismo tiempo que esta última.

Sea AB la línea [figura 104] vertical y AC el plano inclinado. Debemos de situar en el plano inclinado una distancia igual a la línea vertical, AB, y que sea atravesada por un móvil, que parte del reposo en A, en el mismo tiempo que el que se requiere para caer a lo largo de la línea vertical. Tomemos AD igual a AB y dividamos por la mitad el resto, DC, en el punto I. Escojamos un punto, E, tal que sea AC a CI como CI es a AE; hagamos DG igual a AE. Es obvio que EG es igual a AD, así como también a AB. Además, afirmo que EG es la distancia que será atravesada por un móvil, partiendo del reposo en A, en el mismo tiempo que el necesitado para que caiga dicho móvil por la distancia AB. Puesto que AC es a CI como CI a AE, o como ID a DG, tenemos, *convertendo*, que CA es a AI como DI es a IG. Y puesto que CA entera es a AI entera como la parte CI es a la parte [269] IG, se sigue que el resto IA es al resto AG como toda CA es a toda AI. Ahora bien, hemos visto que AI es

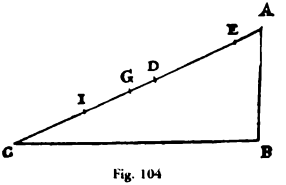


Fig. 104

la media proporcional entre CA y AG, mientras que CI es la media proporcional entre CA y AE. Si, en consecuencia, el tiempo de la caída por AB es representado por la longitud AB, el tiempo a lo largo de AC será representado por AC, mientras que CI, o ID, medirán el tiempo por AE. Dado que AI es la media proporcional entre CA y AG y que CA es la medida del tiempo a lo largo de toda la distancia AG, se sigue que AI es el tiempo a través de AG, mientras que la diferencia IC es el tiempo por la diferencia GC; pero DI era el tiempo por AE, luego las longitudes DI e IC miden los tiempos por AE y CG, respectivamente. Por tanto, el resto DA representa el tiempo por EG, el cual, naturalmente, es igual al tiempo a lo largo de AB, que es lo que había que demostrar.

COROLARIO

De lo dicho se infiere claramente que el espacio que buscamos es el que está limitado por las partes superior e inferior del plano inclinado, las cuales son atravesadas en tiempos iguales.

PROBLEMA XVI. PROPOSICIÓN XXXVIII

Dados dos planos horizontales cortados por una perpendicular, se pide hallar en la parte superior de ésta, un punto desde el cual puedan caer dos móviles, que al ser desviados después sobre planos horizontales, recorran por éstos, durante un intervalo igual al de la caída, distancias que tengan entre sí una proporción dada entre una cantidad mayor y una menor dadas.

Sean CD y BE los planos horizontales cortados [figura 105] por la vertical ACB y sea la proporción de la cantidad menor con respecto a la mayor como N es a FG. Se nos pide que encontremos en la parte superior de la línea vertical, AB, un punto desde el que un móvil, cayendo hasta el plano CD, en donde se hace que su movimiento se

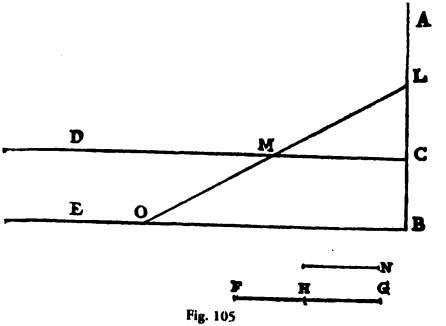


Fig. 105

adapte al de este plano, haya de atravesar, durante un tiempo igual a su tiempo de caída, una distancia tal que si otro móvil, que caiga desde el mismo punto hasta el plano BE, viese su movimiento adaptado a este plano y continuara moviéndose durante un tiempo igual al tiempo de su caída, atravesaría una distancia cuya proporción con respecto a la primera sería la misma que [270] la que se da entre FG y N. Tomemos GH igual a N y escojamos un punto L tal que FH es a HG como BC es a CL. Digo que L es el punto que buscamos. Si tomamos CM como igual al doble de CL y trazamos la línea LM que corte el plano BE en O, entonces BO será igual al doble de BL. Puesto que FH es a HG como BC es a CL, tenemos, *componendo et convertendo*, que HG es a GF como N es a GF, o como CL es a LB, o como CM es a BO. Es evidente que, dado que CM es el doble de la distancia LC, el espacio CM es aquel que el móvil, que cae desde L a lo largo de LC, recorrerá sobre el plano CD; y, por la misma razón, puesto que BO es el doble de la distancia BL, es obvio que BO es la distancia de un móvil, después de su caída a lo largo de LB, atravesará durante un intervalo de tiempo igual al tiempo de su caída por LB, con lo que tenemos lo que queríamos.

SAGR. Me parece que podemos conceder a nuestro académico, con toda verdad, que tenía razón cuando pensaba que con los fundamentos de su tratado daba a luz una ciencia nueva acerca de un tema muy antiguo. Por otra parte, ver con cuanta facilidad y claridad deduce, de un solo principio, las demostraciones de tal número de proposiciones, me hace maravillarme no poco, ante el hecho de que esta materia [271] haya escapado a la atención de Arquímedes, Apolonio, Euclides y tantos otros matemáticos y filósofos ilustres, sobre todo si tenemos en cuenta la cantidad de gruesos volúmenes que se han escrito acerca del movimiento.

SALV. Hay un fragmento de Euclides donde habla del movimiento, pero no hay indicación alguna que se encamine a investigar las proporciones de la aceleración y sus variaciones según la inclinación. De modo que se puede decir, ciertamente, que hasta ahora no se había abierto la puerta a un nuevo método lleno de numerosas y admirables conclusiones, las cuales requerirán la atención de otras mentes, en los años sucesivos.

SAGR. Yo creo, realmente, que así como el exiguo número de propiedades del círculo, por poner un ejemplo, demostradas por Euclides en el libro III de sus *Elementos*, han conducido a muchas otras más recónditas, del mismo modo, las demostraciones establecidas en este breve tratado, cuando lleguen a las manos de otras mentes dispuestas a investigar, serán la senda que conduzca a otros resultados cada vez más extraordinarios. Es lógico que esto suceda teniendo en cuenta la dignidad de la materia, que es superior a cualquiera de las otras que se dan en la naturaleza.

Larga y muy laboriosa ha sido esta jornada de hoy, en la cual he gozado más con las simples proposiciones que con sus demostraciones, muchas de las cuales creo que, si quiero comprenderlas bien, requerirán que dedique más de una hora a cada una. Tal estudio es algo que me lo reservo para hacerlo con tranquilidad si es que V. S. permite que tenga el libro en mis manos después de que hayamos visto la parte que nos queda y que trata de los proyectiles. Sobre esto, si os place, trataremos el próximo día.

SALV. No dejaré de asistir.

FIN DE LA JORNADA TERCERA

JORNADA CUARTA

[272] SALV. Una vez más llega a tiempo el señor Simplicio; en fin, vayamos, sin más dilación, al estudio del movimiento. He aquí el texto de nuestro autor:

SOBRE EL MOVIMIENTO DE LOS PROYECTILES

En las páginas anteriores hemos estudiado tanto las propiedades que se dan en el movimiento uniforme como las que tienen lugar en el movimiento uniformemente acelerado a lo largo de planos de cualquier inclinación. En lo que ahora comienzo a tratar, intentaré presentar y establecer, apoyándome en demostraciones rigurosas, algunos fenómenos interesantes y dignos de conocerse y que son propios de un móvil cuando se mueve con un movimiento compuesto de otros dos, es decir, un movimiento uniforme y otro naturalmente acelerado: tal parece ser, precisamente, eso que llamamos movimiento de los proyectiles. Su origen lo concibo de la manera siguiente:

Imaginémonos un móvil proyectado sobre un plano horizontal del que se ha quitado el más mínimo roce; sabemos ya que en tal caso, y según lo que hemos expuesto detenidamente en otro lugar, dicho movimiento se desenvolverá sobre tal plano con un movimiento uniforme y perpetuo, en el supuesto de que este plano se prolongue hasta el infinito. Si, por el contrario, nos imaginamos un plano limitado y en declive, el móvil, que suponemos dotado de gravedad, una vez que ha llegado al extremo del plano y continúe su marcha, añadirá al movimiento precedente, uniforme e inagotable, esa tendencia hacia abajo, debida a su propia gravedad. Nace de aquí un movimiento compuesto de un movimiento horizontal uniforme más un movimiento descendente naturalmente acelerado. Pues bien, a este tipo de movimiento lo llamo proyección y hemos de demostrar algunas de sus propiedades, la primera de las cuales es la siguiente:

[273] TEOREMA I. PROPOSICIÓN I

Un proyectil que se desliza con un movimiento compuesto por un movimiento horizontal y uniforme y por un movimiento descendente, naturalmente acelerado, describe, con dicho movimiento, una línea semiparabólica.

SAGR. Llegados a este punto, señor Salviati, es necesario que en bien mío, y creo que también en bien del señor Simplicio, hagamos una pequeña pausa. Sucede que no he profundizado lo suficiente en geometría, de forma que lo que sé de Apolonio es sólo que se trata de las parábolas así como de otras secciones cónicas, sin un conocimiento de las cuales y de sus propiedades no creo que se puedan comprender las demostraciones que de ellas dependen. Y puesto que en este bello teorema primero piensa el autor que es necesario demostrar que la línea descrita por el proyectil es una parábola, me imagino que, al no tener que tratar sino con este tipo de líneas, será absolutamente necesario tener un perfecto conocimiento, si no de todas las propiedades demostradas por Apolonio, sí al menos de aquellas que se requieren en el presente estudio.

SALV. V. S. es excesivamente modesto haciéndose el ignorante respecto a nociones que no hace mucho admitisteis como algo bien conocido: hago alusión a lo que vimos al tratar sobre la resistencia de materiales, ya que tuvimos que utilizar cierto teorema de Apolonio que no ofreció dificultad alguna.

SAGR. Puede ser que lo conociera por casualidad o que lo diese por supuesto en cuanto que se necesitaba para lo que estábamos discutiendo; ahora, sin embargo, ya que pienso que hemos de escuchar todas las demostraciones acerca de tales líneas, no debemos tragar todo lo que nos echen, como suele decirse, malgastando nuestro tiempo y esfuerzo.

SIMP. Por lo que a mí respecta, incluso aunque el señor Sagredo estuviera, como creo, bien provisto para resolver todas sus dificultades, yo no entiendo ni siquiera lo más elemental; puesto que, aunque nuestros filósofos hayan investigado el movimiento de los proyectiles, no recuerdo que hayan descendido a definir cuáles son las líneas descritas por tales proyectiles, sino que se han limitado a señalar, de modo muy general, que son siempre líneas curvas, excepto cuando la proyección tiene lugar hacia arriba [274] [*sursum*]. Por tanto, en el caso de que lo poco de geometría que de Euclides he aprendido desde que comenzamos nuestras discusiones no sea suficiente para entender cabalmente las demostraciones que vamos a ver, tendré que contentarme con admitirlas más por fe que como algo plenamente comprendido.

SALV. Todo lo contrario; lo que yo quiero es que las comprendáis gracias al mismo autor del tratado, el cual, cuando me permitió ver su trabajo, ya que yo no tenía a mano los libros de Apolonio, se las arregló para demostrarme dos de las propiedades principales de tal parábola. Estas propiedades, que son las únicas que se necesitan en la presente discusión, no presuponen conocimiento previo alguno. Tales teoremas también los demostró Apolonio, sólo que después de muchos otros, cuyo estudio nos llevaría muy lejos. Lo que quiero, por mi parte, es que abreviemos al máximo, obteniendo la primera propiedad de modo inmediato de la pura y simple generación de la parábola, mientras que la segunda la demostraremos también inmediata y simplemente a partir de aquélla. Vayamos, pues, a la primera:

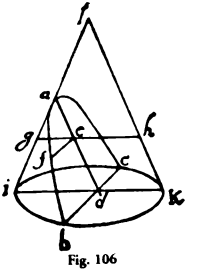


Fig. 106

Supongamos un cono recto [figura 106] cuya base sea el círculo *ibkc* y el vértice el punto *l*. Cortando dicho cono con un plano que sea paralelo al lado *lk*, engendramos la sección *bac*, que se llama *parábola*. La base de esta parábola, *bc*, corta en ángulo recto el diámetro, *ik*, del círcu-

lo *ibkc*, siendo el eje de la parábola, *ad*, paralelo al lado *lk*. Tomando, ahora, un punto cualquiera, *f*, en la línea curva *bfa*, tracemos la recta *fe*, paralela a *bd*. Afirmo que el cuadrado de *bd* es al cuadrado de *fe* como el eje *ad* es a la parte *ae*. A través del punto *e* tracemos un plano que sea paralelo al círculo *ibkc*, produciendo en el cono una sección circular, cuyo diámetro será la línea *geh*. Dado que la línea *bd* es perpendicular al diámetro *ik* del círculo *ibkc*, el cuadrado de *bd* será igual al rectángulo formado por las partes *id* y *dk*. Del mismo modo, en el círculo superior, que se supone que pasa por los puntos *g*, *f* y *h*, el cuadrado de la línea *fe* es igual al rectángulo formado por las partes *ge* y *eh*; en consecuencia, el cuadrado de *bd* es al cuadrado de *fe* como el rectángulo *idk* es al rectángulo *geh*. Y puesto que la línea *ed* es paralela a la línea *hk*, la línea *eh*, siendo paralela a *dk*, es igual a ésta. Por tanto, el rectángulo *idk* [275] será al rectángulo *geh* como *id* es a *ge*, es decir, como *da* es a *ae*. De aquí se sigue que el rectángulo *idk* es al rectángulo *geh*, esto es, el cuadrado de *bd* es al cuadrado de *fe*, como el eje *da* es a la parte *ae*, que es lo que había que demostrar.

La otra proposición que necesitamos para la discusión presente la podemos demostrar de la siguiente manera. Dibujemos una parábola [figura 107], cuyo eje, *ca*, lo prolongamos hasta el punto *d*; desde un punto cualquiera, *b*, tracemos la línea *bc*, paralela a la base de la parábola en cuestión. Si suponemos ahora que *da* es igual a la parte del eje *ca*, afirmo entonces que la línea recta trazada por los puntos *d* y *b* no caerá dentro de la parábola, sino fuera, de modo que sólo la tocará en dicho punto *b*. Imaginémonos la posibilidad de que caiga dentro, bien porque la corte por arriba o bien porque, en su prolongación, la corte por abajo: tomemos un punto cualquiera, *g*, por el que pase la línea recta *fge*. Puesto que el cuadrado de *fe* es mayor que el cuadrado de *ge*, el cuadrado de *fe* tendrá, con respecto al cuadrado de *bc*, una proporción mayor que el cuadrado de *ge* al de dicho *bc*; y dado que, por la proposición precedente, el cuadrado de *fe* es al cuadrado de *bc* como la línea *ea* es a la línea *ca*, se sigue que la línea *ea* tendrá, con respecto a la línea *ac*, una proporción mayor que el cuadrado de *ge* al cuadrado de *bc*, es decir, que el cuadrado de *ed* al cuadrado de *cd* (ya que en el triángulo *dge* la línea *ge* es a la paralela suya, *bc*, como *ed* es a *dc*). Ahora bien, la línea *ea* está, con respecto a la línea *ac*, es decir, a la línea *ad*, en la misma proporción que cuatro veces el rectángulo *ead* a cuatro veces el cuadrado de *ad*, o lo que es lo mismo, al cuadrado de *cd* (al ser igual a cuatro veces el cuadrado de *ad*). Por tanto, cuatro veces el rectángulo *ead* tiene, con respecto al cuadrado de *cd*, una proporción que es mayor que la que tiene el cuadrado de *ed* con respecto al cuadrado de *de*. Esto haría, en consecuencia, que el rectángulo *ead* fuese cuatro veces mayor que el cuadrado de *ed*, lo cual es falso, puesto que son más pequeños, ya que las partes *ea* y *ad* de la línea *ed* no son iguales. Por consiguiente, la línea *db* toca la parábola en *b*, sin llegar a cortarla, que era lo que se tenía que demostrar.

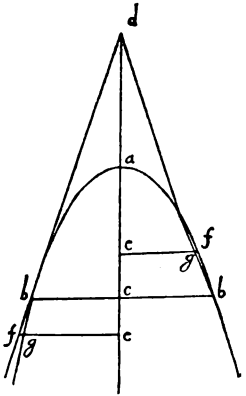


Fig. 107

SIMP. Vos os comportáis en vuestras demostraciones muy a la grande, suponiendo siempre, me parece [276] a mí, que todas las proposiciones de Euclides me son tan familiares y accesibles como sus primeros axiomas mismos, lo cual no es cierto. Así, por ejemplo, que cuatro veces el rectángulo *ead* sea menor que el cuadrado *de*, por el hecho de que las partes *ea* y *ad* de la línea *ed* no sean iguales, no apacigua mi mente, sino que más bien me deja perplejo.

SALV. Ciertamente, todos los matemáticos de peso dan por supuesto en el lector el perfecto conocimiento por lo menos de los *Elementos* de Euclides; de modo que, en vuestro caso y para subvenir a vuestras necesidades, bastará recordar una proposición del segundo [libro].* Se demuestra allí que si se corta una línea en partes iguales y desiguales, el rectángulo formado por las partes desiguales es menor que el rectángulo formado por las partes iguales (es decir, que el cuadrado de la mitad de la línea) en una cantidad que es igual al cuadrado de la línea comprendida entre los cortes; se sigue, obviamente, de ahí que el cuadrado de toda la línea, que contiene cuatro veces el cuadrado de la mitad de la línea, es mayor que cuatro veces el rectángulo de las partes desiguales.

Para que podamos comprender las proposiciones que siguen en este tratado, será necesario que tengamos presentes los dos teoremas fundamentales que hemos demostrado y que tratan de las secciones cónicas, ya que sólo de éstos, y no de otros, es de los que se sirve el autor.

Podemos ya volver al texto para ver de qué manera va demostrando su primera proposición, en la que intenta probar cómo la línea que describe un móvil pesado [*grave*], cuando desciende con un movimiento compuesto de uno que es horizontal y uniforme y de otro que es natural y descendente, es una línea semiparabólica.

Imaginémonos una línea horizontal o plano *ab* [figura 108] colocado en la parte superior y a lo largo del cual se mueve un cuerpo con movimiento uniforme de *a* a *b*; si desaparece ahora el apoyo del plano en *b*, entonces, debido a la gravedad propia del cuerpo en cuestión, le sobrevendrá un movimiento natural descendente a lo largo de la perpendicular *bn*. Supongamos, además, que la línea *be*, que es la prolongación del plano *ab*, represente el paso del tiempo, es decir, que sea la medida del tiempo; sobre tal plano tomemos un número cualquiera de porciones de tiempo que sean iguales, como, por ejemplo, *bc*, *ed* y *de*; desde los puntos *b*, *c* y *d* tracemos líneas paralelas a la perpendicular *bn*. En la primera de éstas, tomemos una parte cualquiera [277], *ci*, en la línea siguiente tomemos otra cuatro veces mayor, *df*; en la línea tercera, otra nueve veces mayor, *eh*, y sigamos haciendo lo mismo en las líneas sucesivas siempre según la proporción de los cuadrados de los tiempos *cb*, *db*, *eb*, o por decirlo de otra manera, en razón del cuadrado de estas mismas líneas. Si suponemos, des-

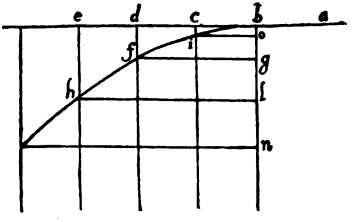


Fig. 108

* Proposición V, teorema.

pués, que el móvil, que se mueve desde *b* hacia c con movimiento uniforme, recibe un movimiento de caída perpendicular en razón de la distancia *ci*, entonces dicho móvil, en el tiempo *bc*, se encontrará situado en el punto *i*. Si continúa moviéndose, al cabo del tiempo *db*, es decir, en un tiempo que es el doble de *bc*, habrá descendido una distancia que es cuatro veces mayor que el espacio primero *ci*; hemos demostrado, en efecto, en lo que hemos visto antes, que los espacios recorridos por un cuerpo con movimiento naturalmente acelerado son proporcionales al cuadrado de los tiempos. Del mismo modo, el espacio siguiente, *eh*, recorrido en el tiempo *be*, será nueve veces mayor que el primer espacio, de modo que resultará palmario que los espacios *eh*, *df* y *ci* estarán entre sí como los cuadrados de las líneas *eb*, *db* y *cb*. Tracemos, ahora, desde los puntos *i*, *f* y *h* las líneas rectas *jo*, *fg* y *hl*, paralelas a *eb*: las líneas *hl*, *fh* y *jo* serán iguales, respectivamente, a las líneas *eb*, *db* y *cb*; igualmente, las líneas *bo*, *bg* y *bl* serán también iguales a *ci*, *df* y *eh*, respectivamente. Por otra parte, el cuadrado de *hl* será al cuadrado de *fg* como la línea *lb* es a la línea *bg*, mientras que el cuadrado *fg* será al cuadrado de *io* como *gb* es a *bo*. Consecuentemente, los puntos *i*, *f* y *h* se encuentran en una y la misma parábola. De la misma forma se puede demostrar que, si se toma un número arbitrario de intervalos de tiempo de la amplitud que se quiera, los puntos que ha de atravesar el móvil dotado de un movimiento silimar al anterior, esto es, de un movimiento compuesto, se habrán de encontrar en una y la misma parábola. Se ha hecho, pues, evidente aquello que queríamos demostrar.

SALV. Esta conclusión se deduce de la conversa de la primera de las dos proposiciones dadas más arriba. Y es que si describimos, por ejemplo, la parábola por los puntos *b* y *h*, en el caso de que ninguno de los dos puntos se encontrase en la parábola descrita, estarían, entonces, dentro o fuera; consecuentemente, la línea *fg* sería o menor o mayor que la línea que acabase en parábola. De aquí que el cuadrado de la línea *hl* no tenga, con respecto al cuadrado de *fg*, la misma proporción que la línea *lb* con la línea *bg*, sino una proporción mayor o menor. Ahora bien, el cuadrado de *hl* tiene con *fg* la misma proporción, luego el punto *f* se encuentra en la parábola y lo mismo ocurre con todos los restantes, etc.

SAG. No hay duda alguna de que el argumento es original, ingenioso y concluyente, con un razonamiento *ex suppositione*; es decir, suponiendo que el movimiento transversal se mantenga siempre uniforme, que el movimiento descendente se mantenga, igualmente, en la proporción que le corresponde, o sea, acelerándose siempre en proporción al cuadrado de los tiempos, y que tales movimientos y sus velocidades respectivas, al mezclarse, no se alteren y perturben mutuamente,* de modo que la trayectoria que recorre el proyectil al continuar su movimiento acabe por [278] degenerar en algo diferente; esto me parece, sin embargo, imposible. La razón es que el eje de la parábola en cuestión y sobre la que suponemos que tiene lugar el movimiento natural de los cuerpos, al ser perpendicular al plano horizontal, va a terminar en el centro de la tierra; dado, además, que la parábola se va siempre desviando de su propio eje, ningún proyectil alcanzaría nunca el centro de la tierra, o, si lo alcanzara, ya que parece necesario que esto ocurriera, entonces la línea del proyectil se transformaría en otra totalmente distinta de la línea parabólica.

SIMP. A estas dificultades añado yo otras. Una de ellas consiste en suponer que el plano horizontal, al carecer de inclinación tanto hacia arriba [*acclive*] como hacia aba-

* Una formulación que se aproxima a la segunda ley del movimiento de Newton.

jo [*declive*], es una línea recta y parecería que en una tal recta todos sus puntos fuesen igualmente distantes del centro, lo cual no es cierto. La razón de ello estriba en que cuando uno se va alejando del centro hacia uno de los extremos, resulta que se aleja también más y más del centro [de la tierra] y, en consecuencia, va hacia arriba. Se sigue de aquí que es imposible que el movimiento se prolongue infinitamente; más aún, ni siquiera puede mantenerse uniforme en distancia alguna, sino que irá disminuyendo continuamente. Además, pienso que no es posible evitar la resistencia del medio, la cual ha de destruir la uniformidad del movimiento horizontal, así como la ley de la aceleración en los cuerpos que caen. De todas estas dificultades se deduce que es sumamente improbable que lo que se ha demostrado, al apoyarse en supuestos tan poco dignos de confianza, se pueda experimentar prácticamente.

SALV. Todas las dificultades y objeciones suscitadas están tan bien fundadas que pienso que no es posible solucionarlas. Por lo que a mí me atañe, las acepto todas, como pienso que las admitiría también nuestro autor. Concedo igualmente que las conclusiones probadas en abstracto se alteran y son tan engañosas en concreto que ni el movimiento transversal es uniforme ni la aceleración natural tiene lugar según la proporción que hemos supuesto ni la línea descrita por el proyectil es una parábola, etc. Por otra parte, os pido que no neguéis a nuestro autor lo que otros hombres muy eminentes han hecho, aunque sus suposiciones fuesen falsas. La autoridad de Arquímedes puede tranquilizar a cualquiera; éste, en su *Mecánica* y en el primer [libro de su] *Cuadratura de la parábola*, toma como principio cierto que el brazo de una balanza o de una romana es una línea recta, siendo todos los puntos de la misma equidistantes del centro común de los cuerpos, y que las cuerdas de las que penden los pesos son paralelas entre sí. Algunos dan por buena esta manera de proceder por el hecho de que, [279] en la práctica, nuestros instrumentos y las distancias con las que operamos son tan pequeños en comparación con la distancia que nos separa del centro del globo terrestre, que podemos tomar tranquilamente un minuto de un grado del círculo máximo como si fuese una línea recta, y dos perpendiculares que cuelgan de sus extremos como si fuesen paralelas. Y es que si en las tareas prácticas se hubieran de tener en cuenta este tipo de minucias, los primeros en ser criticados deberían ser los arquitectos, quienes, utilizando la plomada, presumen erigir torres altísimas con líneas paralelas.

He de añadir, llegados a este punto, que podemos decir que tanto Arquímedes como los otros dieron por supuesto, en sus consideraciones, que estaban separados por una distancia infinita del centro de la Tierra, en cuyo caso sus suposiciones no eran falsas y sus demostraciones eran absolutamente concluyentes. Por tanto, cuando queremos aplicar las conclusiones que hemos probado y que se refieren a distancias inmensas, hemos de hacer las correcciones necesarias, ya que nuestra distancia al centro de la tierra, aunque no sea realmente infinita, es tal que se puede considerar inmensa si la comparamos con la insignificancia de nuestros instrumentos. El mayor de ellos es el tiro de los proyectiles —y entre estos, tendremos que considerar solamente los de la artillería—, tiro que por grande que sea no pasará de cuatro millas, cuando son muchos miles de millas los que nos separan a nosotros del centro de la Tierra. Comoquiera que dichos proyectiles van a parar a la superficie de la Tierra, poco será lo que se puede alterar la figura parabólica que describen y que se supone que se transformaría considerablemente si terminara en el centro de la tierra.

Por lo que se refiere a las perturbaciones procedentes de la resistencia del medio, es ésta una dificultad más considerable y difícil, dada su multiplicidad de variedades, de

someterla a reglas fijas y a una descripción rigurosa. Así, si consideramos solamente la resistencia que ofrece el aire a los movimientos hasta el momento estudiados, vemos que llega a perturbarlos a todos y los perturba en una variedad infinita de modos, como infinitos son los modos en que varían las figuras, los pesos y las velocidades de los móviles. Por lo que atañe a la velocidad, a medida que ésta sea mayor, mayor también será la resistencia ofrecida por el aire; esta oposición crecerá a medida que los móviles sean menos pesados, de forma que si bien el cuerpo que desciende debería recorrer, con movimiento acelerado, un espacio proporcional al cuadrado de la duración de su movimiento, no obstante, por muy pesado que sea tal móvil, si cae desde una altura muy considerable, será tal la resistencia que sobre él ejerza el aire que le impedirá que vaya incrementando su velocidad hasta reducirlo [280] a un movimiento uniforme e igual. Esta uniformidad se alcanzará tanto más rápidamente y en menor altura cuanto menos pesado sea el móvil. Por lo que se refiere al movimiento en el plano horizontal, aquel movimiento que debería ser uniforme y constante si no se le ofreciera resistencia alguna, es alterado por la oposición del aire hasta llegar a dejar quieto al móvil de que se trate; y una vez más: tanto más rápidamente ocurrirá esto cuanto más ligero sea el móvil. De estas propiedades, como son el peso [*gravità*], la velocidad y también la forma, al variar en modo infinito, no se puede tratar científica y rigurosamente. Con todo, si queremos proceder así, no tenemos más remedio que abstraer tales aspectos y una vez que hemos encontrado y demostrado dichas conclusiones que prescinden de las resistencias, servirnos de aquéllas, aplicándolas a la experiencia con las limitaciones que ésta nos imponga. La ventaja de esta manera de proceder no será pequeña, puesto que el material y la forma que se elijan habrán de ser los menos sujetos a los inconvenientes del medio, como ocurre con los cuerpos muy pesados [*gravissime*] y redondos, mientras que los espacios y las velocidades no serán, por lo general, tan grandes como para no poder hacer las correcciones pertinentes.

En el caso de los proyectiles que usamos nosotros, que están hechos de materiales pesados y de figura redonda, o incluso con materiales menos pesados con forma cilíndrica, como son las flechas, lanzados con ondas o arcos, la desviación que tenga su movimiento del curso exacto de la parábola será insignificante. Más aún (y me gustaría tomarme un poco más de libertad) os puedo mostrar, por medio de un par de experiencias, que las dimensiones de nuestros instrumentos son tan pequeñas que las resistencias externas y accidentales, entre las cuales la del medio es la más considerable, son apenas observables.

Me referiré a los movimientos que tienen lugar a través del aire, ya que de éstos es de los que fundamentalmente hablamos. Contra estos movimientos, el aire ejerce su oposición de dos maneras: la una consiste en ofrecer mayor resistencia a los móviles menos densos [*gravi*] que a los muy densos [*gravissimi*], mientras que la otra estriba en ofrecer mayor resistencia a la velocidad mayor que a la menor de un mismo móvil.

Por lo que hace a la primera, consideremos el caso de dos bolas que tengan la misma dimensión, siendo el peso de una diez o doce veces mayor que el de la otra; tal sería el caso, por ejemplo, de una bola de plomo y otra de madera, ambas descendiendo desde una altura de 150 o 200 codos. Puesto que las dos llegan a tocar tierra con una diferencia de velocidad pequeñísima, tal experimento nos confirma que la resistencia y el retraso causado por el aire es mínimo; porque si la bola de plomo, que parte en el mismo instante y desde la misma altura que la bola de madera, sufriera poco el efecto del retraso mientras que la de madera lo padeciera mucho más, aquélla debería [281] llegar a tierra con una notable ventaja con respecto a ésta, al ser su peso diez veces mayor.

Ahora bien, no es esto lo que sucede, sino que, por el contrario, su ventaja no llegará ni siquiera a la centésima parte de toda la distancia recorrida en la caída. En el caso de una bola de plomo y otra de piedra, siendo el peso de esta última un tercio o la mitad de aquélla, sería imperceptible la diferencia de sus tiempos respectivos al tocar tierra. Ahora bien, puesto que el impulso [*impeto*] que adquiere una bola de plomo al caer desde una altura de 200 codos (y que es tal que si el movimiento continuara siendo uniforme, la bola recorrería 400 codos en un tiempo igual al de la caída) es muy considerable si lo comparamos con la velocidad de nuestros arcos u otro tipo de artefactos (exceptuando los impulsos conseguidos con armas de fuego), se sigue que podemos, con cierta exactitud, considerar como absolutamente verdaderas las demostraciones que se han de probar y que prescinden de las alteraciones producidas por el medio.

En cuanto al segundo caso, en el que hay que poner de manifiesto que la resistencia del aire con respecto a un móvil que va a gran velocidad no es mucho mayor que si se mueve lentamente, el experimento siguiente es buena prueba de ello. Cuélguense de dos hilos de la misma longitud, de cuatro o cinco codos, pongamos por caso, dos bolas de plomo que sean iguales también. Una vez suspendidos dichos hilos a cierta altura, empujemos los pesos desviándolos de la perpendicular, pero de forma tal que uno se aleje en una distancia de ochenta o más grados, mientras que el otro no se aleje más de cuatro o cinco. De esta forma, si se los deja caer libremente, uno cae y, tras atravesar la perpendicular, describe arcos muy grandes de 160, 150, 140 grados, etc., disminuyéndolos poco a poco; el otro, por su parte, recorrerá arcos pequeños de diez, ocho, seis, etc., grados, disminuyéndolos también poco a poco.

He de decir, ante todo, que en el tiempo en que uno de los péndulos pasa sus grados respectivos, 180, 160, etc., el otro pasará los 10, 8, etc., suyos. De todo lo cual se infiere con claridad que la velocidad de la primera bola será dieciséis o dieciocho veces mayor que la velocidad de la segunda; de modo que si el aire ofrece a la velocidad más grande una resistencia superior a la que ofrece a la menor, la frecuencia de vibración será menor en los grandes arcos de 180, 160 grados, etc., que en los pequeños arcos de diez, ocho, cuatro e incluso dos y un grados. Ahora bien, esto contradice a la experiencia, ya que si dos personas se ponen a contar las vibraciones, una de las más largas y la otra las más cortas, se encontrarán con que contarán no sólo decenas sino centenas de tales vibraciones sin que difieran lo más mínimo en una sola o en parte de una.

Esta observación justifica las dos proposiciones [282] siguientes: que las vibraciones más amplias y las más exiguas se realizan en el mismo tiempo y que, en segundo lugar, la resistencia y retraso que causa el aire opera de la misma forma tanto en los movimientos muy veloces como en los muy lentos, contra lo que parecía que nosotros mismos, de la manera más normal, pensábamos.

SAGR. Más aún, puesto que no se puede negar que el aire ofrece resistencia tanto a unos como a otros y que ambos movimientos van languideciendo poco a poco hasta acabar por desaparecer, hay que decir que tales disminuciones de velocidad tienen lugar con la misma proporción en uno y otro caso. Pero ¿cómo? El que en un caso se ofrezca mayor resistencia que en otro, ¿de dónde puede proceder a no ser de que el primero empuja con mayor impulso [*impeto*] y velocidad que el segundo? Si esto es así, la misma cantidad de velocidad del móvil es la causa y medida al mismo tiempo de la cantidad de la resistencia que se le opone. Todos los movimientos, por tanto, sean lentos o rápidos, se atrasan y encuentran resistencia con la misma proporción, cosa, creo yo, que no es de poca importancia.

SALV. Podemos, por consiguiente, también en este segundo caso, concluir que los errores que aparecen en los resultados cuando se han eliminado los accidentes externos son de muy poca importancia en el caso de nuestros instrumentos, pues las velocidades a las que nos referimos son normalmente muy grandes y las distancias pequeñísimas si las comparamos con la amplitud del radio y de los círculos máximos del globo terrestre.

SIMP. Por lo que a mí respecta, me gustaría escuchar la razón por la cual separáis dos clases diferentes de proyectiles: los impulsados por armas de fuego, es decir, los que, según creo, utilizan pólvora, por una parte, y los que se lanzan con ondas, arcos o ballestas, por otra; no estando ambas sujetas de la misma manera a las alteraciones y resistencia del aire.

SALV. La razón de esto estriba en la excesiva y, por decirlo de alguna manera, supranatural violencia con la que son lanzados aquellos proyectiles; ciertamente, se puede decir sin exageración, pienso yo, que la velocidad con la que se lanza el proyectil con un mosquete o con una pieza de artillería, es supranatural. Y es que si dicho proyectil desciende por el aire de modo natural desde una altura considerable, su velocidad, debido a la resistencia que opondrá al aire, no seguirá aumentando indefinidamente; por el contrario, lo mismo que vemos que ocurre en los cuerpos poco pesados cuando caen a lo largo de una distancia no muy grande —es decir, que su movimiento [283] acaba siendo uniforme—, sucederá también con una bola de hierro o de plomo después de que haya descendido a lo largo de algunos miles de codos. Esta velocidad límite final [*terminara ed ultima*] se puede decir que es la máxima que naturalmente puede obtener dicho cuerpo: tal velocidad estimo que es bastante menor que la que se le ha imprimido a la misma bola por medio de la ignición de la pólvora.

Una experiencia acorde nos puede confirmar lo dicho. Disparemos desde una altura de cien o más codos un arcabuz con bala de plomo y hagámoslo hacia abajo, perpendicularmente a un pavimento de piedra. Con el mismo arcabuz, disparemos contra una piedra semejante desde una distancia de uno o dos codos y observemos, después, cuál de las dos balas ha quedado más aplastada. En el caso de que la que cae desde una altura mayor haya sufrido menos desperfectos que la otra, podremos inferir que el aire habrá impedido y disminuido la velocidad que al principio del movimiento le había conferido la pólvora y que, en consecuencia, el aire no permitirá que una bala adquiera una velocidad tan grande, venga desde la altura que venga; y es que si la velocidad que le ha imprimido la pólvora no superase a la que puede alcanzar por sí misma, cayendo libremente [*naturalmente scendendo*], entonces el golpe contra el suelo tendría que ser mayor y no menor.

Yo no he realizado tal experimento, pero estoy convencido de que una bala de arcabuz o de artillería, cayendo de una altura todo lo elevada que se quiera, no producirá un golpe tan fuerte como el que produciría si se disparara contra una pared desde una distancia de pocos codos; es decir, desde una distancia tan corta que la pequeña endidura, o mejor, la división que se hace en el aire no sea lo suficientemente grande como para quitar al tiro el exceso de la violencia supranatural que el fuego de la artillería le hubiera imprimido.

Este impulso [*impeto*] tan enorme que se da en tiros de este género puede causar alguna deformidad en la línea que describe el proyectil, haciendo que el principio de la parábola sea menos inclinado y curvo que el final; de cualquier forma, y en lo que atañe a nuestro autor, tiene esto poca importancia en lo tocante a las operaciones prácticas, entre las cuales una de las principales es la preparación de tablas para los disparos lla-

mados de elevación [*di volata*], tablas que contengan las distancias de las caídas de las balas disparadas según todas las diversas elevaciones; y puesto que tales disparos se hacen con morteros no muy cargados, al no ser en éstos supranatural el impulso [*impeto*], los tiros siguen las trayectorias que se les prescriben con bastante exactitud.

Pero prosigamos, entre tanto, la discusión del tratado allí donde el autor quiere introducirnos en el estudio e investigación del impulso [*impeto*] del móvil cuando se mueve con movimiento compuesto de otros dos; en primer lugar, del movimiento compuesto de dos movimientos uniformes, siendo uno horizontal y el otro perpendicular.

[284] TEOREMA II. PROPOSICIÓN II

Si un móvil se mueve con un movimiento compuesto de dos movimientos uniformes, el uno horizontal y el otro perpendicular, entonces el [cuadrado del] impulso o intensidad de la velocidad [impetus seu momentum lationis] *compuesto de los dos será igual a la suma de los cuadrados de las intensidades de los dos movimientos primeros.**

Supongamos [figura 109] que un móvil avance uniformemente con un doble movimiento, correspondiendo al movimiento perpendicular el espacio *ab*, mientras que *bc* corresponde al movimiento horizontal que tiene lugar en el mismo tiempo. En tal caso, puesto que los espacios *ab* y *bc* son recorridos en el mismo tiempo, con movimientos uniformes, las intensidades [*momenti*] de tales movimientos estarán entre sí como *ab* y *bc* mismos; pero el móvil que se desplaza según estos dos movimientos describe la diagonal *ac*, siendo la intensidad de su velocidad, por tanto, *ac*. Ahora bien, el cuadrado de *ac* es igual a *ab* al cuadrado más *bc* al cuadrado. De ahí que el cuadrado de la intensidad compuesta por las dos intensidades *ab* y *bc* sea igual a los cuadrados de éstos tomados juntamente, que es lo que había que demostrar.

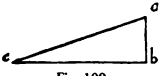


Fig. 109

SIMP. Debéis de resolverme una pequeña dificultad que se me plantea, llegados a este punto, ya que me parece que esto que se acaba de demostrar entra en contradicción con otra proposición que hemos visto previamente y en la que se afirmaba que el impulso [*impeto*] del móvil que viene de *a* hacia *b* es igual al que viene de *a* hacia c. Ahora, por el contrario, se concluye que el impulso [*impeto*] en *c* es mayor que en *b*.

SALV. Las dos proposiciones, señor Simplicio, son ambas verdaderas, pero muy diversas entre sí. Aquí se habla de un solo móvil, movido por un solo movimiento aunque compuesto de dos, siendo éstos uniformes; allí, por el contrario, se habla de dos móviles, con movimiento naturalmente acelerado, uno a lo largo de la perpendicular *ab* y el otro a lo largo del plano inclinado *ac*. Además, en aquel caso no se supone que los tiempos sean iguales, sino que el tiempo por el plano inclinado *ac* es mayor que el tiempo a través de la perpendicular *ab*; en el movimiento que estamos ahora tratando, los movimientos por *ab*, *bc* y *ac* se supone que son uniformes y simultáneos.

* En el original, este teorema se expresa como sigue: «Si aliquod mobile duplici moto aequalbili moveatur, nempe orizontali et perpendiculari, impetus seu momentum lationis ex utroque motu composite erit potentia aequalis ambobus momentis priorum motuum».

Para una justificación en esta traducción de la palabra «potentia» y del uso del adjetivo «compuesto» véase *infra*.

SIMP. Excusadme y seguid adelante; todo está claro ahora.

[285] SALV. Continúa el autor intentando explicarnos qué es lo que sucede cuando un móvil recibe un impulso [*impeto*] compuesto de dos elementos, el uno horizontal y uniforme, mientras que el otro es perpendicular y naturalmente acelerado; de estos dos componentes resulta, finalmente, el movimiento del proyectil, describiendo éste una línea parabólica, en cada uno de cuyos puntos hay que determinar cuál sea el impulso [*impeto*] del proyectil. Con el fin de hacer claro este objetivo, el autor nos demuestra el modo, o para decirlo mejor, el método para regular y medir tal impulso [*impeto*] a lo largo de la línea sobre la que tiene lugar el movimiento naturalmente acelerado y que parte del reposo. Dice así:

TEOREMA III. PROPOSICIÓN III

Supongamos [figura 110] que el movimiento se desarrolla a lo largo de la línea *ab*, partiendo del reposo en *a* y sobre tal línea tomemos un punto cualquiera, *c*, hagamos que *ac* represente el tiempo, es decir, la medida del tiempo de la caída a lo largo del espacio *ac* y que represente también la medida del impulso o intensidad del movimiento [*impetus sea momentum*] adquirido en el punto *c* en virtud de la caída *ac*. En la línea *ab* tomemos ahora otro punto cualquiera, *b*, por ejemplo. El problema consiste en determinar el impulso adquirido en este punto por un móvil que descienda por *ab*, en proporción al impulso obtenido en *c*, cuya medida es, según hemos estipulado, *ac*. Tomemos *as* como media proporcional entre *ba* y *ac*. Hemos de demostrar que el impulso en *b* es al impulso en *c* como la línea *sa* es a la línea *ac*.

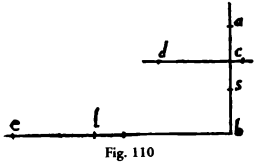


Fig. 110

Tracemos la línea horizontal *cd*, doble de longitud de *ac*, y *be*, doble de *ba*. Sabemos, por las demostraciones precedentes, que el móvil que caiga a lo largo de *ac*, sea desviado por la horizontal *cd* y [286] se mueva con un movimiento uniforme según el impulso adquirido en *c*, recorrerá la distancia *cd* en un tiempo que es igual al empleado en recorrer el espacio *ac* con movimiento acelerado. Sabemos, del mismo modo, que *be* será atravesado en el mismo tiempo que *ab*. Ahora bien, el tiempo del descenso por *ab* es *as*, luego la distancia horizontal *be* se recorre en el tiempo *as*. Hagamos que así como el tiempo *sa* está al tiempo *ac*, del mismo modo *eb* esté para con *bl*; puesto que el movimiento es uniforme a lo largo de *be*, el espacio *bl* será recorrido en el tiempo *ac* con la intensidad de velocidad [*momentum celeritatis*] adquirida en *b*, pero, en este mismo intervalo de tiempo *ac*, se recorre el espacio *cd* con la intensidad de velocidad obtenida en *c*; por otra parte, las intensidades de velocidad están entre sí como los espacios que son recorridos en tiempos iguales con tales intensidades de velocidad. En consecuencia, la intensidad de velocidad en *c* es a la intensidad de velocidad en *b* como *de* es a *bl*. Pero dado que como *de* es a *be* así está la mitad de una a la mitad de la otra, es decir, *ca* es a *ab*, y puesto que como *eb* es a *bl* así es *ba* a *as*, se sigue que, *ex aequali*, *de* es a *bl* como *ca* es a *sa*; o dicho de otra manera, como la intensidad de velocidad en *c* es a la intensidad de velocidad en *b*, así *ca* es a *as*, esto es, como el tiempo por *ca* es al tiempo por *ab*.

Se hace, por tanto, evidente cuál es el método para medir el impulso o intensidad de velocidad a lo largo de la línea sobre la que tiene lugar el movimiento de caída; tal impulso, como hemos justamente supuesto, aumenta proporcionalmente al tiempo.

Pero llegados a este punto, y antes de seguir adelante, es necesario hacer la siguiente observación: puesto que nuestra discusión tratará del movimiento compuesto por un movimiento horizontal uniforme y otro descendente naturalmente acelerado (de tal unión, en efecto, resulta compuesta y descrita la línea del proyectil, es decir, la parábola), nos encontramos en la necesidad de determinar una medida común según la cual se pueda medir la velocidad, el impulso o la intensidad de ambos movimientos [*velocitatem, impetum seu momentum*]. Dado que en el movimiento uniforme son innumerables los grados de velocidad, pero sólo uno de ellos, y no uno cualquiera tomado arbitrariamente, debe correlacionarse con el grado de velocidad adquirido en el movimiento naturalmente acelerado, no se me ha ocurrido un medio más fácil para elegirlo y determinarlo que suponer otro del mismo género.* Para expresar lo que quiero decir con mayor claridad supongamos una línea *ac* [figura 111] perpendicular a la horizontal *cb*. Ahora bien, *ac* es la altura y *bc* la amplitud de la *semiparábola* [287] descrita por el resultado de los dos movimientos, uno de los cuales es el del móvil que desciende a lo largo de *ac* con movimiento naturalmente acelerado a partir del reposo en *a*, mientras que el otro es el movimiento uniforme y transversal a lo largo de la horizontal *ad*. El impulso adquirido en *c* en virtud del descenso *ac* es medido por la longitud de la misma altura *ac*. En efecto, el impulso del móvil que cae desde la misma altura es siempre uno y el mismo; en la línea horizontal, por el contrario, podemos asignar no uno solo, sino innumerables grados de velocidad de movimientos uniformes. Para poder distinguir uno de esta multitud y mostrar perfectamente el grado de velocidad que haya escogido, prolongaré la altura *ca* hacia arriba y en esta prolongación señalaré, según lo necesario que sea, la elevación *ae*. Si nos imaginamos un móvil que cae desde esa altura a partir del reposo en *e*, es evidente que el impulso por él adquirido en el extremo *a* es igual a aquel con que nos podemos imaginar que se desplazaría el mismo móvil desviado sobre la horizontal *ad*. Su grado de velocidad será tal que, en el tiempo del descenso por *ea*, atravesará una distancia horizontal doble de la misma *ea*. Me ha parecido necesario hacer esta observación preliminar.

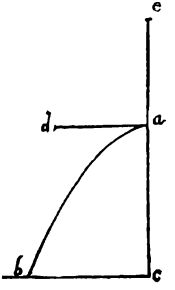


Fig. 111

Tengamos presente, además, que llamo «amplitud» de la semiparábola *ab* a la horizontal *cb*; «altura», es decir, *ac*, al eje de la misma parábola; por el contrario, a la línea *ea*, el descenso a través de la cual determina el impulso horizontal, la llamo «elevación» [*sublimitatem*]. Una vez aclaradas y definidas estas cosas, vuelvo a aquello que tenemos que demostrar.

SAGR. Deteneos, por favor, ya que me parece que conviene redondear aquí este pensamiento del autor, poniéndolo en correspondencia con las nociones de Platón acerca de cómo determinar las diversas velocidades de los movimientos uniformes de las revolu-

* Galileo propone aquí utilizar como patrón de velocidad la velocidad terminal de un objeto que cae libremente desde una altura dada.

ciones de los movimientos celestes. Platón, pensando acaso que un móvil no puede pasar del estado de reposo a cualquier grado determinado de velocidad en el cual haya de mantenerse uniforme e indefinidamente, a no ser que pase por todos los grados de velocidad menores, o, lo que es lo mismo, a través de los grados mayores de lentitud que se dan entre un grado de velocidad dado y el máximo grado de lentitud, es decir, el reposo. Su idea fue que Dios, después de haber creado los cuerpos móviles celestes, les asignó aquel grado de velocidad con la que se deberían mover con movimiento circular uniforme e imperecedero; de este modo, partiendo del reposo, hizo que se movieran sobre distancias definidas con un movimiento natural y rectilíneo tal como nosotros mismos vemos claramente que se mueven los cuerpos terrestres, los cuales se van acelerando sucesivamente una vez que parten del estado de reposo. Añadió, además, que habiendo hecho que ganaran aquel grado de velocidad que le pareció oportuno que mantuvieran sin [288] interrupción, convirtió su movimiento rectilíneo en circular, que es el único apto para mantenerse uniforme, ya que va girando siempre sin apartarse o acercarse al término que se le quiera fijar. Esta concepción es, ciertamente, digna de Platón y tanto más admirable cuanto que sus fundamentos permanecieron escondidos hasta que los descubrió nuestro autor, quien les quitó la máscara o su ropaje poético para mostrar su aspecto real y verdadero. En vista de los conocimientos astronómicos que hemos recibido y que nos informan acerca de la enorme dimensión de las órbitas planetarias y de las distancias de tales planetas al centro alrededor del cual se mueven, así como de sus velocidades respectivas, me parece del todo creíble que nuestro autor (a quien esta idea platónica no le era desconocida) haya tenido alguna vez la curiosidad de investigar si fuese posible asignar alguna elevación determinada, partiendo de la cual como de estado de reposo, los cuerpos de los planetas, moviéndose con movimiento rectilíneo y naturalmente acelerado por determinadas distancias, para cambiar después la velocidad adquirida en un movimiento uniforme, habrían de corresponder a las dimensiones de sus órbitas y a los tiempos de sus revoluciones.

SALV. Me parece recordar haberle oído decir que en cierta ocasión hizo el cómputo y encontró una correspondencia muy notable con las observaciones; sin embargo, no quiso hablar de ello, a fin de que el odio que sus muchos descubrimientos le han procurado no encontrara en esto ocasión para echar más leña al fuego. De cualquier forma, si alguien desea tal información podrá dar satisfacción a su curiosidad por sí mismo con la doctrina del presente tratado. Pero continuemos con nuestra materia. Hemos de demostrar lo siguiente:

PROBLEMA I. PROPOSICIÓN IV

Cómo se debe determinar el impulso en cada uno de los puntos de una parábola dada descrita por un proyectil.

Sea la semiparábola *bec* [figura 112], cuya amplitud es *cd* y la altura *db*; esta última prolongada hacia arriba, encontrará en *a* la tangente a la parábola, *ca*. A través del vértice *b* tracemos la línea *bi* paralela a la línea horizontal *cd*. Si, además, la amplitud *cd* es igual a toda la altura *da*, *di* será igual tanto a *ba* como a *bd*. Si suponemos que la misma *ab* es la medida del tiempo de la caída por *ab* y también de la intensidad de velocidad adquirida en *b* en virtud del descenso *ab* a partir del reposo en *a*, entonces *de* (que

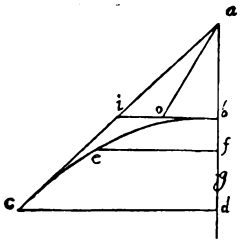


Fig. 112

es el doble de *bi*) será el espacio que recorrerá el móvil en el mismo tiempo a causa del impulso *ab*, al ser desviado sobre la horizontal. Ahora bien, en el mismo tiempo, el móvil recorre la altura *bd* cayendo a lo largo de *bd* y partiendo del reposo en *b*; por tanto, el móvil que, cayendo a lo largo de *ab*, a partir del reposo en *a*, es desviado sobre la línea horizontal con el impulso *ab*, recorrerá sobre dicha horizontal una distancia que es igual a *dc*. Si se superpone, ahora, el movimiento de la caída a lo [289] largo de *bd*, entonces el móvil recorre la altura *bd* y describe la parábola *bc* y su impulso en la extremidad *c* es el resultado del impulso transversal uniforme, cuya intensidad de velocidad se representa por medio de *ab*, y de otra intensidad de velocidad adquirida en la extremidad *d*, es decir, en *c*, en virtud del descenso *bd*: ambas intensidades de velocidad [*momenti*] son iguales. Así pues, si suponemos que *ab* es la medida de una de las dos intensidades, del movimiento transversal uniforme, por ejemplo, mientras que *bi*, que es igual a *bd*, es la medida del impulso adquirido en *d*, es decir, en *c*, entonces la hipotenusa *ia* será el resultado de la intensidad compuesta de las dos intensidades de velocidad dichas: será, en consecuencia, la cantidad o medida de la intensidad de velocidad total con la cual el proyectil, describiendo la parábola *bc*, golpeará en *c*. Teniendo ahora presente lo que acabamos de decir, tomemos sobre la parábola un punto cualquiera —*e*, por ejemplo—, en el que tenemos que determinar el impulso [*impeto*] del proyectil. Trácese la línea horizontal *ef* y sea *bg* la media proporcional entre *bd* y *bf*. Puesto que hemos supuesto que *ab*, o sea, *bd*, es la medida del tiempo y de la intensidad de velocidad [*momentum velocitatis*] adquirido en la caída *bd* a partir del reposo en *b*, será *bg* el tiempo, es decir, la medida del tiempo y del impulso en *f* del móvil que provenga de *b*. En consecuencia, si tomamos *bo* como igual a *bg* y trazamos la diagonal *ao*, ésta representará la cantidad del impulso que se dé en el punto *e*. En efecto, se ha supuesto que *ab* representa el tiempo y el impulso en *b*, impulso que, desviado sobre la horizontal, se mantiene siempre el mismo; *bo*, por el contrario, representa el impulso adquirido en *f*, es decir, en *e*, en virtud de la caída a lo largo de la altura *bf* a partir del reposo en *b*. Pero el cuadrado de *ao* es igual al cuadrado de *ab* más el cuadrado de *bo*. Se hace, pues, evidente lo que queríamos demostrar.

SAGR. Ver cómo se unen estos impulsos diversos, así como la cantidad de impulso que resulta de tal mezcla, es algo para mí tan nuevo que produce en mi mente no poca confusión. No me refiero a la unión de dos movimientos uniformes, aunque sean desiguales entre sí, cuando dicha unión tiene lugar por las líneas horizontal y perpendicular, respectivamente, puesto que en este caso veo perfectamente que el resultado es un movimiento cuyo cuadrado es igual al cuadrado de ambos componentes. La confusión surge cuando la composición se da entre el movimiento horizontal uniforme y el perpendicular naturalmente acelerado. Desearía, pues, que tratáramos de asimilar mejor esta materia.

[290] SIMP. Por mi parte, mi necesidad es tanto mayor cuanto que no tengo del todo claro, como sería necesario, aquello que concierne a las proposiciones primeras y fundamentales, en las que se apoyan las restantes. Incluso en el caso de la unión de dos

movimientos uniformes, uno horizontal y el otro perpendicular, me gustaría comprender mejor el modo según el cual se componen. Señor Salviati, entiende V. S., pues, cuáles son nuestras necesidades y nuestros deseos.

SALV. Me parece un deseo muy razonable y veré si el hecho de haber pensado durante más tiempo sobre estos problemas me facilita arrojar luz en vuestras mentes. De cualquier forma, me debéis excusar y ser tolerantes si en la explicación repito un buen número de cosas ya dichas hasta el momento por el autor.

No podemos hablar con precisión acerca de los movimientos y de sus velocidades o impulsos [*impeti*], sean aquéllos uniforme o naturalmente acelerados, a no ser que nos pongamos antes de acuerdo en lo que a la medida que deseamos usar se refiere, con el fin de medir tanto tales velocidades como el tiempo. En lo que atañe a la medida del tiempo, tenemos ya la comúnmente adoptada en todos los ámbitos: son las horas, primeros y segundos minutos, etc. De la misma manera que, con respecto al tiempo, tenemos esta medida común aceptada por todos, es necesario que asignemos también una medida a las velocidades, la cual sea del mismo modo comprendida y recibida por todos. El autor ha estimado que reúne tales condiciones, como ya lo hemos dicho, la velocidad de los cuerpos que caen naturalmente, cuyas velocidades crecientes en todas las partes del mundo tienen las mismas características, de modo que el grado de velocidad que adquiere, por ejemplo, una bola de plomo que pese una libra al caer, perpendicularmente, partiendo del reposo, desde la altura de una pica, es siempre y en todo lugar, el mismo, lo que lo hace muy apto para explicar la cantidad del impulso [*impeto*] adquirido en una caída natural.

Nos falta todavía encontrar el modo de determinar la cantidad del impulso [*impeto*] en el caso de un movimiento uniforme, de tal modo que todos los que se apliquen a esta materia se formen el mismo concepto en lo que a su magnitud y velocidad se refiere. De este modo se evitará que alguien se lo imagine más veloz mientras que otro pensaría que lo es menos, de forma que al unir y mezclar un movimiento uniforme y otro acelerado distintos hombres establezcan y conciban diversas magnitudes de los impulsos. Con el fin de determinar y representar tal impulso y velocidad particular, el autor no ha encontrado otro medio más adecuado que servirse del impulso que va adquiriendo el móvil en el movimiento naturalmente acelerado. La velocidad de un móvil que ha adquirido de este [291] modo una intensidad de velocidad [*momento*] cualquiera, convertida en movimiento uniforme, mantendrá precisamente una velocidad determinada tal que, durante un intervalo de tiempo igual al tiempo de la caída, hará que el móvil recorra una distancia que es el doble de la altura desde donde ha caído. Puesto que es éste un punto fundamental en la materia que estamos tratando, conviene que nos hagamos entender con toda claridad ayudándonos de algún ejemplo particular.

Tomemos de nuevo la velocidad y el impulso [*impeto*] adquirido por el cuerpo en su descenso desde una altura de una pica,* por ejemplo, y de cuya velocidad queremos servirnos para medir otras velocidades e impulsos [*impeti*] en cualquier otra ocasión. Supongamos que el tiempo de tal caída sea de cuatro segundos [*minuti secondi d'ora*]. Pues bien, si queremos medir el impulso [*impeto*] del cuerpo que cae desde otra altura cualquiera, sea ésta mucha o poca, no debemos concluir que esos impulsos adquiridos guarden entre sí una proporción como la que corresponde a las alturas de la caída. Así, no es cierto que una caída desde una altura cuatro veces mayor conferirá una velocidad

* Unos tres metros y medio.

cuatro veces mayor también. La razón estriba en que la velocidad del movimiento naturalmente acelerado no crece o disminuye en proporción a las distancias, sino en proporción a los tiempos y, como ya hemos demostrado, la proporción de los espacios es igual al cuadrado de la proporción de los tiempos.

Así pues, si en una línea recta asignamos una parte como medida de la velocidad, así como del tiempo y también del espacio en tal tiempo recorrido (en aras de la brevedad, estas tres magnitudes suelen representarse muchas veces por medio de una misma línea), entonces para determinar la cantidad del tiempo y el grado de velocidad que el mismo móvil habría adquirido en otra distancia, no recurriremos inmediatamente de esta segunda distancia, sino de la línea que es la media proporcional entre las distancias dichas. Ilustremos lo dicho con un ejemplo. En la línea *ac* [figura 113], perpendicular a la horizontal, supongamos que la parte *ab* es un espacio, el cual es atravesado por un cuerpo que cae con movimiento naturalmente acelerado; el tiempo de la caída puede representarse por medio de cualquier línea, sólo que, para abreviar, lo representaremos utilizando la misma línea *ab*. Igualmente, dicha línea *ab* representará también tanto la medida del impulso [*impeto*] como la velocidad adquirida por tal movimiento, de modo que la medida de todos los espacios que hemos de considerar a lo largo de nuestro razonamiento estará representada por la parte *ab*. Habiendo establecido convencionalmente bajo la sola magnitud *ab* estas tres medidas de tres diferentes cantidades, esto es, el [292] espacio, el tiempo y el impulso, nuestra tarea consiste ahora en determinar, en el espacio y la altura dada, *ac*, el tiempo requerido para descender de *a* a *c*, así como el impulso que habrá adquirido en el punto terminal *c*, en relación ambos al tiempo y al impulso medidos por *ab*. Para responder a estas dos cuestiones, tomemos de las dos líneas, *ac* y *ab*, la media proporcional *ad*. Afirmamos, entonces, que el tiempo de la caída a través de todo el espacio *ac* es lo que el tiempo *ad* es al tiempo *ab*, que hemos tomado como la cantidad del tiempo del descenso *ab*. Diremos igualmente que el impulso [*impeto*] o grado de velocidad que ha de alcanzar el cuerpo que cae en el término *c* es, con relación al impulso [*impeto*] que tuvo en *b*, como la misma línea *ad* es con respecto a la *ab*, dado que la velocidad aumenta en la misma proporción que aumenta el tiempo. Esta conclusión, aunque se tomó como postulado de la proposición tercera, quiso el autor explicarla de la forma que hemos visto.

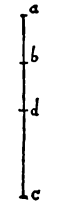


Fig. 113

Una vez que hemos comprendido y establecido bien este punto, pasemos al estudio del impulso [*impeto*] que se deriva de dos movimientos compuestos, uno de los cuales está formado por un movimiento horizontal y siempre uniforme, y el otro, por un movimiento perpendicular con respecto a la horizontal e igualmente uniforme. Otro movimiento compuesto, por su parte, estará formado por uno horizontal, siempre uniforme también, más el perpendicular y naturalmente acelerado. En el caso de que ambos sean uniformes, ya hemos visto que el cuadrado del impulso [*impeto*] resultante de la composición de los dos es igual a la suma de los cuadrados de ambos, como se verá claramente en la siguiente ilustración.

Supongamos [figura 114] que un móvil que desciende a través de la perpendicular *ab* tiene, por ejemplo, tres grados de velocidad uniforme [*impeto equabile*], pero transportado por la *ab* hacia *c* su velocidad e impulso [*impeto*] es de cuatro grados, de modo que durante el mismo intervalo de tiempo pasará tres codos a lo largo de la perpendicular y cuatro a lo largo de

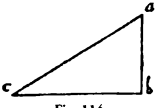


Fig. 114

la horizontal. Ahora bien, un móvil que avanza con la velocidad resultante de ambos atravesará, en el mismo tiempo, la diagonal *ac*, esto es, irá desde el punto *a* hasta el extremo *c*. Dicha diagonal no tiene una longitud de siete codos, como sería la compuesta de las dos (tres de *ab* más cuatro de *bc*), sino que tiene cinco, cuyo cuadrado [25] es la suma de los de tres y cuatro, ya que, elevados al cuadrado, tres y cuatro dan nueve y dieciséis, respectivamente; si sumamos ahora éstos, obtenemos veinticinco, que es el cuadrado de *ac* y que es igual a la suma de los cuadrados de *ab* y de *bc*. Se sigue de aquí que *ac* será tanto como el lado; es decir, tanto como la raíz del cuadrado de veinticinco, o sea, cinco.

[293] Como regla firme y segura para obtener la cantidad de impulso [*impeto*] que resulta de dos impulsos [*impeti*] dados, uno horizontal y el otro vertical, pero ambos uniformes, hay que encontrar el cuadrado de los dos, sumarlos y, una vez hecho esto, extraer la raíz cuadrada de dicha suma, la cual nos dará la cantidad del impulso [*impeto*] resultante de dichos impulsos. Así, en el ejemplo que hemos propuesto, aquel móvil que en virtud del movimiento perpendicular habría golpeado a la horizontal con tres grados de fuerza, mientras que con el movimiento horizontal solamente hubiese golpeado con una fuerza [*forza*] de cuatro grados en *c*, si golpea con la conjunción de ambos impulsos [*impeti*], entonces el golpe será como el de un móvil que tuviese cinco grados de velocidad y de fuerza [*forza*]; además, este golpe tendría el mismo valor en todos y cada uno de los puntos de la diagonal *ac*, ya que los impulsos [*impeti*] compuestos son siempre los mismos sin que aumenten o disminuyan.

Veamos ahora lo que ocurre en el caso de que la composición tenga lugar entre un movimiento horizontal uniforme y un movimiento perpendicular que, comenzando en el reposo, se va acelerando naturalmente. Es del todo claro que la diagonal, que es la línea que representa el movimiento compuesto de ambos, no es una línea recta, sino semiparabólica, como se ha demostrado ya; en ésta el impulso [*impeto*] va aumentando siempre a causa del incremento continuo de la velocidad del movimiento perpendicular. De ahí que para determinar el impulso [*impeto*] en un punto determinado de la diagonal parabólica en cuestión, sea necesario, antes que nada, fijar la cantidad del impulso [*impeto*] horizontal uniforme e investigar, después, cuál es el impulso [*impeto*] del cuerpo que cae en el punto que se ha fijado; este impulso no se puede determinar si no tenemos presente el tiempo transcurrido desde el principio de la composición de los dos movimientos, aspecto que no entra en consideración cuando la composición tiene lugar entre movimientos uniformes, cuyas velocidades e impulsos [*impeti*] son siempre los mismos. Aquí sin embargo, en donde uno de los movimientos de la composición es tal que, comenzando de la lentitud máxima, va aumentando su velocidad a medida que pasa el tiempo, es necesario que la cantidad del tiempo nos ponga de manifiesto la cantidad del grado de velocidad en el punto dado, puesto que, por lo demás, el impulso [*impeto*] compuesto por estos dos movimientos es igual (como ocurre también en el caso de los movimientos uniformes) a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de ambos componentes. Conviene aquí, una vez más, ilustrar lo que venimos diciendo con un ejemplo.

En una perpendicular, *ac* [figura 115], tomemos una parte cualquiera, *ab*, y supondremos que sirve para medir el espacio recorrido en dicha perpendicular con un movimiento natural; del mismo modo, supongamos que es la medida tanto del tiempo como del grado de velocidad, es decir, de los impulsos. Se hace [294] inmediatamente evidente que si el impulso [*impeto*] del móvil que cae en *b*, desde el punto de reposo en *a*,

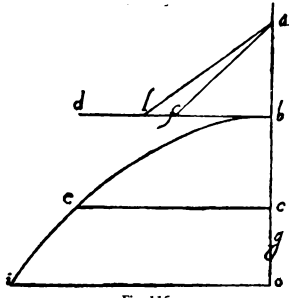


Fig. 115

pasa a ser en *bd*, que es paralela, a la horizontal, un movimiento uniforme, entonces la cantidad de su velocidad será tal que, durante el tiempo *ab* atravesará una distancia representada por medio de la línea *bd*, que es el doble de grande que el espacio *ab*. Suponiendo, además, que *bc* sea igual a *ba*, tracemos la paralela a *bd*, *ce*, igual a ella, y describamos, por los puntos *b* y *e*, la parábola *bei*. Y dado que, durante el tiempo *ab* y con el impulso [*impeto*] *ab*, se atraviesa la horizontal *bd*, o la *ce*, que es el doble de *ab* y dado que en el mismo intervalo de tiempo se recorre la perpendicular *bc*, adquiriendo el móvil en *c* un impulso que es igual al de la horizontal, se sigue que durante el tiempo *ab* el móvil pasará de *b* a *e* a lo largo de la parábola *be* con un impulso compuesto de otros dos impulsos, cada uno de los cuales es igual a *ab*. Y puesto que uno de ellos es el horizontal, mientras que el otro es el perpendicular, el impulso compuesto de ambos será la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los dos; esto es, el doble de uno de ellos. En consecuencia, si hacemos que la distancia *bf* sea igual a *ba* y trazamos la diagonal *af*, entonces el impulso y percusión en *e* será mayor que el golpe que se producirá en *b* por obra del móvil que cae desde la altura *a*, o lo que es lo mismo, superará al golpe del impulso ejercido sobre la horizontal a lo largo de *bd* en una proporción que es como la que se da entre *af* y *ab*. Pero si, en el caso de que mantuviéramos siempre a *ba* como medida de la distancia de la caída desde el reposo en *a* hasta *b* y también como medida del tiempo y del impulso que el cuerpo que cae adquiere en *b*, la altura no fuese igual, sino mayor que en *ab*, entonces, tomando *bg* como la media proporcional entre *ha* y *bo*, se sigue que *bg* será la medida del tiempo así como del impulso que adquirirá el móvil en o después de la caída *bo*. Por su parte, la distancia por la horizontal, que, atravesada con el impulso *ab* en el tiempo *ab*, sería el doble de la distancia *ab*, será, durante el intervalo de tiempo *bg*, tanta cuanta mayor es la proporción de *bg* con respecto a *ba*. Haciendo, pues, que *lb* sea igual a *bg* y trazando la diagonal *al*, obtendremos de ésta la magnitud compuesta de los dos impulsos, del horizontal y del perpendicular, que son los que determinan la parábola. El impulso horizontal y uniforme es el adquirido en *b* después de la caída *ab*, mientras que el otro es el adquirido en *o*, o para decirlo de otra forma, en *i*, a [295] traves de la caída *bo*, cuyo tiempo fue *bg*, así como también la medida de su intensidad [*la quantitá del suo momento*]. De igual manera podemos investigar el impulso en el extremo último de la parábola si la altura es menor que la elevación *ab*, tomando la media proporcional de ambas; puesta ésta en la horizontal en vez de *bf* y trazando una diagonal, como es el caso de *af*, tendremos que dicha diagonal representará la magnitud del impulso en el extremo y término de la parábola.

A todo lo que se ha dicho hasta el momento acerca de los impulsos, golpes o, para decirlo mejor, percusiones de tales proyectiles, es necesario que añadamos otra consideración muy importante. Se trata de que no basta considerar solamente la velocidad del proyectil para determinar con precisión la fuerza [*forza*] y la energía [*energia*] de la percusión, sino que hay que tener en cuenta también la naturaleza y condición del cuer-

po que recibe tal percusión, el cual influye no poco en la naturaleza del golpe de que se trate. Ante todo, es bien conocido que lo que recibe la percusión sufre la violencia de la velocidad del elemento percutiente por cuanto que se opone y llega a frenar el movimiento del proyectil. Así, si el golpe tiene lugar sobre un objeto que no ofrezca resistencia alguna a la velocidad del proyectil, entonces tal golpe será nulo; del mismo modo, si alguien ataca a su enemigo con una lanza y en el momento en el que le alcanza, éste consigue huir a una velocidad igual, no habrá golpe alguno, quedando todo en un simple tocarle sin que le cause ningún daño. Ahora bien, si la percusión tiene lugar sobre un objeto que no cede del todo, sino solamente en parte, entonces aquélla causará su efecto, pero no con todo su impulso [*impeto*], sino sólo con el exceso de la velocidad del cuerpo percutiente con respecto a la velocidad con la que se retira y cede el cuerpo que recibe el golpe; de modo que si, por ejemplo, el proyectil llega con diez grados de velocidad sobre el cuerpo que recibe la percusión y éste, cediendo parcialmente, se retira con cuatro grados de velocidad, entonces el impulso y la percusión tendrá un valor de seis grados. Finalmente, la percusión será total y máxima, por lo que al proyectil se refiere, si el cuerpo que recibe el golpe no cede absolutamente nada, sino que se opone totalmente, parando todo el movimiento del proyectil en el caso de que esto sea posible. He dicho «por lo que al proyectil se refiere», puesto que si el que recibe el golpe se moviera en dirección al proyectil, el golpe y el choque sería de una violencia tanto mayor cuanto mayor sea la suma de dos velocidades contrarias respecto a la percutiente sola.

Además, hay que observar también que el ceder más o menos puede depender no sólo de la calidad de la materia, más o menos dura según que sea de hierro, de plomo, de lana, etc., sino también de la [296] posición del cuerpo que recibe el golpe. Si la posición es tal que el movimiento del proyectil golpea haciendo ángulo recto, entonces el impulso del golpe será el máximo, mientras que si el movimiento viene oblicuamente, o, como solemos decir, sesgado, el golpe será bastante más débil; y cada vez más débil a medida que más oblicuo sea el movimiento. En un objeto situado de este modo, aunque sea de una materia durísima, no se llega a agotar y parar todo el impulso y movimiento del proyectil, el cual, resbalando, pasa de largo, continuando su movimiento, al menos durante cierto tiempo, a lo largo de la superficie del cuerpo que le opone resistencia. Todo lo que se ha demostrado hasta el momento acerca de la magnitud del impulso [*impeto*] del proyectil en el extremo de la parábola hay que entenderlo también con respecto a la percusión que tiene lugar sobre una línea que forma ángulo recto con relación a dicha parábola o a la tangente a la parábola en dicho punto. La razón está en que, aunque el movimiento esté compuesto de un movimiento horizontal y otro perpendicular, el impulso no será el máximo ni sobre el plano horizontal ni tampoco sobre el perpendicular, ya que es recibido por los dos en forma oblicua.

SAGR. Al mencionar V. S. estos golpes y estas percusiones me ha hecho recordar un problema o, mejor, un asunto de mecánica al cual ningún autor, que yo sepa, le ha dado solución alguna, y ni siquiera al menos cierta sugestión que atempere mi perplejidad o dé cierta tranquilidad a mi mente. Mi enorme estupor consiste en que no soy capaz de comprender de dónde proviene y de qué principio pueda depender esa inmensa fuerza y energía que opera en la percusión. De este modo, vemos que con un simple golpe de martillo, cuyo peso no excede de ocho o diez libras, se vencen resistencias que no cederían ante el peso de un cuerpo, el cual, sin percusión, produciría un impulso solamente oprimiendo, por muchos centenares de libras que pese tal cuerpo. Me gusta-

ría encontrar el modo de medir la fuerza de esta percusión. Por su parte, no creo que tal fuerza sea infinita, sino que pienso, más bien, que se la puede contrarrestar y controlar por medio de otras fuerzas de determinado peso [*gravità*] o por medio de palancas, tornillos u otros instrumentos de mecánica, los cuales sé que son capaces de multiplicar las fuerzas.

SALV. V. S. no se encuentra sólo en la sorpresa ante tal efecto ni en la oscuridad acerca de la causa de suceso tan impresionante. Estuve pensando, por mi parte, en este asunto durante cierto tiempo, pero lo único que conseguí fue aumentar mi confusión hasta que, finalmente, reuniéndome con nuestro [297] académico, recibí de él doble consolación. En primer lugar, me dijo cómo él también había estado durante mucho tiempo envuelto en las mismas tinieblas. En segundo lugar, me contó cómo después de gastado muchos miles de horas en especulaciones filosóficas, había llegado a obtener algunos conocimientos que se alejaban de nuestros más primitivos conceptos y que eran admirables dada su novedad. Y puesto que ahora sé que vuestra curiosidad es tal que escucharíais muy a gusto esas ideas que tanto se alejan de lo normalmente aceptado, no esperaré a que me lo pidáis, sino que os doy mi palabra de que, una vez que hayamos acabado la lectura de este tratado sobre los proyectiles, os explicaré todas esas fantasías, o, para decirlo con otras palabras, extravagancias que han quedado en mi memoria después de escuchar los razonamientos de nuestro académico. Entre tanto, continuemos con las proposiciones del autor.

PROPOSICIÓN V. PROBLEMA

En la prolongación del eje de una parábola dada, determinar un punto en su parte superior desde el cual un móvil, en su caída, describa esa misma parábola.

Sea la parábola *ab* [figura 116], cuya amplitud es *hb*, y *he* el eje prolongado. Se nos pide que encontremos en éste una altura desde la cual el móvil que desciende, una vez que ha adquirido el impulso [*impetum*] en *a* y ha cambiado de dirección a lo largo de la horizontal, habrá de describir la parábola *ab*. Trácese la línea horizontal *ag*, la cual será paralela a *bh*, haciendo, por otra parte, que *af* sea igual a *ah*, trácese la línea recta *bf*, la cual será tangente la parábola en *b* y cortará a la línea horizontal *ag* en *g*. Afirmo que es *e* el punto más alto que buscamos, desde el cual el móvil que cae partiendo del reposo en *e* y en el caso de que el impulso [*impetum*] adquirido en el punto *a* se cambie en la dirección de la horizontal, y unido al impulso adquirido en *h* al caer desde el reposo en *a*, describirá la parábola *ab*. Y es que si suponemos que *ea* es la medida del tiempo de la caída desde *e* hasta *a*, así como del impulso [*impetus*] adquirido en *a*, entonces *ag* (es decir, la media proporcional entre *ea* y *af*) representará el tiempo y el impulso [*impetus*] de la caída desde *f* hasta *a*, o lo que es lo mismo, de *a* a *h*. Y puesto que el móvil que cae desde *e* durante el tiempo *ea*, con el impulso

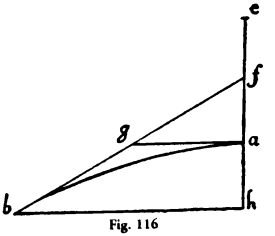


Fig. 116

adquirido en *a*, atravesará con movimiento uniforme una distancia horizontal que es el doble de *ea*, se sigue que el móvil también atravesará, con el mismo impulso y durante el tiempo *ag*, una distancia que es el doble de *ga*, es decir, *bh* (ya que las distancias recorridas con el mismo movimiento uniforme están entre sí como los tiempos de sus respectivos movimientos). De la misma manera, si el movimiento es perpendicular y parte del reposo, entonces el móvil, durante el mismo intervalo de tiempo *ga*, recorrerá la distancia *ah*, siendo recorrida su amplitud *hb* y la altura *ah* también en el mismo tiempo. [298] En consecuencia, la parábola *ab* será descrita por un móvil que caiga desde la altura *e*, que era lo que se nos pedía.

COROLARIO

Se sigue de aquí que la mitad de la base, es decir, la mitad de la amplitud de una semiparábola (que es la cuarta parte de la amplitud de toda la parábola) es la media proporcional entre su altura y aquella elevación, desde la cual el móvil describe dicha parábola.

PROPOSICIÓN VI. PROBLEMA

Dadas la elevación y la altura de una parábola, encontrar su amplitud.

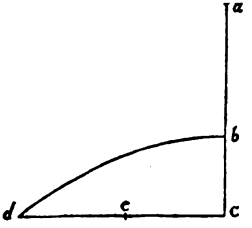


Fig. 117

Sea [figura 117] *ac* perpendicular a la línea horizontal *dc* y en ésta estén dadas la altura, *dc*, y la elevación *ba*. El problema consiste en encontrar en la línea horizontal *cd* la amplitud de la semiparábola descrita a partir de la elevación *ba* y con la altura *bc*. Tomemos la media proporcional entre *cb* y *ba*. Supongamos, por otro lado, que *cd* es el doble de la media proporcional. Afirmo que *cd* es la amplitud que buscamos. Esto se hace evidente por el corolario precedente.

TEOREMA. PROPOSICIÓN VII

Entre los proyectiles que describen semiparábolas de la misma amplitud se requiere menos impulso [impetus] *en aquel que describe una parábola cuya amplitud es el doble de la propia altura que no en cualquier otro proyectil.*

Sea *bd* [figura 118] una semiparábola cuya amplitud, *cd*, es el doble de su altura, *cb*; en su eje, prolongado hacia arriba, pongamos *ba* igual a la altura *be*. Únanse *a* y *d* y sea esta línea tangente a la parábola en *d*, mientras que la línea horizontal *be* la cortará en *e*. Hagamos *be* igual a *bc* o, lo que es lo mismo, a *ba*. Es evidente que esta parábola será descrita por un proyectil, cuyo impulso horizontal y uniforme es aquel que adquiriría en *b* un móvil que cayese desde el reposo en *a*; por su parte, el impulso natural des-

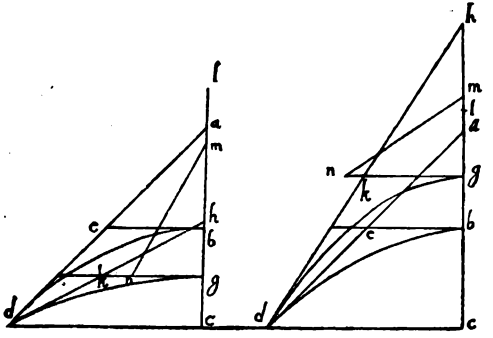


Fig. 118

cendente será el de un móvil que desciende hasta *c* desde el reposo en *a*. De todo esto se sigue que el impulso compuesto de ambos y que va a parar a *d*, [299] tangente *hd*, que corta a la horizontal trazada desde *g* en *k*. Hagamos que así como *hg* es a *gk*, del mismo modo es *kg* a *gl*. De lo demostrado anteriormente se sigue que el móvil que cae desde la altura *gl* describirá la parábola *gd*.

Sea *gm* la media proporcional entre *ab* y *gl*; entonces *gm* representará el tiempo y la intensidad [*momentum*] o el impulso [*impetus*] adquirido en el punto *g* por un móvil que cae desde *l* (puesto que se ha supuesto que *ab* es la medida del tiempo y del impulso [*impetus*]). Tomemos una vez más una media proporcional, *gn*, entre *be* y *cg*. Dicha media proporcional será la medida tanto del tiempo como del impulso [*impetus*] adquirido en *c* por el móvil que cae desde *g*. Si unimos ahora *m* y *n*, la línea resultante será la medida del impulso [*impetus*] del proyectil que atraviesa la parábola *bd* en el momento que toca el extremo *d*. Digo que tal impulso es mayor que el del proyectil que atraviesa la parábola *bd* y cuya medida estaba dada por *ae*. Puesto que *gn* la hemos tomado como la media proporcional entre *bc* y *gd*, y dado que *bc* es igual *a be*, es decir, a *hg* (ya que cada una de ellas es la mitad de *dc*), se sigue que *cg* es a *gn* como *gn* es a *gk* y como *cg*, o también *hg* es a *gk* así el cuadrado de *ng* al cuadrado de *kg*. De modo que como *hg* es a *gk* así, por construcción, *gk* es a *gl*. En consecuencia, *ng es* al cuadrado de *gk* como *kg* es a *gl*. Ahora bien, *kg* es a *gl* como el cuadrado de *kg* es al cuadrado de *gm*, ya que *gm* es la media proporcional entre *kg* y *gl*. Por tanto, los tres cuadrados de *ng*, *kg* y *gm* forman una proporción continua. Por su parte, la suma de los dos extremos *ng* y *gm*, es decir, el cuadrado de *mn*, es mayor que el doble del cuadrado de *gk*, mientras que el cuadrado de *ae* es el doble de *gk*. Se sigue, por tanto, que el cuadrado de *mn* es mayor que el cuadrado de *ae* y que la línea *mn* es mayor que la línea *ea*, que era lo que había que demostrar.

[300] COROLARIO

De lo dicho se deduce, recíprocamente, que en un proyectil lanzado desde el extremo *d* se requiere un impulso menor para describir la parábola *db* que el que sería necesario para describir cualquier otra semiparábola con una altura mayor o menor que la altura de la semiparábola *db*, cuya tangente *ad* forma, con respecto a la horizontal, un ángulo semirrecto. Estando así las cosas, resulta que si desde el extremo *d* se lanzan proyectiles que tengan el mismo impulso [*impetu*], sólo que con alturas diferentes, entonces el alcance máximo, es decir, la semiparábola o parábola entera de amplitud máxima, será aquella que se obtenga con una elevación de cuarenta y cinco grados. Todas las otras, por su parte, hechas con ángulos mayores o menores, habrán de ser menores.

SAGR. La fuerza de las demostraciones que fluyen necesariamente, como ocurre sólo en las matemáticas, me llena de asombro y de satisfacción. Yo ya sabía, por las explicaciones recibidas de los artilleros, que entre todos los disparos de trayectoria curva [*di volata*] que se hacen en artillería o con morteros, el de máximo alcance, es decir, aquel que manda a mayor distancia la bala, es el que se obtiene cuando la elevación tiene cuarenta y cinco grados o, como ellos dicen, del sexto punto de la escuadra. A pesar de todo esto, entender por qué ocurre así supera infinitamente la información recabada de otros u obtenida por la acumulación de repetidas experiencias.

SALV. Lo que V. S. dice es muy cierto. El conocimiento de un solo efecto, obtenido a través del descubrimiento de su causa, nos abre las puertas de la comprensión y atestigua la existencia de otros efectos sin necesidad de recurrir a la experiencia, como ocurre, precisamente, en el caso que estamos tratando. Así, una vez que de la mano de la demostración tenemos la certeza de que entre todos los disparos de armas de tiro curvo, el de mayor alcance es aquel cuya elevación tiene cuarenta y cinco grados, el autor nos demuestra lo que tal vez con la sola experiencia no se había observado y que es lo siguiente: por lo que se refiere a los otros disparos, aquellos que superan o no llegan, según ángulos iguales, a los cuarenta y cinco grados, tienen todos el mismo alcance, de modo que de las balas disparadas desde la horizontal, una, por ejemplo, con una elevación de siete puntos y la otra con una elevación de cinco, tocarán el horizonte a la misma distancia, y lo mismo sucederá con disparos de ocho, cuatro, nueve, tres, etc., puntos. Pasemos seguidamente a escuchar la demostración.

[301] TEOREMA. PROPOSICIÓN VIII

La amplitud de las parábolas descritas por los proyectiles con el mismo impulso [impetu] *y según elevaciones que superan o no llegan, según ángulos iguales, al ángulo semirrecto, son iguales entre sí.*

En el triángulo *mcb* [figura 119] sea el lado horizontal *bc* igual al perpendicular *cm*. De este modo, el ángulo *mcb* será un ángulo semirrecto; prolonguemos la línea *cm* hasta *d* y debajo de la diagonal *mb* formemos en *b* dos ángulos iguales: *mbe* y *mbd*. Hay que demostrar que en el caso de dos parábolas descritas por dos proyectiles desde el extremo *b* con el mismo impulso [*impetu*], uno con el ángulo *ecb* y el otro con el *dbc*, las amplitudes de dichas parábolas son iguales. Dado que el ángulo externo *bmc* es igual a la suma de los ángulos internos *mdb* y *dbm*, el ángulo *mbc* se puede también equiparar

a los anteriores. Y es que si en vez del ángulo *dbm* ponemos el ángulo *mbe*, el ángulo *mbe* será igual a los dos ángulos *mbe* y *bdc*. Si sustraemos ahora el ángulo común *mbe*, tenemos que el que queda, *dbc*, es igual al otro restante, *ebc*. De aquí que los triángulos *dcb* y *bce* son semejantes. Dividamos por la mitad las líneas *de* y *ec* por los puntos *h* y *f*, respectivamente; tracemos ahora las líneas *hi* y *fg*, paralelas a la horizontal *cb*; y como *dh* es a *hi* así *ih* es a *hl*, por lo que el triángulo *ihl* será semejante al triángulo *ihd*, siendo también semejante al triángulo *egf*. Como quiera que *ih* y *gf* son iguales (ya que cada una de ellas es la mitad de *bc*), se sigue que *fe*, esto es, *fc*, es igual a *hl*; si añadimos, además, a cada una de ellas la parte común *fh*, resultará que *ch* es igual a *fi*. Así pues, si suponemos que una semiparábola es descrita a través de los puntos *h* y *b*, siendo su altura *hc* y su elevación [*sublimitas*] *hl*, su amplitud será *cb*. Esta es el doble de *hi*, puesto que *hi* es la media proporcional entre *dh o ch* y *hl*. La línea *db* es tangente a la parábola al ser *ch* igual a *hd*. *Si* imaginamos una vez más una parábola descrita a través de los puntos *f* y *b* con una elevación *fl* y una altura *fc*, siendo la media proporcional de ambas *fg*, que es la [302] mitad de la horizontal *cb*, entonces, lo mismo que antes, será *cb* su amplitud, siendo la línea *eb* tangente en *b* a dicha amplitud, puesto que *ef* y *fc* son iguales. Pero los dos ángulos *dbc* y *ebc* (es decir, las elevaciones de aquéllas) distan igualmente de un ángulo de cuarenta y cinco grados, luego se hace evidente lo que queríamos demostrár.

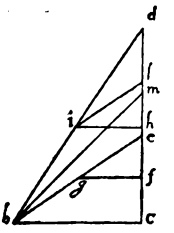


Fig. 119

TEOREMA. PROPOSICIÓN IX

Las amplitudes de dos parábolas son iguales cuando tanto sus alturas como sus elevaciones son inversamente proporcionales.

La altura *gf* [figura 120] de la parábola *fh* guarda una proporción, con respecto a la altura *cb* de la parábola *bd*, como la elevación *ba* con la elevación *fe*. Afirmo que la amplitud *hg* es igual a la amplitud *dc*. Y es que si la primera de estas magnitudes, *gf*, tiene con respecto a la segunda, *cb*, la misma proporción que la tercera, *ba*, a la cuarta, *fe*, entonces el rectángulo *gfe* de la primera y de la cuarta será igual al rectángulo *cba* de la segunda y de la tercera. En consecuencia, los cuadrados que son iguales a estos rectángulos son iguales entre sí. Ahora bien, el cuadrado de la mitad de *gh* es igual al rectángulo *gfe*, y el cuadrado de la mitad de *cd* es igual al rectángulo *cba*, luego tales cuadrados y sus lados, así como el doble de dichos lados, serán iguales. Ahora bien, estos últimos son las amplitudes *gh* y *cd*, por lo que queda probada la proposición.

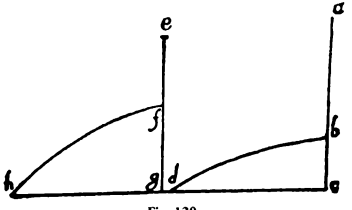


Fig. 120

LEMA PREVIO A LA PROPOSICIÓN SIGUIENTE

Si una línea recta se corta por un punto cualquiera, los cuadrados de las medias proporcionales entre la línea entera y sus partes son iguales al cuadrado de la línea completa.

Sea la línea *ab* cortada en el punto *c* [figura 121]. Afirmo que los cuadrados de las medias proporcionales entre toda la línea *ab* y las pares *ac* y *cb*, tomados conjuntamente, son iguales al cuadrado de toda la línea *ab*. Es esto evidente si describimos un semicírculo por encima de toda la línea *ab* y trazamos la perpendicular *cd* desde *c*, para [303] unir después *da* y *db*. Puesto que *da* es la media proporcional entre *ab* y *ac*, mientras que *db* es media proporcional entre *ab* y *bc*, y dado que los cuadrados de las líneas *da* y *db*, tomados conjuntamente, son iguales al cuadrado de toda la *ab* en el caso de que el ángulo *adb* esté inscrito en un semicírculo, se sigue lo que queríamos demostrar.

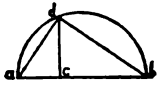


Fig. 121

TEOREMA. PROPOSICIÓN X

El impulso [impetus] *o intensidad de velocidad* [momentum] *de una semiparábola cualquiera es igual a la intensidad de velocidad* [momentum] *de un móvil que caiga naturalmente según una perpendicular a la línea horizontal, cuya longitud sea igual a la línea compuesta por la elevación y la altura de la semiparábola.* *

Sea *ab* [figura 122] una semiparábola cuya elevación es *da*, mientras que su altura es *ac*, componiendo ambas la perpendicular *dc*. Afirmo que el impulso [*impetus*] de la semiparábola en *b* es igual a la intensidad de velocidad [*momentum*] de un móvil que descendiera libremente desde *d* hasta *c*. Hagamos que la misma *de* sea la medida tanto del tiempo como del impulso [*impetus*] y sea *cf* la media proporcional entre *cd* y *da*, mientras que, por otro lado, *ce* será la media proporcional entre *de* y *ca*. En tal caso, *cf* será la medida de tiempo y de la intensidad de velocidad [*momentum*] del móvil que descienda por *da* desde el reposo en *d*, mientras que *ce* lo será del tiempo de la intensidad de velocidad [*momentum*] de la caída a través de *ac*, desde el reposo en *a*. La diagonal *ef*, por su parte, representará la intensidad de velocidad [*momentum*] que resulta de ambas; dicho de otra forma: la intensidad de velocidad en el punto terminal *b* de la semiparábola. Y puesto que *de* ha sido cortada en un punto cualquiera, *a*, y *cf* y *ce*, son las medias proporcionales entre todo *cd* y sus partes, *da* y *ac*, se sigue que la suma de los cuadrados de éstas será igual al cuadrado de todo *cd* entero. Ahora bien, por el lema anterior sabemos que el cuadrado de *ef* es igual también a la suma de los cuadrados que acabamos de considerar, luego la línea *ef* será igual a *dc*. En

Fig. 122

* En la mecánica moderna, este conocido teorema adopta la forma siguiente: *La velocidad de un proyectil en cualquier punto es la producida por una caída desde la directriz.*

consecuencia, las intensidades de velocidad [*momento*] a través de *de* y de la semiparábola *ab* son iguales en *c* y en *b*, que era lo que había que demostrar.

COROLARIO

De lo dicho resulta que los impulsos [*impetus*] de todas las semiparábolas, en las que la suma de la altura con la elevación respectiva es siempre la misma, son iguales entre sí.

PROBLEMA. PROPOSICIÓN XI

Dados el impulso [impetu] *y la amplitud de una semiparábola, se pide encontrar su altura.*

Sea representado un impulso [*impetus*] dado [figura 123] por la línea perpendicular *ab*, y la amplitud por medio de la línea horizontal *bc*. Se nos pide que encontremos la elevación de aquella [304] semiparábola cuyo impulso sea *ab* y su amplitud *bc*. Sabemos ya por lo que antes hemos demostrado que la mitad de la amplitud *bc* es la media proporcional entre la altura y la elevación de la semiparábola, cuyo impulso es igual, según lo expuesto en la proposición precedente, al impulso del móvil que cae por toda la distancia *ab*, partiendo del reposo en *a*. Por tanto, la línea *ba* debe cortarse de tal forma que el rectángulo formado por sus partes sea igual al cuadrado de la mitad de *bc*, o sea, a *bd*. Se sigue de aquí que es necesario que *db* no exceda a la mitad de *ba*, ya que de todos los rectángulos formados por partes de una línea recta el más grande lo obtenemos cuando la línea entera se divide en partes iguales. Así pues, dividamos por la mitad la línea *ba* en el punto *e*. Si *ba* fuese igual a *be*, entonces el problema quedaría resuelto, ya que la altura de la parábola sería *be*, mientras que la elevación sería *ea*. (Podemos observar que, como ya se demostró antes, de todas las parábolas descritas con un impulso dado, aquella cuya elevación sea de cuarenta y cinco grados tendrá la mayor amplitud.)

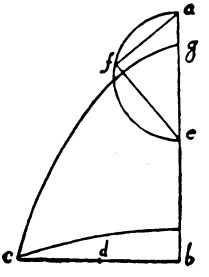


Fig. 123

Supongamos que *bd* es menor que la mitad de *ba*, la cual ha de ser dividida de tal modo que el rectángulo contenido bajo sus partes sea igual al cuadrado de *bd*. Sobre *ea* describamos un semicírculo, en el cual, desde *a*, tracemos la cuerda *af*, igual a *bd*; unamos *fe*, haciéndola igual a *eg*. Entonces, el rectángulo *bga* más el cuadrado de *e*, será igual al cuadrado de *ea* y, por tanto, será también igual a la suma de los cuadrados *af* y *fe*. Si sustraemos ahora los cuadrados *ge* y *fe*, que son iguales, entonces resta el rectángulo *bga*, que es igual al cuadrado de *af*, es decir, a *bd*; la línea *bd*, por su parte, es la media proporcional entre *bg* y *ga*; se hace evidente, por lo dicho, que la semiparábola cuya amplitud es *bc* y su impulso *ab* tiene como altura *bg* y como elevación *ga*. Si suponemos que la parte inferior *bi* es igual a *ga*, entonces será aquélla la altura, mientras que *ia* será la elevación de la semiparábola *ic*. Con lo que hemos demostrado hasta aquí podemos resolver lo siguiente:

PROBLEMA. PROPOSICIÓN XII

Calcular y ordenar en una tabla las amplitudes de todas las semiparábolas descritas por proyectiles lanzados con el mismo impulso [impetu].

De lo que se ha demostrado [figura 124] ya, se sigue que cuando la suma de la altura y de la elevación es siempre un mismo segmento vertical, las parábolas son descritas por proyectiles que tienen el mismo impulso [*impetu*]. En consecuencia, estos segmentos verticales [305] deben encontrarse entre las mismas líneas paralelas horizontales. Supongamos, pues, que *eb* represente una línea horizontal y *ba* una línea perpendicular de la misma longitud; tracemos la diagonal *ac*; el ángulo *aeb* será un ángulo semirrecto, esto es, de cuarenta y cinco grados. Dividamos por la mitad la perpendicular *ba* en el punto *d*; entonces, la semiparábola *de* será aquella que queda determinada por la elevación *ad* y la altura *db*, mientras que su impulso en *c* es el mismo que sería adquirido en el punto *b* por un móvil que cayese a través de la línea *ab* desde el reposo en *a*. Si trazamos ahora la línea *ag*, paralela a *bc*, entonces la suma de la altura y de la elevación de todas las semiparábolas restantes cuyo impulso fuese idéntico al que acabamos de aludir será igual a la distancia entre las paralelas *ag* y *bc*. Además, como ya se ha demostrado que las amplitudes de dos semiparábolas son iguales cuando sus tangentes distan igualmente, tanto por arriba como por abajo, de la elevación de cuarenta y cinco grados, se sigue que el cálculo que hagamos para las elevaciones mayores servirá también para las menores. Tomemos como la amplitud mayor de una parábola, cuyo ángulo de elevación es de cuarenta y cinco grados, el número diez mil, 10.000; ésta será, entonces, la longitud de la línea *ba* y la amplitud de la semiparábola *bc*. Hemos elegido este número 10.000 porque en estos cálculos emplearemos una tabla de tangentes en la que será el valor de la tangente de cuarenta y cinco grados. Yendo ya a nuestro asunto: tracemos la línea recta *ce*, formando el ángulo *ecb* (que es agudo) mayor que el ángulo *acb*. Se trata de trazar una semiparábola a la que sea tangente la línea *ec* y cuya elevación más la altura sea igual a la distancia *ba*. De la tabla de tangentes, tomemos la longitud de la tangente* *be* para el ángulo dado *bce*. Sea *f* el punto medio de *be*. Búsquese, después, la tercera proporcional de *bf* y *bi* (que es la mitad de *bc*) y que será [306], necesariamente, mayor que *fa*.** Llamémosla *fo*. Hemos descubierto que, en una parábola inscrita en el triángulo *ecb* y teniendo como tangente a *ce*, la amplitud es *cb*, la altura es *bf* y la elevación es *fo*. Ahora bien, la longitud entera, *bo*, excede a la dis-

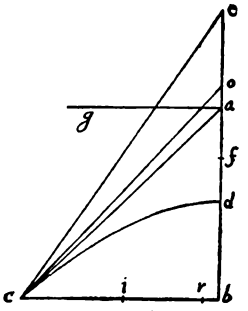


Fig. 124

* El lector observará que la palabra «tangente» es utilizada aquí en un sentido diferente que en la frase precedente. La «tangente *ec*» es una línea que toca la parábola en *c*, pero la «tangente *eb*» es el lado del triángulo rectángulo opuesto al ángulo *ecb*, una línea cuya longitud es proporcional al valor numérico de la tangente de este ángulo.

** Este hecho se demuestra en el tercer párrafo de los que siguen.

tancia entre las paralelas *ag* y *cb*, mientras que nuestro problema consiste, por el contrario, en que sea igual a esa distancia, puesto que tanto esta parábola como la parábola *de* son descritas por proyectiles disparados con el mismo impulso desde *c*. Así pues, hay que encontrar otra parábola semejante a ésta (ya que son innumerables las parábolas mayores y menores semejantes entre sí que pueden describirse dentro del ángulo *bce*) y cuya elevación más altura (homóloga de *bc*) sea igual a *ba*. Por tanto, hagamos que *ob* sea a *ba* como la amplitud *bc* es a *br*; de este modo habremos encontrado un *cr* que será la amplitud de la semiparábola en la cual *bce* es el ángulo de elevación, y esta elevación sumada a la altura es igual al espacio contenido entre las paralelas *ga* y *gb*, que era lo que se buscaba. El proceso, por tanto, es como sigue: se traza la tangente de un ángulo dado, *bce*; se toma la mitad de esta tangente y se añade a ésta *fo*, que es la tercera proporcional de la mitad de la tangente y de la mitad de *bc*. Hagamos, después, que *ob* sea a *ba* como *bc* es a *cr*, que es la amplitud que buscamos. Pongamos un ejemplo.

Supongamos que el ángulo *ecb* tiene cincuenta grados; su tangente será 11.918, mientras que su mitad, esto es, *bf*, 5.959; la mitad de *bc* será 5.000; la tercera proporcional de estas mitades es, por su parte, 4.195, que, sumada a *bf*, da el valor de 10.154 para *bo*. Hagamos, una vez más, que como *ob* es a *ba*, es decir, como 10.154 es a 10.000, así *bc*, o 10.000 (siendo ambas tangentes de un ángulo de cuarenta y cinco grados), sea a la otra. Tendremos así que *rc* es la amplitud que buscábamos y que tiene como valor 9.848, siendo la máxima amplitud *bc*, o lo que es lo mismo, 10.000. Las amplitudes de las parábolas íntegras son el doble que éstas; o sea, 19.696 y 20.000. Es ésta también la amplitud de una parábola cuya elevación es de cuarenta grados, ya que difiere de uno de cuarenta y cinco en la misma cantidad.

SAGR. Para entender completamente esta demostración, lo único que me falta es saber por qué la tercera proporcional de *bf* y *bi* es (según el autor) mayor, necesariamente, que *fa*.

[307] SALV. Esta consecuencia me parece que se puede deducir de la manera siguiente: el cuadrado de la media de tres líneas proporcionales es igual al rectángulo formado por las otras dos. En consecuencia, el cuadrado de *bi*, o bien de *bd*, que es igual a *bi*, debe ser igual al rectángulo formado por *fb* y la tercera proporcional correspondiente. Esta tercera proporcional es necesario que sea mayor que *fa*, ya que el rectángulo formado por *bf* en *fa* es menor que el cuadrado *bd* en una cantidad que es igual al cuadrado de *df*, como lo demuestra Euclides en la quinta proposición del libro II. Además, debemos notar que el punto *f*, que divide la tangente por la mitad, caerá muchas veces por encima del punto *a*, pero sólo una vez en el mismo punto *a*; en estos casos es evidente que la tercera proporcional de la mitad de la tangente y de la *bi* (que es la elevación [*sublimità*]) cae toda por encima de *a*. Pero el autor ha escogido un caso en el que no era patente que dicha tercera proposición fuese siempre mayor que *fa*, de modo que, prolongada por encima del punto *f*, se extendiese más allá que la paralela *ag*. Continuemos ahora nuestra exposición.

No estará de más, con ayuda de la siguiente tabla, construir otra que dé las alturas de las mismas semiparábolas descritas por proyectiles lanzados con el mismo impulso [*impetu*]. La construcción es como sigue:

[308] *Amplitudes de las semiparábolas descritas con el mismo impulso*

Grados de elevación		*Gr.*
45	10000	
46	9994	44
47	9976	43
48	9945	42
49	9902	41
50	9848	40
51	9782	39
52	9704	38
53	9612	37
54	9511	36
55	9396	35
56	9272	34
57	9136	33
58	8989	32
59	8829	31
60	8659	30
61	8481	29
62	8290	28
63	8090	27
64	7880	26
65	7660	25
66	7431	24
67	7191	23
68	6944	22
69	6692	21
70	6428	20
71	6157	19
72	5878	18
73	5592	17
74	5300	16
75	5000	15
76	4694	14
77	4383	13
78	4067	12
79	3746	11
80	3420	10
81	3090	9
82	2756	8
83	2419	7
84	2079	6
85	1736	5
86	1391	4
87	1044	3
88	698	2
89	349	1

Alturas de las semiparábolas cuyo impulso es el mismo

Gr.	*Grados de elevación*		*Gr.*
1	3	46	5173
2	13	47	5346
3	28	48	5523
4	50	49	5698
5	76	50	5868
6	108	51	6038
7	150	52	6207
8	194	53	6379
9	245	54	6546
10	302	55	6710
11	365	56	6873
12	432	57	7033
13	506	58	7190
14	585	59	7348
15	670	60	7502
16	760	61	7649
17	855	62	7796
18	955	63	7939
19	1060	64	8078
20	1170	65	8214
21	1285	66	8346
22	1402	67	8474
23	1527	68	8597
24	1685	69	8715
25	1786	70	8830
26	1922	71	8940
27	2061	72	9045
28	2204	73	9144
29	2351	74	9240
30	2499	75	9330
31	2653	76	9415
32	2810	77	9493
33	2967	78	9567
34	3128	79	9636
35	3289	80	9698
36	3456	81	9755
37	3621	82	9806
38	3793	83	9851
39	3962	84	9890
40	4132	85	9924
41	4302	86	9951
42	4477	87	9972
43	4654	88	9987
44	4827	89	9998
45	5000	90	10000

[309] PROBLEMA. PROPOSICIÓN XIII

Dadas las amplitudes de las semiparábolas tal como están ordenadas en la tabla precedente y suponiendo que es común el impulso con el que se describe cada una de ellas, encontrar las respectivas alturas.

Sea *bc* la amplitud dada; el impulso, por su parte, que habrá que [figura 125] entender como siendo siempre el mismo, estará representado por *ob*, que no es otra cosa sino la suma de la altura y la elevación. Se nos pide que encontremos y determinemos la altura. Conseguiremos nuestro objetivo si dividimos *bo* de forma tal que el rectángulo contenido por sus partes sea igual al cuadrado de la mitad de la amplitud *bc*. Sea *f* el punto que designa tal división, mientras que *d* e *i* son los puntos en los que quedan divididas por la mitad *ob* y *bc*, respectivamente. El cuadrado de *ib* es, por tanto, igual al rectángulo *bfo*; pero el cuadrado de *do* es igual a la suma del rectángulo *bfo*, más el cuadrado de *fd*. En consecuencia, si del cuadrado de *do* se sustrae el cuadrado de *bi*, el cual es igual al rectángulo *bfo*, lo que quedará será el cuadrado de *fd*. La altura que buscamos, *bf*, se obtendrá añadiendo al lado *df* la línea *bd*. El proceso tiene lugar como sigue: del cuadrado de la mitad de *bo*, que nos es conocido, quítese el cuadrado de *bi*, que también es conocido; tómese la raíz cuadrada de lo que resta y añádase a esto la longitud conocida *db*; de este modo encontraremos la altura que buscamos, *bf*.

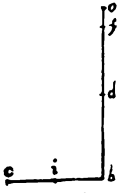


Fig. 125

Ejemplo: se trata de encontrar la altura de una semiparábola descrita con un ángulo de elevación de cincuenta y cinco grados. Según la tabla precedente, la amplitud es 9.396, siendo la mitad 4.698 y su cuadrado 22.071.204. Si se sustrae esto del cuadrado de [310] la mitad de *bc*, el cual es siempre el mismo, esto es, 25.000.000, el resto es 2.928.796; cuya raíz cuadrada es 1.710 aproximadamente. Añadiendo ésta a la mitad de *bo*, es decir, a 5.000, obtenemos 6.710, que será la altura de *bf*.

No estará de más presentar una tercera tabla que contenga las alturas y las elevaciones de las semiparábolas que tengan la misma amplitud.

SAGR. Con mucho gusto la veré, ya que a través de ella podré conocer la diferencia de los impulsos y de las fuerzas que se requieren para lanzar el proyectil a la misma distancia con disparos que se suelen llamar de tiro curvo [*di volata*]. Esta diferencia, según creo, varía enormemente según las distintas elevaciones. Así, por ejemplo, si uno quisiera emplear una elevación de tres o cuatro grados, o de 87 u 88, para hacer caer la bala allí donde fue lanzada con la elevación de 45 grados (con la que se ha demostrado que se obtiene el impulso mínimo), pienso que se requiriría un exceso de fuerza inmenso.

SALV. V. S. tiene mucha razón; veréis que para ejecutar esta operación en todos los ángulos de elevación hay que andar a grandes zancadas hacia un impulso infinito. Veamos ahora la construcción de la tabla (página siguiente).

[311] *Tabla de las alturas y elevaciones de las semiparábolas cuya amplitud sea la misma; es decir, 1.000 partes se calculan para cada grado de tiro*

Gr.	*Altura*	*Elevación*	*Gr.*	*Altura*	*Elevación*
1	87	286533	46	5177	4828
2	175	142450	47	5363	4662
3	262	95802	48	5553	4502
4	349	71531	49	5752	4345
5	437	57142	50	5959	4196
6	525	47573	51	6174	4048
7	614	40716	52	6399	3906
8	702	35587	53	6635	3765
9	792	31565	54	6882	3632
10	881	28367	55	7141	3500
11	972	25720	56	7413	3372
12	1063	23518	57	7699	3247
13	1154	21701	58	8002	3123
14	1246	20056	59	8332	3004
15	1339	18663	60	8600	2887
16	1434	17405	61	9020	2771
17	1529	16355	62	9403	2658
18	1624	15389	63	9813	2547
19	1722	14522	64	10251	2438
20	1820	13736	65	10722	2331
21	1919	13024	66	11230	2226
22	2020	12376	67	11779	2122
23	2123	11778	68	12375	2020
24	2226	11230	69	13025	1919
25	2332	10722	70	13237	1819
26	2439	10253	71	14521	1721
27	2547	9814	72	15388	1624
28	2658	9404	73	16354	1528
29	2772	9020	74	17437	1433
30	2887	8659	75	18660	1339
31	3008	8336	76	20054	1246
32	3124	8001	77	21657	1154
33	3247	7699	78	23523	1062
34	3373	7413	79	25723	972
35	3501	7141	80	28356	881
36	3633	6882	81	31569	792
37	3768	6635	82	35577	702
38	3906	6395	83	40222	613
39	4049	6174	84	47572	525
40	4196	5959	85	57150	437
41	4346	5752	86	71503	349
42	4502	5553	87	95405	262
43	4662	5362	88	143181	174
44	4828	5177	89	286499	87
45	5000	5000	90	infinita	

[312] PROPOSICIÓN XIV

Determinar, para cada grado de tiro, la altura y la elevación de las semiparábolas que tengan la misma amplitud.

Obtendremos todas por medio de un procedimiento sencillo. En efecto, suponiendo que la amplitud de la semiparábola sea siempre de 10.000 partes, entonces la mitad de la tangente dará, para cualquier grado de tiro, la altura respectiva. Así, por poner un ejemplo, en una semiparábola cuyo ángulo sea de 30 grados, mientras que su amplitud es de 10.000 partes, como se ha supuesto, la altura será 2.887; tal es, efectivamente, la medida aproximada de la mitad de la tangente. Una vez que se ha encontrado la altura, obtendremos la elevación de la siguiente manera: puesto que se ha demostrado que la mitad de la amplitud de una semiparábola es la media proporcional entre la altura y la elevación, habiéndose encontrado ya la altura y siendo la mitad de la amplitud siempre la misma, es decir, 5.000 partes, habrá que dividir el cuadrado de esta última por la altura dada, y el resultado será la elevación que buscamos. En el ejemplo puesto teníamos que la altura era 2.887; ahora bien, el cuadrado de 5.000 partes es 25.000.000, el cual, dividido por 2.887, da, aproximadamente, para la elevación que estamos buscando, 8.659.

SALV. Se ve aquí, pues, ante todo, lo cierto que es la idea que más arriba propusimos: que en los distintos ángulos de elevación, cuanto mayor es la desviación de la media, sea ésta por arriba o por abajo, tanto mayor es el impulso y la fuerza [*violenza*] que se necesita para lanzar el proyectil a la misma distancia. Y es que, dado que el impulso es resultado de dos movimientos, uno horizontal y uniforme, mientras que el otro es perpendicular y naturalmente acelerado, y puesto que la suma de la altura y la elevación [*sublimità*] representa dicho impulso, se ve, por la tabla precedente, que tal suma es el mínimo para una elevación de cuarenta y cinco grados cuando la altura y la elevación son iguales, es decir, 5.000 cada una y 1.000 la suma de ambas. De modo que si tratáramos de encontrar otra altura que fuese mayor, de 50 grados, por ejemplo, entonces nos encontraremos que la altura es 5.959 y la elevación 4.196, siendo la suma de ambos 10.155. Del mismo modo, nos encontraremos con que es éste precisamente el valor del impulso que se desarrolla con un ángulo de tiro de 40 grados, ya que tanto uno como otro se alejan lo mismo de la media. Debemos observar, en segundo lugar, que mientras que impulsos iguales se requieren para cada uno de los dos ángulos que sean equidistantes de la media, nos encontramos con una inversión interesante: la altura y la elevación de los ángulos más elevados corresponden inversamente a la elevación y altura de los ángulos menores. Así, en el ejemplo precedente, con [313] un ángulo de cincuenta grados, la altura es 5.959 y la elevación 4.196, mientras que con un ángulo de cuarenta grados ocurre, inversamente, que la altura es 4.196 y la elevación 5.959. Lo mismo ocurre, sin diferencia alguna, en todos los casos restantes, aunque, para escapar de la aridez de tanto cálculo, no se han tenido en cuenta algunas fracciones, las cuales son de poca importancia en comparación con números tan grandes.

SAGR. Me estoy dando cuenta que, por lo que se refiere a los dos impulsos, el horizontal y el perpendicular; cuanto más elevadas son las proyecciones, tanto menor es el horizontal y mayor el perpendicular. Por el contrario, cuando son menos elevadas es necesario que la fuerza del impulso sea horizontal, ya que el disparo debe alcanzar poca altura. Ahora bien, aunque entiendo perfectamente que en una elevación total de noventa grados no bastaría toda la fuerza del mundo para lanzar al proyectil con una

desviación de la perpendicular de un solo dedo, sino que ha de caer necesariamente en el mismo lugar donde se lanzó, no sería capaz, sin embargo, de afirmar con la misma convicción que en el caso de una elevación nula, esto es, en la línea horizontal, no hubiese una fuerza que sin ser infinita lanzase el proyectil a alguna distancia. Así, por ejemplo, una culebrina sería capaz, tal vez, de disparar una bala de hierro horizontalmente apuntando directamente al blanco [*di punto bianco*], como suele decirse, es decir, sin la más mínima elevación. Admito que en este caso me quedo en la duda. A no negar absolutamente el hecho me retrae otro fenómeno no menos extraño aparentemente, pero del que tengo la prueba necesaria y concluyente. Se trata de lo siguiente: es imposible estirar una cuerda de tal modo que permanezca absolutamente tensa y paralela al horizonte; el hecho es que siempre se afloja y se pliega, y no hay fuerza que sea capaz de mantenerla totalmente recta.

SALV. En el caso de la cuerda, señor Sagredo, cesará en vos la perplejidad acerca de tal extraño efecto, ya que tenéis la demostración; si consideramos el problema con más detenimiento, quizá encontremos alguna correspondencia entre los proyectiles y la cuerda. Parece que la curvatura de la trayectoria del proyectil resulta de las dos fuerzas, una de las cuales (que es la del arma) lo lanza horizontalmente, mientras que la otra (que es su propio peso) lo arrastra perpendicularmente hacia abajo. Pues bien, cuando se estira la cuerda nos encontramos tanto con las fuerzas de aquellos que tiran de ella horizontalmente como con el peso de la misma cuerda, que empuja de modo natural hacia abajo. Las circunstancias, pues, en los [314] dos casos, son muy similares. Y si otorgáis al peso de la cuerda un poder [*possanza*] y una energía [*energia*] capaces de contrarrestar y superar cualquier fuerza, por muy inmensa que sea, que la quiera estirar, ¿por qué querríais negársela al peso de la bala? He de deciros más aún, lo cual os provocará sorpresa y placer: una cuerda estirada que esté más o menos tensa, se curva según una línea que se aproxima mucho a una parábola. La semejanza es manifiesta si trazáis, en una superficie plana y perpendicular, una línea parabólica y la invertís después de forma que el vértice quede abajo y la base quede horizontal; colgando una cadena que se sostenga en los extremos de la base de dicha parábola, observaréis que moviendo más o menos dicha cadenilla, se va curvando y ajustándose a la parábola; la coincidencia con ésta será tanto más precisa cuanto menos curvatura tenga la parábola en cuestión; es decir, cuanto más estirada esté, de modo que en las parábolas descritas con una elevación menor de cuarenta y cinco grados, la cadena marcha sobre la parábola perfectamente [*quasi ad unguem*].

SAGR. Entonces, con una cadena que fuese muy fina, se podrían trazar en un momento muchas parábolas sobre una superficie plana.

SALV. Ciertamente, y con no poca utilidad como en seguida os diré.

SIMP. Pero antes de seguir adelante, me gustaría a mí también cerciorarme de aquella proposición de la que decía que poseéis una demostración que concluye necesariamente. Me refiero a la afirmación de que es imposible que fuerza alguna, por inmensa que sea, haga tensa una cuerda de modo que quede perfectamente recta y horizontal.

SAGR. Veremos si puedo recordar la demostración. Para entenderla señor Simplicio, es necesario que deis por supuesto lo que se constata en todos los instrumentos mecánicos, y esto no sólo porque lo dicte la experiencia, sino por consideraciones teóricas. Se trata de lo siguiente: la velocidad del móvil, aunque sea de una fuerza pequeña, puede superar la resistencia, por grande que sea, de un cuerpo que haya de ser movido lentamente, toda vez que la proporción de la velocidad del cuerpo que mueve a la lentitud de la

resistencia es mayor que la proporción de la resistencia del que debe ser movido a la fuerza del cuerpo que mueve.

SIMP. Es esto algo que yo conozco muy bien, ya que lo ha demostrado Aristóteles en sus *Cuestiones mecánicas*. Se ve también con toda claridad en la palanca y en la romana en donde una pesa que no pese más de cuatro libras elevará un peso de cuatrocientas con tal de que la distancia de tal peso al centro sobre el que rota la romana sea más de cien veces mayor [315] que la distancia del mismo centro a aquel punto del que cuelga el peso mayor. Sucede esto porque la pesa recorre, al caer, un espacio que es cien veces mayor que la distancia por la que sube, al mismo tiempo, el peso grande; es lo mismo que decir que la pequeña pesa se mueve con una velocidad que es más de cien veces mayor que la velocidad con la que se mueve el peso grande.

SAGR. Razonáis perfectamente y no dudaréis en aceptar que por pequeña que sea la fuerza del cuerpo que mueve, superará cualquier resistencia, con tal de que gane en velocidad más de lo que pierda en fuerza [*vigore*] y peso [*gravità*]. Volvamos, ahora, otra vez, al caso de la cuerda. Utilizando un pequeño diseño [figura 126] supongamos que la línea *ab*, que pasa a través de dos puntos fijos dados, *a* y *b*, tiene colgando de sus extremos, como veis, dos grandes pesos, *c* y *d*, los cuales, tirando de la cuerda con mucha fuerza, la hacen estar tensa y recta, ya que aquélla no es sino una simple línea sin peso [*gravità*] alguno. Pues bien, llegados a este punto, os he de hacer notar que si desde la mitad de la línea, que vamos a suponer que es el punto *e*, colgáis cualquier peso, por pequeño que sea, *h*, por ejemplo, entonces la línea *ab* cederá, e inclinándose hacia el punto *f*, y en consecuencia alargándose, obligará a los dos pesos grandes, *c* y *d*, a subir hacia arriba. Esto os lo he de demostrar de la siguiente manera: alrededor de los dos puntos *a* y *b*, tomados como centros, describiré dos cuadrantes, *eig* y *elm*. Dado que los dos radios *al* y *bl* son iguales a *ae* y *eb*, los restos *fi* y *fl* serán las cantidades de lo que exceden, al alargarse, las partes *af* y *fb* a *ae* y *eb*; en consecuencia, son los que determinarán las subidas de los pesos *c* y *d*, siempre y cuando, como [316] es lógico, el peso *h* hubiese podido caer hasta *f*. Esto ocurrirá si la línea *ef*, que representa el descenso de tal peso *h*, tiene una proporción con respecto a la línea *fi*, que es la que determina la subida de los dos pesos *c* y *d*, mayor que la proporción del peso [*gravità*] de ambos al peso [*gravità*] de *h*. Ahora bien, esto tendrá lugar tanto si el peso de *c* y *d* es el máximo que se pueda pensar como si el peso de *h* es mínimo, ya que el exceso de los pesos *c* y *d* sobre el peso de *h* no puede ser tan grande que el exceso de la tangente *ef* sobre el segmento de la secante *fi* no pueda ser proporcionalmente mayor aún. Esto lo probaremos así: tracemos un círculo cuyo diámetro sea *gai*; la misma proporción, por

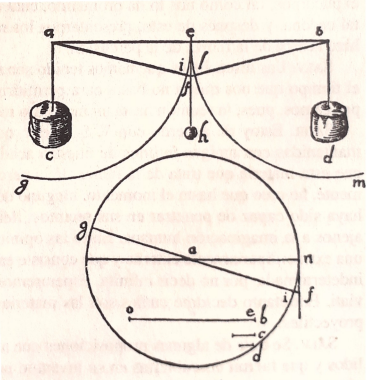


Fig. 126

otra, parte, que se dé entre el peso [*gravità*] de *c* y *d*, con respecto al peso [*gravite*] de *h*, se dará entre la línea *bo* y otra, que llamaremos *c*, siendo *d* menor que ella de forma que *bo* tenga una proporción mayor con respecto a *d* que con respecto a *c*. Tomemos la tercera proporcional de *ob* y *d*, a la cual llamaremos *be*; prolonguemos el diámetro *gi* de forma que *gi* sea a *if* como *oe* es a *eb*; desde el punto terminal *f* trácese la tangente *fi*. Puesto que por construcción *oe* es a *eb* como *gi* es a *if*, entonces, por composición de las proporciones [*componendo*], *ob* será *a be* como *gf* a *fi*. Ahora bien, *d* es la media proporcional entre *ob* y *be*, mientras que *nf* lo es entre *gf* y *fi*; por lo tanto, *nf* tiene, con respecto a *fi*, la misma proporción que *ob* a *d*, siendo esta proporción mayor que la que guardan los pesos y *d* con respecto al peso de *h*. Puesto que la caída o velocidad del peso *h* tiene, con respecto a la subida o velocidad de los pesos *c* y *d*, una proporción mayor que la que se da entre el peso de *c* y *d* y el peso de *h*, se hace evidente que el peso *h* descenderá, o lo que es lo mismo, la línea *ab* dejará de ser recta y horizontal. Lo mismo que ocurre en el caso de la recta *ab*, que era carente de peso [*gravità*], cuando se cuelga de *e* cualquier peso por pequeño que sea, como es *h*, sucederá también si suponemos que la misma cuerda *ab* está hecha con materia pesada, del que se compone la cuerda actúa como un peso suspendido.

SIMP. Por mi parte quedo completamente satisfecho. Ahora podrá el señor Salviati explicarnos, tal como nos lo ha prometido, cuál es la utilidad que se puede obtener de tal cadena, y después de esto, presentarnos los razonamientos que nuestro académico hizo acerca de la fuerza de la percusión.

SALV. Las discusiones que hemos tenido son suficientes por hoy; es ya muy tarde y el tiempo que nos queda no basta para permitirnos ocuparnos de estas materias. Pospongamos, pues, la reunión hasta un momento más oportuno.

SAGR. Estoy de acuerdo con V. S. puesto que, después de varias conversaciones mantenidas con amigos íntimos de nuestro académico, he llegado a la conclusión de que esta materia que trata de la fuerza de la percusión es enormemente oscura. Igualmente, no creo que hasta el momento, ninguno de los [317] que han tratado la cuestión haya sido capaz de penetrar en sus recintos, llenos de oscuridades y completamente ajenos a la imaginación humana. Entre las opiniones que he oído al respecto recuerdo una extraordinariamente extraña y que consiste en decir que la fuerza de la percusión es indeterminada, por no decir infinita. Esperaremos, pues, la ocasión de oír al señor Salviati. Entretanto decidme cuáles son las materias que siguen a la discusión sobre los proyectiles.

SALV. Se trata de algunas proposiciones que atañen al centro de gravedad de los sólidos y que fueron descubiertas en su juventud por nuestro académico, ya que le parecía un tanto incompleto lo que al respecto había descubierto Federico Comandino.* Pensaba, por lo tanto, que con tales proposiciones, que veis aquí escritas, podía poner remedio a lo que al libro de Comandino le faltaba. Se puso a investigar este tema a instancias del ilustrísimo señor marqués Guid'Ubaldo Dal Monte, un gran matemático en su época, como lo demuestran las diversas obras que publicó. A este señor nuestro académico le dio una copia de esta obra con la esperanza de ampliar la investigación a otros sólidos no tratados por Comandino. Pero al encontrarse, después de cierto tiem-

* Esos teoremas fueron elaborados por Galileo hacia mil quinientos ochenta y pico y añadidos al final de los *Discorsi*. Federico Comandino (1509-1575) es autor del *Liber de centro gravitatis solidorum* (1565), dentro de la tradición de Arquímedes.

po, con que en el libro del señor Luca Valerio, grandísimo geómetra, se da solución a toda está materia de forma completa, no prosiguió sus estudios, aunque los métodos por él empleados discurran de modo muy diferente a los del señor Valerio.

SAGR. Bueno sería que hasta que volvamos a vernos para discutir me dejara V. S. el libro, de modo que pueda ver y estudiar, entretanto, las proposiciones en el orden en el que han sido escritas.

SALV. Es para mí un placer darnos satisfacción y espero que V. S. disfrutará con tales proposiciones.

FIN DE LA JORNADA CUARTA

Johannes Kepler

(1571-1630)

VIDA Y OBRA

Si alguna vez se otorgara un premio a la persona que a lo largo de la historia más se ha obstinado en la búsqueda de la precisión absoluta, éste podría obtenerlo el astrónomo alemán Johannes Kepler. Kepler estaba tan obsesionado con las mediciones que incluso calculó, con precisión de minutos, la duración de su propia gestación: 224 días, 9 horas y 53 minutos –había nacido prematuramente—. No sorprende, pues, que en sus investigaciones astronómicas se esforzara en tan alto grado que llegó a dar las tablas astronómicas más exactas de su tiempo, conduciendo finalmente a la aceptación de la teoría centrada en el Sol (heliocéntrica) del sistema planetario.

Al igual que Copérnico, en cuyos trabajos se inspiró, Kepler era un hombre profundamente religioso. Consideraba sus incesantes estudios de las propiedades del Universo como un cumplimiento de su deber como cristiano de comprender el mundo que Dios había creado. Pero, a diferencia de Copérnico, la vida de Kepler fue cualquier cosa menos tranquila y aburrida. Siempre escaso de dinero, recurría a menudo a la publicación de calendarios de astrología y de horóscopos que, irónicamente, le hicieron ganar cierta celebridad local cuando sus predicciones se vieron confirmadas. Kepler también sufrió la muerte temprana de varios de sus hijos, así como la humillación de tener que defender en los tribunales a su excéntrica madre, Katherine, que tenía reputación de ejercer la brujería y que estuvo a punto de ser quemada en la hoguera.

Kepler entabló unas tormentosas relaciones con Tycho Brahe, el gran observador astronómico. Brahe dedicó muchos años de su vida a catalogar y medir cuerpos celestes, pero carecía de las aptitudes matemáticas y analíticas necesarias para comprender el movimiento planetario. Hombre de fortuna considerable, Brahe contrató a Kepler para interpretar sus observaciones sobre la órbita de Marte, que tanto había confundido a los astrónomos durante años. Con grandes dificultades, Kepler consiguió interpretar los datos de Brahe sobre el movimiento de Marte como una órbita elíptica, y este éxito otorgó credibilidad matemática al modelo heliocéntrico copernicano. Su descubrimien-

to de órbitas elípticas ayudó a abrir una nueva era en la astronomía, en la que los movimientos de los planetas podían ser predichos.

A pesar de sus éxitos, Kepler nunca ganó ni prestigio ni mucho dinero, y en varias ocasiones se vio obligado a escapar de los países en que vivía, a causa de las revoluciones religiosas y luchas civiles. Cuando murió, en 1630, a los cincuenta y nueve años, mientras intentaba cobrar un sueldo retrasado, Kepler había descubierto tres leyes del movimiento planetario que aún hoy se enseñan a los estudiantes en las clases de física. Y fue la tercera ley de Kepler, y no una manzana, lo que condujo a Isaac Newton al descubrimiento de la ley de la gravitación.

Johannes Kepler nació el 27 de diciembre de 1571 en la ciudad de Weil der Stadt, en Württemburg (en la actual Alemania). Su padre, Heinrich Kepler, fue, según Johannes, «un soldado inmoral, zafio y pendenciero» que abandonó a su familia en varias ocasiones para unirse a mercenarios que combatían contra el levantamiento protestante en Holanda, país en donde se cree que murió. El joven Johannes vivió con su madre, Katherine, en la taberna de su abuelo, donde fue puesto –pese a su precaria salud– a servir mesas desde edad muy temprana. Kepler era miope y padecía de doble visión, causada según se cree por un ataque casi mortal de viruela; también sufría problemas abdominales y tenía dedos deformes que, según su familia, limitaban al sacerdocio su potencial elección de carrera.

«Muy discutidora» y «de mal temperamento» fueron las palabras que el astrónomo utilizó para describir a su madre, aunque se convenció desde muy joven de que era así por culpa de su padre. Katherine había sido criada por una tía que practicaba la brujería y que fue quemada en la hoguera, por lo que Kepler no se sorprendió cuando años más tarde su madre se enfrentó a cargos similares. En 1577, ella mostró a su hijo el «gran cometa» que apareció aquel año en el cielo, momento que, según reconocería Kepler más adelante, constituyó una de las experiencias compartidas de recuerdo más perdurable. A pesar de una niñez llena de dolor y ansiedad, Kepler estaba obviamente dotado, y se espabiló para conseguir una beca destinada los chicos con recursos limitados que vivían en la provincia alemana de Suabia. Acudió a la escuela alemana de Leonberg antes de pasar a una escuela latina, donde adquirió el estilo de escribir en latín que posteriormente utilizaría en sus trabajos. Frágil y precoz, Kepler era vapuleado a menudo por sus compañeros de clase, quienes le consideraban un sabelotodo, hasta que, para escapar de tales tratos, pasó a los estudios religiosos.

En 1587, Kepler se matriculó en la universidad de Tubinga, donde estudió teología y filosofía. También se estableció como estudiante de matemáticas y astronomía, y se hizo ferviente partidario de la controvertida teoría heliocéntrica copernicana. Tan encendida era su defensa del modelo copernicano del Universo, que no era raro que se enzarzara en discusiones públicas sobre este tema. A pesar de su interés central en teología, cada vez se sentía más atraído por el encanto místico de un universo heliocéntrico. Aunque estaba a punto de graduarse en Tubinga en 1591 e ingresar en la facultad de teología de la universidad, una recomendación para un empleo de profesor de matemáticas y astronomía en la escuela protestante de Graz, en Austria, resultó irresistible. Así pues, a la edad de veintidós años, Kepler dejó la carrera sacerdotal para dedicarse al estudio de la ciencia, aunque nunca abandonaría su fe en el papel de Dios en la creación del universo.

En el siglo XVI la frontera entre astronomía y astrología era muy ambigua. Una de las obligaciones de Kepler como matemático en Graz era componer un calendario as-

trológico completo con predicciones, práctica muy común en aquel tiempo. Kepler estaba claramente motivado por el dinero adicional que le proporcionaba aquel empleo, y no podía sospechar la reacción del público cuando apareció su primer calendario. Predijo un invierno extraordinariamente frío y una incursión de los turcos, y cuando ambas predicciones se cumplieron, Kepler fue triunfalmente aclamado como profeta. A pesar de este clamor, nunca sintió mucho respeto por su trabajo en los almanaques anuales. Llamó a la astrología «hija pequeña y alocada de la astronomía» y despreció tanto el interés del público como las intenciones de los astrólogos. «Si alguna vez los astrólogos aciertan», escribió, «se debe atribuir a la suerte». Aun así, Kepler nunca dejó de acudir a la astrología cuando el dinero escaseaba, circunstancia frecuente en su vida, ni abandonó la esperanza de descubrir algo de ciencia verdadera en ella.

Un día, mientras daba una lección de geometría en Graz, Kepler tuvo una súbita revelación que le lanzó a un viaje apasionado y que cambiaría el curso de su vida. Se trataba, creyó él, de la llave secreta para la comprensión del Universo. En la pizarra de la clase dibujó un triángulo equilátero dentro de un círculo, y otro círculo dentro del triángulo. Se le ocurrió que la razón de los círculos indicaría la razón de las órbitas de Saturno y de Júpiter. Inspirado por esta revelación, supuso que los seis planetas conocidos en aquel tiempo estaban dispuestos alrededor del sol de tal manera que ciertas figuras geométricas ajustaran perfectamente entre ellas. Inicialmente ensayó esta hipótesis sin éxito, utilizando figuras planas bidimensionales como el pentágono, el cuadrado y el triángulo. Entonces acudió a los sólidos pitagóricos, utilizados por los antiguos griegos, que descubrieron que tan sólo cinco poliedros podían ser construidos mediante figuras geométricas regulares. Para Kepler, aquello explicaba por qué sólo podía haber seis planetas (Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter y Saturno) con cinco espacios entre ellos, y por qué sus separaciones no eran uniformes. Esta teoría geométrica sobre las órbitas y distancias planetarias impulsó a Kepler a redactar el *Misterio del cosmos* (*Mysterium Cosmographicum*), publicado en 1596. Tardó un año en escribirlo, y aunque el esquema resultaba razonablemente preciso, estaba muy seguro de que sus teorías se demostrarían finalmente correctas:

> Nunca podré expresar con palabras cuán intenso fue mi placer al efectuar este descubrimiento. Ya no lamenté el tiempo que me había costado. Consumía días y noches en cálculos, para comprobar si esta idea concordaba con las órbitas copernicanas, o si mi alegría sería llevada por el viento. Al cabo de unos pocos días todo encajaba, y vi cómo un planeta tras otro se situaban con precisión en su lugar.

Kepler pasó el resto de su vida intentando obtener la demostración matemática que justificara su teoría y sus observaciones científicas. *Misterio del cosmos* fue la primera obra decididamente copernicana publicada desde el tratado de Copérnico *De revolutionibus*. Como astrónomo y como teólogo, Kepler estaba determinado a comprender cómo y por qué Dios diseñó el universo. Defender un sistema heliocéntrico tenía serias implicaciones religiosas, pero Kepler mantuvo que la centralidad del Sol era clave para los designios de Dios, ya que mantenía los planetas ordenados y en movimiento. En este sentido, Kepler rompió con el sistema heliostático de Copérnico de un Sol «próximo» al centro, al colocarlo directamente en el centro del sistema.

Actualmente, la idea de los poliedros de Kepler parece insostenible, pero aunque la premisa del *Misterio del cosmos* era errónea, sus conclusiones resultaban sorprenden-

temente precisas y decisivas y fueron esenciales para influir en el curso de la ciencia moderna. Cuando el libro fue publicado, Kepler envió un ejemplar a Galileo, urgiéndole a «creer y dar un salto hacia delante», pero el astrónomo italiano rechazó el trabajo debido a su evidente carácter especulativo. Tycho Brahe, en cambio, se sintió inmediatamente intrigado. El trabajo de Kepler le pareció nuevo y excitante, y escribió una crítica detallada en apoyo del libro. Esta reacción al *Misterio del cosmos,* escribiría Kepler posteriormente, cambió el curso de toda su vida.

En 1597, otro suceso iba a imprimir un nuevo giro a su existencia: Kepler se enamoró de Bárbara Muller, la hija mayor de un rico propietario de molinos. Se casaron el 27 de abril de aquel año, bajo una constelación desfavorable, como el astrónomo anotaría posteriormente en su diario. Y una vez más emergió su naturaleza profética, ya que la relación y el matrimonio se disolvieron. Los dos primeros hijos murieron a edad muy temprana, Kepler, enloquecido de dolor, se sumergió en su trabajo para distraerse. La esposa no comprendió sus investigaciones. Aunque el matrimonio duró catorce años, hasta la muerte de ella por tifus en 1611, aparece descrita como «gorda, simplona y confusa» en los discursos de Kepler.

En septiembre de 1598, el archiduque católico de Graz, que había recibido el encargo de eliminar de Austria el protestantismo, ordenó que Kepler y otros luteranos abandonaran la ciudad. Tras una visita al castillo Benatky de Tycho Brahe en Praga, Kepler fue invitado por el rico astrónomo danés a quedarse allí y trabajar en sus investigaciones. Kepler recelaba de Brahe, incluso antes de conocerle personalmente. «Mi opinión de Tycho es que es superlativamente rico, pero que no sabe cómo utilizar adecuadamente sus riquezas, tal como ocurre con la mayoría de la gente rica», escribió. «Por lo tanto, debemos tratar de arrancarle sus riquezas.»

Si a la relación con su mujer le faltaba complejidad, Kepler encontraría toda la que quisiera cuando fue contratado como investigador por el aristocrático Brahe. Al principio, éste le trató como un subalterno, controlando minuciosamente sus tareas y sin darle demasiado acceso a los datos observacionales. Kepler anhelaba ser considerado como un igual y tener cierta independencia, pero el receloso Brahe quería utilizarle tan sólo para establecer su propio modelo del sistema solar –un modelo no copernicano que Kepler no soportaba.

Kepler se sentía inmensamente frustrado. Brahe había hecho acopio de una gran riqueza de datos experimentales, pero carecía de los instrumentos matemáticos para comprenderlos plenamente. Finalmente, quizá para pacificar a su inquieto ayudante, Brahe le encargó que estudiara la órbita de Marte, que durante algún tiempo había confundido al astrónomo danés porque parecía ser la menos circular. Al principio, Kepler pensó que podría resolver el problema en ocho días, pero éste le ocupó más de ocho años. Por difícil que resultara la investigación, no dejó de tener sus recompensas, ya que tal trabajo le llevó a descubrir que la órbita de Marte correspondía con precisión a una elipse, así como a formular sus dos primeras «leyes planetarias», que publicó en 1609 en *La nueva astronomía.*

Un año y medio después de haber empezado su colaboración con Brahe, el astrónomo danés se indispuso durante una cena y murió pocos días después de una infección de la vejiga de la orina. Kepler ocupó la plaza de Matemático Imperial y quedó libre para explorar la teoría planetaria sin estar sometido a la vigilancia puntillosa de Tycho Brahe. Consciente de su oportunidad, Kepler se apropió inmediatamente de los anhelados datos de Brahe, antes de que pasaran al control de sus herederos. «Confieso que

cuando Tycho murió», escribió más tarde, «me aproveché rápidamente de la ausencia, o falta de circunspección, de los herederos, y tomé bajo mi control las observaciones, quizá usurpándolas». El resultado fueron las *Tablas rudolfinas* de Kepler, una compilación de los datos de treinta años de las observaciones de Brahe. Para ser honestos, hemos de decir que en su lecho de muerte Brahe encargó a Kepler que completara las tablas; pero Kepler no lo hizo según las hipótesis del modelo de Tycho, como Brahe esperaba, sino que utilizó los datos, que incluían cálculos con logaritmos que él mismo había desarrollado, para predecir las posiciones planetarias. Logró predecir tránsitos del Sol por Mercurio y Venus, aunque no vivió lo suficiente para verlos. Sin embargo, Kepler no publicó las *Tablas rudolfinas* hasta 1627, porque los datos que iba descubriendo le lanzaban constantemente a direcciones muy diversas.

Tras la muerte de Brahe, Kepler observó una nova, que posteriormente fue conocida como «nova de Kepler», y también experimentó en teorías ópticas. Aunque modernamente los científicos y los eruditos consideran sus trabajos en óptica como menores en comparación con sus éxitos en astronomía y matemáticas, lo cierto es que la publicación en 1611 de su libro *Dioptrices* cambió el curso de la óptica.

En 1605, Kepler anunció su primera ley, la ley de las elipses, que establece que los planetas se mueven en elipses que tienen el Sol en uno de sus focos. La Tierra, dijo Kepler, está más cerca del Sol en enero y más lejos en julio durante su viaje por su órbita elíptica. Su segunda ley, la ley de la igualdad de las áreas, establece que los planetas corren menos cuando están más lejos. Kepler lo demostró arguyendo que una línea imaginaria entre un planeta cualquiera y el Sol debería barrer áreas iguales en tiempos iguales. Publicó ambas leyes en 1609 en su libro *Nueva astronomía* (*Astronomia nova*).

A pesar de su cargo como Matemático Imperial y de ser un distinguido científico a quien Galileo pedía opinión acerca de sus nuevos descubrimientos con telescopio, Kepler no consiguió asegurarse una existencia confortable. Las revueltas religiosas en Praga pusieron en peligro su nueva patria de adopción, y en 1611 fallecieron su mujer y su hijo predilecto. Kepler fue autorizado, bajo exención, a regresar a Linz, donde en 1613 se casó con Susanna Reuttinger, una huérfana de veinticuatro años que le daría siete hijos, sólo dos de los cuales llegaron a alcanzar la edad adulta. Fue en aquella época cuando la madre de Kepler fue acusada de brujería y él, pese a hallarse inmerso en una agitada situación personal, se vio obligado a defenderla de estos cargos para evitar que fuera llevada a la hoguera. Katherine fue encarcelada y torturada, pero su hijo consiguió obtener su exculpación y su puesta en libertad.

Debido a estas contrariedades, el regreso de Kepler a Linz no fue inicialmente un período productivo. Desesperado, apartó su atención de las tablas y empezó a trabajar en *Las armonías del mundo* (*Harmonice mundi*), un trabajo apasionado que Max Caspar, en su biografía de Kepler, describió como «una cosmovisión grandiosa, entretejida de ciencia, poesía, filosofía, teología y mística». Kepler terminó *Las armonías del mundo* el 27 de mayo de 1618. En esta serie de cinco libros, extendió su teoría de la armonía a la música, la astrología, la geometría y la astronomía. La serie incluyó su tercera ley de los movimientos planetarios, que unos sesenta años más tarde inspiraría a Isaac Newton, y que establece que los cubos de las distancias medias de los planetas al Sol son proporcionales a los cuadrados de sus períodos de revolución. En síntesis, Kepler descubrió cómo orbitan los planetas, y al conseguirlo, allanó el camino para que Newton descubriera el porqué.

Kepler creía que había descubierto la lógica de Dios en la creación del Universo, y no logró ocultar su éxtasis. En el libro quinto de *Las armonías del mundo* escribió:

> Me atrevo a confesar con franqueza que he robado los vasos de oro de los egipcios para construir un tabernáculo para mi Dios muy lejos de los límites de Egipto. Si me perdonáis por ello, me alegraré; si me lo reprocháis, lo soportaré. La suerte está echada, y escribo el libro para ser leído ahora o en la posteridad, no importa cuándo. Puede esperar más de un siglo a su lector, tal como Dios mismo ha esperado seis mil años para encontrar mi testimonio.

La guerra de los Treinta Años, que, iniciada en 1618, diezmó las tierras austríacas y alemanas, obligó a Kepler a abandonar Linz en 1626. Al final, se estableció en la ciudad de Sagan, en Silesia. Allí intentó terminar lo que podríamos describir como una novela de ciencia-ficción, en la que había jugueteado durante años, con ciertos perjuicios para su madre durante el juicio por brujería. *Sueño de la Luna* (*Somnium seu Astronomia Lunari*) es un diálogo imaginario con un «demonio» conocedor del Universo que explica al protagonista cómo podría viajar a la Luna y que fue descubierto y presentado como prueba durante el juicio contra Katherine. Kepler tuvo que dedicar muchas energías a defender que el trabajo era pura ficción y que el demonio que en él aparecía era un mero artificio literario. El libro es único, no sólo porque se avanzó a su tiempo en fantasía, sino también porque constituía una especie de tratado en apoyo de la teoría copernicana.

En 1630, a los cincuenta y ocho años, Kepler se halló de nuevo en apuros financieros. Partió hacia Ratisbona, donde esperaba cobrar los intereses de algunos bonos que poseía y algún dinero que le debían. Sin embargo, pocos días después de su llegada tuvo un acceso de fiebre y murió el 15 de noviembre. Aunque nunca alcanzó entre el público la fama de Galileo, Kepler produjo un *corpus* que resultó extraordinariamente útil para los astrónomos profesionales que, como Newton, se sumergieron en los detalles y en la precisión de su ciencia. Johannes Kepler fue un hombre enamorado del orden cósmico y la armonía estética, y todo lo que descubrió estuvo inextricablemente entrelazado con su visión de Dios. En su epitafio, que compuso él mismo, dice: «Medí los cielos; ahora mediré las sombras de la tierra. Mi alma era del cielo, pero la sombra de mi cuerpo reposa aquí».

LAS ARMONÍAS DEL MUNDO

LIBRO QUINTO

De la perfectísima armonía de los movimientos celestes, y de la generación de las excentricidades y semidiámetros y de los tiempos periódicos de aquéllos.

Según los preceptos de la más correcta doctrina astronómica de hoy en día, de la hipótesis de Copérnico pero también de la de Tycho Brahe: una y otra de las cuales acéptanse hoy, anticuada la ptolemaica, como veracísimas.

> Doy comienzo a un discurso sagrado, veracísimo himno al Dios fundador, y considero no consistir la devoción en que yo inmole un sinfín de hecatombes de bueyes, y queme incienso de innumerables perfumes y canela, mas en que antes me diga a mí mismo y más tarde lo enseñe a los otros, cuánto es Su saber, cuánto Su poder, cuál bondad la Suya. Querer colmar de honras a todas las cosas, en tanto en cuanto pueda honrárselas, y en nada envidiar una sola de esas bondades, eso en verdad pongo yo por modelo de la más consumada bondad; lo alabo por bueno hasta el punto de dar su saber, el más eminente, con todo aquello que más pueda serle de honra a algo, y al fin todo aquello que Él dispusiera, ponerlo por obra con insuperable poder.
>
> GALENO, *De usu partium*, libro tercero

PROEMIO

[268] Lo que augurara veintidós años atrás, y ante todo, hallarse las cinco figuras sólidas entre los orbes celestes, lo que firmemente persuadiera el ánimo mío antes que viera las *Armonías* de Ptolomeo, lo que prometiera a los amigos en el título de este libro quinto antes de estar cierto del asunto, aquello en lo que dieciséis años atrás insistiera en escrito público era menester indagar, por cuya causa he consumido la parte mejor de la vida en observaciones astronómicas, acudido a reunirme con Tycho Brahe, [269] y elegido Praga por residencia: aquello, en fin, habiéndome prorrogado Dios Máximo y Perfecto que inspirara mi mente y excitara mi ingente deseo y también la vida y las fuerzas del ingenio, y provisto de los demás medios a través de dos emperadores y la

liberalidad de los próceres de esta provincia del Austria Supranisana, y habiendo cumplido suficientemente con mi responsabilidad en la Astronomía, aquello es, digo, lo que al fin he sacado a la luz y ha revelado ser veracísimo, por encima de cuanto hubiera podido esperar nunca: hallarse entre los movimientos celestes la entera naturaleza de la armonía, tanta cuanta es, juntamente con todas sus partes explicadas en el libro tercero; no al modo en que mi ánimo la concibiera, sin duda, lo que no es la parte peor de mi alegría, pero en otro diferentísimo, a la vez que sumamente perfecto y excelente. Acaeciome en ese entretanto en que me tuvo suspenso la laboriosa reconstrucción del movimiento algo que acrecentó mi deseo tan señaladamente como incentivó mis propósitos: la lectura de las *Armonías* de Ptolomeo, que hízome llegar manuscritas Johann Georg Herward, canciller de la Baviera —ese varón eximio nacido para hacer adelantar la filosofía junto con toda suerte de erudición— en las que vine a dar, con admiración suma y más allá de toda expectativa, con su libro tercero, casi por entero consagrado a idéntica contemplación de las armonías celestes, mil quinientos años antes. Verdad es que mucho faltaba por crecer a la Astronomía hasta hoy; y puede que a Ptolomeo, intentado el negocio sin fortuna, aún se le ofreciera otra desesperación, como a alguien que más pareciera haber contado, cual Escipión ciceroniano, un dulce sueño de pitagóricos antes que ayudar a la filosofía. Mas a mí, tanto aquella rudeza de la Astronomía antigua como ese consenso en tal punto hallado, con un intervalo de quince siglos, entre las meditaciones de uno y otro, me confirmaron vehementemente en emprender mi propósito. Pues ¿a qué es menester multitud? La naturaleza misma de las cosas iba a presentarse a los hombres por medio de dos intérpretes varios siglos distantes: por hablar como los hebreos, se diría que aquí fuera el dedo de Dios en el ánimo de dos que se hubieran dado por entero a la contemplación de la naturaleza, idéntico su concepto de la conformación del mundo, comoquiera que ninguno hubiese sido guía del otro para adentrarse en tal vía. Ahora ya, luego que dieciocho meses atrás rayara la primera luz, luciera entera hace tres, y el pleno Sol de la contemplación hace poquísimos días, nada me retiene ya, y me complazco en permitirme el furor sagrado, y asaltar insolente a los mortales con la franca confesión de haber hurtado los cálices áureos de los egipcios, para construir con ellos el tabernáculo de mi Dios lejos de los confines de Egipto. Si me lo pasáis por alto, me alegraré; si os inflama la ira, lo soportaré. Aquí lanzo los dados, escribo el libro, que lo lean los presentes o los venideros, nada importa; espere a sus lectores cien años, si Dios mismo se ha prestado a esperar seis mil a quien le contemplara.

Éstos son los capítulos del libro:

1. De las cinco figuras sólidas regulares.
2. Del parentesco de las proporciones armónicas con las cinco figuras regulares.
3. Suma de doctrina astronómica, necesaria a la contemplación de las armonías celestes.
4. En qué cosas tocantes al movimiento de los planetas hállanse expresadas por el Creador las proporciones armónicas, y de qué modo.
5. Cómo están expresadas en las proporciones de los movimientos planetarios las notas de la escala musical, o lugares del sistema, y los modos de armonía, mayor y menor.
6. Cómo se hallan expresados cada uno de los tonos o modos musicales en los movimientos planetarios.

7. Cómo pueden existir contrapuntos o armonías universales de todos los planetas, diferentes cada uno de los demás.
8. Hállanse expresados en los planetas los cuatro contrapuntos naturales de las voces: soprano, contralto, tenor y bajo.
9. Demostración de que para obtener tal disposición armónica debieron constituirse esas precisas excentricidades que cualquiera de los planetas tiene por sí, y no otras.
10. Epílogo acerca del Sol, a modo de conjeturas fertilísimas.

[270] En el momento de ponerme a ello me placería imbuir en los lectores la santísima exhortación de Timeo, filósofo de los gentiles, al principiar estas mismas cosas, que los cristianos han de conocer, si ya no imitar, con suma admiración y vergüenza:

'Αλλ' ὦ Σώκρατες, Τοῦτό γε δὴ πάντες, ὅσοι καὶ κατὰ βραχὺ σωφροσύνης μετέχουσιν, ἐπὶ πάσῃ ὁρμῇ καὶ σμικροῦ καὶ μεγάλου πράγματος, Θεὸν ἀεί που καλοῦσιν, ἡμᾶς δὲ τοὺς περὶ ΠΑΝΤΟΣ λόγους ποιεῖσθαι πῃ μέλλοντας, εἰ μὴ παντάπασι παραλλάττομεν, ἀνάγκη θεούς τε καὶ θεὰς ἐπικαλουμένους εὔχεσθαι πάντας, κατὰ νοῦν ἐκείνοις μὲν μάλιστα, ἑπομένως δὲ ὑμῖν εἰπεῖν.

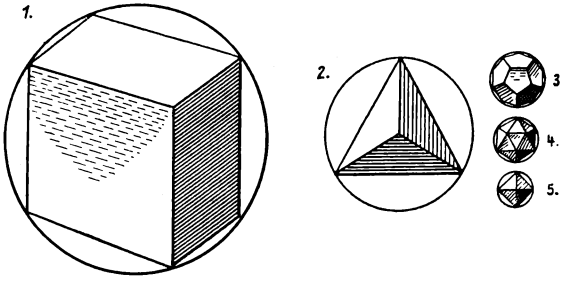
[Puesto que Sócrates, en efecto, al igual que todos cuantos participan de un mínimo de sensatez, al entrar en cualquier negocio así pequeño como grande invoca siempre a Dios, también a nosotros, en cuyo ánimo está discutir de lo universal de las cosas, a no ser que nos apartemos francamente de toda sana razón, nos es de necesidad pronunciar unánimes en alta voz los votos prescritos a todos los dioses y diosas, para que digamos cosas sumamente gratas y aceptables, primeramente, a ellos, y después, a vosotros.]*

1. DE LAS CINCO FIGURAS SÓLIDAS REGULARES

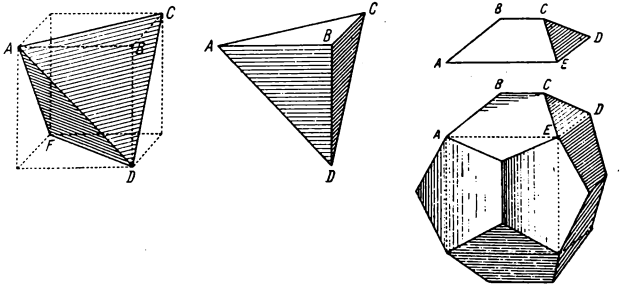
[271] Cómo convengan las figuras planas regulares para formar figuras sólidas, dicho queda en el libro segundo: aquí hablamos, por descontado, acerca de figuras planas, de cinco sólidos (entre todos los demás). Su número de cinco, ciertamente, ya quedó demostrado allí, y añadido por qué las denominan figuras del mundo los platónicos, y a cuál elemento las comparan, y por cuál propiedad. Otra vez ahora en la antesala de este libro se habrá de tratar de esas figuras, no por planas, mas por sí mismas, cuanto basta para la armonía de los cielos: halle lo demás el lector en el *Epítome de astronomía*, libro cuarto, parte II.

Por ende, del *Misterio cosmográfico* insisto aquí brevemente en el orden de cinco figuras en el mundo, de las cuales, tres, primarias, y dos, secundarias. Es en efecto el cubo (1) el más extenso y amplio, por primogénito, y guarda razón con el todo en la forma misma de su generación. Síguele el tetraedro (2), en tanto parte constituida por sección del cubo, ella misma primaria, no obstante, con ángulo sólido trilineal, como el cubo. Dentro del tetraedro está el dodecaedro (3), última de las primarias similarmente compuesta, claro es, con partes del cubo similares al tetraedro, esto es, por tetraedros irregulares que en su interior recubren al cubo. A éste sucede por causa de similitud el

* A lo largo del texto se incluyen entre corchetes las incorporaciones ajenas al mismo, así la primera aparición de términos actualizados, las notas en la escala usada en castellano, las traducciones de los textos en griego, o los términos que aclaren el sentido del texto original.



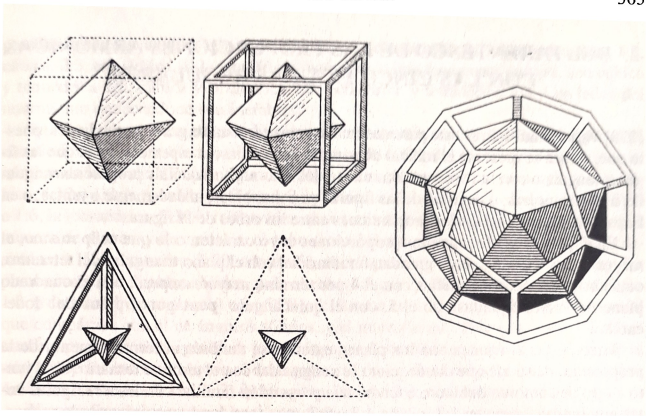
icosaedro (4), última de las secundarias, que gasta ángulo sólido plurilineal. La más interior es el octaedro (5), semejanza del cubo y primera de las secundarias, a la que se le debe, inscribible como es, el primer lugar de las interiores, así como al cubo es circunscribible el primero de las exteriores.



[272] Ahora bien, son notables dos ayuntamientos entre estas figuras, de diversa clase, combinadas a modo de cónyuges: machos, cubo y dodecaedro, de las primarias; hembras, octaedro e icosaedro de las secundarias; a las que viene a añadirse una a modo de hermafrodita o andrógino, el tetraedro, por cuanto se inscribe en sí mismo, como aquellas femeninas se inscriben en los machos, por así decir, subyugadas a ellos, y tienen signos de sexo femeninos, a saber, ángulos en plano, opuestos a los masculinos.

Aparte de esto, así como el tetraedro es elemento, víscera y como costilla del cubo macho, así el octaedro femenino es elemento y parte del tetraedro, según distinta razón: de este modo el tetraedro es mediador en ese ayuntamiento.

La más señalada diferencia conyugal o de familia consiste en esto: que la proporción es en la cúbica ciertamente expresable; pues el tetraedro es tercio del cuerpo cúbico, y el octaedro, mitad del tetraédrico, sexta parte del cubo; mas la proporción de la pareja dodecaédrica es en verdad inefable [irracional], aunque divina.

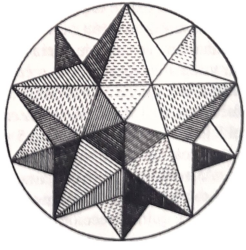


La cópula de estos dos términos ordena ser cauto al lector en lo que toca a su significado. Pues aquí la voz «inefable» no denota de suyo nobleza alguna, como en otros lugares de la teología y las cosas divinas, sino condición empeorada, pues hay en geometría, como dicho queda en el libro primero, muchos inefables que no por ello participan en la divina proporción. Ahora bien, qué sea esa divina proporción (a la que es mejor llamar «sección») ha de sacarse del libro primero. Que otras proporciones piden cuatro términos, y las continuas tres, y la divina quiere, junto a la condición misma de proporción, también una condición tal de los términos que dos términos menores, como partes, constituyan el mayor, como todo.

Síguese de aquí que tanto cuanto pierde esta pareja dodecaédrica por gastar una proporción inefable, otro tanto le viene, viceversa, de que la inefable progresa hacia la divina.

Y este ayuntamiento incluye asimismo a la estrella sólida, cuya generación viene de continuarse cinco de los planos del dodecaedro hasta concurrir todos en un único punto: véase la génesis de ésta en el libro segundo.

Es de notar, por último, la proporción entre los orbes a ellos circunscritos y los inscritos, que es expresable en el tetraedro, como 100.000 a 33.333, o como 3 a 1; en el ayuntamiento cúbico, inefable, aunque expresable empero la potencia del semidiámetro del inscrito, raíz [cuadrada] de la parte tercia de la potencia del diámetro, a saber, como 100.000 a 57.735; en el ayuntamiento dodecaédrico, lisa y llanamente inefable, como 100.000 a 79.465; en la estrella, como 100.000 a 52.573, medio lado del icosaedro, o la mitad de la distancia entre dos radios.



2. DEL PARENTESCO DE LAS PROPORCIONES ARMÓNICAS CON LAS CINCO FIGURAS REGULARES

[273] Vario y múltiple es este parentesco: hay, empero, cuatro grados principales, puesto que: o bien se presume el indicio de parentesco por la sola especie externa que las figuras tengan; o con la construcción misma del lado nacen aquellas proporciones iguales a las armónicas; o resultan de las figuras ya construidas, aisladamente o juntas; o en fin, son iguales o vecinas las proporciones entre los orbes de la figura.

En el primer grado, aquellas proporciones cuyo carácter, o lo que es lo mismo, el mayor de los términos, es 3, guardan familiaridad con el plano triangular del tetraedro, octaedro e icosaedro; aquéllas con el 4 por término mayor, empero, con el cuadrado plano del cubo; aquéllas con el 5, con el quincángulo [pentágono] plano del dodecaedro.

Puede esta semejanza con los planos extenderse también al término menor de la proporción; de suerte que dondequiera se venga a dar con el término ternario [el 3] junto a otro de continuo doblado se tendrá una proporción familiar con las tres figuras antes nombradas, como en 1:3 y 2:3 y 4:3 y 8:3, etc.; mas donde sea quinario, la proporción se reclama absolutamente del linaje del matrimonio dodecaédrico: como en 2:5 y 4:5 y 8:5, y así también 3:5 y 3:10, y 6:5 y 12:5 y 24:5. Menos probable será el parentesco si es la suma de los términos la que expresa esta semejanza; como en 2:3, juntos los términos, hacen 5, conque 2:3 será casi de la familia del dodecaedro.

Similar es el parentesco por la especie externa del ángulo sólido, que es en las primeras trilineal, en el octaedro, cuatrilineal, en el icosaedro, quinquelineal; y así, si otro término de la proporción tiene en común el término ternario, la proporción será familiar de los cuerpos primarios; si ya no es que lo tenga con el cuaternario, que entonces lo será del octaedro; y si con el quinario, en fin, del icosaedro. En las hembras, empero, se echa de ver más este parentesco, por cuanto en ellas la figura característica, latente dentro, sigue a la especie del ángulo, tetrágono en el octaedro, pentágono en el icosaedro: y así 3:5, por causa de uno y otro término, será del mismo corte que la entera secta icosaédrica.

El segundo grado de parentesco, que consiste en el nacimiento, ha de concebirse así: primeramente, algunas proporciones armónicas de números son familiares de una pareja o familia; a saber, las proporciones perfectas, de la familia cúbica en particular; y viceversa, existe la proporción que nunca se expresa por números plenos [enteros], ni se muestra de ningún otro modo mediante números, si no es por una larga serie que paulatinamente accede hacia ella: proporción a la que se dice divina, cuando es perfecta; y reina en forma diversa en el matrimonio dodecaédrico; comiénzase a esbozar un asomo de aquella proporción en estas armonías, 1:2 y 2:3 y 3:5 y 5:8, pues está imperfectísima en 1:2, perfectísima en 5:8, y más perfecta habrá de ser si también ponemos el 8 [como numerador] sobre 5 y 8 juntos en el 13, siempre que ésta no dejara ya de ser armónica.

Allende esto, para constituir el lado de las figuras ha de seccionarse el diámetro del globo: y pide el octaedro bisección, cubo y tetraedro, trisección, y el matrimonio dodecaédrico, quinquisección. Luego distribúyense entre las figuras las proporciones según los números que expresan aquellas secciones. Y se corta el cuadrado del diámetro, o lo que es lo mismo, de cierta parte de éste fórmase un cuadrado al lado de la figura; y com-

parados los de los laterales con el del diámetro se constituyen así las proporciones, 1:3, cúbica, 2:3, tetraédrica, 1:2, octaédrica; razón por la que, juntas por parejas, son cúbica y tetraédrica 1:2, cúbica y octaédrica 2:3, octaédrica y tetraédrica 3:4. Los lados del matrimonio dodecaédrico son inefables.

En el tercer grado síguense diversamente proporciones armónicas de figuras ya constituidas. Pues en efecto, o bien el número de lados del plano se compara con el número de lados de la entera figura: [274] y nacen entonces estas proporciones, la cúbica, 4:12 o 1:3, la tetraédrica, 3:6 o 1:2, la octaédrica, 3:12 o 1:4, la dodecaédrica, 5:30 o 1:6, la icosaédrica, 3:30 o 1:10; o bien el número de lados del plano compárase con el número de planos, y da entonces el cubo 4:6 o 2:3, tetraedro, 3:4, octaedro, 3:8, dodecaedro, 5:12, e icosaedro, 3:20; o también, se compara el número de lados o de ángulos planos con el de ángulos sólidos, y da el cubo 4:8 o 1:2, tetraedro, 3:4, octaedro, 3:6 o 1:2, y dodecaedro con su cónyuge, 5:20 y 3:12, esto es, 1:4; o es el número de planos el que compárase con el de ángulos sólidos, y el matrimonio cúbico da 6:8 o 3:4, el tetraedro, proporción de igualdad, y los cónyuges dodecaédricos, 12:20 o 3:5; o bien el número de los lados todos con el de ángulos sólidos, y da el cubo 8:12 o 2:3, tetraedro, 4:6 o 2:3, octaedro, 6:12 o 1:2, dodecaedro, 20:30 o 2:3, e icosaedro, 12:30 o 2:5.

Y compáranse los cuerpos unos con otros, si el tetraedro se recoge dentro del cubo, y el octaedro, dentro de tetraedro y cubo, mediante su inscripción geométrica. Es el tetraedro tercio del cubo, el octaedro, mitad del tetraedro y sexta parte del cubo, como el octaedro, que, inscrito al globo, es sexta parte del cubo que circunscribe al globo. Los cuerpos restantes son inefables.

La cuarta especie o grado de parentesco es más apropiada para esta obra, que inquiérese aquí la proporción entre los orbes inscritos en las figuras y los orbes a ellas circunscritos y, así, pondérase qué proporciones armónicas se les aproximan. Pues en el tetraedro sólo es expresable el diámetro del inscrito, como parte tercera del circunscrito, mas en el matrimonio cúbico la proporción, la única que allí existe, aseméjase a líneas expresables por la potencia sólo. Ya que el diámetro del orbe inscrito es al del circunscrito en proporción semitriple [raíz cuadrada de 1:3]. Y si comparas entre sí estas proporciones, la de los orbes tetraédricos dobla [es el cuadrado de] la proporción entre los orbes cúbicos. En los cónyuges dodecaédricos, de nuevo es única la proporción de los orbes, mas inefable, poco mayor que 4:5. Por tanto las proporciones de los orbes cuboctaédricos aproxímanse a estas armonías, 1:2, la aproximada mayor, y 3:5, aproximada menor: las proporciones de los orbes dodecaédricos, empero, aproxímanse a 4:5 y 5:6, como próximas menores, a 3:4 y 5:8 como próximas mayores.

Que se reclame, por ciertas causas, 1:2 y 1:3 para el cubo, y entonces, tal como la proporción de los orbes cúbicos es a la de los tetraédricos, así serán las armonías 1:2 y 1:3, atribuidas al cubo, a 1:4 y 1:9, atribuidas al tetraedro, si alguna vez hubiere de usarse esta analogía; pues en efecto aquellas proporciones son cuadrado de estas armonías. Y por no ser armónica 1:9, suplántala en el tetraedro la armonía próxima, 1:8. Mas por esta analogía conviénenle al matrimonio dodecaédrico aproximadamente 4:5 y 3:4. Pues tal como la proporción entre los orbes cúbicos ronda el triple [el cubo] de la proporción entre los dodecaédricos, así también las armonías cúbicas 1:2 y 1:3 rondan el cubo de las armonías 4:5 y 3:4. Pues 4:5 así elevada al cubo es 64:125, y 1:2, es 64:128. Así también 3:4, al cubo, es 27:64, y 1:3 es 27:81.

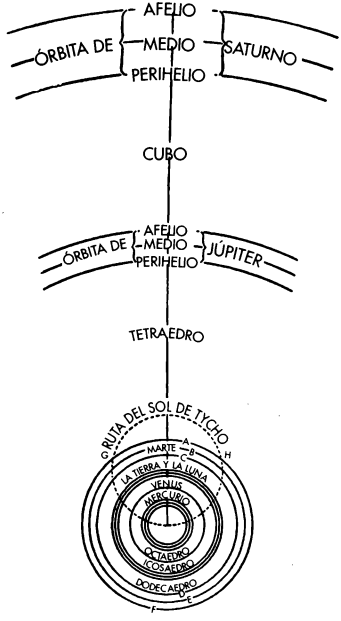
3. SUMA DE DOCTRINA ASTRONÓMICA, NECESARIA A LA CONTEMPLACIÓN DE LAS ARMONÍAS CELESTES

Sepan esto de principio los lectores: que las antiguas hipótesis astronómicas de Ptolomeo, al modo en que se explican en las *Teóricas* de Purbach y demás escritores de epítomes, han de ser arrancadas de estas consideraciones y desechadas [275] del ánimo, pues no transmiten ni la veraz disposición de los cuerpos del mundo ni el gobierno de sus movimientos. En su lugar, tampoco puedo obrar de otro modo sino sustituirlas únicamente por el juicio de Copérnico sobre el mundo y persuadir a todos, si posible fuere. Mas por ser el asunto entre el común de los estudiosos, a más de nuevo aún, doctrina que suena plenamente absurda a oídos de los más, a saber, que la Tierra es uno de los planetas y se mueve por los espacios siderales en torno al Sol inmóvil, sépanlo por tanto aquéllos a quienes ofenda lo insólito de ese juicio: que estas especulaciones armónicas también tienen cabida en las hipótesis de Tycho Brahe, por cuanto este autor tiene en común con Copérnico todo lo demás que atañe a la disposición de los cuerpos y lo atemperado de sus movimientos entre sí; sólo el copernicano movimiento anual de la Tierra lo transfiere él al sistema entero de orbes planetarios, y al Sol, que tiene el punto medio con consenso de ambos autores. Pues de esta traslación del movimiento no resulta menos que la Tierra, si ya no en el vastísimo e inmenso espacio de la esfera de las fijas, al menos en el sistema de los mundos planetarios tiene en cualquier momento según Brahe el mismo lugar que Copérnico le da: conque así como quien traza un círculo sobre el papel mueve en círculo el pie trazador del compás, mas quien fija el papel o el tablero a un torno rotatorio, inmóvil el pie trazador o la pluma, traza asimismo idéntico círculo sobre la tabla que rueda, así también en esto la Tierra, según Copérnico, ciertamente mide a su paso con el movimiento de su cuerpo real un círculo que surca por medio de los círculos de Marte, exterior, y de Venus, interior. En Brahe, empero, el entero sistema planetario (en que se hallan entre los demás también los de Marte y Venus) da vueltas como el tablero en el torno, aplicando a su paso a la Tierra inmóvil, o a la pluma en el caso del torno, el intersticio entre los círculos de Marte y de Venus: y por este sistema de movimiento hace aquél que la Tierra, persistiendo inmóvil, señale en torno al Sol idéntico círculo, intermedio entre los de Marte y Venus, que traza en Copérnico, mas éste por movimiento verdadero de su cuerpo, quieto el sistema. Por ende, como la contemplación armónica considere los movimientos excéntricos de los planetas, o como vistos desde el Sol, fácilmente podrá ser que se entienda esto, que de hallarse algún observador en el Sol, móvil éste cuanto se quiera, y la Tierra, quieta cuanto se quiera (por conceder esto a Brahe), no parecerá menos que recorre el círculo del año por medio de los planetas y en un espacio de tiempo también intermedio. Por tal razón, aunque algún hombre exista tan débil de fe que no pueda concebir el movimiento de la Tierra entre los astros, ése podría gozar no menos con la contemplación excelsa de la más divina maquinaria, si cuanto quiera que oyere acerca del movimiento diario de la Tierra en su excéntrica lo aplicare a la apariencia del mismo desde el Sol, la que también presenta Tycho Brahe con la Tierra quieta.

Y no tienen, sin embargo, los verdaderos cultivadores de la filosofía samia justa causa para envidiar a los tales por compartir especulación tan sumamente deliciosa: que sería su gozo en muchas partes más perfecto, como causado por una perfección consumada de la especulación, si aceptaren también la inmovilidad del Sol y el verdadero movimiento de la Tierra.

Retengan pues los lectores, en primer lugar [I], ser hoy cosa certísima al alcance de todos los astrónomos que todos los planetas circunvalan al Sol, excepto la Luna, que a la sola Tierra tiene por centro —de cuyo orbe o curso ciertamente no es tanta la cantidad que pueda trazarse en esta carta en justa proporción a los demás—. Conque accede así entre los cinco restantes un sexto que, o por movimiento propio, quieto el Sol, o inmóvil él mismo y rotando todo el sistema planetario, traza un sexto círculo en torno al Sol.

En segundo lugar [II], que es cierto hacerse excéntricos todos los planetas, esto es, mudar el intervalo desde el Sol hasta ellos, de suerte que en una parte del círculo se hagan remotísimos a éste, [276] y en la opuesta vengan a estarle próximos. En el esquema anejo se han hecho tres círculos por cada planeta, ninguno de los cuales indica el camino excéntrico mismo del planeta, ciertamente, sino uno medio, como en Marte es *BE* igual a la órbita excéntrica, mirando a su diámetro más largo; más la órbita misma, como *AD*, toca por un costado a *AF*, el superior de los tres, en *A*, y por el opuesto costado, en *D*, al inferior *CD*. El círculo *GH* bosquejado en puntos, y trazado por el centro del Sol, indica el camino de éste según Tycho Brahe; que si se mueve por ese camino, absolutamente todos los puntos del entero sistema planetario aquí pintado se moverían por igual camino, en cada caso, el que les es propio. Y de estar uno de esos puntos, a saber, el centro del Sol, en una parte de su círculo, como aquí en la más baja, absolutamente todos los puntos del sistema estarán en las partes más bajas, cada cual de su círculo. Y aun se han juntado en uno los tres círculos de Venus por lo angosto del espacio disponible —lo que no entraba en mis propósitos.



En tercer lugar [III], rebusque el lector en mi *Misterio cosmográfico*, que edité veintidós años ha: el número de los planetas o de cursos en torno al Sol lo tomó el sapientísimo Fundador de las cinco figuras sólidas regulares, de las que escribiera Euclides ya hace algunos siglos el libro al que se llama *Elementos* por estar construido mediante una serie de proposiciones. Ahora bien, que no puedan ser más cuerpos regulares, esto es, que figuras planas regulares no puedan congregarse en sólido en más número que cinco, eso queda patente en el libro segundo de esa obra.

En cuarto lugar [IV], en lo que atañe a la proporción entre las órbitas planetarias, entre dos órbitas vecinas la proporción es siempre tal que fácilmente aparezca que todas y cada una de ellas se aproximan a una única proporción de orbes de una de las cinco figuras sólidas, a saber, la que hay entre el orbe a ella circunscrito y el orbe en ella inscrito: sin que no obstante sea lisa y llanamente igual, como antaño fui tan osado de prometer de la Astronomía finalmente perfeccionada. Pues de la absoluta demostración de los intervalos a partir de las observaciones de Brahe se desprendió luego que, aplicados los ángulos del cubo [277] al círculo más interior de Saturno, ciertamente los centros de los planos tocan, o casi, el círculo intermedio de Júpiter; y al tocar los ángulos del tetraedro el círculo más interior de Júpiter, los centros de los planos del tetraedro casi tocan el círculo más externo de Marte; y así, surgiendo los ángulos del octaedro de cualquiera de los círculos de Venus (reducidos los tres en angostísimo intervalo), los centros de los planos octaédricos penetran y descienden más hondo que el círculo más externo de Mercurio, sin venir no obstante hasta el círculo medio: y por último, que son del todo próximas a las proporciones entre orbes dodecaédricos e icosaédricos, iguales entre sí, las proporciones o intervalos entre Marte y la Tierra y entre los círculos de la Tierra y Venus, casi iguales si computamos desde el más interno de Marte al medio de la Tierra, pero al medio de Venus desde el medio de la Tierra. Pues en efecto el intervalo medio de la Tierra es medio proporcional entre el mínimo de Marte y el medio de Venus: sin embargo de que estas dos proporciones entre círculos de planetas siguen siendo mayores que las de aquellos pares de orbes en la figura; de suerte que los centros de los planos del dodecaedro no tocan el círculo más externo de la Tierra, ni los centros de los planos del icosaedro el de Venus, y no puede completarse ese hiato mediante el semidiámetro del orbe de la Luna añadido sobre el intervalo máximo de la Tierra, pero sustraído por debajo del mínimo. Pero sí se me alcanza ahí alguna otra proporción de figura; a saber, si del dodecaedro con excrecencias al que doy por nombre «Erizo», conformado por doce estrellas quincuangulares y con ello próximo a los cinco cuerpos regulares, si doce puntas de éste, digo, se colocan en el círculo más interior de Marte, entonces los lados de los pentágonos que son base cada uno de uno de los radios o puntas alcanzan a tocar el círculo medio de Venus. Más brevemente, los cónyuges cubo y octaedro no penetran dentro de sus orbes planetarios en absoluto; los cónyuges dodecaedro e icosaedro no alcanzan del todo a los suyos, y el tetraedro toca a uno y otro exactamente: en aquéllos hay un menos, en ésos, un más, y aquí, igualdad, en lo referente a intervalos de los planetas.

De donde se hace patente no ser traídas de las solas figuras regulares las proporciones entre los intervalos desde el Sol a los planetas. No se aparta, pues, del arquetipo suyo el Creador, mismísima fuente de la Geometría que, como escribió Platón, «practica la geometría eterna». Y esto mismo puede francamente colegirse de que todos los intervalos de un planeta múdanse por períodos fijos de tiempo: de suerte que un planeta cualquiera tiene dos intervalos más señalados desde el Sol, máximo y mínimo; y entre dos planetas puede darse una cuádruple comparación de tales intervalos, o de máximos, o de mínimos, o bien, entre los dos intervalos contrarios, de los más remotos entre sí o de los más próximos: así, hacen número de veinte las comparaciones de planetas vecinos por pares, cuando, al contrario, son sólo cinco las figuras sólidas. Mas en verdad está en consonancia con el Creador, si cuida de las proporciones de los orbes en general, cuidar también de la proporción entre los intervalos desde el Sol a cada uno, variables en aspecto; y que fuese tal cuidado idéntico en ambos casos, y conexo el uno al

otro: sopesado lo cual, obtendremos que han de ser varios los principios puestos por obra, a más de los cinco cuerpos regulares, para establecer orbes y diámetros y excentricidades juntamente.

En quinto lugar [V], para venir a los movimientos entre los cuales se han constituido armonías, de nuevo insisto a los lectores en que está demostrado por mí en mi comentario de Marte, a partir de certísimas observaciones de Brahe, que arcos diarios iguales en una misma excéntrica no se atraviesan con igual celeridad, pero que *esas demoras distintas en partes iguales de la excéntrica guardan la proporción de sus intervalos respecto al Sol, fuente del movimiento*; y viceversa, que supuestos tiempos iguales, pongamos un día natural en ambos casos, *los correspondientes arcos diarios verdaderos* [278] *de una órbita excéntrica mantienen proporción, la inversa de la proporción entre los dos intervalos respecto al Sol*. Ahora bien, demostrado está también por mí, al mismo tiempo, *ser elíptica la órbita del planeta, y estar el Sol*, fuente del movimiento, *en el otro foco de esa elipse*, y así resulta que el planeta, despachado *un cuadrante de todo el circuito desde su afelio*, mantiene un intervalo desde el Sol hasta él exactamente medio entre el máximo, en el afelio, y el mínimo, en el perihelio. De estos dos axiomas, empero, resulta que *el movimiento medio* diario del planeta *sea idéntico* al verdadero arco diario de su excéntrica en aquellos momentos en que el planeta está *en el final del cuadrante de la excéntrica*, computado desde el afelio, a pesar de que ese cuadrante verdadero siga semejando ser menor que el cuadrante justo. Más ampliamente, síguese que *dos arcos verdaderos cualesquiera de la excéntrica, en verdad igualmente distantes, uno, del perihelio, el otro, del afelio, juntos igualan a dos diarios medios*, y, por consiguiénte, comoquiera que la proporción de los círculos es la misma que la de los diámetros, *la proporción de un diario medio a todos los medios juntos* iguales entre sí que haya en el circuito entero *será la misma que entre un arco diario medio y todos los arcos excéntricos verdaderos juntos*, iguales en cuanto a número, mas entre sí desiguales. Y han de conocerse previamente estas cosas de los verdaderos arcos diarios de la excéntrica y de los verdaderos movimientos, a fin de que por ellas entendamos los movimientos aparentes, como para un ojo en el Sol.

En sexto lugar [VI], en cuanto atañe a arcos aparentes, como vistos desde el Sol, sabido es aun por la astronomía antigua que, de los movimientos verdaderos y también iguales entre sí, el que más lejos se aparta del centro del mundo (como movimiento que está en el *Afelio*) *semeja ser menor*, mirado desde el centro, y asimismo el que esté más cerca, como movimiento que *se halla en el Perihelio, semeja ser mayor*. Por ende, y comoquiera, además, que los arcos verdaderos diarios son mayores en lo próximo, por causa de la mayor celeridad del movimiento, y menores en el remoto afelio, por causa de su tardanza, ya demostré en los de Marte que *la proporción entre los arcos diarios aparentes de una excéntrica es con bastante precisión la proporción inversa de los cuadrados de sus intervalos respecto al Sol*. Tal como si el planeta en uno de sus días cuando está en afelio distare del Sol 10 partes de una medida cualquiera, y en el día opuesto, cuando está en el perihelio, 9 partes semejantes: de cierto que, visto desde el Sol, su adelanto aparente en el afelio habría de ser al adelanto aparente en el perihelio como 81 es a 100.

Ahora bien, esto es verdadero con estas cautelas: primera, que *no sean grandes los arcos de la excéntrica*, no sea que compartan distancias diversas muy diferentes, esto es, causen sensibles variaciones de la distancia desde sus términos a los ápices; luego, que *no sea sobremanera grande la excentricidad*, pues cuanto mayor la excentricidad,

y así, el arco, más aumentará su ángulo aparente allende la medida de su proximidad al Sol, por el teorema 8 de las *Ópticas* de Euclides, a pesar de que *en arcos pequeños una gran distancia es de nulo momento*, como advierto en mi *Óptica*, capítulo 11. Mas hay otra causa de que lo advierta aquí, pues *en torno a las anomalías medias el arco de la excéntrica se ofrece oblicuamente desde el centro del Sol*, oblicuidad que merma la magnitud aparente; tal como, al contrario, *en torno a los ápices, el arco se ofrece en recto al espectador*, a quien hacemos en el Sol. Cuando la excentricidad es harto grande, por tanto, perjudica sensiblemente a las proporciones de los movimientos; si aplicamos sin disminución el movimiento medio diario a la distancia media, parecerá el movimiento a la distancia media casi tanto cuanto es: como más abajo aparecerá en Mercurio. Cuéntanse todas estas cosas de forma más prolija en *Epitome Astronomiae Copernicanae*, libro quinto: habían de recordarse aquí por concernir a los mismísimos términos de la armonía celeste considerados cada uno por sí y separadamente.

En séptimo lugar [VII], si por ventura hubiere quien se topare con esos movimientos diarios que no aparecen [279] a quienes miren como desde el Sol, sino desde la Tierra, de los cuales trata el libro sexto del *Epitome Astronomiae Copernicanae*, ése sabrá que no tienen lisa y llanamente razón de ser en este asunto: ni deben, comoquiera que la Tierra no es fuente de los movimientos, ni pueden, comoquiera que el movimiento degenera, en cuanto a apariencias falaces, no meramente en semejar quieto o estacionario, pero aun retrógrado, razón por la que un sinfín de proporciones aplícase a todos los planetas simultáneamente y por igual. Por tanto, para que obtengamos con certeza cuáles proporciones establezca de suyo cada uno de los movimientos diarios de las verdaderas órbitas excéntricas (aunque sigan siendo aparentes como para un espectador en el Sol, fuente del movimiento) ha de retirarse primero de tales movimientos propios esa fantasía, común a todos los cinco, del movimiento anual adventicio —así nazca del movimiento de la Tierra misma, siguiendo a Copérnico, o del movimiento anual del entero sistema, siguiendo a Tycho Brahe— y someterse a inspección los movimientos propios de cada planeta así cribados.

En octavo lugar [VIII], hasta aquí hemos tratado de diferentes demoras o arcos de un mismo planeta. Hemos de vérnoslas ahora con los movimientos de dos planetas comparados, donde es menester tomar nota de la definición de los términos que habrán de sernos necesarios. Damos el nombre de *ápices próximos* de dos planetas al perihelio del superior y al afelio del inferior a pesar de que no caigan hacia idéntico costado del mundo, sino en distinto y acaso contrario. Entiende, lector, por *movimientos extremos* el más tardo y el más raudo en el entero circuito planetario; de éstos, *convergentes o conversos*, los que se dan en los ápices próximos de los dos, esto es, en el perihelio del planeta superior y afelio del inferior; *divergentes o diversos*, los que en ápices opuestos, esto es, en el afelio del superior y perihelio del inferior. De nuevo ha de despacharse y traerse aquí, por tanto, alguna parte de mi *Misterio cosmográfico*, suspensa hace veintidós años por no lucir aún la cosa con claridad, habiendo dado con los verdaderos intervalos de los orbes, y, merced a las observaciones de Tycho Brahe y la continua labor de mucho tiempo, al cabo, la genuina proporción entre los tiempos periódicos de los orbes:

tarde miró uno sin maña,
miró, no obstante, y tras largo tiempo advino.

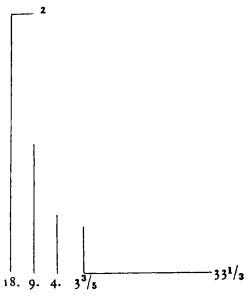
Y si pides el preciso momento, concibiose en mi ánimo a ocho de marzo del año de mil seiscientos dieciocho, mas desdichadamente llamada a cálculo y desterrada por falsa, y finalmente recogida a 15 de mayo, tomados nuevos ímpetus, puso en fuga a las sombras de mi mente, conspirando a ello juntamente tanta comprobación y fatiga mías de diecisiete años con las observaciones de Brahe, y tantas cavilaciones en ellas, de suerte que primero creí soñar y haber tomado de antemano lo buscado entre los principios de mi búsqueda. Mas es cosa certísima y en todo exacta que *la proporción que existe entre los tiempos periódicos de dos planetas cualesquiera sea precisamente la proporción sesquiáltera* [de la potencia 3/2] *entre las distancias medias*, esto es, *entre los orbes mismos*; atendiendo también, no obstante, a que *la media aritmética de ambos diámetros en sendas órbitas elípticas sea algo menor que el más largo de entrambos*. Y así, si alguno extrajere de dos *períodos*, digamos que el de la Tierra, que es un año, y el de Saturno, que es treinta, la parte tercia de la proporción de entrambos, esto es, las *raíces cúbicas*, y luego doblare tal proporción multiplicando *al cuadrado* las raíces cúbicas, *ése obtendría en los números resultantes la ajustadísima proporción entre las distancias a la Tierra y a Saturno desde el Sol*.[1] Pues raíz cúbica de 1 es 1, cuyo cuadrado es 1; y mayor que 3 es la cúbica de 30, cuyo cuadrado, mayor que 9. Y la distancia media a Saturno desde el Sol, poco más alta [280] del nónculo [nueve veces] de la distancia media a la Tierra desde el Sol. Será necesario más abajo, en el capítulo 9, el uso de este teorema para la demostración de las excentricidades.

En noveno lugar [IX], si quisieres medir luego con la misma pértica, por así decir, la verdadera jornada que anda a diario cada planeta a través del éter, dos serán las proporciones a conjugar: una, la de los verdaderos arcos diarios de la excéntrica entre sí (no de los aparentes), la otra, la proporción entre los intervalos medios desde el Sol a cada una de las excéntricas (por cuanto es la misma que la proporción entre amplitudes de los orbes), esto es, *ha de multiplicarse el verdadero arco diario de cada planeta por el semidiámetro de su orbe*, hecho lo cual aparecerán números idóneos para inquirir si esos trayectos establecen proporciones armónicas.

En décimo lugar [X], para que obtengas en verdad cuánta parezca ser cualquiera de esas jornadas diarias para un ojo supuesto en el Sol, aun cuando puedes pedírselo inmediatamente a la Astronomía, no obstante se hará patente asimismo si aumentas la proporción entre jornadas mediante la proporción inversa entre intervalos, no ya medios, sino los verdaderos en una posición cualquiera de la excéntrica: *multiplica la jornada que recorre el planeta superior por el intervalo desde el Sol al planeta inferior, y a la inversa, la jornada del inferior por el intervalo desde el Sol al superior*.

En onceno lugar [XI], dados los movimientos aparentes del uno en afelio y del otro en perihelio, o, en su caso, la contraria, a partir de ellos se extraen no menos las proporciones entre intervalos desde el perihelio de uno al afelio del otro; donde conviene empero sean conocidos previamente los movimientos medios, como proporción inversa entre tiempos periódicos, de los que se extrae la proporción entre orbes por el artículo VIII de más arriba: *tomada entonces la media proporcional entre movimiento aparente y medio de uno u otro, esa misma media es al semidiámetro de su respectivo orbe, ya patente, como el movimiento medio es a la distancia o intervalo buscado*. Sean tiempos periódicos de dos planetas 27 y 8: conque la proporción del movimiento medio

1. Pues ya en los *Comentarios sobre Marte*, capítulo 48, fol. 232, probé ser esta media aritmética o bien el diámetro del círculo que iguala en longitud a la órbita elíptica, o bien el próximo menor.

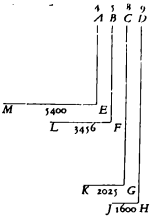


diario de aquél a éste es la que hay de 8 a 27, por lo que serán los semidiámetros de sus orbes como 9 es a 4. Pues raíz cúbica de 27 es 3, de 8 es 2, y de esas raíces, 3 y 2, son cuadrados 9 y 4, sean ahora movimientos aparentes del uno en afelio, 2, y del otro en perihelio, 33 con un tercio. Medias proporcionales entre los movimientos medios 8 y 27 y esos movimientos aparentes serán 4 y 30. Conque si la media 4 da por distancia media del planeta 9, entonces el movimiento medio 8 da un intervalo de 18 en el afelio, correspondiente al movimiento aparente 2; y si la otra media 30 da por distancia media del otro planeta 4, entonces su movimiento medio 27 da un intervalo de 33 con tres quintos en el perihelio. Digo, por consiguiente, ser la distancia del primero en afelio a la distancia del segundo en perihelio como 18 es a 33 con tres quintos. De donde se hace patente que, dueños ya de las armonías entre dos movimientos extremos, y prescritos los tiempos periódicos de ambos, están necesariamente dados los intervalos extremo y medio, por lo que también las excentricidades.

Duodécimo [XII]: ocurre también dar con el *movimiento medio* del planeta a partir de los diferentes movimientos extremos. *No es, en efecto, éste la exacta media aritmética entre los movimientos extremos, ni exactamente la media geométrica, sino tanto menor de la geométrica cuanto ésta de la media* [aritmética] *entre una y otra.* Sean dos movimientos extremos 8 y 10: el movimiento medio será menor que 9, y así también menor que la raíz cuadrada de 80 en otro tanto, cuanto la mitad de lo que va de uno a otro, de 9 a la raíz cuadrada de 80. Y así también, como sea el movimiento en el afelio 20 y en el perihelio 24, será el movimiento medio menor que 22, y aun menor que la raíz cuadrada de 480 en otro tanto, como la mitad de lo que va entre esta raíz y 22. Hallará este teorema uso en lo que sigue.

[281] En decimotercer lugar [XIII], de lo antes expuesto se demuestra esta proposición, que habrá de sernos harto necesaria, a saber: que al modo en que la proporción entre movimientos medios de dos planetas es la proporción inversa de las potencias $^3/_2$ de los orbes, así *la proporción entre dos movimientos aparentes extremos convergentes siempre se quedará falta respecto a la proporción entre las potencias $^3/_2$ de los intervalos correspondientes a aquellos* movimientos extremos; y que, *en tanta proporción en cuanta las* dos *proporciones entre los* dos *intervalos y los correspondientes* dos *intervalos medios o semidiámetros de los* dos *orbes, multiplicadas entre sí, resulten menos que la proporción entre las raíces cuadradas de los orbes, en otra tanta proporción será mayor la proporción entre* los dos *movimientos* extremos *convergentes que la proporción entre los intervalos correspondientes: si aquella proporción compuesta, empero, superare la mitad de la proporción entre orbes, entonces la proporción entre movimientos convergentes sería menor que la proporción entre sus intervalos.**

*. Kepler siempre mide la magnitud de una proporción del término más grande al más pequeño, antes que del antecedente al consecuente como hacemos hoy. Por ejemplo, cuando Kepler dice 2:3, es lo mismo que 3:2, y 3:4 es mayor que 7:8.



Sea la proporción entre orbes DH:AE, y entre movimientos medios, HI:EM, potencia 3/2 de la inversa de la primera. Sea allí el intervalo mínimo en su orbe CG, aquí el intervalo máximo BF; y compuestas las proporciones DH:CG y BF:AE, sean primeramente menores que la potencia 1/2 de DH:AE. Y sean asimismo el movimiento aparente del superior en el perihelio GK y del inferior en el afelio, FL, de tal suerte que sean movimientos extremos convergentes.

Afirmo ser entonces* GK:FL = BF:CG; $BF^{3/2}$:$CG^{3/2}$. Por cuanto HI:GK = CG^2:DH^2; y FL:EM = AE^2:BF^2. Por ende, HI:GK comparada FL:EM = CG^2:DH^2 comp. AE^2:BF^2. Mas CG:DH comp. AE:BF < $AE^{1/2}$:$DH^{1/2}$; por la proporción fija de defecto que se asumiera. De donde también HI:GK comp. FL:EM $AE^{3/2}$:$DH^{3/2}$; AE:DH; con una proporción de defecto que es cuadrado de la anterior. Mas, por el número VIII, HI:EM = $AE^{1/2}$:$DH^{1/2}$.

Por consiguiente, la proporción que es más pequeña en otro tanto cuanto el cuadrado total de la proporción de defecto divídase por la proporción entre las potencias 3/2, esto es, HI:EM comp. GK:HI comp. EM:FL $AE^{1/2}$:$DH^{1/2}$; con el exceso al cuadrado. Mas HI:EM comp. GK:HI comp. EM:FL = GK:FL. Por ende, GK:FL $AE^{1/2}$:$DH^{1/2}$, con el exceso cuadrado. Pero AE:DH = AE:BF comp. BF:CG comp. CG:DH, y CG:DH comp. AE:BF $AE^{1/2}$:$DH^{1/2}$ con el defecto simple. Por ende, BF:CG $AE^{1/2}$:$DH^{1/2}$ con el exceso simple. Mas GK:FL $AE^{1/2}$:$DH^{1/2}$ pero con el exceso cuadrado. Pero el exceso cuadrado es mayor que el exceso simple. Por ende la proporción entre movimientos GK a FL es mayor que la proporción entre los correspondientes intervalos BF a CG.

De modo francamente idéntico demuéstrase, al contrario, que si los planetas se aproximan en G y F más que las distancias medias en H y E, de suerte que la proporción entre distancias medias, DH:AE, mengüe hasta ser menor que la proporción entre sus potencias $DH^{1/2}$:$AE^{1/2}$, entonces la proporción de movimientos GK a FL se hace menor que la proporción entre sus intervalos correspondientes BF a CG. No habiendo de hacerse otra cosa sino trocar las palabras mayor por menor, más que por menos que, exceso por defecto, y a la inversa.

Puesto en cifras como sigue, por ser 2/3 la raíz cuadrada de 4/9; y 5/8 aún mayor que 2/3 en tanta proporción de exceso cuanta 15/16; y la proporción de 8 a 9 [282] al cuadrado, la de 1.600 a 2.025, esto es, de 64 a 81; y la proporción de 4 a 5, es la de 3.456 a 5.400, esto es, de 16 a 25; y al ser, por último, la potencia 3/2 de la proporción 4:9 es la de 1.600 a 5.400, esto es, de 8 a 27; por ser así, se sigue también que la proporción de 2.025 a 3.456, esto es, de 75 a 128, es aún mayor que la de 5 a 8, esto es, que de 75 a 120, en tanta proporción de exceso cuanta de 120 a 128, esto es, 15 a 16; de suerte que así la proporción entre movimientos convergentes, 2.025 a 3.456, supera a la proporción inversa entre los correspondientes intervalos, 5 a 8, en otro tanto cuanto ésta, 5 a 8, supera a la raíz cuadrada de 4 a 9, proporción entre orbes, esto es, 2 a 3. O lo que redunda en lo mismo: la proporción entre los dos intervalos convergentes es una media entre la proporción de las raíces cuadradas de los orbes y la inversa de los correspondientes movimientos.

De donde podrás entender, además, que la proporción entre los movimientos divergentes sea mucho mayor que la proporción de las potencias 3/2 de los orbes, comoquie-

* En todo este pasaje se ha optado por actualizar el lenguaje utilizado por Kepler, mucho más engorroso.

ra que en esta última entren proporciones al cuadrado, entre el intervalo en afelio y el intervalo medio, y entre éste y el intervalo en perihelio.

4. EN QUÉ COSAS TOCANTES AL MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS HÁLLANSE EXPRESADAS POR EL CREADOR LAS PROPORCIONES ARMÓNICAS, Y DE QUÉ MODO

Así pues, retiradas las fantasías de retrogradación y movimiento estacionario, y discernidos los movimientos propios de los planetas en sus genuinas órbitas excéntricas, restan en ellos hasta aquí estas distintas cosas: 1) Intervalos desde el Sol. 2) Tiempos periódicos. 3) Arcos excéntricos diarios. 4) Demoras en sus arcos diarios. 5) Ángulos en el Sol, o arcos diarios aparentes como para espectadores sitos en el Sol. Y de nuevo todas ellas (excepto los tiempos periódicos) son variables en todo el circuito, más en las longitudes medias, pero mínimamente en los extremos, cuando, invertido el movimiento, retornan hacia la opuesta; que, cuando el planeta está en lo más bajo y más vecino al Sol, y con ello, se encuentra en un grado mínimo de la excéntrica, y a la inversa, hace en un día su arco más grande en la excéntrica y más veloz parece desde el Sol, entonces permanece el movimiento algún tiempo en tal vigor sin variación sensible. Hasta que, superado el perihelio, paulatinamente comienza el planeta a retroceder desde el Sol en línea recta; y simultáneamente, se encuentran entonces más días en cada grado de la excéntrica. O bien, si consideras el movimiento de un día, en el siguiente día también adelanta menos y desde el Sol semeja mucho más tardo, hasta que se aproxime al ápice extremo, poniendo un intervalo máximo con el Sol; o bien, por el contrario, en un día hace su mínimo arco y también ofrece su movimiento una apariencia mucho menor y la mínima en su entero ámbito.

Y finalmente todas estas cosas están en un solo planeta en tiempos diversos, o en planetas diversos; de suerte que, supuesto un sinfín de tiempo, todas esas afecciones del circuito de un planeta concurran y puedan compararse en el mismo momento con todas las del circuito de otro, y entonces, comparadas entre sí las excéntricas enteras, tienen idéntica proporción que los semidiámetros de las mismas, o que sus intervalos medios; aun así, arcos de dos excéntricas designados de igual modo o con idéntico número tienen empero longitudes verdaderas desiguales en proporción a la totalidad de las excéntricas. Así, un grado en la esfera, digamos, de Saturno es casi el doble de un grado en la esfera de Júpiter. Y viceversa, arcos diarios de excéntricas expresados en números astronómicos no muestran la proporción de las verdaderas jornadas que los globos hacen en un día [283] por el etéreo hálito, porque las unidades singulares denotan en el círculo más amplio del planeta superior una parte mayor de recorrido, pero en el círculo inferior, más angosto, una menor; de suerte que se llega ya a la parte sexta de estas consideraciones, de las jornadas que dos planetas recorren a diario.

Primeramente, pues, tomemos la segunda de las cosas arriba expuestas, a saber: los tiempos periódicos de los planetas, los cuales contienen las sumas recogidas de todas las demoras de todos los grados en el ámbito entero, largas, medias y pequeñas. Y desde antaño hasta nosotros se desprende que los planetas despachan sus recorridos en torno al Sol como sigue en la tabla:

	Días	*Luego diarios medios*			
		Escrúpulos pros. de día [Minutos]	*Escrup. primeros [Minutos]*	*segundos*	*terceros*
Saturno	10.759	12	2	0	27
Júpiter	4.332	37	4	59	8
Marte	686	59	31	26	31
Tierra con la Luna	365	15	59	8	11
Venus	224	42	96	7	39
Mercurio	87	58	245	32	25

Tiempos periódicos, por tanto, en que no hay ninguna proporción armónica, lo que se echa de ver fácilmente si los períodos mayores se parten de continuo por la mitad y los menores se duplican de continuo de suerte que, disimulados los intervalos de diapasón [octava], podamos descubrir aquellas que se encuentran dentro de una octava.

	Saturno	*Júpiter*	*Marte*	*Tierra*	*Venus*	*Mercurio*	
	10.759D 12'						
	5.379D 36'	4.332D 37'				87D 58'	
Mitades	2.689D 48'	2.166D 19'			224D 42'	175D 56'	Dobles
	1.344D 54'	1.083D 10'	686D 59'	365D 15'	449D 24'	351D 52'	
	672D 27'	541D 35'					

Todos los que ves últimos aborrecen de proporción armónica, y semejan inefables. Tome, en efecto, el número de los días de Marte, 687, la medida 120, que es el número de divisiones del acorde; con esta medida vendrá a ser el de Saturno más pequeño que 117 por una parte sedécima [1/16]; el de Júpiter, menor que 95 por una parte octava; el de la Tierra menor que 64; el de Venus, más que 78 por el doble; y el de Mercurio, el cuádruplo, más 61. Y no forman proporción armónica alguna con 120 esos números, sino vecinos suyos, 60, 75, 80 y 96. Y así, de lo que Saturno tiene 120, tiene Júpiter alrededor de 97; la Tierra, por encima de 65; Venus, más de 80; y Mercurio, menos de 60. Y de lo que Júpiter tiene 120, la Tierra, menos de 81; Venus, menos de 100; y Mercurio, menos de 78. Ítem más, de lo que Venus tiene 120, la Tierra tiene menos de 98, y Mercurio, más de 94. En fin, de lo que tiene la Tierra 120, tiene Mercurio menos de 116. Mas si aquí valiera la libre elección de proporciones, hubiéranse tomado en todo armonías perfectas, no aumentadas y disminuidas. No se desprende de aquí, por tanto, haber querido Dios Creador introducir proporciones armónicas entre estas demoras sumadas en los tiempos periódicos.

[284] Y comoquiera que sea conjetura probabilísima (como fundada que está en demostraciones geométricas y en la doctrina de las causas de los movimientos planetarios expuesta en los *Comentarios sobre Marte*) que la mole de los cuerpos de los planetas esté en proporción a los tiempos periódicos, de suerte que el globo de Saturno sea en torno al trigécuplo [30 veces] del globo de la Tierra, el de Júpiter, duodécuplo [12 veces], el de Marte, menos del duplo, y el de la Tierra, sesquialtero [vez y media: 3/2] mayor del globo de Venus y cuádruplo del de Mercurio, tampoco serán, pues, armónicas las proporciones de los cuerpos.

Ahora bien, como nada establecería Dios sin pulcritud geométrica de no venir ello ligado a otra ley más principal y de necesidad, fácilmente colegimos venirles a los tiempos periódicos su longitud, y con ello sus moles a los cuerpos móviles, de algo que está en el arquetipo primero; para expresar lo cual se han adaptado a tales medidas estas moles y períodos, a primera vista desproporcionados. Mas he dicho arriba estar compuestos los períodos de las demoras más largas, las medianas y las más tardas: es, por tanto, oportuno hallar pulcritud geométrica en tales demoras, o si haya algo anterior en la mente del Artífice. Las proporciones entre demoras, empero, van ligadas a las proporciones entre arcos diarios, por lo que los arcos tienen la proporción inversa de la proporción entre demoras. Una vez más, dijimos ser idénticas las proporciones entre demoras y las proporciones entre intervalos de un planeta cualquiera. Así pues, en lo que atañe a cada planeta singular será, por tanto, una misma la consideración de esas tres cosas: los arcos, las demoras en arcos iguales, y lo remoto de los arcos al Sol, o lo que es igual, sus intervalos. Y por ser todo ello variable en los planetas, no puede haber duda alguna de que si alguna pulcritud geométrica les cupiera en suerte, por el certero consejo del Sumo Artífice la habrían recibido en sus extremos, como intervalos en afelio y perihelio, y no en los intervalos medios interpuestos. Pues dadas las proporciones entre intervalos extremos, no es menester ya deliberación para que las proporciones intermedias se adapten a número fijo; pues síguense por sí solas de la necesidad del movimiento del planeta, desde un extremo, por todo lo intermedio, hasta el otro.

Son, por consiguiente, éstos los intervalos extremos, averiguados mediante las afinadísimas observaciones de Tycho Brahe por el método expuesto en los *Comentarios sobre Marte* y por el pertinaz estudio de diecisiete años.

[285] Por consiguiente, ninguno de los intervalos extremos de los planetas alude de suyo a armonía alguna, fuera de los de Marte y Mercurio.

Mas si comparas entre sí los intervalos extremos de varios planetas, comienza ya a refulgir alguna luz de armonía. Pues los extremos divergentes de Saturno y Júpiter forman poco más que la octava; y los convergentes, un promedio entre sextas mayor y menor. Así, los intervalos extremos divergentes de Júpiter y Marte abrazan casi un disdiapasón [doble octava]; y los convergentes, más o menos un diapente con diapasón [una quinta con una octava]. Mas los extremos divergentes de la Tierra y Marte, un tanto más de una sexta mayor, los convergentes, un diatesarón holgado [cuarta aumentada]. En la siguiente cópula, de la Tierra con Venus, de nuevo hay entre los convergentes la misma cuarta aumentada, mas entre los divergentes nos defrauda toda proporción armónica: pues, en efecto, es menor que una semioctava —si se permite la expresión—, esto es, menor que la raíz cuadrada de 2:1. Por último, entre los divergentes de Venus y Mercurio hay poco menos que un compuesto de octava y tercera menor; entre los convergentes, una quinta escasamente holgada.

*Intervalos comparados con proporciones armónicas**

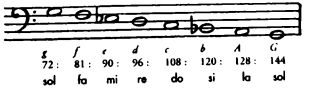
Entre dos Converg.	*Diverg.*			*En cada uno*
		Saturno	En afelio 10.052. a.	A. Más que un tono menor $^{10.000}/_{9.000}$
$^{a}/_{b} = {}^{2}/_{1}$	$^{b}/_{c} = {}^{5}/_{3}$		En perihelio 8.968. b.	B. Menos que un tono mayor $^{10.000}/_{8.935}$
		Júpiter	En afelio 5.451. c.	C/D. Ninguna proporción concordante, pero casi la discordante $^{11}/_{10}$, o dism. de la armónica $^{6}/_{5}$
$^{c}/_{f} = {}^{4}/_{1}$	$^{d}/_{e} = {}^{3}/_{1}$		En perihelio 4.949. d.	
		Marte	En afelio 1665. e.	E/F. Aquí $^{1665}/_{1338}$ sería la armónica $^{6}/_{5}$, y $^{1665}/_{1332}$ sería $^{5}/_{4}$
$^{e}/_{h} = {}^{5}/_{3}$	$^{f}/_{g} = {}^{17}/_{20}$		En perihelio 1382. f.	
		Tierra	En afelio 1.018. g.	G. Aquí $^{1020}/_{980}$ sería la Diesis $^{25}/_{24}$
$^{g}/_{k} = \frac{2}{1\frac{1}{2}}$ vis $\frac{1000}{710}$	$^{h}/_{i} = {}^{27}/_{20}$		En perihelio 982. h.	H. No puede, pues, haber Diesis.
		Venus	En afelio 729. i.	I. Menos de una sesquicoma.
$^{i}/_{m} = {}^{12}/_{5}$	$^{k}/_{l} = {}^{243}/_{160}$		En perihelio 719. k.	K. Más de una tercera parte de Diesis.
		Mercurio	En afelio 470. l.	L/M. $^{243}/_{160}$, más de una quinta, menos que la
			En perihelio 307. m.	Armónica $^{8}/_{5}$.

*. Elliott Carter Jr. anota cómo a lo largo de este texto se ha traducido *concinna* e *inconcinna* [de *concinno*, ajustar, aderezar con esmero] por «concordante» y «discordante». Kepler usa *Concinna* habitualmente para todo intervalo que caiga dentro del «sistema natural» o entonación justa de la escala; *Inconcinna* se refiere a toda proporción que quede fuera de este sistema. *Consonans* y *disonans* (consonante y disonante) se refieren a cualidades que pueden aplicarse a intervalos dentro del sistema musical, en otras palabras, a «concordantes». «*Harmonia*» se usa a veces en el sentido de «concordancia», y otras, en el de «consonancia».

«*Genus durum*» y «*genus molle*» se traducen o bien como «modo mayor» y «modo menor», o bien como «escala mayor» y «escala menor», o bien como «tipo mayor» o «tipo menor» (de consonancias). El uso de «*modus*» para referirse a los modos eclesiásticos se da sólo en el capítulo 6.

Como no cabe aplicar estrictamente nuestros actuales términos musicales a la música de los siglos diecisiete y dieciocho, será útil aquí una breve explicación. El material está tomado del libro tercero de las *Armonías del mundo* de Kepler.

Systema octavae in cantus molli: Sistema de octava en escala menor



Por consiguiente, si bien ahí un intervalo se desviaba poco más lejos de proporciones armónicas, ello no obstante fue este buen suceso invitación a seguir adelante. Ahora bien, mis razonamientos eran éstos. Primero, en tanto en cuanto esos intervalos son longitudes sin movimiento, no se prestan adecuadamente a examen que persiga proporciones armónicas, por ser el movimiento más habitual sujeto de armonía a causa de celeridad y tardanza. Y después, que en tanto en cuanto son diámetros de orbes es

---

Proporción entre longitudes de cuerda:

In cantu duro: En la escala mayor

Proporción entre longitudes de cuerda:

Como en toda música, estas escalas pueden repetirse en una o varias escalas más altas. Las proporciones se reducirían entonces a la mitad, esto es:

Varios de los intervalos que Kepler considera son éstos:

80:81 Comma (de Dídimo)	Diferencia entre tonos enteros, mayor y menor (8/9 – 9/10)
24:25 Diesis	Diferencia entre [Mi-Mi bemol], o [Si-Si bemol], o entre un semitono y un tono menor entero (15/16 - 9/10)
128:135 Lemma	Diferencia entre un semitono y un tono mayor entero (15/16 – 8/9)
243:256 Lemma de Platón	No se encuentra en este sistema sino en la afinación pitagórica
15:16 Semitono	En modo menor, entre [Mi bemol-Re, Si bemol-La] En modo mayor, entre [Mi-Re, Si-La]
9:10 Tono menor entero	En modo menor, entre [Fa-Mi bemol] y entre [Do-Si bemol] En modo mayor, entre [Mi-Re] y entre [Si-La]
8:9 Tono mayor entero	En modo menor, entre [Sol-Fa, Re-Do, La-Sol] En modo mayor, entre [Sol-Fa, Re-Do, La-Sol]
27:32 Tercera disminuida	En modos menor y mayor, entre [Fa-Re] y entre [Do-La]
5:6 Tercera menor	En modo menor, entre [Mi bemol-Do] y entre [Si bemol-Sol] En modo mayor, entre [Sol-Mi] y entre [Re-Si]
4:5 Tercera mayor	En modo menor, entre [Sol-Mi bemol] y entre [Re-Si bemol] En modo mayor, entre [Mi-Do] y entre [Si-Sol]

de creer que más pueda ser habida en ellos la misma razón que en los cinco cuerpos regulares, por analogía: porque tal razón entre orbes celestes y cuerpos geométricos sólidos, envueltos en materia celeste, como quiere la Antigüedad, o a envolver sucesivamente por la aglomeración de muchos giros, es la misma que hay de los círculos celestes y demás espacios en que hay movimiento a las figuras planas inscribibles en un círculo (que engendran la armonía). Luego si armonías buscamos, no sea en aquellos intervalos que son semidiámetros de orbes, pero en aquellos que son medida de

64:81 Ditono (Tercera pitagórica)	En modos mayor y menor, entre [La-Fa]
243:320 Cuarta pequeña	Inversión de la quinta grande, *vid. infra*.
3:4 Cuarta justa	En modo menor, entre [Sol-Re], entre [Fa-Do], entre [Mi bemol-Si bemol], entre [Re-La] y entre [Do-Sol] En modo mayor, entre [Sol-Re], entre [Fa-Do], entre [Mi-Si], entre [Re-La] y entre [Do-Sol]
20:27 Cuarta grande	En modo menor, entre [Si bemol-Fa] En modo mayor, entre [La-Mi]
32:45 Cuarta aumentada	En modo menor, entre [La-Mi bemol] En modo mayor, entre [Si-Fa]
45:64 Quinta disminuida	En modo menor, entre [Mi bemol-Fa] En modo mayor, entre [Fa-Si]
27:40 Quinta pequeña	En modo menor, entre [Fa-Si bemol] En modo mayor, entre [Mi-La]
2:3 Quinta justa	En modo menor, entre [Sol-Do] y entre [Re-Sol] En modo mayor, entre [Sol-Do] y entre [Re-Sol]
160:243 Quinta grande	Compuesta de ditono y tercera menor 64/81 × 5/6
81:128 Sexta menor imperfecta	En modos mayor y menor, entre [Fa-La]
5:8 Sexta menor [0'625]	En modo menor, entre [Mi bemol-Sol] y entre [Si^{bx} - Re] En modo mayor, entre [Sol-Si] y entre [Sol-Si, Do'-Mi]
3:5 Sexta mayor [0'600]	En modo menor, entre [Sol-Si bemol] y entre [Do'-Mi bemol] En modo mayor, entre [Mi-Sol] y entre [Si-Re]
64:27 Sexta mayor imperfecta	En modo menor, entre [Re'-Fa] y entre [La-Do] En modo mayor, entre [Re'-Fa] y entre [La-Do]
1:2 Octava	Entre [Sol-Sol, La-La, Si-Si, Si bemol-Si bemol]

Todos estos son intervalos simples. Cuando se añaden una o más octavas a algún intervalo simple, el intervalo resultante es «compuesto»

1:3 igual a $^1/_2 \times {}^2/_3$: octava y quinta justa.

3:32 igual a $(^1/_2)^3 \times {}^3/_4$: tres octavas y cuarta justa.

1:20 igual a $(^1/_2)^4 \times {}^{16}/_{20}$: cuatro octavas y tercera mayor.

Concordantes: todos los intervalos de Diesis para abajo en la lista anterior.

Consonancias: terceras y sextas mayores y menores, cuarta justa, quinta y octava.

Consonancias «adulterinas»: tercera disminuida, ditono, cuarta y quinta pequeñas y grandes, sexta menor imperfecta y sexta mayor imperfecta.

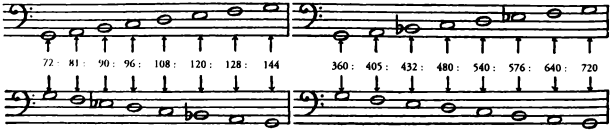
Disonancias: todos los demás intervalos.

movimiento, esto es, antes bien en los movimientos mismos. No pueden tomarse sin más por semidiámetros de los orbes otros intervalos que los medios; mas nosotros tratamos de los extremos. No tratamos, pues, de intervalos mirando a los orbes, sino a los movimientos.

Así pues, como por esta causa hubiera pasado yo a comparar movimientos extremos, mantuviéronse primero las proporciones de los movimientos en idéntica magnitud que antes tuvieran las de los intervalos, solamente que inversas; razón por la cual se han hallado también entre movimientos, como antes, algunas proporciones discordantes y ajenas a armonía alguna. Nuevamente, empero, juzgué haber merecido lo que encontré, habiendo sido capaz de comparar entre sí arcos de excéntrica, que ni son expresados y numerados por medidas correspondientes a una misma magnitud, sino que se numeran por grados y minutos que son en planetas diversos de diversa magnitud, ni tampoco desde lugar alguno es su apariencia tanta cuanta dice su número; de no ser tan sólo en el centro de cada excéntrica, por ningún cuerpo sustentado, y donde por ende es también increíble haber sentido o instinto natural alguno, en tal lugar del mundo, capaz de percibir tal apariencia; más aún, imposible, si comparaba los arcos excéntricos de diversos planetas con la causa de su apariencia en centros para cada cual diversos; empero, comparadas magnitudes aparentes diversas, en un lugar del mundo debían aparecer de tal suerte que aquello que tenga la facultad de compararlas esté presente en ese lugar de su común aparición. Juzgué, pues, haber de arrancar de mi ánimo la apariencia de esos arcos excéntricos, o bien haber de formarla de otro modo. Y vi que, si hubiere de arrancar tal apariencia y volver mi mente a las jornadas recorridas por los planetas, sería menester usar de aquel precepto que expuse más arriba, en este capítulo, número 9. [286] Conque multiplicados los arcos diarios de las excéntricas por los intervalos medios de los orbes produjeron estas jornadas:

A lo largo de esta obra, y a la manera de los teóricos de su tiempo, Kepler usa las proporciones de las longitudes de cuerda antes que las proporciones entre vibraciones como hoy es usual. Las longitudes, por supuesto, son inversamente proporcionales a las vibraciones. Esto es, una longitud 4:5 se expresa en vibraciones como 5:4. Esto cuenta para el orden descendente de la escala, que sigue el orden numérico ascendente. Es interesante el hecho de que las escalas mayor y menor de Kepler son mutuamente inversiones, y de aquí que, expresadas en proporciones de vibración, estén en orden opuesto al de las proporciones de longitud:

Notas resultantes de proporciones de vibración



Notas resultantes de proporciones de longitud

Se ha escogido un tono *G* [Sol] arbitrario para situar estas proporciones. Éste *g* o «gamma» era habitualmente el tono más grave de la gama musical en el siglo XVI.

		Movimientos diarios	*Intervalos medios*	*Jornada recorrida por día*
Saturno[1]	en afelio	1'53"	9.510	1.075
	en perihelio	2'7"0		1.028
Júpiter	en afelio	4'44"	5.200	1.477
	en perihelio	5'15"		1.638
Marte	en afelio	28'44"	1.524	2.627
	en perihelio	34'34"		3.161
Tierra	en afelio	58'6"0	1.000	3.486
	en perihelio	60'13"		3.613
Venus	en afelio	95'29"	724	4.148
	en perihelio	96'50"		4.207
Mercurio	en afelio	201'0"0	388	4.680
	en perihelio	307'3"0		7.148

En lo que atañe al camino diario de cada uno, conviene, pues, que las proporciones comprendidas sean de idéntica magnitud que antes fueran en los intervalos, mas en cuanto a su especie, inversas: que, como queda dicho, los arcos de la excéntrica tienen proporción inversa de la proporción de sus intervalos respecto al Sol.

Sin embargo, si consideramos las jornadas en los dos extremos, ya diversos, ya conversos, aparecen mucho menos armónicas que antes, cuando considerábamos los arcos.

Y en efecto, si sopesamos la cosa sensatamente con mejor diligencia, es harto inverosímil haber procurado armonía el Creador Sapientísimo especialmente a esas jornadas planetarias. Pues si son armónicas las proporciones de sus jornadas, serán todas las restantes que los planetas tengan, coaccionadas por su jornada y atadas a ella, de suerte que no haya otro lugar en que procurar armonías si así placiere. Mas ¿a qué bien serviría haber armonías entre jornadas?, o ¿quién habría de percibirlas? Dos cosas son las que nos hacen patentes armonías entre las cosas de la naturaleza: o la luz, o el sonido; recibida aquélla por los ojos, o por ocultos sentidos análogos a ojos, éste, por los oídos; ocupada en cuyas especies la mente, o por instinto (en lo que abunda el libro cuarto), o por raciocinio astronómico o armónico, discierne lo pulido de lo tosco, lo concordante de lo discordante. Ahora bien, sonidos no existen en los cielos, ni es tan turbulento el movimiento que suscite estruendo el roce en el hálito etéreo. Queda la luz: si debe enseñar ésta acerca de los caminos de los planetas, lo enseñaría a los ojos, o a sensorio análogo a ellos situado en lugar cierto; y a fin de que la luz por sí misma enseñe al punto, parece oportuno asista algún sentido enfrente. Habrá, pues, sentido en el mundo todo; a fin, claro es, de que simultáneamente asista uno y lo mismo a los movimientos de los planetas todos. Pues aquella vía, desde las observaciones por larguísimos rodeos de geometría y aritmética, a través de las proporciones de los orbes y lo demás que an-

1. Así Saturno hace apenas una séptima parte de la jornada de Mercurio, tal como lo que Aristóteles en *De coelo* libro segundo juzga conforme a razón, que siempre el más próximo al Sol haga distancias mayores que el más remoto: lo que no puede obtenerse por la astronomía antigua.

tes ha de aprenderse, hasta esas jornadas que he expuesto, es no poco larga para cualquier instinto natural, por mover al cual parece razonable hayan sido introducidas armonías.

Así pues, reducido todo a una cosa, despachadas ya las verdaderas jornadas de los planetas por el hálito etéreo, concluí correctamente [287] que sería oportuno volver los ojos a los arcos diarios aparentes, y aparentes todos desde un lugar fijo e insigne del mundo, claro es, desde el cuerpo solar, fuente del movimiento de todos los planetas; habiéndose de ver no cuán alto respecto al Sol esté un planeta cualquiera, ni por cuánto espacio transita en un día, que esto es cosa de astronomía y raciocinio, y no del instinto, sino cuánto ángulo subtienda en el cuerpo del Sol un movimiento diario cualquiera, o cuánto arco parezca recorrer un día cualquiera en un círculo común descrito desde el Sol, como la eclíptica, de suerte que tal apariencia, por benéfica acción de la luz trasladada hasta el Sol, pueda influir así directamente mediante la luz misma en las criaturas, partícipes de ese instinto: tal como en el libro cuarto dijimos influye el esquema del cielo en el feto por la benéfica acción de los rayos luminosos.

Enseña, pues, la astronomía de Tycho (detraídos ya del movimiento propio del planeta las paralajes de la órbita anual que inducen esa especie del movimiento estacionario y las retrogradaciones) ser estos que siguen los movimientos diarios de los planetas en sus órbitas (aparentes como para un espectador supuesto en Sol):

Armonías por parejas		*Movimientos aparentes diarios*		*Escrúpulos*		*Armonías propias de cada uno* *Escrúpulos*
Diverg.	Converg.					
$^{a}/_{d} = {}^{1}/_{3}$	$^{b}/_{c} = {}^{1}/_{2}$	Saturno	en afelio	1'46"	a	1'48" : 2'15" = 4 : 5,
			en perihelio	2'15"	b	tercera mayor
$^{c}/_{f} = {}^{1}/_{8}$	$^{d}/_{e} = {}^{5}/_{24}$	Júpiter	en afelio	4'30"	c	4'35" : 5'30" = 5 : 6,
			en perihelio	5'30"	d	tercera menor
$^{e}/_{h} = {}^{5}/_{12}$	$^{f}/_{g} = {}^{2}/_{3}$	Marte	en afelio	26'14"	e	25'21" : 38'1" = 2 : 3,
			en perihelio	38'1"	f	de Quinta
$^{g}/_{k} = {}^{3}/_{5}$	$^{h}/_{i} = {}^{5}/_{8}$	Tierra	en afelio	57'3"	g	57'28" : 61'18" = 15 : 16,
			en perihelio	61'18"	h	semitono
$^{l}/_{m} = {}^{1}/_{4}$	$^{k}/_{l} = {}^{3}/_{5}$	Venus	en afelio	94'50"	i	94'50" : 98'47" = 24 : 25,
			en perihelio	97'37"	k	diesis
		Mercurio	en afelio	164' 0"	l	164'0" : 394'0" = 5 : 12,
			en perihelio	384'0"	m	octava con tercera menor

Nota que la gran excentricidad de Mercurio no hace diferir en absoluto la proporción de movimientos de la proporción del cuadrado de las distancias. Pues si hicieres la proporción del movimiento en afelio al movimiento medio, 245'32", igual al cuadrado de la proporción de distancia media, 100, a la distancia en afelio, 121, aparecería como movimiento en el afelio 167, y si hicieres la del movimiento en el perihelio al mo-

vimiento medio igual al cuadrado de la proporción de 100 a la distancia en perihelio, 79, el movimiento en el perihelio sería 393, uno y otro, movimientos extremos mayores que lo que aquí he expuesto; a saber, porque el movimiento medio, visto harto oblicuamente en la anomalía media, no parece tanto como 245'32", sino en torno a unos 5 minutos menor; luego también se obtendrán menores movimientos en afelio y perihelio. Ahora bien, parecerá menor en el afelio, y mayor en el perihelio, por las *Ópticas* de Euclides, como advertí en capítulo precedente, número 6.

Que habría, por tanto, armonías e intervalos concordantes entre esos movimientos aparentes extremos pudo ya presumirlo mi ánimo por las proporciones de los arcos excéntricos diarios arriba referidas, comoquiera que viera imperar aquí o allá raíces cuadradas de proporciones armónicas; pero, asimismo, saber que era la proporción entre movimientos aparentes el cuadrado de la proporción entre movimientos excéntricos. Mas cabe comprobar lo que se afirma por experiencia, o sin raciocinio, como verás [288] en la tabla precedente. Acércanse harto próximas de las armonías las proporciones entre movimientos aparentes, de tal suerte que Saturno y Júpiter abarcan poco más que terceras, mayor y menor, con un exceso, allí, de 53:54, aquí, de 54:55 o menos, aproximadamente una sesquicoma; la Tierra, muy poco más, a saber, de 137:138, escasamente una semicoma más de un semitono; Marte, algo menos de una quinta (a saber, 29:30, que se aproxima a 34:35 o 35:36); Mercurio, por encima de una octava en un tanto más cercano a una tercera menor que a un tono entero, esto es, ronda 38:39, cercano a ser dos comas menos del tono, a saber, casi 34:35 o 35:36, menos que el tono. Sólo Venus tiene algo menor que todo intervalo concordante, aun de diesis: es en efecto su proporción entre dos y tres comas y supera las dos terceras partes de diesis, estando entre 34:35 y casi 35:36, una diesis disminuida en una coma.

En esta consideración entra también la Luna. Pues se desprende ser su movimiento horario en el apogeo, en las cuadraturas, el más tardo de todos los suyos, 26'26", y en el perigeo, en las sicigias, el más veloz, 35'12", razón por la que forman una cuarta justa. Pues la parte tercia de 26:26 es 8:49, cuyo cuádruplo es 35:15. Y nota que en ninguna otra parte viene a darse con esa armonía, la cuarta justa, entre movimientos aparentes: y nota también la analogía entre la cuarta en las armonías y el cuarto en las fases. Y éstas son las cosas con que viene a darse en los movimientos de los planetas por separado.

Mas en los movimientos extremos de dos planetas comparados brilla a primera vista el Sol clarísimo de las armonías celestes, así compares entre sí los convergentes o los divergentes. Pues hay entre los conversos de Saturno y Júpiter proporción exactísimamente duple, u octava; entre los diversos, poco más que triple, o tanto da, octava con quinta. Pues de 5'30" es tercia parte 1'50", cuando Saturno tiene en lugar de esto 1'46". Síguese que los movimientos planetarios tendrán una diesis de más o de poco menos, como 26:27 o 27:28, y por menos de un segundo en el afelio de Saturno será el exceso 34:35, tanto cuanta la proporción de los movimientos extremos de Venus. Entre diversos y conversos de Júpiter y Marte impera la triple octava y la doble octava con epidiatrión [tercera], mas no perfecto. Pues parte octava de 38'1" es 4'45", cuando Júpiter tiene 4'30", números entre los cuales aún hay 18:19, que es medio entre 15:16 y 24:25, semitono y diesis respectivamente; esto es, próximo a un lema perfecto, 128:135.* Así, la parte quinta de 26'14" es 5'15", cuando Júpiter tiene 5'30", estando aquí la proporción quíntuple, por tanto, falta por 21:22 aproximadamente, esto es,

* Véase *supra*.

cuanto sobraba en la otra, aproximadamente una diesis, 24:25. Más se acerca a la armonía 5:24, en la que viene a añadirse a la doble octava una tercera menor en lugar de mayor. Pues de 5'30" es quinta parte 1:4, que multiplicada por 24 da 26'24", que dista de 26:14 no más de una semicoma. Les ha tocado en suerte a Marte con la Tierra la menor proporción, exactísimamente sesquiáltera, esto es, quinta: pues parte tercia de 57'3" es 19'1", a cuyo duplo, 38'2", es exactísimamente igual el número que Marte tiene, 38'1". Les ha caído en suerte asimismo la mayor proporción, 5:12, octava con tercera menor algo más imperfecta. Pues parte duodécima de 61'18" es 5' con 6 semisegundos, que tomada cinco veces hace 25'33", cuando Marte tiene en lugar de eso 26'14". A falta, pues, de una diesis disminuida, aproximadamente, 35:36. Mas a la Tierra y Venus les han caído en suerte por armonías comunes, máxima 3:5, mínima 5:8, sextas mayor y menor, mas nuevamente no del todo perfectas. Pues parte quinta de 97'37" es 19'31", y su triple, 58'34", más del movimiento de la Tierra en afelio por 34:35, que casi es 35:36, tanto cuanto supera a la armonía planetaria. Así, la parte octava de 94'50" es 11'51"+, cuyo quíntuplo 59'16", sumamente próximo a igualar al movimiento medio de la Tierra; razón por la cual aquí la proporción entre planetas es menor que la armónica por [289] 29:30 o 30:31, que de nuevo casi es 35:36, diesis disminuida; conque aproxímase esta proporción mínima a la armonía quinta; pues, en efecto, la parte tercia de 94'50" es 31'37", cuyo duplo 63'14", respecto al cual el movimiento de la Tierra en el perihelio, 61'18", quédase a falta de 31:32, de suerte que tenga exactamente el medio entre las armonías planetarias vecinas. Por último, les han caído en suerte a Venus y Mercurio como proporciones, máxima, la octava, mínima, una sexta mayor, mas no plenamente perfecta. Pues parte cuarta de 384 es 96'0", cuando Venus tiene 94'50", donde al cuádruplo viene a añadirse, por tanto, una coma aproximadamente. Así, quinta parte de 164' es 32'48", que tomada tres veces hace 98'24", cuando Venus tiene 97'37", a lo que la proporción planetaria supera en torno a dos tercios de coma, esto es, 126:127

Éstas son, pues, las armonías distribuidas entre los planetas; y no hay una de las principales comparaciones (a saber, de movimientos extremos convergentes y divergentes) que no venga con ello a ser próxima de alguna armonía de tal suerte que, si así fueren tensadas cuerdas, le sería sobremanera difícil al oído discernir imperfección, excepto únicamente en el exceso entre Júpiter y Marte.

Ahora bien, síguese entonces que tampoco habremos errado mucho las armonías si comparamos movimientos hacia igual costado. Pues sumada [compuesta] la intermedia 1:2 con la de Saturno, 4:5, y la así compuesta, con 53:54, es producto 2:5 compuesta con 53:54, que existe entre los movimientos en afelio de Saturno y Júpiter. Componla con la de Júpiter 5:6 compuesta con 54:55, y resulta 5:12 compuesta con 54:55, que existe entre los movimientos en perihelio de Saturno y Júpiter. Compón esa de Júpiter, 5:6 compuesta con 54:55, con la intermedia siguiente, 5:24 menos 157:158, y será producto 1:6 menos 35:36 entre movimientos en afelio; compón con esta misma, 5:24 compuesta 158:157, la de Marte, 2:3 compuesta 30:29, y será producto 5:36 compuesta con 25:24 aproximadamente, esto es, 125:864 o en torno a 1:7, entre movimientos en el perihelio, que es hasta aquí la sola discordante. Con la tercera entre intermedios, 2:3, compón la de Marte, 2:3 compuesta 30:29, de donde resulta 4:9 compuesta 30:29, esto es, 40:87, otra desajustada entre movimientos en afelio; si esa misma la compones, en lugar de con la de Marte, con la de la Tierra, 15:16 compuesta con 137:138, crearás 5:8 compuesta con 137:138 entre movimientos en perihelio. Y si con la cuarta de los inter-

medios, 5:8 compuesta 31:30 o 2:3 compuesta con 31:32, compones la de la Tierra, 15:16 compuesta con 137:138, será producto 3:5 entre movimientos en afelio de Tierra y Venus, aproximadamente. Pues parte quinta de 94'50" es 18'58", cuyo triplo es 56'54", cuando la Tierra tiene 57'3". Si con la misma compones la de Venus, 34:35, acumularás 5:8 entre movimientos en perihelio. Pues parte octava de 97'37" es 12'12"+, que tomada cinco veces rinde un monto de 61'1", cuando es así que la Tierra tiene 61'18".

Por fin, si compones la última de los intermedios, 3:5 compuesta con 126:127, con la de Venus, 34:35, se compondrá 24:25 con 3:5, y será disonante el intervalo entre movimientos en afelio compuesto de una y otra. Si no es que la compones con la proporción de Mercurio, 5:12 compuesta 39:38, que entonces quedará por proporción entre movimientos en perihelio 1:4 o doble octava, falta de una diesis entera aproximadamente.

Viénese a dar, pues, con estas armonías perfectas: octava entre los convergentes de Saturno y Júpiter; doble octava casi con tercera menor, entre los de Júpiter y Marte; quinta entre los de Marte y la Tierra, y entre sus movimientos en perihelio, sexta menor; entre los de la Tierra y Venus en afelio, sexta mayor, y en perihelio, sexta menor; entre los conversos extremos de Venus y Mercurio, sexta mayor, y entre los divergentes o también en perihelio, doble octava; conque sin perjuicio de la astronomía construida sobre las observaciones de Brahe, la más sutil de todas, parecen poderse desechar las tan exiguas discrepancias restantes, ante todo, en los movimientos de Venus y Mercurio.

Ahora bien, habrás de notar que sólo allí donde no hay armonía mayor perfecta, como entre Júpiter y Marte, se desprendió para mí la interposición casi perfecta de una de las figuras sólidas, cómo en la distancia de Júpiter en el perihelio, que es triple aproximado de la de Marte en afelio, de suerte que esta pareja procure con ahínco en sus intervalos la armonía perfecta que no tienen en movimientos.

[290] Sobre lo cual notarás, asimismo, que la proporción planetaria mayor entre Saturno y Júpiter excede de la armónica, a saber, la triple, casi en tanta cantidad cuanta es la propia de Venus, y que casi otro tanto falta a la mayor común a la Tierra y Marte para alcanzar a las dos comunes a la Tierra y Venus, entre ambos movimientos extremos, convergente y divergente. Notarás en tercer lugar que casi se diría estar establecida la armonía en los planetas superiores entre los movimientos convergentes, en los inferiores, empero, entre sus movimientos hacia idéntico costado. Y en cuarto lugar, que hay aproximadamente cinco octavas entre los movimientos en afelio de Saturno y la Tierra; pues parte duotredécima [1/32] de 57'3" es 1'47", cuando tiene Saturno por movimiento en afelio 1'46".

Allende esto, hay distinción grande entre las armonías expuestas de planetas separados y juntos. Pues bien que aquéllas no pueden existir en idéntico momento, éstas pueden todas y en todo: que idéntico planeta no puede, volviéndose en su afelio, estar simultáneamente en el opuesto perihelio; mas de dos planetas sí puede hallarse el uno en su afelio, en su perihelio el otro, en el mismo momento de tiempo. Conque aquella misma proporción hay del canto llano o monodia que llamamos música coral, la sola conocida de los antiguos,* al canto a varias voces que se llama «figurado»** con el que

* La música coral de los griegos era monódica: la melodía era interpretada por un número indeterminado de voces al unísono.

** En el canto llano los valores de las notas eran aproximadamente iguales todo el tiempo, mientras en el «figurado» las propias notas, con signos distintos, indicaban valores de tiempo de longitudes diferentes, lo

dieran siglos cercanos, que la que va de las armonías que designan a planetas singulares a las armonías de planetas juntos. Y así, más adelante, en capítulos 5 y 6, serán comparados planetas por separado con la música coral de los antiguos, y mostradas las propiedades de aquélla en movimientos planetarios; mas en capítulos siguientes, empero, se demostrará ir a la par las armonías de planetas juntos con la música figurada de los modernos.

5. CÓMO ESTÁN EXPRESADAS EN LAS PROPORCIONES DE LOS MOVIMIENTOS PLANETARIOS LAS NOTAS DE LA ESCALA MUSICAL, O LUGARES DEL SISTEMA, Y LOS MODOS DE ARMONÍA, MAYOR Y MENOR*

Que entre esos doce términos o movimientos de los seis planetas que corren en torno al Sol existen de arriba abajo y por todos los costados proporciones armónicas, o próximas a las tales en una parte imperceptible de menor concordancia, queda pues probado hasta aquí por números tomados de la Astronomía, además de la armonía. De igual modo, empero, que en el libro tercero sacamos primeramente las proporciones armónicas singulares por separado, en el capítulo 1; justamente luego, en el 2, unimos todas cuantas eran en un solo sistema común o escala musical, es más, en una sola octava en que las otras quedaran abarcadas en potencia, y mediante aquéllas dividimos las otras en sus grados o lugares y lo hicimos de suerte que formaran escala, así ahora, también, habiendo dado con las armonías que Dios mismo incorporó al mundo, síguese que veamos si por separado se hallen de tal modo que no guarden parentesco alguno con las restantes, o bien concierten todas entre sí. Aun cuando es fácil concluir sin ulterior inquisición estar adaptadas estas armonías unas con otras con sumo buen juicio, de tal suerte que se muevan unas a otras de consuno, por así decir, en un mismo armazón, y ninguna eche de su lugar a otra, como no vemos en tan múltiples comparaciones de aquellos términos parte alguna en que no ocurra armonía. De no estar, en efecto, adaptadas todas a todas en una escala, ello fácilmente pudiere resultar en algunas disonancias (y así ha resultado dondequiera que la necesidad apremiase a ello). Tal como, si entre primer y segundo término se constituyere una sexta mayor, y una tercera asimismo mayor entre segundo y tercero, sin mirar a lo anterior, ello daría entrada a una disonancia y al intervalo disonante 12:25 entre primero y tercero.

Mas veamos ahora si damos con lo mismo que ya colegimos por raciocinio. Vayan por delante [291], empero, algunas cautelas, para que tropecemos menos al ir adelante. Es oportuno primeramente disimular por el momento aquellos excesos o defectos menores que un semitono, pues cuáles causas hayan éstos, verémoslo más tarde. Reduciremos después los movimientos todos, por dobles o al contrario por mitades, al sistema de una octava, por causa de tener la misma consonancia todas las octavas.

---

que daba a los compositores tanto la oportunidad de regular el curso de diferentes partes contrapuntísticas unidas como de producir efectos expresivos diversos. Prácticamente todas las melodías desde entonces son de estilo «figurado».

* Véase *supra*.

Se han expuesto, pues, en una tabla en el libro tercero, capítulo 8, todos los números en que se expresan todos los lugares o claves [tonos o notas] del sistema de la octava,* los cuales números entiende ser los de la longitud de dos cuerdas. Por consiguiente, las celeridades de los movimientos estarán entre sí en proporciones inversas.

Así pues, sean comparados ahora los movimientos de planetas en partes continuamente subduplas [mitades]. Es, por tanto:

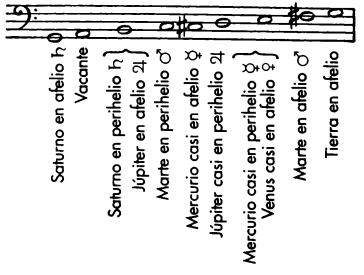
Movimiento		*Min.*	*Seg.*
[Mercurio] en perihelio	séptimo subduplo, o 128ª parte	3	0
[Mercurio] en afelio	sexto subduplo, o 64ª	2	34 –
[Venus] en perihelio	quinto subduplo, o 32ª	3	3 +
Venus en afelio	quinto subduplo, o 32ª	2	58 –
Tierra en perihelio	quinto subduplo, o 32ª	1	55 –
Tierra en afelio	quinto subduplo, o 32ª	1	47 –
Marte en perihelio	cuarto subduplo, o 16ª parte	2	23 –
Marte en afelio	tercer subduplo, u 8ª	3	17 –
Júpiter en perihelio	Subduplo	2	45
Júpiter en afelio	Subduplo	2	15
Saturno en perihelio		2	15
Saturno en afelio		1	46

* La tabla es la siguiente:

Intervalos concordantes	Longitudes de cuerda	En notas habituales	
	1080	g	Sol agudo
Semitono	1152	f #	fa#
Lema	1215	f	fa
Semitono	1296	e	mi
Diesis	1350	e ♭	mi b
Semitono	1440	d	re
Semitono	1536	c #	do#
Lema	1620	c	do
Semitono	1728	b	si
Diesis	1800	b ♭	si b
Semitono	1920	A	LA
Semitono	2048	G #	SOL #
Lema	2160	G	SOL grave

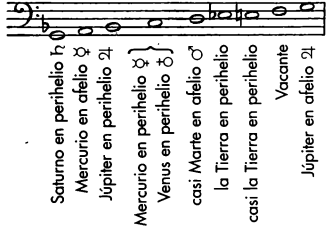
Señala, entonces, al tardísimo movimiento de Saturno en el afelio, esto es, al lugar más lento y grave del sistema, *G* [Sol], el número 1'46". El mismo designará, pues, el movimiento de la Tierra en el afelio, pero cinco octavas más alto, que es su número 1'47", ¿y quién osará discutir por un segundo en el movimiento de Saturno en afelio? Sea, empero: no será mayor la diferencia que 106:107, que es menos de una coma. Si añadieres la cuarta parte de 1'47", 27", haría todo 2'14", cuando Saturno en el perihelio hace 2'15", similar al movimiento en afelio de Júpiter, pero una octava más alto. Señalan, pues, ambos movimientos la nota ♭ [Si], o ambos por igual un poco más alta. Toma la tercera parte de 1'47", 36", y añádela al total, producirás 2'23" para la nota *c* [Do], y hete aquí el movimiento de Marte en perihelio, de idéntica magnitud, pero más alto por cuatro octavas. Y a ese mismo 1'47" añade la mitad, 54", y hará 2'41", para la nota *d* [Re], y hete aquí, al punto, el movimiento de Júpiter en perihelio, pero una octava más alto: pues tiene en efecto el número más próximo, 2'45". Si añadieres dos tercias partes, 1'11"+, se producirían 2'28"–. Y hete aquí el movimiento de Venus en afelio, 2'58"–. Señala, pues, el lugar o nota *e* [Mi], pero más alto por cinco octavas, y no le supera por mucho el de Mercurio en perihelio, que tiene 3'0" pero siete intervalos de octava más arriba. Divide para terminar el duplo de ese mismo 1'47", 3'34", en nueve partes, y sustrae al total una, 24": queda 3'10"+ para la nota *f* [Fa], a la que señala —o casi— el movimiento de Marte en afelio, 3'17", pero más alto por tres octavas, y ese mismo número, poco mayor que el justo, se aproxima a la nota *f*♯ [Fa sostenido]. Pues sustraída de 3'34" su parte sedécima, a saber, 13 semisegundos, resta 3'20", cuyo más próximo es 3'17". Y en verdad también en música aplícase a menudo *f*♯ [Fa sostenido] en lugar de *f* [Fa], como se ve por doquier.

Conque todas las notas del canto duro [escala mayor] (exceptuada la nota *A* [La] que no se señalaba por división armónica, en el libro tercero, capítulo 2) son señaladas en una octava por todos los movimientos extremos de los planetas, excepto el movimiento en perihelio de Venus y de la Tierra [292] y el de Mercurio en el afelio, cuyo número, 2'34", se aproxima a la nota *c*♯ [Do sostenido]. Pues detrae de *d* [Re], 2'41", una sedécima parte, o 10"+, y resta 2'30" para la nota *c*♯ [Do sostenido]; así, sólo los movimientos en perihelio de Venus y de la Tierra quedan expulsados de esta escala, como verás en la tabla:



Por el contrario, si se hiciere inicio de la escala al movimiento de Saturno en perihelio, 2'15" y se ordenare representar en ella la nota *G* [Sol], entonces vendría a corresponder a la nota *A* [La] 2'32", sobremanera aproximado al movimiento de Mercurio en afelio; a la nota *b* [Si bemol], 2'42", próximo al movimiento de Júpiter en perihelio por equipolencia de octavas; 3'0" a la nota *c* [Do], aproximado a los movimientos en perihelio de Mercurio y Venus; a la nota *d* [Re], 3'23", y no es mucho más grave el movimiento de Marte en afelio, 3'18", de suerte que sería aquí su número, sobre poco más o menos, tanto menor que su nota cuanto fuera antes mayor; a la nota *dϱ* [Re sostenido o Mi bemol] vendrían a corresponderle 3'36", lo que casi se iría hasta el movimiento de la Tierra en afelio; a la nota *e* [Mi], 3'50", y el movimiento de la Tierra en perihelio es 3'49"; el de Júpiter en afelio, empero, tendría de nuevo *g* [Sol].

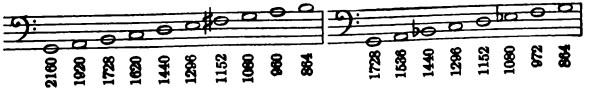
Convenido esto, todas las notas en una octava de canto blando [escala menor], exceptuada *f* [Fa], se expresarían por movimientos en afelio y perihelio de más de un planeta, principalmente aquellas que antes estaban omitidas, como verás en la tabla.



Ahora bien, estaba antes *fϱ* [Fa sostenido] señalada, y *A* [La] omitida: ahora, señálase *A* [La], omítese *fϱ* [Fa sostenido]; pues las secciones armónicas en capítulo 2 también omitieron la nota *f* [Fa].

Está, por tanto, expresa en el cielo por doble vía, y casi en los dos modos de canto, la escala de música, o sistema de una octava, con los lugares todos mediante los cuales se traspone en música el canto natural.* Con la sola diferencia de que, en nuestras secciones armónicas, ambas vías comienzan juntas en un mismo término, *G* [Sol]; aquí, empero, en los movimientos planetarios, lo que antes era ♮ [Si] será *G* [Sol] ahora en el modo menor.

En los movimientos de los cielos, así:



* Sonido natural: música en el sistema básico mayor o menor sin alteraciones accidentales.

Mediante secciones armónicas, así:

Pues así como en música se tiene 2.160 a 1.800, o 6 a 5, así en ese sistema que el cielo expresa se tiene 1.728 a 1.440, a saber, también como 6 a 5, y así para muchos de los demás 2.160 a 1.800, 1.620, 1.440, 1.350, 1.080, como 1.728 a 1.440, 1.296, 1.152, 1.080, 864.

Ahora pues no te admirará ya haber establecido los hombres un excelso orden sonoro, o grados en un sistema o escala de música, comoquiera que veas ya no haber obrado en este negocio de otro modo sino cual simios de Dios Creador, y representado como en un drama alguna ordenación de los movimientos celestes.

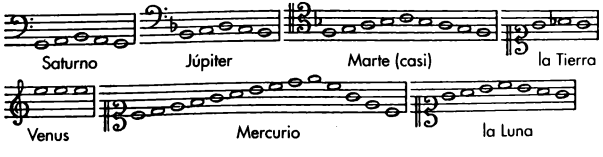
Aún existe, empero, otro modo por que entendamos la doble escala de música en el cielo: donde se concibe un sistema único, cierto, mas una doble tensión [tono], una según el movimiento de Venus en afelio, otra según su movimiento en perihelio: porque la variación de movimiento es en ese planeta de cantidad mínima, como que contiénese en la magnitud de una diesis, la mínima concordancia. Y los movimientos en afelio de Saturno, la Tierra, Venus, y casi el de Júpiter, tienen como antes su tono en *G* [Sol], *e* [Mi] y ♭ [Si], ciertamente; en *c* [Do], *e* [Mi] y ♭ [Si] el movimiento en perihelio de Marte y casi el de Saturno, y como aparece a primera vista, el de Mercurio; por el contrario, el tono en perihelio proporciona un lugar incluso al movimiento en afelio de Marte, de Mercurio, y casi al de Júpiter, pero también al movimiento en perihelio de Júpiter, de Venus y casi al de Saturno, y hasta cierto punto al de la Tierra, y sin duda alguna al de Mercurio. Sea, pues, que ahora ocupe el lugar *e* [Mi] no ya el movimiento de Venus en afelio, sino en perihelio, 3'3"; próximo a él viene a estar también, doble octava mediante, el movimiento de Mercurio en perihelio, 3'0", por el final del capítulo 4. Sustraída, empero, de ese movimiento de Venus en perihelio, 3'3", su parte décima, 18", resta 2'45" para el de Júpiter en perihelio, que obtiene el lugar *d* [Re]; y añadida la parte quindécima, 12", acumula 3'15", casi el de Marte en afelio, que obtiene el lugar *f* [Fa], y así en ♭ [Si], el movimiento en perihelio de Saturno y en afelio de Júpiter obtiene casi idéntico tono. Mas tomada cinco veces una parte octava, 23", da 1'55", que es el movimiento de la Tierra en perihelio; que si bien no cuadra en idéntica escala con los antedichos, porque no dispone un intervalo 5:8 por bajo de *e* [Mi], ni 24:25 por encima de *G* [Sol], ello no obstante, si ahora el movimiento en perihelio de Venus y asimismo el de Mercurio en afelio ocupan fuera de orden el lugar *dϱ* [Re sostenido o Mi bemol] en vez del lugar *e* [Mi], entonces aquí el movimiento de la Tierra en perihelio ocupa el lugar *G* [Sol]; y conciértase también el de Mercurio en afelio, que, tomada cinco veces la parte tercia de 3'3", 1'1", hace 5'5", cuya mitad, 2'32"+, se aproxima al de Mercurio en afelio, que en esta acomodación fuera de orden obtendrá el lugar *c* [Do]. Son aquí todos, por tanto, de idéntico tono entre sí, ciertamente: aun así, el movimiento en perihelio de Venus junto con los tres o cinco movimientos anteriores, esto es, todos en idéntico modo armónico, divide la escala de otra manera que el movimiento en afelio en su tono, esto es, en el modo mayor; y asimismo el movimiento de Venus en

perihelio, junto con los dos posteriores, la divide de otra manera; esto es, no en otras concordancias limpias, sino tan sólo en las mismas en distinto orden, a saber, uno que es propio del modo menor.

Pero baste a este capítulo haber puesto a la vista sobre qué versa la causa; que la razón por la que todas y cada una de estas cosas fueran hechas así, y las causas por las que haya no sólo concierto sino también discordancia por unas diferencias mínimas, ésas las hará patentes la más luminosa demostración en el capítulo 9.

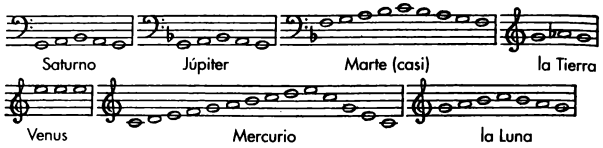
6. CÓMO SE HALLAN EXPRESADOS CADA UNO DE LOS TONOS O MODOS MUSICALES EN LOS MOVIMIENTOS PLANETARIOS

[294] De lo antedicho, y sin haber menester de muchas palabras, síguese esto: que cada planeta singular señala de algún modo lugares en el sistema con su movimiento en el perihelio, en tanto en cuanto le es dado a cada uno recorrer cierto intervalo fijo en la escala musical, comprendido entre ciertas notas fijas de ésta o lugares en el sistema, y comenzando a partir de aquella nota o lugar que en el capítulo precedente le tocara en suerte a su movimiento en afelio, *G* [Sol] a Saturno y la Tierra, mas a Júpiter ♭ [Si], que puede trasponerse en *G* [Sol] más alto, *fo* [Fa sostenido] a Marte, a Venus, *e* [Mi], y a Mercurio, *a* [La], en un sistema más alto [una octava más alta]. Ve cada uno de ellos en las notas usuales. Cierto que no forman articuladamente, como en los extremos, los lugares intermedios que ves aquí completados con notas: que no se afanan por llegar de un extremo al opuesto a saltos ni por intervalos, sino mediante un continuo de tonos, atravesando en el acto todos los intermedios (infinitos en potencia) —lo que yo no puedo expresar de otro modo que mediante una serie continua de notas intermedias—. Permanece Venus casi en unísono, sin igualar en amplitud de tono ni al mínimo de los intervalos concordantes.



En notación moderna:*

* Seguimos la transcripción de E. C. Jr.



Mas esa signatura [de modificación accidental: el bemol] aneja a dos de las notas en el sistema común, así como la formación del esqueleto de la octava mediante inclusión de un intervalo limpio, son de alguna manera un rudimento de distinción en tonos o modos: luego hállanse repartidos los modos musicales entre los planetas. Sé, empero, que para formar y definir distintos modos requiérense varias cosas que son peculiares del canto humano, como distribuido que está en sus [particulares] intervalos: y así, he hecho uso de la expresión «de alguna manera».

Ahora bien, quedará a la libertad del armonista decantar su juicio acerca de cuál exprese como propio un planeta cualquiera, asignados ya aquí sus extremos. De los usados, yo daría aquí a Saturno el séptimo o el octavo, porque si pusieres por raíz la nota *G* [Sol], ascendería a ♭ [Si] el movimiento en perihelio; a Júpiter, el primero o el segundo, que acomodado a *G* [Sol] su movimiento en afelio vendría a dar en *b* [Si bemol] su movimiento en perihelio; a Marte, el quinto o el sexto, no sólo por alcanzar casi la quinta, que es intervalo común a todos los modos, sino porque, más aún, reducido a sistema común con los demás, el movimiento en perihelio alcanzaría hasta *c* [Do] y tocaría en el afelio a *f* [Fa], que es raíz de esos tonos o modos quinto o sexto; daría a la Tierra tercero o cuarto, pues que su movimiento se desenvuelve sin salir de un semitono, y en verdad el primer intervalo de esos modos es un semitono; mas a Mercurio, por la amplitud de sus intervalos, convienen promiscuamente todos los tonos o modos; a Venus, por lo angosto de los intervalos, simplemente ninguno, mas por el sistema común, también tercero y cuarto, por obtener *e* [Mi] con respecto a los demás.*

7. CÓMO PUEDEN EXISTIR CONTRAPUNTOS O ARMONÍAS UNIVERSALES DE TODOS LOS PLANETAS, DIFERENTES CADA UNO DE LOS DEMÁS

[295] Ahora, Urania, es menester un mayor sonido: cuando por la escala armónica de los movimientos celestes asciendo a alturas mayores, que recóndito custodian el genuino arquetipo de la fábrica del mundo. Proseguid, músicos modernos, y juzgad la cosa por vuestras artes, no conocidas de la Antigüedad. En estos siglos últimos, tras dos mil años yaciente, Naturaleza nunca pródiga de sí os produjo no obstante, a vosotros, primeros espejos genuinos de universo: por esas voces vuestras traídas a común concierto

* Según el autor, la Tierra canta MI FA MI, de suerte que por esas sílabas «conjetures obtenerse en este nuestro domicilio *MIseriam et FAmen* [Miseria y Hambre]». Véase también la nota sobre el sistema hexacorde.

y por esos vuestros oídos se ha susurrado ella a la mente humana tal cual existe en su íntimo seno, hija dilectísima de Dios Creador.[1]

Cuáles proporciones armónicas abarquen dos planetas vecinos entre los extremos de sus movimientos, quedó explicado arriba. Mas rarísima vez ocurre que dos, señaladamente si se cuentan entre los más tardos, coincidan simultáneamente en sus intervalos extremos: verbigracia, los ápices de Saturno y Júpiter distan unos 81 grados; por consiguiente, entretanto esta distancia mide el entero zodíaco por saltos fijos de veinte años,* transcurren ochocientos años, y aun así, tampoco ese salto que concluye el octavo siglo lleva exactamente a los mismos ápices; y si yerra por un poco más, se ha de aguardar otros ochocientos años para que pueda buscarse con fundamento salto más feliz. Y ello ha de reiterarse tantas veces cuantas la medida de desviación esté contenida en la amplitud de un salto. Cumplen tales períodos también otras parejas particulares de planetas, aunque no tan amplios. En el ínterin, empero, acontecen otras armonías de dos planetas, entre movimientos de los que no son ambos extremos, sino uno u otro intermedios: y tales armonías, como en tonos diversos. Pues por extenderse Saturno de *G* [Sol] a ♄ [Si] y poco más allá, Júpiter de ♄ [Si] hasta *d* [Re] y más, pueden acontecer entre ellos estas armonías por encima de una octava: ambas terceras, y la cuarta justa. Una u otra de aquéllas, mediante el tono que mantenga la amplitud de la restante; la cuarta, empero, mediante la amplitud de un tono mayor. Pues, en efecto, habría cuarta no sólo desde el *G* [Sol] de Saturno al *cc* [Do+8ª] de Júpiter, sino también del *A* [La] de Saturno al *dd* [Re+8ª] de Júpiter, y a lo largo de todos los intermedios entre *G* [Sol] y *A* [La] de aquél y *cc* [Do+8ª] y *dd* [Re+8ª] de éste. Mas octava y quinta acontecen sólo en las puntas de los ápices. Marte, empero, habiendo alcanzado un intervalo más grande que el propio, lo obtuvo para que formara octava con los planetas superiores mediante alguna amplitud de tono. Mercurio obtuvo tan sólo tanto intervalo que le permitiera establecer la mayor parte de todas las armonías con todos en uno solo de sus períodos, que no es más amplio de tres meses. La Tierra, por el contrario, y mucho más Venus por causa de lo angosto de sus propios intervalos, ven restringidas a una visible poquedad sus armonías no sólo con los demás, sino sobre todo entre ellas. Que si deben tres concertarse en una armonía, se habrá de esperar muchos períodos; y aun así son muchas las armonías, de suerte que acontezcan tanto más fácilmente cuanto su vecina más próxima las siga: y vense a menudo ocurrir triples entre Marte, la Tierra y Mercurio; armonías de cuatro planetas, empero, comienzan ya a estar dispersas por siglos; de cinco, por miríadas. Pero que todos los seis concuerden [296], eso está separado por larguísimos evos, y no sé si sea del todo imposible que vuelva a acontecer por revoluciones exactas; y más puede ser que señalara el principio de un Tiempo del que manara toda edad del mundo.

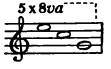
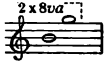
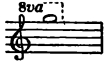
1. ¿Cometería yo acaso algún crimen si requiriere a cada compositor de esta generación algún motete, obra de artificio, en lugar de este elogio? Podrían sustituir a un texto a tal fin acomodado el Salterio Regio y demás libros sagrados. Mas ¡ay de vosotros!: no concuerdan en el cielo más de seis. Pues canturrea la Luna aparte su monodia, cual perro que diligente asedia a la Tierra. Componed símbolos [la melodía], que yo, para que el libro se haga, prometo cuidar diligente de las seis partes. A quien exprese más apropiadamente la música celestial descrita en esta obra, a ése le otorguen Clío la guirnalda y Urania a Venus en esponsales.

* Es decir, ya que Saturno y Júpiter tienen una revolución con respecto al otro cada veinte años, están distanciados 81 grados cada veinte años, mientras que la posición final de este intervalo de 81 grados atraviesa la eclíptica a saltos, por así decir, y coincide con los ápices aproximadamente una vez en ochocientos años.

Que si una sola armonía séxtuple puede acontecer, o entre muchas una señalada, ésa sin duda puede tenerse por signo de la Creación. Ha de inquirirse, pues, en qué y cuántas formas redúcense los movimientos de todos los seis planetas a una común armonía. Método de tal inquisición es éste con el que comenzamos por la Tierra y Venus; que forman éstos no más de dos consonancias y por medio de brevísimas intensificaciones de movimientos (en lo que se contiene la causa de tal circunstancia).

Vamos, pues, y fijemos dos a manera de esqueletos de armonías, cada uno contenido entre dos números extremos (que señalan sus términos a los tonos), e inquiramos qué coincida con ellos en la variedad de movimientos otorgados a cada planeta. Primeramente tiene ese esqueleto entre la Tierra y Venus como de 3 a 5, y por tensión o tono más grave el movimiento diario de la Tierra en afelio, 57'3", y por más aguda, el de Venus en perihelio, 97'37", conque los demás serán así:

Armonías de todos los planetas, o universales del modo mayor

Que concuerde b *[Si]*			*En el tono más grave*	*En el tono más agudo*	*Notación moderna**
Mercurio	e^7 b^7 g^6		380'20" 285'15" 228'12"	 292'48" 234'16"	
Venus	e^6 e^5		190'10" 95'5"	195'14" 97'37"	
la Tierra	g^4 b^4		57'3" 35'39"	58'34" 36'36"	
Marte	g^3		28'32"	29'17"	
Júpiter	b			4'34"	
Saturno	B G		2'14" 1'47"	1'49"	

Concurre a esta armonía universal Saturno con su movimiento en afelio, la Tierra, con el suyo en afelio, Venus con el suyo en afelio aproximadamente; en el tono más alto, Venus con el suyo en perihelio; en el medio, Saturno en perihelio, Júpiter en afelio, Mercurio en perihelio. Así, Saturno puede concurrir a ella con dos movimientos, Marte con dos, Mercurio con cuatro.

* Seguimos la notación de E. C. Jr.

Armonías de todos los planetas, o universales del modo mayor

Que concuerde c *[Do]*		*En el tono más grave*	*En el tono más agudo*	*Notación moderna**
Mercurio	e^7 c^7 g^6	380'20" 304'16" 228'12"	312'21" 234'16"	5 x 8va
Venus	e^6 e^5	190'10" 95'5"	195'14" 97'37"	4 x 8va
la Tierra	g^4 c^4	57'3" 38'2"	58'34" 39'3"	b^3
Marte	g^3	28'32"	29'17"	8va
Júpiter	c^1	4'45"	4'53"	
Saturno	G	1'47"	1'49"	

Manteniéndose aquí los demás, no se toleran el de Saturno en perihelio ni el de Júpiter en afelio; en cuyo lugar concurre el de Marte en perihelio.

Los demás concurren únicamente con un movimiento; sólo Marte con dos, Mercurio con cuatro.

[297] Será, por tanto, el segundo de esos esqueletos aquel que hay entre la Tierra y Venus la otra armonía posible, 5:8. Donde, tomada cinco veces la parte octava del movimiento diario de Venus en afelio, 94'50", a saber, 11'51", ocupa tanto como el movimiento de la Tierra, 59'16"; y similar parte de 97'37", movimiento de Venus en perihelio, ocupa el movimiento de la Tierra, 61'1". Concuerdan, pues, los demás planetas con los siguientes movimientos diarios (véase página 598).

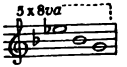
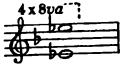
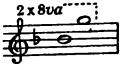
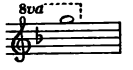
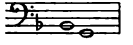
De nuevo concurren aquí, al tono medio, Saturno con su movimiento en perihelio, Júpiter, en afelio, Mercurio, en perihelio. Al más alto, aproximadamente el movimiento de la Tierra en perihelio.

Y aquí, retirados los de Júpiter en afelio y Saturno en perihelio, halla entrada el de Mercurio en afelio, aproximadamente, a más de su movimiento en perihelio. Los demás permanecen.

Atestigua, pues, la experiencia astronómica poder acontecer armonías universales de todos los movimientos, y éstas, de los dos modos, mayor y menor; y en ambos, de

* Seguimos la notación de E. C. Jr.

Armonías de todos los planetas, o universales del modo menor

Que concuerde b *[Si]*		*En el tono más grave*	*En el tono más agudo*	*Notación moderna**
Mercurio	$e\flat^7$ $b\flat^7$ g^6	379'20" 284'32" 237'4"	295'56" 244'4"	
Venus	$e\flat^6$ $e\flat^5$	189'40" 94'50"	195'14" 97'37"	
la Tierra	g^4 $b\flat^4$	59'16" 35'35"	61'1" 36'37"	
Marte	g^8	29'38"	30'31"	
Júpiter	$b\flat^1$		4'35"	
Saturno	$b\flat$ G	2'13" 3'51"	1'55"	

doble forma o, si se permite la expresión, respecto a dos notas; y en uno cualquiera de los cuatro casos, con alguna latitud de tono y también con alguna variación en las armonías particulares de Saturno, Marte y Mercurio, y en las de ellos con los demás; y no se pone de manifiesto en los solos movimientos intermedios, sino absolutamente en todos los extremos; fuera de éstos, el de Marte en afelio y el de Júpiter en perihelio; que comoquiera obtenga aquél *fo* [Fa sostenido], y éste, *d* [Re], y obteniendo perpetuamente Venus el intermedio *do* [Mi bemol] o *e* [Mi], no lleva a ésos sus vecinos disonantes a armonía universal, lo que haría si le hubiere sido otorgado espacio que excediere de *e* [Mi] o *do* [Mi bemol]. Estorba esto el matrimonio de Tierra y Venus, como macho y hembra, planetas estos dos que distinguen en dos modos las armonías, a saber, mayores y masculinas, menores y femeninas: según complaciere al otro uno u otro de los cónyuges, a saber, o bien se hallare la Tierra en su afelio, velando [298] por su dignidad marital y haciendo obras dignas de varón, y como apartada y retirada en su rueca Venus en su perihelio, o bien la Tierra permitiere blandamente a ésta ascender a su afelio o descendiere en su perihelio hacia Venus, como abrazado por ella por causa de voluptuosidad, depuestos por un momento escudo y armas y las obras que cumplen al varón: que entonces es, en efecto, la armonía menor.

* Seguimos la notación de E. C. Jr.

Armonías de todos los planetas, o universales del modo menor

Que concuerde c *[Do]*		*En el tono más grave*	*En el tono más agudo*	*Notación moderna**
Mercurio	$e\flat^7$ c^7 g^6	379'20" 316'5" 237'4"	325'26" 244'4"	5 x 8va
Venus	$e\flat^6$ c^6 $e\flat^5$	189'40" 94'50"	195'14" 162'43" 97'37"	4 x 8va
la Tierra	g^4	59'16"	61'1"	2 x 8va
Marte	g^3	29'38"	30'31"	8va
Júpiter	c^1	4'56"	5'5"	
Saturno	G	3'51"	1'55"	

Mas si ordenamos silencio a esta charlatana Venus que todo discurso interrumpe, esto es, si consideraremos cuáles puedan ser las armonías ya no de todos, pero al menos de los cinco planetas restantes, excluido el movimiento de Venus, sigue aun así la Tierra rondando su cuerda *g* [Sol], sin ascender de ella allende un semitono: pueden concordar con *g* [Sol], así pues, *b* [Si bemol], *♮* [Si], *c* [Do], *d* [Re], *dϱ* [Mi bemol] y *e* [Mi], donde halla entrada Júpiter, como verás, que señala la cuerda *d* [Re] con su movimiento en perihelio; persiste, pues, la dificultad con el de Marte en afelio. Pues ocupando *g* [Sol] la Tierra en afelio, no soporta a aquél en *fϱ* [Fa sostenido]; pero el movimiento en el perihelio aborrece concordancia con el de Marte en afelio por una media diesis, como queda dicho más arriba, en capítulo 5.

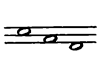
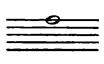
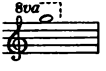
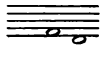
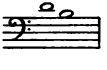
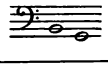
Aquí concurren al tono más grave Saturno y la Tierra en sus afelios; al medio, Saturno en perihelio y Júpiter en afelio; al más agudo, Júpiter en perihelio.

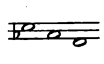
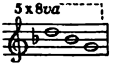
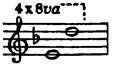
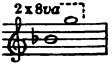
Aquí no se tolera el de Júpiter en afelio, mas concurre Saturno en el tono más agudo con su movimiento en perihelio, aproximadamente.

Y de estos cuatro planetas, Saturno, Júpiter, Marte y Mercurio, puede existir esta armonía, en que está asimismo el de Marte en afelio, mas sin latitud de tensión.

* Seguimos la notación de E. C. Jr.

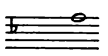
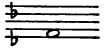
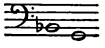
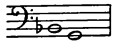
Armonías de los cinco planetas, disimulada Venus

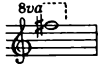
Del modo mayor (Genus durum)			*En la tensión más grave* Min. Seg.	*En la más aguda* Min. Seg.	*Notación moderna**
Mercurio	d^7 b^6 g^6		342'18" 285'15" 228'12"	351'24" 292'48" 234'16"	
Venus	en d^6 discord e^5		171'9" 95'5"	175'42" 97'37"	
Marte	g^4 b^3		57'3" 35'39"	58'34" 36'36"	
	g^3		28'31"	29'17"	
Júpiter	d^1 b^1		5,21"	5'30" 4'35"	
Saturno	B G		2'13" 1'47"		

Del modo menor (Genus mollis)			*En la tensión más grave*	*En la más aguda*	*Notación moderna***
Mercurio	d^7 b^6 g^6		342'18" 273'50" 228'12"	352'24" 280'57" 234'16"	
Venus	en d^6 discord e^5		171'9" 95'5"	175'42" 97'37"	
Marte	g^4 b^3		57'3" 34'14"	58'34" 35'8"	

* Notación de E. C. Jr.
** Notación de E. C. Jr.

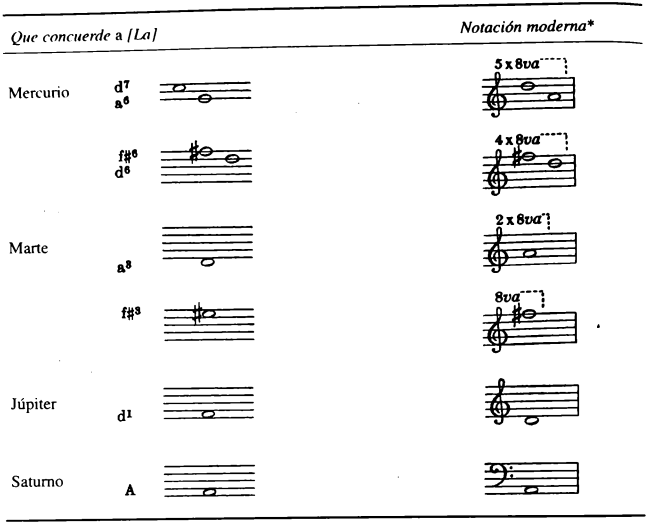
(continuación)

Del modo menor (Genus mollis)			*En la tensión más grave*	*En la más aguda*	*Notación moderna*
	g^3		28'31"	29'17"	
Júpiter	d^1		5'21"	5'30"	
Saturno	B		2'8"	2'12"	
	G		1'47"	1'50"	

Que concuerde b *[Si]*				*Notación moderna**
Mercurio	d^7		335'50"	
	b^6		269'52"	
	$f\#^6$		209'52"	
	d^6		167'55"	
Marte	b^8		34'59"	
	$f\#^8$		26'14"	
Júpiter	d^1		5'15"	
Saturno	B		2'11"	

Nada son, pues, los movimientos de los cielos sino una suerte de perenne canto concertado [polifónico] (racional, no vocal) mediante tonos disonantes, casi como síncopas o cadencias (en que los hombres imitan estas disonancias naturales), tendente a cláusulas fijas y prescritas, cada una de seis términos (como las voces), que señala y distingue

* Notación de E. C. Jr.



con esas notas en la inmensidad del tiempo;** como para que no sea ya de admirar haber dado al cabo el hombre, simio de su creador, con el modo de cantar de común concierto, ignorado por los antiguos; esto es, para que así remedara por la sinfonía artificiosa de varias voces, en alguna breve parte de hora, la perpetuidad del entero tiempo del mundo, y, percibida en esta música imitadora de Dios, degustara hasta cierto punto

* Notación de E. C. Jr.

** Siguiendo a E. C. Jr., la comparación que Kepler establece entre armonías celestiales y música polifónica de la época puede aclararse con un simple examen de cuatro voces de *O Crux*, de Palestrina:

con suavísima voluptuosidad del sentido la complacencia del Divino Artífice en sus obras.

8. HÁLLANSE EXPRESADOS EN LOS PLANETAS LOS CUATRO CONTRAPUNTOS NATURALES DE LAS VOCES: SOPRANO, CONTRALTO, TENOR Y BAJO

Que si bien son éstos vocablos para las voces humanas, y no existe en el cielo voz o sonido por la suma tranquilidad de los movimientos; y tampoco los sujetos en que aprehendemos armonías quedan comprendidos en el modo del verdadero movimiento, comoquiera que consideremos solamente los que parecen desde el Sol; y si bien, por último, no hay en el cielo causa que abogue por un número fijo de voces para hacer armonía, cual es en el canto humano; como que primero era seis, el mismo número de los planetas que rondan en torno al Sol, a partir del número de intervalos, cinco, tomado de las figuras regulares, y hubo de establecerse después (conforme al orden de la Naturaleza, no del tiempo) la congruencia entre movimientos, ello no obstante, no sé por qué vínculo esta admirable congruencia con el canto humano me hace fuerza de tal suerte que me vea compelido a proseguir también esta parte de la comparación, aun sin sólida causa natural. Aquellas propiedades, en efecto, que en el libro tercero, [300] capítulo 16, el uso atribuye al bajo y natura reivindica, de algún modo las obtienen Saturno y Júpiter en el cielo; venimos a dar con las del tenor en Marte; con las del contralto, ínsitas a la Tierra y Venus; las de soprano las tiene Mercurio, si no con igualdad de intervalos, sí en cierta proporción. De todos modos, aun cuando en el capítulo siguiente se deduzcan de causas propias de cada planeta sus excentricidades, ello no obstante, resulta admirable, no sé si además procurado o por el mero atemperarse entre sí las necesidades, que: 1) así como el bajo está opuesto al contralto, así también haya dos planetas que tengan naturaleza de contralto, y dos, de bajo, como en cualquier modo de canto hay de cada lado uno de cada, y de los demás, uno solo por cada voz; 2) y que así como el contralto, casi siempre el superior, está en unas angosturas necesarias por causas naturales, explicadas en el libro tercero, así también los planetas íntimos, Tierra y Venus, tengan los más angostos intervalos de movimiento, poco más de un semitono, la Tierra, y Venus, ni una diesis; 3) y que así como el tenor es libre pero no obstante se mueve con moderación, así también Marte, el único exceptuando a Mercurio, pueda hacer el intervalo máximo, quinta; 4) y que así como el bajo hace saltos armónicos, así también Júpiter y Saturno tengan intervalos armónicos, y entre uno y otro vayan éstos de la octava a la octava más quinta; 5) y que así como la voz soprano es libérrima, más que todas las res-

---

Como se observará, cada una de estas pocas voces (como ocurriría igualmente con las seis a que se refiere Kepler), se mueve de un acorde consonante a otro mientras sigue una línea melódica llena de gracia. Se han añadido algunas partes de la de escala o tonos que encajen para dar a una voz más libertad de expresión melódica. Por la misma razón, una voz puede permanecer en la misma nota en tanto las demás cambian a un nuevo acorde. Cuando esto llega a ser disonante (llamada síncopa) en el nuevo acorde se resuelve habitualmente moviéndose un paso hacia abajo, a un tono consonante con las otras voces. Tal como ocurre en este ejemplo, en donde cada sección termina con una cadencia.

tantes, y ligerísima, así también Mercurio pueda atravesar más de una octava en brevísimo plazo. Mas sea ello del todo accidental: oigamos ahora las causas de las excentricidades.

9. DEMOSTRACIÓN DE QUE PARA OBTENER TAL DISPOSICIÓN ARMÓNICA DEBIERON CONSTITUIRSE ESAS PRECISAS EXCENTRICIDADES QUE CUALQUIERA DE LOS PLANETAS TIENE POR SÍ, Y NO OTRAS

Comoquiera que veamos, por tanto, no poder venir por azar las armonías universales de seis planetas, señaladamente en lo que concierne a sus movimientos extremos, que vimos concurrir todos a las armonías universales excepto dos, los cuales concurrían a armonías próximas a las universales; y como mucho menos puede suceder por azar qué todos los lugares del sistema de la octava, establecidos en el libro tercero por secciones armónicas, sean señalados por extremos de movimiento de los planetas; pero aun menos que todo, que el sutilísimo negocio de la distinción de las armonías celestes en dos modos, mayor y menor, provenga del acaso sin cuidado del único Artífice: síguese, pues, que el Creador, fuente de toda sabiduría, perpetuo garante del orden, hontanar eterno y supraesencial de toda Geometría y armonía, que aquí el celeste Artesano, digo, adjuntara las mismísimas proporciones armónicas nacidas de las figuras planas regulares a las cinco figuras sólidas, y de ambas conformara un perfectísimo arquetipo de los cielos; de suerte que en él, tal como a través de las cinco figuras traslucen las ideas de los orbes por los cuales son transportados los seis astros, así también mediante los abuelos del linaje de las figuras planas, las armonías (en el libro tercero deducidas de aquéllas), estén contenidas las medidas de la excentricidad dada a cada orbe a fin de hacer proporcionados los movimientos de los cuerpos; y Él atemperaría estas dos cosas a una, y las proporciones de los orbes, más grandes, no dejarían de ceder de algún modo a las proporciones de las excentricidades, más pequeñas, necesarias para procurar las armonías; y viceversa, de entre las proporciones armónicas se acomodarían a los planetas especialísimamente aquellas que tuvieren mayor parentesco con una figura sólida cualquiera, en cuanto ello pudiera hacerse mediante armonías; y con ello, finalmente, razón y proporciones de los orbes y de la excentricidad de cada planeta nacerían simultáneamente del Arquetipo, mas la amplitud de su orbe y la mole de su cuerpo resultarían del tiempo periódico de cada uno.

[301] Al afanarme por sacar el método a la luz del intelecto humano mediante la estequiosis* usada de los geómetras, ojalá me sea propicio el Autor de los Cielos mismos, Padre de todo intelecto, Dispensador magnánimo de los sentidos mortales, inmortal Él y superbendito; e impida que las tinieblas de nuestras mentes saquen de esta obra suya algo indigno de su Majestad; y haga que nosotros, imitadores de Dios, por obra del Espíritu Santo emulemos la perfección de su obra en la santidad de nuestras vidas, para lo que eligió a su Iglesia en la Tierra y la lavó de pecados con la sangre de su Hijo, lejos de todas las discordias de la enemistad, de toda contienda, rivalidad, ira, riña, disensión, división, envidia, provocación, irritación ante los dicterios y demás obras de la

* De *στοιχειόω*, asignar o admitir como elementos.

carne: que, junto con todos cuantos tienen el espíritu de Cristo, no sólo elegiremos sino buscaremos con afán expresar en hechos y hacer cierto su llamado, despreciados todos y en todo los modales depravados velados y oscurecidos so capa de celo, o amor a la verdad, o singular erudición o modestia para con preceptores porfiados, o cualquier otro pretexto engañoso. Padre Santo, consérvanos en la concordia del mutuo amor, que seamos uno tal como tú eres uno con tu Hijo, Nuestro Señor, y con el Espíritu Santo, y como hiciste todas tus obras una con los suavísimos lazos de las armonías: y que de tu pueblo reducido a la concordia se edifique así el cuerpo de tu Iglesia en esta Tierra, así como erigiste el cielo mismo con armonías.

RAZONES PRIMERAS

I. AXIOMA

Es conforme a razón que, doquiera pudo hacerse, debieran constituirse armonías entre movimientos extremos, tanto de planetas singulares como por pares, de suerte que la variedad adornara este mundo.

II. AXIOMA

Fue oportuno que cinco intervalos, y seis orbes, correspondieran un tanto a la magnitud de las proporciones de los orbes geométricos inscritos y circunscritos a las cinco figuras sólidas regulares, y ello en el mismo orden que es natural a las figuras.

Acerca de esto, véase el capítulo 1 del *Misterio cosmográfico* y el *Epitome Astronomiae Copernicanae*, libro cuarto.

III. PROPOSICIÓN

Los intervalos entre la Tierra y Marte, y entre la misma y Venus, debieron ser mínimos en proporción a sus orbes, y con ello, aproximadamente iguales; medianos, y de nuevo casi iguales, entre Saturno y Júpiter así como entre Venus y Mercurio; máximo, entre Júpiter y Marte.

Pues, por el axioma II, los planetas correspondientes por su situación con aquellas figuras que hacen mínima la proporción de los orbes geométricos deben asimismo hacerla mínima; mediana, empero, aquellos que corresponden a figuras con tal proporción mediana, y máxima, aquellos que a las figuras de máxima proporción. Pero el orden que hay entre las figuras dodecaedro e icosaedro es el mismo entre parejas de planetas, Marte y la Tierra, una, la Tierra y Venus, otra, y aquel orden que hay entre cubo y octaedro, el mismo en las parejas Saturno y Júpiter y Venus y Mercurio; por último, aquel orden del tetraedro es el

mismo en la pareja Júpiter y Marte, véase el capítulo 3. Luego será mínima la proporción entre los orbes planetarios primeramente mencionados: pero entre Saturno y Júpiter, casi igual que entre Venus y Mercurio; y por fin, máxima entre los orbes de Júpiter y Marte.

IV. AXIOMA

[302] Todos los planetas deben tener diversas sus excentricidades, no menos que el movimiento de latitud, y según aquéllas, también [diversas] las distancias al Sol, fuente de movimiento.

Así como la esencia del movimiento no está en SER, sino en HACERSE, así también la especie o figura de las regiones por las que pasa el movimiento de un planeta cualquiera no se HIZO sólida al instante desde el inicio, sino que acabó por adquirir en la sucesión del tiempo no sólo su longitud sino también latitud y profundidad, terna perfecta de dimensiones, y paulatinamente, por conexión y acumulación de muchas circunvoluciones, hizo que viniera a representarse la especie de un orbe cóncavo, con el centro en el Sol; así como de muchos hilos de seda conexos entre sí y aglomerados construye círculos el gusano de seda.

V. PROPOSICIÓN

Hubieron de atribuirse dos armonías diversas a cualesquiera parejas de planetas vecinos.

Pues, por el axioma IV, un planeta cualquiera tiene su más larga y su más corta distancia desde el Sol, razón por la que dos planetas tendrán, por el capítulo 3, uno, el movimiento más tardo, y otro, el más rápido. Luego son dos las comparaciones primarias de movimientos extremos, una entre los divergentes en dos planetas, otra, entre los convergentes. Ahora bien, es de necesidad que sean diversas entre sí; porque será mayor la proporción de los divergentes, menor la de los convergentes. Mas convino asimismo que fueran diversas las armonías por medio de diversas parejas de planetas, de suerte que esta variedad aprovechare al ornato del mundo; por el axioma I y también porque, por la proposición III, son diversas las proporciones de los intervalos entre dos. Mas a cualquier proporción entre orbes corresponden proporciones armónicas fijas con parentesco cuantitativo, como demostrado queda en el capítulo 5 de este libro.

VI. PROPOSICIÓN

No han lugar las dos armonías mínimas 4:5 y 5:6 entre dos planetas.

Pues 5 es a 4 como 1.000 a 800, y 6 a 5, como 1.000 a 833. Pero los orbes circunscritos a dodecaedro e icosaedro tienen una mayor proporción a los inscritos, a saber, la misma que 1.000 a 795, etc., y esas dos proporciones indican intervalos entre orbes planetarios próximos entre sí, o espacios mínimos: en las demás figuras regulares, en efecto, los orbes dis-

tan más largamente uno de otro. Pero entonces la proporción de movimientos sigue siendo hasta aquí mayor que las proporciones de intervalos, a menos que fuere ingente la proporción de excentricidades a orbes, por el capítulo 3, artículo decimotercero. Por ende, la menor proporción de movimientos es mayor que 4:5 y 5:6. Por consiguiente, estorbada esa armonía en las figuras regulares, no le cabe en suerte lugar ninguno entre planetas.

VII. PROPOSICIÓN

No puede haber lugar entre movimientos convergentes de dos planetas la armonía de cuarta [justa], si no fuere que juntas las proporciones de los movimientos extremos propios de cada uno hicieren más de una quinta.

Sea así 3:4 entre los convergentes, y no haya, primeramente, excentricidad ninguna, y ninguna proporción en los movimientos propios de cada planeta, pero sí los mismos movimientos convergentes y medios; síguese entonces que los intervalos correspondientes, que serían por esta suposición semidiámetros de los orbes, constituirían la potencia $^2/_3$ de esa proporción, esto es, 4.480:5.424, por el capítulo 3. Mas esta proporción ya es menor que la de los orbes de cualquiera de las figuras regulares: y así, el entero orbe interior sería seccionado por los planos regulares de la figura inscrita en cualquier orbe exterior. Esto empero está en contra del axioma II.

Haya, en segundo lugar, alguna composición de las proporciones entre movimientos extremos: y séalo de ambos convergentes 3:4 o 75:100, que es más, empero, que entre los intervalos correspondientes, 1.000:795, comoquiera que ninguna figura regular forme proporción menor entre sus orbes. Y por superar aquélla entre los movimientos, inversa, a ésta entre los intervalos por un exceso de 750:795, divídase también este exceso por la proporción 1.000:795, según la doctrina del capítulo 3, y restará 9.434:7.950, raíz cuadrada de la proporción entre orbes. Conque al cuadrado, esto es, 8.901:6.320 o 10.000:7.100, será la proporción entre orbes. Divídase ésta por la proporción entre intervalos convergentes, 1.000:795, y restará 7.100:7.950, en torno a un tono mayor. La proporción compuesta de la que guardan ambos movimientos medios con la de los convergentes debe ser al menos tanta que entre los convergentes pueda caber una cuarta. Los intervalos extremos divergentes, por consiguiente, guardan con los convergentes extremos una proporción compuesta que ronda el cuadrado de ésta, esto es, dos tonos, y la composición de los movimientos propios de nuevo el cuadrado de ésta, esto es, cuatro tonos, que es más que una quinta. Por tanto, si la compuesta de los propios de dos planetas vecinos es menor que una quinta, no podrá haber entre los convergentes una cuarta.

VIII. PROPOSICIÓN

Éranle debidas a Saturno y Júpiter las armonías 1:2 y 1:3, esto es, octava y octava más quinta.

Pues son los primeros y supremos planetas, y les ha correspondido la primera figura, el cubo, por el capítulo 1 de este libro, y esas armonías son las primeras en el orden de la Naturaleza, y cabezas de las primeras familias de figuras, las bisectoriales o tetragona-

les, y las triangulares, por lo dicho en libro primero. Y el que es cabeza, el diapasón u octava, 1:2, es aproximadamente mayor que la proporción de $1:\sqrt{3}$ entre orbes del cubo [303]: razón por la cual es apta para hacerse la menor de las proporciones entre movimientos en los planetas cúbicos, por el capítulo 3, decimotercer artículo; y, por consiguiente, 1:3 sirve como proporción mayor. Esto, empero, también es lo mismo así: si se guarda con alguna proporción de los orbes de las figuras una armonía como la que haya entre la proporción de movimientos tal como aparecen desde el Sol y la proporción de intervalos medios, atribúyese el mérito de tal armonía a los movimientos. Mas es natural que la proporción de los movimientos divergentes sea mucho mayor que la sesquiáltera de las proporciones de los orbes [la de sus potencias 3/2], por el final del capítulo 3; esto es, que se aproxime al cuadrado de la proporción de orbes; y 1:3 es también cuadrado de la proporción entre orbes cúbicos: como que a ésta la llamamos semitriple $[1:\sqrt{3}]$. Luego la triple [1:3] les es debida a los divergentes de Saturno y Júpiter. Algunos parentescos más de estas proporciones con el cubo puedes verlos en capítulo 2, más arriba.

IX. PROPOSICIÓN

Compuestas juntas las proporciones propias de los movimientos extremos de Saturno y de Júpiter debieron rondar la de 2:3, la quinta.

Síguese esto de lo que antecede, si el movimiento de Júpiter en perihelio es triple del movimiento de Saturno en afelio, y viceversa, el de Júpiter en afelio, doble del movimiento de Saturno en perihelio; por tal razón, inversamente compuestas 1:2 y 1: queda 2:3

X. AXIOMA

Cuando la elección es por lo demás libre, les es debida a los planetas superiores aquella proporción propia de movimientos que sea por naturaleza primera, o de género más excelente, o siquiera más grande.

XI. PROPOSICIÓN

La proporción del movimiento de Saturno en afelio al movimiento en perihelio debió hacerse 4:5, tercera mayor, la de los jupiterinos, empero, 5:6, tercera menor.

Pues compuestas juntamente se apropian de 2:3, mas ésta no se divide de otro modo que en 4:5 y 5:6: Dios armonizador por consiguiente dividió armónicamente la armonía 2:3, por el axioma I, y la parte mayor de ella, y del más excelente modo mayor, como masculino que es, la dio al planeta mayor y más alto, Saturno, y la menor, 5:6, al inferior, Júpiter, por el axioma X.

XII. PROPOSICIÓN

Érales debida a Venus y Mercurio por armonía mayor 1:4, doble octava.

Pues así como el cubo es primera figura de las primarias, así el octaedro lo es de las secundarias, por capítulo 1 de este libro. Y así como el cubo considerado geométricamente es exterior, e interior el octaedro, cual inscribible en aquél, así también en el mundo Saturno y Saturno y Júpiter son principio de los planetas exteriores y superiores, o lo que es igual, su principio desde fuera; Mercurio y Venus, empero, principio de los interiores, o tanto da, desde dentro, y colocado entre sus cursos, el octaedro; véase el capítulo 3. También les es debida pues a Venus y Mercurio alguna de las armonías primarias y emparentada al octaedro. Allende esto, de las armonías 1:2 y 1:3 síguese luego en orden natural 1:4; y es ésta pariente de la cúbica 1:2, por cuanto nacida de idéntica sección de las figuras, esto es, tetragonal, y conmensurable con ella, a saber, el doble; mas también el octaedro está emparentado al cubo y es conmensurable con éste. Y está 1:4 emparentada al octaedro, en particular, por causa de estar latente, en ella, el número cuaternario, y en el octaedro, la figura cuadrangular a cuya proporción entre orbes se llama semiduple [1:√2]. Es así pues la proporción de aquél de continuo múltiplo de la armonía 1:4, en la proporción de los duplos, a saber, cuádruple de la semidupla [cuarta potencia de 1:√2], véase el capítulo 2. Luego érales debida 1.4 a Venus y Mercurio. Y por haber sido hecha en el cubo 1:2 la menor armonía de las dos, defendida aquella posición exterior, estará en el octaedro esa proporción 1:4, la mayor de las dos, de suerte que cubra la posición interior. Pero ésta también es la causa de que aquí se haya dado por la mayor a 1:4, y no por la menor.* Pues comoquiera que la proporción de los orbes del octaedro sería semitriple [1:√3], supuesto que fuere perfecta la inscripción del octaedro entre planetas (aun cuando no lo sea, sino que penetre un tanto en Mercurio, lo que va en nuestro favor), conviene que la proporción de los convergentes sea menor que la potencia $^3/_2$ de 1:√3: mas 1:3 es lisa y llanamente cuadrado de 1:√3, y así, mayor que lo justo; tanto mayor que lo justo será 1:4, siendo como es mayor que 1:3. Luego no se tolerará siquiera la raíz cuadrada de 1:4 entre convergentes. No puede, pues, 1:4 ser menor que la octaédrica, luego será mayor. Allende esto, 1:4 está emparentada con el cuadrángulo octaédrico, cuya proporción entre orbes es la semiduple 1:√2, tal como 1:3 con el cubo, de la que es la semitriple 1:√3. Conque tal como 1:3 es potencia de la semitriple, a saber, cuadrado [304], asimismo 1:4 es aquí potencia de la semiduple, a saber, su doble duple, esto es, cuádruple [cuarta potencia]. Razón por la que si 1:3 debió hacerse armonía mayor del cubo, por la proposición VII, debe también hacerse 1:4 armonía mayor de su octaedro.

XIII. PROPOSICIÓN

Éranles debidas a los movimientos extremos de Júpiter y Marte, por armonía más grande, 1:8, rondando la triple octava, por más pequeña, 5:24, doble octava más tercera menor.

* Consonancias mayor y menor [*major, minor*] equivalen a las modernas consonancias «más amplias» o «más estrechas».

Pues que le han cabido en suerte al cubo 1:2 y 1:3, mas la proporción entre orbes del tetraedro sito entre Júpiter y Marte, a la que se llama triple, es cuadrado de la proporción entre orbes del cubo, llamada semitriple [1:√3], era conveniente que también al tetraedro se acomodaran proporciones de movimientos que fueran cuadrados de cúbicas. Ahora bien, de esas mismas 1:2 y 1:3 son cuadrados estas proporciones, 1:4 y 1:9. Mas 1:9 no es armónica, y 1:4 está ya tomada por el octaedro. Hubieron de tomarse, pues, armonías vecinas a estas proporciones, por el axioma I. Mas a 1:9, primeramente, lo son 1:8, más pequeña, y 1:10, más grande. Entre éstas, decide la elección el parentesco con el tetraedro, al que nada es común con el pentágono, comoquiera que 1:10 es parte de la secta pentagonal pero el parentesco mayor del tetraedro es con 1:8, por diversos títulos que has de buscar en el capítulo 2. Allende lo cual, obra en favor de 1:8 que de algún modo 1:3 es la más grande del cubo y 1:4 lo es del octaedro, por ser, multiplicadas por sí mismas, las proporciones entre orbes de esas figuras; así también 1:8 debió hacerse la mayor del tetraedro, que tal como el cuerpo de éste es el doble del cuerpo del octaedro a él inscrito, como dicho queda en el capítulo 1, así también el término 8 en la proporción tetraédrica es doble del término 4, en la octaédrica. Allende esto, así como 1:2, la más pequeña del cubo, es una octava, y 1:4, la más grande del octaedro, dos octavas, así entonces 1:8, la más grande del tetraedro, debió hacerse tres octavas. Ahora bien, debíansele al tetraedro más octavas que a aquéllos porque, siendo la menor armonía tetraédrica la mayor entre todas las más pequeñas de las demás figuras (como la proporción entre los orbes tetraédricos es la máxima entre todas las de las figuras), también la mayor armonía tetraédrica debía superar en número de octavas a todas las mayores de las restantes. Y por último, el triple de intervalos de octava guarda familiaridad con la especie triangular del tetraedro, y tiene cierta perfección conforme a esto, que todo lo trino es perfecto: como también el óctuplo, término suyo, es el primero de los números cúbicos de cantidad perfecta, esto es, de tres dimensiones.

En segundo lugar, vecinas a esta 1:4 o 6:24 son las armonías 5:24, más grande, y 6:20 o 3:10, más pequeña. Ahora bien, de nuevo es 3:10 del mismo corte que toda la secta pentagonal, a la que nada es común con el tetraedro. Mas 5:24, por causa de los números 3:4 (abuelos de los números 12:24), tiene familiaridad con el tetraedro. Pues desdeñamos aquí otros términos menores como 5 y 3, que es levísimo su grado de parentesco con las figuras, como se echa de ver en el capítulo 2. Junto a lo cual, la proporción entre orbes del tetraedro es la triple [3:1]; debe rondar otro tanto, empero, la de los intervalos convergentes, por el axioma II. Y por el capítulo 3, la proporción de los movimientos convergentes aproxímase a la inversa de la sesquiáltera; pero la sesquiáltera de la triple [potencia 3/2 de 3:1] ronda la de 1.000:193. Siendo el movimiento de Marte en afelio tal cual 1.000, y el correspondiente de Júpiter [en perihelio] poco mayor que 193, mucho menor que 333, parte tercia de aquél, no ha lugar, pues, la armonía 10:3, esto es, 1.000:333, sino la armonía 24:5, esto es, 1.000:208, entre los convergentes de Júpiter y Marte.

XIV. PROPOSICIÓN

La proporción propia de los movimientos extremos de Marte debió hacerse mayor que una cuarta, 3:4, y rondar la de 18:25.

Sean ahora las armonías exactas 5:24 y 1:8, o 3:24, atribuidas en común a Júpiter y Marte, proposición XIII. Compón inversamente la más pequeña, 5:24, con la más gran-

de, 3:24, y quedará 3:5 como proporción compuesta de las propias. Mas por propia de Júpiter solo se dio con 5:6, proposición XI, más arriba. Así pues, compón ésta inversamente con la compuesta de las propias, 3:5; esto es, 25:30 con 18:30, y quedará por propia de Marte 18:25, que es mayor que 18:24 o 3:4. Ahora bien, aún se hará mayor si incrementas la común mayor, 1:8, por las razones que siguen.

XV. PROPOSICIÓN

Entre los movimientos convergentes de Marte y la Tierra, de la Tierra y Venus, y de Venus y Mercurio, hubieron de ser repartidas las armonías 2:3, quinta, 5:8, sexta menor, y 3:5, sexta mayor; y ello en ese mismo orden.

Pues dodecaedro e icosaedro, figuras interpuestas entre Marte, la Tierra y Venus, tienen una proporción mínima entre sus orbes, circunscrito e inscrito [305], luego éranles debidas de entre las posibles armonías las mínimas, como a ellas emparentadas, y por que haya lugar el axioma II. Mas las armonías mínimas entre todas, 5:6 y 4:5, no son posibles, por proposición VI. Luego les son debidas a las dichas figuras las mayores próximas a éstas, a saber, 3:4 o 2:3 o 5:8 o 3:5.

De nuevo la figura interpuesta entre Venus y Mercurio, a saber, el octaedro, tiene entre sus orbes la misma proporción que el cubo, mas, por la proposición VII, adviénele al cubo por armonía menor, entre movimientos convergentes, la octava; luego por analogía le será debida también al octaedro otra tanta, 1:2, como la más pequeña, si no interviniere diversidad ninguna. Mas interviene, pues compuestas las proporciones propias de cada planeta cúbico, Saturno y Júpiter, forman una no más grande que 2:3; empero las de los planetas octaédricos, así Venus y Mercurio, la forman mayor que 2:3, lo que fácilmente se echa de ver así. Sea en efecto, lo que requeriría la analogía [proporción] entre cubo y octaedro, si ella sola fuere; sea pues, digo, la menor octaédrica mayor que las antes escritas; con lo que será lisa y llanamente tanta cuanta fuera la cúbica, 1:2, mas era la más grande 1:4, por la proposición XII. Dividida, pues, la más pequeña, 1:2, por ésta que acabamos de poner, permanecerá aún 1:2 como proporción compuesta de los movimientos propios de Venus y Mercurio acumulados; pero 1:2 es empero mayor que la compuesta de los propios de Saturno y Júpiter, 2:3. Y en verdad a mayor compuesta sigue mayor excentricidad, por el capítulo 3, mas por el mismo capítulo, a una mayor excentricidad le sigue una menor proporción entre los movimientos convergentes. Por tal razón, con la añadidura de una mayor excentricidad a la analogía entre cubo y octaedro también se requerirá entre los convergentes de Venus y Mercurio menor proporción que 1:2. Era también conforme con el axioma I que la armonía de octava asumida por los cúbicos se conciliara en los octaédricos con otra próxima, y por la demostración anterior, menor que 1:2. Ahora bien, esta próxima más pequeña es 3:5, que como mayor de las tres le era debida a la figura de mayor proporción entre sus orbes, a saber, el octaedro. Luego quedaban las más pequeñas 5:8, y 2:3 o 3:4, para icosaedro y dodecaedro, figuras con menores proporciones entre sus orbes.

Y éstas restantes están distribuidas así entre los restantes planetas, así como entre las figuras, bien que de igual proporción entre sus orbes, cúpole en suerte al cubo la armonía 1:2, mas al octaedro 3:5, más pequeña, de modo que la compuesta de los propios de Venus y Mercurio superare a la compuesta de los de Saturno y Júpiter, así también aquí

érale debido al dodecaedro, aun cuando forme idéntica proporción entre sus orbes que el icosaedro, una más pequeña que la de éste, pero ello no obstante, próxima a ésta por causa similar, esto es, por estar esta figura entre la Tierra y Marte, a quienes se les había dado más arriba una gran excentricidad; mas las excentricidades de Venus y la Tierra, como oiremos en lo que sigue, son las mínimas. Pero comoquiera que el octaedro tenga 3:5, y el icosaedro, cuya proporción entre orbes es más pequeña, tenga la siguiente más pequeña, poco menor que aquélla, 5:8, restábanle, pues, al dodecaedro las restantes, 2:3 o 3:4, pero mejor aquélla, como más cercana a la del icosaedro 5:8, por ser similares figuras.

No era posible, empero, 3:4. Que si bien era en lo precedente bastante grande la proporción propia de Marte entre sus movimientos extremos, aportaba la Tierra como ya se ha dicho y se hará patente en lo que sigue la propia suya, menor, empero, que lo preciso para que la compuesta de ambas superara la quinta. No podía, pues, haber lugar 3:4, por la proposición VII. Y ello, allende esto, porque como se sigue en la proposición XLVII, la proporción de los intervalos convergentes debió ser mayor que 1.000:795.

XVI. PROPOSICIÓN

Compuestas juntamente las proporciones de los movimientos de Venus y Mercurio, las de los propios de cada uno, debieron formar una que rondara la de 5:12.

Divide la menor de las proporciones armónicas atribuidas en común a esa pareja en la proposición XV por la más grande, que es, por la proposición XII, 1:4 o 3:12; y queda 5:12, proporción compuesta de los movimientos propios de ambos. Y así la proporción propia entre movimientos extremos de Mercurio sólo es menor que 5:12, la cantidad propia de Venus. Entiende esto de estas primeras razones. Pues por las razones segundas resultará más abajo que la propia de Mercurio sólo sea 5:12, al venir a añadirse a las armonías comunes a ambos algún factor de alteración.

XVII. PROPOSICIÓN

No puede la armonía de los movimientos divergentes de Marte y de la Tierra ser menor que 5:12.

Pues le ha sido dado a Marte solo, en la proporción propia de sus movimientos, más de la cuarta, y más que 18:25, por la proposición XIV; pero la menor armonía de aquéllos es 2:3, la quinta, [306] por la proposición XV. Conque juntas esas dos partes hacen 12:25. Mas débesele a la Tierra su proporción propia, por el axioma IV. Así, comoquiera que la armonía de los divergentes conste de los dichos tres elementos, será aquélla mayor que 12:25. Pero la próxima armonía mayor que 12:25, esto es, que 60:125, es 5:12, esto es, 60:144. Razón por la cual, si es menester armonía para esta proporción la más grande de los movimientos de los dos planetas, por el axioma I, no podrá ser menor que 60:144, o 5:12.

Hasta aquí, por tanto, les había advenido a cada restante pareja de planetas su par de armonías, por razones necesarias; solamente a la pareja de la Tierra y Venus le había cabido en suerte una sola armonía, 5:8, por los axiomas usados hasta este punto. Por

consiguiente, haciendo un nuevo comienzo, inquiramos de aquí en adelante la restante armonía, la más grande de ellos dos, esto es, la de sus movimientos divergentes.

RAZONES POSTERIORES

XVIII. AXIOMA

Hubieron de constituirse armonías universales de los movimientos atemperándose seis movimientos; señaladamente, de los extremos.

Pruébase por el axioma I.

XIX. AXIOMA

Debieron las mismas armonías universales sobrevenir mediante alguna latitud de movimiento, de suerte que así acaecieren tanto más a menudo.

Pues si hubieran sido determinadas para los puntos individuales del movimiento, hubiera podido hacerse que nunca acaeciesen, o de cierto muy raramente.

XX. AXIOMA

Así como es la más natural distinción de los modos de armonías en mayor y menor, como probado queda en el libro tercero, así hubieron de procurarse ambos modos de armonías universales entre movimientos extremos de planetas.

XXI. AXIOMA

Las armonías de ambos modos hubieron de instituirse de diversa especie, de suerte que se concertaren en la belleza del mundo todas las variedades posibles de miembros; y ello, mediante movimientos extremos, al menos algunos.

Por el axioma I.

XXII. PROPOSICIÓN

Los movimientos extremos de los planetas debieron señalar lugares o cuerdas del sistema de la octava, o notas de la escala musical.

Pues nacimiento y comparación de las armonías comenzadas a partir de un término común generaron la escala de la música, o divisiones de la octava en lugares o tonos su-

yos, como probado queda en el libro tercero. Comoquiera, por tanto, que requiérense armonías entre varios extremos de movimientos, por los axiomas I, XX y XXI, por tal razón requiérese distinción real de algún sistema celeste o escala armónica, mediante los extremos de los movimientos.

XXIII. PROPOSICIÓN

Fue oportuno que existiera una pareja de planetas entre cuyos movimientos ninguna armonía pudiere existir fuera de las dos sextas, la mayor, 3:5, y la menor, 5:8.

Comoquiera que fuera necesaria distinción de modos de armonías, por el axioma XX, y ello mediante movimientos extremos en los ápices, por la proposición XXII, al estar necesitados tan sólo los extremos, es decir, los más tardos y los más raudos, de definición por parte de alguien que procure y ordene, pues prodúcense las tensiones o tonos medios de por sí, con el mismo tránsito del planeta del movimiento más tardo al más veloz, sin otro cuidado particular, no pudo, por tanto, hacerse esta ordenación de otro modo sino que se señalara la diesis, o 24:25, en los extremos de los dos movimientos planetarios; conque distínguense por la diesis los modos de armonía, por lo explicado en el libro tercero. Mas es la diesis diferencia o bien entre dos terceras, 4:5 y 5:6, o entre dos sextas, 3:5 y 5:8, o entre las mismas sobradas en uno o más intervalos de octava. Dos terceras, 4:5 y 5:6, no habían lugar empero entre dos planetas, por la proposición VI; pero tampoco se ha dado en parte alguna con terceras o sextas incrementadas en el intervalo de una octava, fuera de 5:12 en la pareja de Marte y la Tierra; ni tampoco está de otro modo que no sea con 2:3 por compañera: y así también fueron admitidas juntamente con aquéllas otras las intermedias 5:8 y 3:5 y 1:2. Luego queda que habrían de ser dadas a una pareja de planetas las dos sextas 3:5 y 5:8. Mas las sextas solas hubieron de concederse a la variación de movimientos, de suerte que ni dilataren sus términos hasta abarcar el próximo intervalo más grande, 1:2, de una octava [307], ni los contrajeren a la angostura del próximo más pequeño, 2:3, de quinta. Pues si bien es verdad que dos planetas que formen quinta con sus movimientos extremos convergentes y octava con los divergentes pueden asimismo formar sextas, y así, atravesar también la diesis, no dimanaría cosa tal de la singular providencia del Ordenador de los movimientos. Pues la diesis, el más pequeño de los intervalos, latente en potencia en todos los más grandes que quedan comprendidos en movimientos extremos, es atravesada por movimientos intermedios que varían a lo largo de un continuo de tensión o tono, ciertamente; mas no queda determinada por los extremos de ellos, comoquiera que la parte sea siempre menor que el todo, a saber, la diesis menor que el intervalo 3:4, el más grande de los que hay entre 2:3 y 1:2, que pondremos aquí por totalidad a determinar por los movimientos extremos.

XXIV. PROPOSICIÓN

Los dos planetas que mudan de modo de armonía, que es la diferencia entre proporciones propias entre movimientos extremos, deben formar diesis,

y la proporción propia de uno, ser mayor que la diesis, y formar sus movimientos en afelio una de las sextas, la restante, sus movimientos en perihelio.

Así, como los dos extremos de los movimientos formen armonías que difieran por una única diesis, puede hacerse ello de un triple modo: que el movimiento de uno de los planetas permanezca constante, y varíe el del otro por diesis; o que ambos varíen por medias diesis y formen 3:5, una sexta mayor, cuando el superior esté en afelio y el inferior en perihelio: y salidos de esos espacios, tomando por distinta vía cada uno, el superior hasta el perihelio y el inferior hacia el afelio, formen 5:8, sexta menor; o bien, por último, que uno varíe más que el otro su movimiento desde el afelio al perihelio, y sea ese exceso de una diesis, y haya así una sexta mayor entre los dos afelios, y menor entre los perihelios. Mas el primero de esos modos no es legítimo; que no tuviera entonces excentricidad uno de esos dos planetas, contra el axioma IV. El segundo modo fuera menos pulcro, y menos cómodo: menos pulcro, por menos armónico. Pues las proporciones propias de los movimientos de dos planetas serían discordantes, que discorde y desajustado es cuanto sea menos de una diesis, a más de hacer trabajar a un planeta solo con esa pequeñez de desajuste. Y no es que no pudiera hacerse, ciertamente, sino que, establecido así, desviáranse los movimientos extremos allende los lugares del sistema o notas de la escala musical, contra la proposición XXII. Y fuera también menos cómodo, que sobrevendrían sextas tan sólo en aquellos momentos en que los planetas estuvieren en contrarios ápices, y pues ninguna latitud habría mediante la cual pudieren ocurrir esas sextas y, con ellas, armonías universales, rarísimas serían las armonías universales, reducidos los lugares de los planetas todos a ciertos fijos de sus órbitas, y a las angosturas de puntos únicos, contra el axioma XIX. Queda, pues, el modo tercero: que ambos planetas varíen su movimiento propio; pero uno más que otro, en tanto cuanto una diesis perfecta en el mínimo.

XXV. PROPOSICIÓN

De los planetas que mudan el modo de armonía, debe tener el superior una proporción de movimientos propios menor que la de un tono menor [entero], 9:10; el inferior, empero, menor que la de un semitono, 15:16.

Pues, o bien harán 3:5 los movimientos en afelio, o los movimientos en perihelio, por las premisas. En perihelio, no; que fuera entonces entre los movimientos en afelio 5:8, con que tendría el inferior en su proporción propia una diesis más que el superior, por las mismas premisas. Ello, empero, está en contra del axioma X. Formen, pues, los movimientos en afelio 3:5, y en perihelio, 5:8, menor que aquélla por 24:25. Pero si los movimientos en afelio forman 3:5, sexta mayor, y por tanto el del superior en afelio con el de inferior en perihelio más de una sexta mayor, formará el inferior su entera proporción propia. Del mismo modo, si los movimientos en perihelio forman 5:8, sexta menor, el movimiento en perihelio del superior y en afelio del inferior formarán menos que una sexta menor: el inferior compondrá inversamente su entera proporción propia. Mas si la proporción propia del inferior igualare a 15:16, semitono, podría entonces darse, a más de sextas, quinta, por ser quinta la sexta menor disminuida en un semitono; mas esto va contra la proposición XXIII. Por tanto, el planeta inferior tendrá menos de un semitono en su intervalo propio. Y como la proporción propia del superior es mayor que la propia

del inferior por una diesis, pero la diesis añadida al semitono hace un tono menor, 9:10, la proporción propia del superior es, por tanto, menor que un tono menor, 9:10.

XXVI. PROPOSICIÓN

De los planetas que mudan el modo de armonía, debió tener el superior por intervalo entre sus movimientos extremos o bien una diesis al cuadrado, 576:625, esto es, rondando 12:13, o [308] bien un semitono, 15:16, o bien algo intermedio, distante del uno o de la otra una coma, 80:81: mas el inferior, empero, o bien diesis simple, 24:25, o bien aproximadamente la diferencia entre semitono y diesis, que ronda la proporción 125:128, esto es, 42:43, o bien, por último, similarmente algo intermedio, distante una coma, 80:81, del uno o de la otra: esto es, aquél superior una diesis al cuadrado, éste inferior, simple, y ambas, disminuidas en una coma.

Pues la proporción propia del superior debe ser mayor que la diesis, por la proposición XXV, pero menor que el tono, 9:10, por lo precedente. Mas el superior, empero, debe exceder del inferior una diesis, por la proposición XXIV. Y la belleza armónica nos persuade de que esas proporciones propias, si por su pequeñez no pudieren ser armónicas, al menos estén entre las concordantes si pudiere hacerse, por el axioma I. Pero de éstas, tan sólo dos son menores que el tono, 9:10, a saber, semitono y diesis: éstas empero no difieren entre sí por una diesis, pero por algún intervalo más pequeño, 125:128. No puede ser a la vez, por tanto, que tengan semitono el superior y diesis el inferior: sino que el superior tendría el semitono15:16, y el inferior, 125:128, esto es, 42:43, o bien el inferior tendría diesis, 24:25, pero el superior, diesis al cuadrado aproximadamente, 12:13. Comoquiera, empero, que ambos planetas sean de iguales leyes, razón por la que si hubo de violarse a la naturaleza en las concordancias propias, igualmente hubo de serlo en las de entrambos, de suerte que la diferencia entre sus intervalos propios pudiera permanecer en una diesis exacta necesaria para discriminar modos de armonías, por la proposición XXIV: entonces igualmente violárase a la naturaleza en ambos si tanto cuanto superara la proporción propia del superior al semitono, o le faltara para la diesis al cuadrado, otro tanto le faltara a la proporción propia del inferior para la diesis simple, o en otro tanto superara el intervalo 125:128.

Allende lo cual, ese exceso o defecto debió ser de una coma, de 80:81, por cuanto, una vez más, no señalaban las proporciones armónicas a ningún otro intervalo, de suerte que la coma se expresara así entre los movimientos celestes como está expresa en las proporciones armónicas, y entre aquéllos tal como entre éstas, a saber, por el solo defecto o exceso mutuo entre intervalos. Pues la coma, en armonías, distingue entre tonos mayor y menor, y no se deja notar de ninguna otra manera.

Resta inquirir cuál de ambos intervalos propuestos sea preferible, si diesis simple para el planeta inferior y al cuadrado para el superior, o mejor el semitono para el superior y 125:128 para el inferior. Y vencen los argumentos de la diesis. Pues si bien el semitono hállase expreso variadamente en la escala musical, su compañero, 125:128, no lo está. Por el contrario, la diesis hállase expresa variadamente, y de algún modo, también la diesis al cuadrado, tal como en la resolución de tonos en diesis, semitonos y lemas: entonces, como dicho queda en el libro tercero, capítulo 8, sucédense muy próximas dos diesis, en dos lugares. El otro argumento es que a la distinción en modos le son propias las leyes de la diesis, y ninguna del semitono; mayor consideración pues

hubo de tenérsele a la diesis que al semitono. Así, todo conspira a que deba ser la proporción propia del superior 2.916:3.125, o 14:15 aproximadamente; y la del inferior, 243:250, o 35:36 aproximadamente.

¿Inquiérese si la suma sabiduría creadora fuera a ocuparse en rebuscar estas cuentecillas tan alambicadas? Respondo que puede ser me estén ocultas muchas razones. Mas si la naturaleza de la armonía no cargó con otras de más peso, siendo ésas proporciones que descienden por debajo de la cantidad de toda concordancia, no es absurdo que Dios las haya seguido, aun cuando tan tenues parezcan, comoquiera que nada ordenaría sin causa. Más absurdo sería, de largo, afirmar que Dios haya cogido al azar esas cantidades por debajo del término prescrito para el tono menor. Y no bastaría decir que habría tomado cuantas le pluguiera: que en cosas geométricas sujetas a libertad de elección nada place a Dios sin alguna causa geométrica; como se hace patente en los bordes de las hojas, las escamas de los peces, las pieles de las fieras y sus manchas, y el orden de sus manchas, y en cosas semejantes.

XXVII. PROPOSICIÓN

La proporción mayor de movimientos de la Tierra y Venus debió ser una sexta mayor entre movimientos en afelio; la menor, sexta menor, entre movimientos en perihelio.

Fue oportuno distinguir modos de armonías, por el axioma XX. Ahora bien, tampoco pudo hacerse de otro modo que mediante sextas, por la proposición XXIII. Comoquiera que, por la proposición XV, recibieran una de ellas, 5:8, la Tierra y Venus, planetas próximos e icosaédricos, convino se les atribuyera la otra, 3:5. Mas no entre extremos convergentes o divergentes, sino entre los extremos situados hacia igual costado, una sexta [309] entre afelios, la otra, entre perihelios, por la proposición XXIV. Aparte de ello, está la armonía 3:5 emparentada al icosaedro, siendo como son ambos del mismo corte que la secta icosaédrica. Véase el capítulo 2.

He aquí la causa por que vinieron a darse armonías precisas entre los movimientos de ambos en afelio, y entre sus movimientos en perihelio, mejor que no entre convergentes como en los planetas superiores.

XXVIII. PROPOSICIÓN

Cumplíale al movimiento propio de la Tierra rondar la proporción 14:15: al de Venus, la de 35:36.

Pues estos dos debían distinguir los modos de armonía, por las premisas: luego a la Tierra, por la proposición XXVI, le fue dado como superior el intervalo 2.916:3.125, esto es aproximadamente 14:15. A Venus empero, como inferior, el intervalo 243:250, esto es, aproximadamente 35:36.

He aquí la causa por que estos dos planetas tengan tan parvas excentricidades, y conforme a ellas, tan parvos intervalos o proporciones entre movimientos propios extremos: cuando el próximo superior, Marte, y el próximo inferior, Mercurio, tiénenlos muy se-

ñalados y los mayores de todos. Mas confirma la astronomía ser esto verdad; pues en el capítulo 4 obtuvo la Tierra lisa y llanamente 14:15, y Venus, 34:35, que la certeza astronómica apenas sabría discernir de la proporción 35:36 en ese mismo planeta.

XXIX. PROPOSICIÓN

La mayor armonía entre movimientos de Marte y la Tierra, entre los divergentes, no pudo ser tomada de entre las mayores que 5:12.

No había más arriba, proposición XVII, ninguna más pequeña: mas ahora tampoco ninguna más grande. Pues la otra común, la menor 2:3, con la propia de Marte que por la proposición XIV supera 18:25, hace en total más que 12:25, esto es, que 60:125. Añade entonces la propia de la Tierra, 14:15, esto es, 56:60 por las premisas, y acumúlase más que 56:125 que es aproximadamente 4:9, es decir, poco más que octava más tono mayor. Pero la próxima armonía más grande que octava con tono es 5:12, octava con tercera menor.

Nota que no digo que esta proporción no sea ni mayor ni menor que 5:12, sino esto: que si fuere de necesidad hacerse armónica aquella proporción, no le cumpliría ninguna otra armonía.

XXX. PROPOSICIÓN

La proporción propia de Mercurio en sus movimientos debió hacerse la mayor de todas las demás proporciones propias.

Pues, por la proposición XVI, compuestas juntas las propias de Venus y Mercurio debían rondar 5:12. Mas la propia de Venus por separado es sólo 243:250, esto es, 1.458:1.500: compuesta inversamente con 5:12, esto es, 625:1.500, queda para Mercurio solo 625:1458, más grande que una octava con tono mayor: cuando la propia de Marte, que es la máxima de todos los demás planetas, es más pequeña que la sesquiáltera 2:3, esto es, la quinta.

Conque compuestas juntas las propias de Venus y Mercurio, los planetas inferiores, igualan aproximadamente a las cuatro propias de los superiores compuestas: porque, como se echa de ver al punto, compuestas las propias de Saturno y Júpiter exceden de 2:3; a las de Marte les falta algo para 2:3: compuestas todas, 4:9, esto es, 60:135. Añade la de la Tierra, 14:15, esto es 56:60, y acumúlase 56:135, poco más que 5:12, tanto cuanto era hace un momento la suma de las propias de Venus y Mercurio. Esto empero no es buscado, ni tomado de otro arquetipo de belleza separado y singular; pero resulta por sí de la necesidad de los vínculos de causas establecidos hasta aquí entre armonías.

XXXI. PROPOSICIÓN

Debió concordar el movimiento de la Tierra en afelio con el de Saturno en afelio, alguna octava mediante.

Pues hallose oportuno que hubiera armonías universales, por la proposición XVIII: por lo cual, también de Saturno con la Tierra y Venus. Mas hubiera concordado uno de los dos movimientos extremos de Saturno con una u otra, y fuera menos armónico que si ambos extremos concordaran con esos planetas, por el axioma I. Luego debió concordar Saturno por uno y otro de sus extremos; en afelio, con uno de esos dos planetas; en perihelio, con el restante, pues que nada se lo impedía, como primer planeta que es. Fueron pues estas armonías o identisonantes[1] o diversisonantes, esto es, en proporción continuadamente duple, o en otras. Mas ninguna de las dos armonías puede ser de otras proporciones, pues entre los términos 3:5 (que definen la armonía más grande entre Tierra y Venus, entre sus movimientos en afelio, por la proposición XXVII) no pueden existir dos armonías medias: que no puede en efecto la sexta dividirse en tres intervalos armónicos. Véase el libro tercero. No pudo pues Saturno, [310] por ninguno de sus dos movimientos extremos, formar octava con armónicos intermedios entre 3 y 5: mas, a fin de que concuerden con 3, de la Tierra, y con 5, de Venus, es de necesidad que uno de ellos concuerde idénticamente con otro, esto es, con alguno de los dichos planetas, o lo que es igual, algunas octavas mediantes. Ahora bien, comoquiera que las concordancias idénticas sean de mayor prestancia, hubieron de establecerse entre los movimientos extremos asimismo de mayor prestancia, en los afelios; que tienen éstos puesto de principios por causa de la elevación de los planetas en ellos, y esta armonía 3:5 de que ahora tratamos como la más grande de Venus y la Tierra reivindícanla de algún modo por propia y como prerrogativa suya. Y si bien le cumple esta armonía asimismo al movimiento de Venus en perihelio y a algún otro intermedio de la Tierra, por la proposición XXVII, el principio está empero en los movimientos extremos, y los intermedios vienen después de los principios. Como tenemos ya por una parte el más alto de los movimientos de Saturno, en afelio, por la otra ha de unírsele el movimiento de la Tierra en afelio mejor que el de Venus, que de los dos que distinguen modos de armonía es aquél nuevamente el más alto. Y hay otra causa más cercana: que las razones posteriores de que ahora versamos derogan a las primeras, aunque sólo acerca de extremos mínimos, lo que en armonía es tanto como decir acerca de todo intervalo menor que los concordantes. Mas, por las razones primeras, a esa armonía a establecer con Saturno en afelio se le aproximaba, unas octavas mediantes, no la Tierra en afelio, sino Venus. Compón pues, primero, la proporción propia entre movimientos de Saturno, esto es, entre el movimiento de Saturno en afelio y en perihelio, que es 4:5, por la proposición XI; segundo, la proporción entre los convergentes de Saturno y Júpiter, esto es, de Saturno en perihelio a Júpiter en afelio, 1:2, por la proposición VIII; tercero, entre los divergentes de Júpiter y Marte, esto es, de Júpiter en afelio a Marte en perihelio, 1:8, por la proposición XIII; cuarto, de los convergentes de Marte y la Tierra, esto es, de Marte en perihelio a la Tierra en afelio, 2:3, por la proposición XV; y acumularás entre el afelio de Saturno y el de la Tierra la proporción 1:30, a la que no falta más de 30:32, esto es, 15:16 o un semitono, para ser 1:32, o cinco octavas. Y así, si dividido un semitono en partículas más pequeñas que el menor intervalo concordante se compone con esos cuatro elementos, será perfecta la armonía entre los movimientos en afelio propuestos, los de Saturno y la Tierra: a saber, un pentadiapasón o cinco octavas. Mas para que igualmente formare algún número de octavas el de Saturno con el de Venus, ambos en afelio, hubiese sido oportuno recoger en las razones primeras alguna cuarta casi ínte-

1. «Consonancias identisonantes» son tales como 3:5, 3:10, 3:20.

gra: pues compuesta 3:5, la que hay entre movimientos en afelio de Venus y la Tierra, con 1:30, compuesta de los cuatro primeros elementos, recógese en total de las primeras razones 1:50 entre los afelios de Saturno y Venus, intervalo que difiere de 1:32 del pentadiapasón por 32:50, esto es, 16:25, que es quinta con diesis; y del hexadiapasón, o 1:64, por 50:64, que es 25:32 o una cuarta menos una diesis. Conque no entre los movimientos en afelio de Venus y Saturno, pero entre los de Saturno y la Tierra debió establecerse una armonía idéntica, de suerte que a Saturno con Venus quedara una armonía diversisonante.

XXXII. PROPOSICIÓN

No puede el movimiento de Saturno en afelio concordar exactamente sin más en armonías universales del modo menor con los demás planetas.

Pues la Tierra no concurre a la armonía universal de modo menor con su movimiento en afelio, por cuanto éste, por la proposición XXVII, forma con el de Venus un intervalo del modo Mayor, 3.5. Mas el de Saturno en afelio forma una armonía idéntica con el de la Tierra en afelio, por la proposición XXXI. Luego tampoco Saturno concurre con su movimiento en afelio. Sustitúyele no obstante uno más intenso, próximo al afelio, asimismo conforme al modo menor, como apareció en el capítulo 7.

XXXIII. PROPOSICIÓN

Está el modo mayor de armonías y de la escala de la música emparentado con los movimientos en afelio, el menor, con los movimientos en perihelio.

Pues si bien constitúyese armonía mayor no sólo entre los movimientos de la Tierra y Venus en afelio, sino también entre movimientos inferiores al afelio de una y otra, y hasta en sus perihelios; y si bien, viceversa, armonía menor no tan sólo entre los de Venus y la Tierra en perihelio, sino también entre movimientos superiores de una y otra, hasta el afelio, por la proposición XXVII: ello no obstante, designación más propia y evidente de género o modo son tan sólo ambos extremos, por las proposiciones XX y XXIV. Conque la designación propia del mayor está sólo en los movimientos en afelio, del menor, sólo en perihelio.

XXXIV. PROPOSICIÓN

En dos planetas comparados, está emparentado el modo mayor al planeta superior, el menor, al inferior.

[311] Pues por ser el modo mayor propio de los movimientos en afelio, el menor, de los movimientos en perihelio, por las premisas; mas siendo empero en afelio más tardos y graves que en perihelio, el mayor es por tanto el de los movimientos más tardos, el menor, el de los más raudos. Mas guarda mayor familiaridad con los tardos el superior de

dos planetas, con los raudos, el inferior, que siempre en el mundo síguese de la alteza lentitud en los movimientos propios. Luego también guardará mayor familiaridad con el modo mayor de la escala aquél que sea superior de los dos que se acomoden al modo; con el menor, el que inferior. Allende esto, el modo mayor gasta intervalos más grandes, 4:5 y 3:5, el menor, más pequeños, 5:6 y 5:8. Mas el planeta superior tiene también orbes mayores y más tardos, esto es, movimientos mayores y más extenso circuito: y los que convienen grandemente uno con otro emparentan entre sí.

XXXV. PROPOSICIÓN

Abrazan más familiarmente el modo mayor Saturno con la Tierra; el menor, Júpiter con Venus.

Pues comparados primeramente la Tierra con Venus, sirviendo aquélla como ésta a señalar uno y otro modo, aquélla es superior; conque la Tierra abraza mucho mejor el modo mayor, y Venus, el menor, por las premisas. Saturno en afelio, empero, concuerda con la Tierra en afelio, octavas mediantes, por la proposición XXXI. Razón por la cual también Saturno, por la proposición XXXIII, abraza el modo mayor. Después, el movimiento de Saturno en afelio, por lo mismo, fomenta más el modo mayor, y rechaza el menor, por la proposición XXXII. Guarda pues mayor familiaridad con el modo mayor que con el menor, que son los modos señalados más propiamente por los movimientos extremos.

En lo que atañe a Júpiter, ahora, es éste inferior en comparación con Saturno: luego así como le es debido a Saturno el modo mayor, débesele a Júpiter el menor, por las premisas.

XXXVI. PROPOSICIÓN

Debió el movimiento de Júpiter en perihelio concertarse con el de Venus en perihelio en una misma escala musical, mas no en la misma armonía; y mucho menos, con el de la Tierra en perihelio.

Pues que debíasele a Júpiter mucho mejor el modo menor, por las premisas; pero están más emparentados a éste los movimientos en perihelio, por la proposición XXXIII, debió Júpiter señalar por tanto en su perihelio la escala del modo menor, es decir, cierto lugar fijo o nota clave (*phthongum*). Mas señalan los movimientos de Venus y la Tierra en sus perihelios la misma escala, por la proposición XXVII. Luego con sus movimientos en perihelio hubo de asociarse el de Júpiter en el mismo tono. No podía empero constituir armonía alguna con el movimiento de Venus en perihelio. Pues, al deber formar en torno a 1:3 con el de Saturno en afelio, es decir, la nota *d* [Re] en el sistema en que Saturno en afelio daba *G* [Sol], pero Venus en afelio, *e* [Mi], acercaba la nota *e* [Mi] hacia un espacio de armonía más pequeño. Pues es aquélla 5:6, mas hay entre *d* [Re] y *e* [Mi] un intervalo mucho más pequeño, a saber, un tono, 9:10. Y si bien elévase Venus desde *e* [Mi], su tono en afelio, esta elevación es empero menor que una diesis, por la proposición XXVIII. Mas junta la diesis (y con ello, igualmente alguno más pequeño) con un tono menor, no alcanzan a igualar el intervalo de la armonía mínima, 5:6. No pudo pues el movimiento de Júpiter en perihelio guardar proporción con el de

Saturno en afelio, poco distante de 1:3, y concordar a la vez con Venus. Pero tampoco con la Tierra. Pues si el movimiento en perihelio de Júpiter fuera acomodado a la escala del movimiento de Venus en el mismo tono, de suerte que por debajo de los mínimos intervalos concordantes guardare con el de Saturno en afelio el intervalo 1:3, esto es, si distare del de Venus en perihelio un tono menor en dirección a los graves, 9:10 o 36:40 (salvando alguna octava); y como el de la Tierra en perihelio dista igualmente del de Venus en perihelio 5:8, esto es, 25:40, distarían así los de Tierra y Júpiter en perihelio 25:36, salvando algunas octavas. Mas esto no es armónico: como cuadrado que es de 5:6, o quinta disminuida en una diesis.

XXXVII. PROPOSICIÓN

Se halló oportuno que a la compuesta de las armonías propias de Saturno y Júpiter y a la más grande de las comunes a ambos, 1:3, viniera a añadirse un intervalo igual al de Venus, 2:3.

Pues coadyuva Venus con su movimiento en afelio a señalar apropiadamente el modo mayor, y con su movimiento en perihelio, el menor, por las proposiciones XXVII y XXXIII. Saturno en afelio, empero, debió también concertarse en el mayor, y así, con el movimiento de Venus en afelio, por la proposición XXXV; mas el de Júpiter en perihelio, con el de Venus en perihelio, por las premisas. Así, tanto cuanto monte el intervalo que forma Venus del afelio al perihelio, otro tanto ha de venir a añadirse necesariamente a aquel movimiento de Júpiter que forme 1:3 con el de Saturno en afelio, el mismísimo movimiento de Júpiter en perihelio. Pero la armonía entre los convergentes de Júpiter y Saturno es exactamente 1:2, por la proposición VIII. Dividido pues el intervalo 1:2 por aquél [312] que es un tanto más grande que 1:3, la que quede como compuesta de ambas proporciones propias será mayor que 2:3 por otro tanto.

Por la proposición XXVIII, *supra*, era la proporción propia entre movimientos de Venus 243:250 o 35:36 aproximadamente; y en el capítulo 4 se halló entre los de Saturno en afelio y Júpiter en perihelio un exceso poco mayor que 1:2, a saber, entre 26:27 y 27:28. Mas añadido al movimiento de Saturno en afelio un solo segundo, que no sé si discierna la astronomía, iguálase a la cantidad aquí prescrita.

XXXVIII. PROPOSICIÓN

Hubo de distribuirse entre los planetas de la manera que sigue el añadido de 243:250 a la compuesta de las proporciones propias de Saturno y Júpiter, que hasta aquí se establecía por las razones primeras en 2:3: a saber, que de él alcanzare a Saturno una coma, 80:81, y a Júpiter, el resto, 19.683:20.000 o 62:63 aproximadamente.

Que hubiera de distribuirse entre ambos planetas, síguese del axioma XIX, y ello, de tal suerte que pudieren concurrir ambos con sendas latitudes a las armonías universales del modo a cada cual emparentado. Mas el intervalo 243:250 es más pequeño que todos los concordantes: ninguna ley armónica queda por la cual se pudiere dividir en dos partes

concordantes; de no ser aquélla de que se hubo menester más arriba, en la proposición XXVI, para seccionar la diesis, 24:25: a saber, de tal suerte que fuera a dar en una coma, 80:81 (que es uno de los primarios que sirven a los intervalos concordantes), y un resto, 19.683:20.000 poco mayor que la coma, aproximadamente 62:63. Ahora bien, no habían de amputarse dos comas, sino una; a menos que se hicieran partes desiguales, comoquiera que las proporciones propias de Saturno y Júpiter sean aproximadamente iguales según el axioma X, ampliado también a los intervalos concordantes y sus partes minúsculas: y a la vez también porque defínese por los intervalos de tono mayor y menor una coma, no así dos. Allende lo cual, debíasele a Saturno, el más alto y poderoso de los planetas, no aquella parte que fuere más grande, por más que tuviere la más grande de las proporciones propias, 4:5, sino mejor aquélla que fuere primera y más bella, esto es, más armónica. Pues en el axioma X va primero mirar a la prioridad y perfección armónica, y último, a la cantidad, que ninguna belleza hay de suyo en la cantidad. Así, forman los movimientos de Saturno 64:81 una tercera mayor adulterina,* como la llamamos en el libro tercero, capítulo 12, mas los de Júpiter, 6.561:8.000.

No sé si entre las causas de la coma añadida a Saturno haya que enumerar ésta, a saber, que los intervalos extremos de Saturno puedan constituir la proporción 8:9, tono mayor, o si más bien resultará por sí sola de las antecedentes causas de movimiento. Así pues, aquí tienes en puesto de corolario la causa de haberse desprendido *supra*, capítulo 4, que los intervalos de Saturno abrazan una proporción próxima al tono mayor.

XXXIX. PROPOSICIÓN

No puede el movimiento de Saturno en perihelio concordar exactamente en armonías universales de planetas del modo mayor; ni el de Júpiter en afelio.

Como debiera el movimiento de Saturno en afelio concordar exactamente con los de la Tierra y Venus en afelio, por la proposición XXXI, concordaría también con ellos aquél movimiento de Saturno que fuere más intenso que los de aquéllas en sus afelios por otro tanto cuanto una tercera mayor, 4:5, y en efecto, los de Venus y la Tierra en afelio forman una sexta mayor, que por lo demostrado en el libro tercero es divisible en cuarta y tercera mayor. Luego aquel movimiento de Saturno que siguiera siendo más raudo que éste ahora concordado, aunque por debajo de la magnitud de los intervalos concordantes, no concordaría exactamente. Mas tal es el mismísimo movimiento de Saturno en perihelio, porque dista del movimiento en afelio más que el intervalo 4:5, para ser precisos, una coma de más, 80:81 (que es menos que el mínimo intervalo concordante), por la proposición XXXVIII. No concuerda pues exactamente el movimiento de Saturno en perihelio. Mas tampoco exactamente el de Júpiter en afelio: éste, en efecto, que no concuerda exactamente con el de Saturno en perihelio, sí concuerda octava mediante, por la proposición VIII; por tal razón no podría, según lo dicho en la proposición VIII, concordar exactamente.

* Véase *supra*.

XL. PROPOSICIÓN

Se halló oportuno añadir un lema platónico a 1:8, o triple octava, la armonía que se estableciera por las razones primeras entre los movimientos divergentes de Júpiter y Marte compuestos.

Pues, por la proposición XXXI, debió haber entre los movimientos en afelio de Saturno y la Tierra 1:32, esto es, 12:384; pero del movimiento de la Tierra en afelio al de Marte en perihelio, 3:2, esto es, 384:256 [313], por la proposición XV; y del movimiento de Saturno en afelio al movimiento en perihelio, 4:5 o 12:15, con su añadido, por la proposición XXXVIII; y por último, del movimiento de Saturno en perihelio al Júpiter en afelio, 1:2 o 15:30, por la proposición VIII; luego queda por tanto del movimiento de Júpiter en afelio al de Marte en perihelio 30:256, sustraído el añadido de Saturno. Mas 30:256 supera a 32.256, esto es, 1:8, por la cantidad de 30:32, esto es, 15:16 o 240:256, que es un semitono. Así, compuesto inversamente con 240:256 el añadido de Saturno, que por la proposición XXXVIII debió ser 80:81, esto es, 240:243, queda 243:256; más esto es el lema platónico,[1] a saber, aproximadamente 19:20: véase el libro tercero. Por tanto, hubo de añadirse a 1:8 el lema platónico.

Y así la mayor proporción entre Júpiter y Marte, la de sus movimientos divergentes, debe ser 243:2.048, que de algún modo es intermedia entre 243:2.187 y 243:1.944, esto es, entre 1:9 y 1:8, de las que más arriba requerían aquélla, analogía, y ésta, una armonía más próxima a concordancia.

XLI. PROPOSICIÓN

Necesariamente ha sido hecha la proporción propia de los movimientos de Marte cuadrado de la proporción armónica 5:6, a saber, 25:36

Pues que la proporción entre los movimientos divergentes de Júpiter y Marte debió ser 243:2.048, esto es, 729:6.144, por lo precedente, mas entre los convergentes 5:24, esto es, 1.280:6.144, por la proposición XIII, la compuesta de ambas propias fue necesariamente 729:1.280, o 72.900:128.000. Pero debió ser hecha la propia de Júpiter solo tanta como 6.561:8.000, esto es, 104.976:128.000, por la proposición XXXVIII. Luego dividida por ésta de Júpiter aquélla compuesta de ambas, queda por propia de Marte 72.900:104.976, esto es, 25:26, cuya raíz cuadrada es 5:6.

O de otro modo, así: del movimiento en afelio de Saturno al de la Tierra en afelio es la proporción 1:32 o 120:3.840; de aquél mismo al de Júpiter en perihelio es 1:3 o 120:360 con su añadido. Mas de ése al de Marte en afelio es 5:24 o 360:1.728. Quedará entonces del movimiento de Marte al de la Tierra, ambos en afelio, 1.728:3.840, menos el añadido aquél a la proporción entre los divergentes de Júpiter y Saturno. Pero de ese mismo movimiento de la Tierra en afelio al de Marte en perihelio es 3:2, esto es, 3.840:2.560. Luego entre los movimientos de Marte en afelio y perihelio restará la proporción 1.728:2.560, esto es, 27:40 u 81:120 menos el añadido dicho. Pero 81:120 es menor por una coma que 80:120 o 2:3. Luego si de 2:3 se quita una coma y además el

1. *Timeo*, 36.

añadido dicho (que por la proposición XXXVIII es igual a la proporción propia de Venus), restará la propia de Marte. La propia de Venus, empero, es una diesis disminuida en una coma, por la proposición XXVI. Mas una coma junta con una diesis disminuida en una coma hacen una diesis íntegra, 24:25. Luego si divides 2:3, esto es, 24:36, por la diesis, 24:25, quedará por propia de Marte 25:36, como antes: cuya raíz cuadrada 5:6 viene a ser la proporción de los intervalos, por el capítulo 3.

Y hete aquí de nuevo el porqué de haberse desprendido más arriba, en el capítulo 4, abrazar los intervalos extremos de Marte la proporción armónica 5:6.

XLII. PROPOSICIÓN

La mayor proporción entre Marte y la Tierra, la compuesta de sus movimientos divergentes, ha sido hecha necesariamente 54:125, menor que la armonía 5:12 establecida por las razones primeras.

Pues debió hacerse por propia de Marte una quinta despojada de una diesis, por lo precedente. Mas debió ser la de los convergentes de Marte y la Tierra, la más pequeña, una quinta, 2:3, por la proposición XV. Por último, la propia de la Tierra es una diesis al cuadrado despojada de una coma, por las proposiciones XXVI y XXVIII. Pero de estos elementos se compone la más grande de Marte y la Tierra, entre los divergentes, y ésa es dos quintas (o 4:9, esto es, 108:243) con una diesis que estará mutilada en una coma, esto es, con 243:250: será así 108:250 o 54:125, esto es, 608:1.500. Pero esto es menos que 625:1.500, es decir, menos que 5:12 en la cantidad 608:625 que es aproximadamente 36:37, menor que la mínima concordancia limpia.

XLIII. PROPOSICIÓN

No puede Marte en afelio concertarse en ninguna armonía universal: ello no obstante, fue necesario concertara hasta cierto punto en la escala del modo menor.

Pues que tiene el movimiento de Júpiter en perihelio el lugar *d* [Re] en el tono agudo en el modo menor, y entre ése y el de Marte en afelio debió ser la armonía 5:24, obtiene por tanto el de Marte en afelio el lugar adulterino *f* [Fa] en ese tono agudo. Adulterino digo: pues cuando reseñáramos en el libro tercero, capítulo 12 las consonancias adulterinas y las dedujéramos de la composición de sistemas, omitiéronse algunas que existen en el simple sistema natural [314]. Y así, escriba el lector a continuación de la línea que acaba en 81:120 esta otra: «De la que, si sustrajeres 4:5 o 32:40, quedaría 27:32, sexta disminuida,* que está entre *d* [Re] y *f* [Fa], o entre *c* [Do] y *e* [Mi],** o entre *a* [La] y *c* [Do] en la octava simple». Y en la tabla puesta debajo, ocupen la primera línea estas palabras: «Para 5:6 es 27:32, que es deficiente».

* Aquí esa «sexta» sería probablemente «tercera», según E. C. Jr.

** E. C. Jr. apunta aquí que *c* y *e* no producen una tercera disminuida en el «sistema natural», pero esto podría deberse, simplemente a una errata por omisión de «*g*» en el original, que diría entonces «*cg.e*».

De todo lo cual se hace patente constituirse en el sistema natural, entre la nota *f* [Fa] genuina, tal como se ordena a partir de mis principios, y la nota *d* [Re], una sexta menor deficiente o adulterina. Y así, comoquiera que entre el movimiento de Júpiter en perihelio, constituido en genuina nota *d* [Re], y el de Marte en afelio, haya una doble octava más una sexta menor por arriba, perfecta pero no deficiente o disminuida, por la proposición XIII, síguese que el de Marte en afelio señala un lugar que será por una coma más alto que la genuina nota *f* [Fa]; y así, no obtendría sino un *f* [Fa] adulterino: con lo que no sería consonante en esta escala sin más, sino sólo hasta cierto punto. Mas no entra en concordancia universal alguna, ni pura ni adulterina. Pues el movimiento de Venus en perihelio tiene el lugar *f* [Fa] de esa tensión. Pero hay disonancia entre *e* y *f* [Mi.Fa], por vecindad. Disuena pues Marte de uno de los planetas, Venus en perihelio. Pero también de los demás movimientos de Venus, disminuidos en una coma menos que una diesis: por ende, comoquiera que entre los de Marte en afelio y Venus en perihelio haya semitono y coma, habrá pues entre los de Venus en afelio y Marte en perihelio semitono y diesis (disimulando octavas), esto es, tono menor; que sigue siendo intervalo disonante. Tan sólo concierta Marte en afelio en la escala del modo menor, no así en la del mayor. Pues comoquiera que el de Venus en afelio concierte en *e* [Mi] del modo mayor, mas el de Marte en afelio (disimulando octavas) haya sido hecho más alto que *e* [Mi] en tono menor, necesariamente caerá el de Marte en afelio en medio de *f* [Fa] y *fo* [Fa sostenido] en ese tono, formando con *g* [Sol] (ocupado en este tono por la Tierra en su afelio) un intervalo de 25:27 lisa y llanamente discordante, un tono mayor despojado de una diesis.

De idéntico modo pruébase estar en discordia el movimiento de Marte en afelio también con los movimientos de la Tierra. Pues comoquiera que, por lo dicho, el de Venus en perihelio forme semitono y coma, esto es, 14:15, mas los de la Tierra y Venus en perihelio formen sexta menor, 5:8 o 15:24, por la proposición XXVII, formará entonces el de Marte en afelio con el de la Tierra en perihelio (añadidas las octavas) 14:24 o 7:12, intervalo ni siquiera limpio o concordante, no digamos armónico, como 7:6. Que discordante y sucio es cualquiera entre 5:6 y 8:9, como aquí 6:7. Pero ningún otro movimiento de la Tierra puede concordar con el de Marte en afelio. Pues por lo dicho anteriormente, que éste hace con el de la Tierra en afelio (disimulando octavas) 25:27, intervalo discordante, entonces desde 6:7 o 24:28 hasta 25:27 son todos más pequeños que el mínimo intervalo armónico.

XLIV. COROLARIO

Así pues, hácese patente por la proposición XLIII de Júpiter y Marte, y por la proposición XXXIX de Saturno y Júpiter, y por la proposición XXXVI de Júpiter y la Tierra, y por la proposición XXXII de Saturno, por qué no estuvieran más arriba, en capítulo 5, perfectísimamente acomodados los movimientos extremos de los planetas en un sistema natural o escala de música, y que aquéllos acomodados al sistema de un mismo tono no dividieran los lugares del mismo por razón natural, o lo que es igual, no se desprendiera efectuar esos planetas una pura sucesión natural de intervalos concordantes. Pues son más primeras y principales las razones por las cuales le han sido otorgadas a cada planeta singular armonías singulares, armonías universales a todos los planetas juntos, y finalmente, armonías universales de dos modos, mayor y

menor: puestas las cuales, queda ya estorbada la acomodación omnímoda a un solo sistema natural. Que no tuvieran esas causas necesariamente precedencia y, sin duda, quedaran comprendidos los movimientos extremos de los planetas todos en un sistema y un tono de éste, o bien, si hubieran sido menester dos sistemas para los dos modos de canto, mayor y menor, el mismísimo orden de la escala natural no hubiese sido expresado tan sólo en el modo mayor, sino también en el restante modo menor. Aquí pues tienes dichas las causas anticipadas en el capítulo 5 de las discordancias por intervalos mínimos y menores que todos los concordantes. [315]

XLV. PROPOSICIÓN

Convino venir a añadirse al mayor común a Venus y Mercurio, la doble octava, y también al propio de Mercurio, por las razones primeras establecidas en la proposición XII, un intervalo igual al de Venus, de suerte que el propio de Mercurio formara una proporción 5:12 perfecta y concordaran así ambos movimientos de Mercurio con un único movimiento de Venus, en perihelio.

Pues que debió concordar el movimiento en afelio de Saturno, planeta el más exterior y más alto, y circunscrito a su figura, con el movimiento en afelio de la Tierra, el más alto de los suyos, que divide las clases de figuras, síguese por la ley de los opuestos que el movimiento en perihelio de Mercurio, como planeta íntimo que es, inscrito a su figura, y el más bajo y vecino al Sol, se concierte con el movimiento en perihelio, el más bajo de los de la Tierra, linde común a uno y otro: lo primero, para señalar el modo mayor de armonías, lo segundo, para señalar el menor, por las proposiciones XXXIII y XXXIV. Mas el de Venus en perihelio debió concordar con el de la Tierra en perihelio en la armonía 5:8, por la proposición XXVII. Luego también el de Mercurio en perihelio debió concordar con el de Venus en perihelio en una sola escala. Estaba empero definida en 1:4 la armonía entre los divergentes de Venus y Mercurio por la proposición XII de aquellas razones primeras. Hubo pues de ser alterada por estas razones posteriores con la añadidura del entero intervalo de Venus. No por consiguiente en lo más amplio, desde el movimiento en afelio, sino desde el movimiento en perihelio de Venus al de Mercurio hay doble octava perfecta. Pero también es perfecta la armonía de sus convergentes, 3:5, por la proposición XV. Dividida por ésta 1:4, queda pues la sola proporción propia de Mercurio, 5:12, asimismo perfecta, mas ya no disminuida en la proporción propia de Venus (como en la proposición XVI por las razones primeras).

Otra razón: así como sólo Saturno y Júpiter no son tocados por fuera de ninguna manera por los cónyuges dodecaedro e icosaedro, así también sólo a Mercurio no tocan por dentro. Siendo así que tocan a Marte, la Tierra y Venus, a aquél, por dentro, a ésta, por fuera, y a la de en medio, por dentro y por fuera. Por tanto, así como en las proporciones propias de los movimientos de Saturno y de Júpiter, mantenidas por cubo y tetraedro, está añadido distributivamente algo igual a la propia de Venus, así también a la propia de Mercurio solo, contenido en las figuras compañeras de octaedro, cubo y tetraedro, debía venir a añadírsele otro tanto: como que si el octaedro, una sola figura entre las secundarias, hace las veces de dos de las primarias, cubo y tetraedro (acerca de lo cual trata el capítulo 1), entre los planetas inferiores no iba a dejar de haber también uno, Mercurio, que ocupara el puesto de dos superiores, a saber, Saturno y Júpiter.

En tercer lugar, así como el más alto, Saturno, debió concordar su movimiento en afelio, algún diapasón mediante, en la proporción 1:32, doble continua, con el movimiento asimismo en afelio del más alto y cercano de los dos que mudan de modo de armonía, por la proposición XXXI, así también, viceversa, el más bajo, Mercurio, debió concordar su movimiento en perihelio de modo semejante con el más bajo y asimismo más cercano de ésos mismos, y de nuevo alguna octava mediante, esto es, en proporción 1:4. En cuarto lugar, de los tres superiores, Saturno, Júpiter y Marte, tan sólo uno de los movimientos extremos se concierta en armonías universales; por tanto, de uno solo de los inferiores debieron concertarse en tales armonías ambos movimientos extremos: pues los intermedios, la Tierra y Venus, debían mudar de modo de armonía, por las proposiciones XXXIII, XXXIV. Por último, en las tres parejas superiores se ha venido a dar con armonías perfectas entre movimientos convergentes; alteradas, empero, entre divergentes y en los propios de cada uno: debieron hallarse entonces tales armonías en las parejas de los dos inferiores, viceversa, no entre convergentes ante todo, ni tampoco entre divergentes, sino entre movimientos hacia igual costado. Y como éranles debidas a la Tierra y Venus dos armonías perfectas, por tal razón también a Venus y Mercurio. Y a aquéllos dos primeros planetas debieron caerles en suerte tan perfectas entre movimientos en afelio como en perihelio, pues que debían mudar de modo de armonía; mas Venus y Mercurio, como que no lo mudaban, tampoco las requerían perfectas entre ambas parejas, movimientos en afelio y movimientos en perihelio: sino que sustituyó a la perfecta armonía en afelio, que ya fuera alterada, una perfecta armonía entre convergentes: de suerte que así como Venus, superior entre los planetas inferiores, tuviera la menor proporción propia en sus movimientos, por la proposición XXVIII, así a Mercurio, inferior de los inferiores, le tocare en suerte la mayor de todas, por la proposición XXX: y así también fuere la propia de Venus la más imperfecta de todas las propias, o la más distante de proporciones armónicas; pero la propia de Mercurio, la más perfecta entre las propias, esto es, armonía absoluta, sin alteración; y que así las razones de unos a otros fueren al cabo opuestas por doquier.

Que así, en efecto, engalanó las grandezas de su sabiduría Aquel que es desde antes de los siglos y hasta todos los siglos: nada redunda, nada falta, ni ha lugar para tacha alguna. ¡Cuán deseables sus obras!, etc., que de todas, una [316] a una enfrentadas, a ninguna falta su opuesto; y a cada una confirmó (estableció por las razones mejores) en sus bienes (su honra y decoro), y ¿quién se saciará de ver su gloria?

XLVI. AXIOMA

Debe la interposición de figuras sólidas entre orbes planetarios, si es libre, y no estorbada por la necesidad de causas precedentes, seguir a la perfección la analogía de inscripciones y circunscripciones geométricas; y con ello, las condiciones de proporción de los inscritos a los circunscritos.

Pues nada es en verdad más conforme a razón sino que la inscripción física represente exactamente a la geométrica, como la obra a su tipo.

XLVII. PROPOSICIÓN

Si fue libre la inscripción de figuras entre planetas, debió el tetraedro tocar con sus ángulos por arriba exactamente el orbe de Júpiter en perihelio, por debajo, con los centros de sus planos, exactamente el de Marte en afelio. Pero cubo y octaedro, al situar sus ángulos en el orbe del perihelio del planeta, debieron hacer penetrar los centros de sus planos en el orbe del planeta interior, de suerte que esos centros giraran dentro de los orbes en afelio y en perihelio. Mas por el contrario debieron dodecaedro e icosaedro, al apretar con sus ángulos los orbes en perihelio de sus planetas, no tocar los orbes de los suyos interiores en afelio. Por último, el «erizo» dodecaédrico, al estar sus ángulos en el orbe de Marte en perihelio, debió venir con los puntos medios de caras inversas, que distinguen entre dos radios sólidos, hasta cerca del orbe de Venus en afelio.

Es en efecto el tetraedro figura media entre las primarias, por nacimiento y puesto en el Mundo, conque debió entonces, si nada lo impedía, remover por igual ambas regiones, la de Júpiter y la de Marte. Y como el cubo estaba más arriba y más afuera, y el dodecaedro más abajo y más dentro, iba parejo, por tanto, que la inscripción de aquéllos pugnara por hacerse con esa contrariedad en la que el tetraedro ocupaba el medio, y que una de esas inscripciones formara un exceso, la otra, un defecto; o de otro modo, que una penetrara un tanto en el orbe interior, y la otra no lo tocara. Y por ser el octaedro pariente del cubo, tienen igual proporción de orbes; pero el icosaedro lo es del dodecaedro: por tanto, lo mismo que el cubo tiene de perfección en la inscripción le es debido al octaedro; y lo que el octaedro, al icosaedro. Es similar la situación del octaedro a la del cubo, mas la del icosaedro, a la del dodecaedro: que como el cubo detenta uno de los límites al exterior, así el octaedro el otro extremo restante hacia el interior del Mundo, mas dodecaedro e icosaedro, por su parte, median: conviniéronles también, por tanto, inscripciones similares, en aquél, penetrante en el orbe del planeta interior, aquí, falta de alcanzarlo. Mas el «erizo», que representa al icosaedro por los ápices de sus ángulos, y por sus bases al dodecaedro, debió abrazar o disponer también de ambas regiones atribuidas para que las colmaran al dodecaedro, entre Marte y la Tierra, y al icosaedro, entre la Tierra y Venus. Ahora bien, cuál sociedad conviniera a cuál de los así opuestos, déjalo claro lo antedicho. Pues al tetraedro, que tiene un orbe inscrito expresable, le cayó en suerte un lugar medio entre las figuras primarias, escoltada a uno y otro lado por figuras de orbes inconmensurables, la exterior, el cubo, y la interior, el dodecaedro, por capítulo 1. Mas esta cualidad geométrica, la expresabilidad de los orbes inscritos, represéntala en la naturaleza la inscripción perfecta de los orbes planetarios. Así pues, el cubo y sus socios entre las figuras tienen inscritos expresables por cuadrados, esto es, solamente en potencia; deben representar pues la inscripción semiperfecta; donde los centros de los planos de las figuras alcancen, aun cuando no la misma extremidad del orbe planetario, al menos algo más interior y expresamente medio entre los orbes en afelio y perihelio, si otras razones lo permitieren. Por el contrario, el dodecaedro con sus socios tienen unos inscritos lisa y llanamente inefables por longitud del radio o por potencia: deben pues representar la inscripción imperfecta sin más, que no alcance absolutamente nada del orbe planetario, esto es, deficiente, ni se extienda hasta tocar el orbe del planeta en afelio con los centros de sus planos. Y si bien el «erizo» es pariente del dodecaedro y sus socios, tiene no obstante algo similar al tetraedro. Pues

el radio del inscrito entre caras inversas es inconmensurable con el radio del circunscrito, cierto, pero conmensurable, al menos, con la longitud de la distancia entre dos ángulos vecinos. Y así, la perfección es casi tanta como en el tetraedro, lo conmensurable de los radios, y por otra parte, tanta la imperfección cuanta en el [317] dodecaedro y sus socios. Es pues conforme a razón que también le cumpla tener una inscripción física ni francamente tetraédrica ni francamente dodecaédrica, sino de modo intermedio; de suerte que, como debiera el tetraedro alcanzar a tocar la extremidad del orbe con sus planos, y el dodecaedro no alcanzarla por un espacio fijo, esta figura aguzada con sus caras inversas estuviere entre el espacio icosaédrico y el extremo del orbe inscrito, próxima a tocarlo: si es que de todas maneras también esta figura había de ser admitida en la sociedad de las cinco restantes y podían ser toleradas sus leyes por las leyes de las restantes. Pero ¿qué digo tolerar?, no podían prescindir de ellas. Pues si correspondía al dodecaedro una inscripción laxa, sin contacto, ¿qué otra cosa podía imponer límites entre cantidades ciertas a esa laxitud indefinida, sino esta figura subsidiaria, pariente de dodecaedro e icosaedro, próxima a tocar su orbe inscrito y que, aun si fuere deficiente, no lo sería por más de lo que el tetraedro excede y penetra? Cantidad ésta de la que ahora trataremos en lo que sigue.

Hace harto verosímil esta razón de que se asocie el «erizo» con dos figuras emparentadas (a saber, que se determinara así la proporción entre orbes de Marte y Venus que aquéllas dejaran indefinida) el que venga a darse con un semidiámetro del orbe de la Tierra, 1.000, que prácticamente ocupa el puesto de medio proporcional entre el orbe de Marte en perihelio y el de Venus en afelio; casi como si el espacio que reivindica el «Erizo» de las figuras emparentadas se hubiera dividido proporcionalmente entre ellas.

XLVIII. PROPOSICIÓN

No fue la inscripción de las figuras sólidas regulares entre orbes planetarios cosa de mera libertad; en cuanto a magnitudes mínimas, estorbábanla las armonías establecidas entre movimientos extremos.

Pues por los axiomas I y II la proporción de orbes de una figura cualquiera no debía expresarse inmediatamente por sí, sino que primeramente había de buscarse mediante ella las armonías a acomodar a los movimientos extremos, sumamente emparentadas con las proporciones de los mismos orbes.

Luego, comoquiera que por los axiomas XVIII y XX puedan ser las armonías universales de dos modos, se halló oportuno añadirse a las armonías más grandes de cada pareja un tanto de alteración, por las razones posteriores. Así pues, para que esto pudiera sostenerse y por sus propias razones, se requerían intervalos algo discordantes de aquéllos que quedan explicados a partir de la inscripción perfecta de figuras en sus orbes, por las leyes de los movimientos, en el capítulo 3. Para comprobarlo, y que se eche de ver cuánto se deroga de cada una de las figuras por mor de estas armonías establecidas por sus propias razones, construyamos a partir de ellas esos intervalos extremos desde el Sol a los planetas por una forma de cálculo nueva y nunca intentada antes por nadie.

Ahora bien, tres serán las cabeceras de que parta esta inquisición: primero, a partir de los dos movimientos extremos de cada planeta se buscarán los similares intervalos

extremos desde el Sol, y a partir de ellos, el radio del orbe en aquella dimensión, la de los intervalos extremos, que sea propia del tal planeta. Segundo, a partir de los mismos movimientos extremos se inquirirá, en idéntica dimensión para todos, los movimientos medios y la proporción de éstos. Tercero, a partir de la proporción de los movimientos medios, ya patente, se investigará la proporción de los orbes o intervalos medios, y también de uno de los extremos; y se comparará con las proporciones de las figuras.

En lo que atañe a lo primero: ha de repetirse, del capítulo 3, número 6, que la proporción de movimientos extremos es cuadrado inverso de la proporción entre los correspondientes intervalos desde el Sol. Por tanto, comoquiera que también la proporción de los cuadrados sea cuadrado de la proporción de sus lados, se considerarán los números por los que se expresan los respectivos movimientos extremos como cuadrados, y buscadas sus raíces darán los intervalos extremos, de los cuáles es fácil tomar la media aritmética por semidiámetro de orbe y excentricidad. Así, pues, escribiéronse las armonías hasta ahí establecidas:

[318] *Planetas*	*Proporciones de movimiento*	*Sus raíces, o prolongadas o de múltiplos suyos*	*Por tanto, el semidiámetro del orbe*	*Excentricidad*	*En medidas en las que el semidiámetro del orbe es 100.000*
Saturno por XXXVIII	64 : 81	80 : 90	85	5	5.882
Júpiter por XXXVIII	6.561 : 8.000	81.000 : 89.444	85.222	4.222	4.954
Marte por XLI	25 : 36	50 : 60	55	5	9.091
La Tierra por XXVIII	2.916 : 3.125	93.531 : 96.825	95.178	1.647	1.730
Venus por XXVIII	243 : 250	9.859 : 10.000	99.295	705	710
Mercurio por XLV	5 : 12	63.250 : 98.000	80.625	17.375	21.551

Para el segundo de nuestros propósitos, de nuevo hemos menester del capítulo 3, número 12, donde mostrado queda que el número que expresa el movimiento medio en proporción a los extremos es menor que la media aritmética de éstos, y menor también que la geométrica por otro tanto cuanto la mitad de la diferencia entre ambas medias. Y como ahora inquirimos todos los movimientos medios en idéntica dimensión, por tal razón todas las proporciones hasta aquí establecidas entre pareja y pareja, y asimismo las propias de cada uno, se harán explícitas en la medida del mínimo común divisible. Búsquense entonces las medias, la aritmética, dividiendo por la mitad las diferencias entre movimientos extremos de cada uno, la geométrica, multiplicando los extremos entre sí y extrayendo la raíz del producto: sustraída entonces de la media geométrica la mitad de la diferencia entre las medias, establézcase el número del movimiento medio en la dimensión propia de los movimientos extremos de cada planeta; lo que fácilmente se traspone a la dimensión común por la regla de proporciones.

[319] Se ha dado pues, a partir de las armonías antes escritas, con la proporción de los movimientos diarios medios, que es la proporción de los números de grados, minutos etc. de cada cual, comparados; de la cuál es fácil explorar cuán próximo se acerca a la astronomía.

Proporciones armónicas entre parejas		*Números de los movimientos extremos*			*De los propios de cada uno*	*Media continuada de cada uno*		*Mitades de la diferencia*	*Número del movimiento medio en la dimensión*	
									suya	común
1		Saturno	♄	139.968	64	Aritmética	Geométrica			
			♄	177.147	81	72,50	72,00	0,25	71,75	156.917
	1									
	2	Júpiter	♃	354.294	6.561					
			♃	432.000	8.000	7.280,5	7.244,9	17,8	7.227,1	390.263
	5									
	24	Marte	♂	2.073.600	25					
			♂	2.985.984	36	30,50	30,00	0,25	29,75	2.467.584
	2									
32	3	la Tierra	♁	4.478.976	2.916					
			♁	4.800.000	3.125	3.020.500	3.018.692	0,904	3.017.788	4.635.322
	5									
	5	Venus	♀	7.464.960	243					
	8		♀	7.680.000	250	246.500	246.475	0,0125	246.4625	7.571.328
1	3									
	5	Mercurio	☿	12.800.000	5					
			☿	30.720.000	12	8.500	7.746	0,377	7.369	18.864.680
4										

El tercer punto capital de nuestros propósitos requiere del capítulo 3, número 8. Habiendo dado con la proporción de los movimientos diarios medios en un planeta singular, es factible venir a dar con la de los orbes. Pues aquélla es sesquiáltera [potencia $^3/_2$] de la inversa de los orbes. Mas también la proporción de los números cúbicos es sesquiáltera de la proporción de los cuadrados de esas mismas raíces escritos en la tabla de Clavius, que adjuntó a su *Geometría práctica*. Por tal razón, si se buscan entre los cúbicos de su tabla nuestros números de movimientos medios (acortados donde fuere menester a igual número de cifras), mostrarán a la izquierda bajo el título de cuadrados los números de la proporción de orbes: traspónese entonces fácilmente a la dimensión común a todos, por la regla de proporciones, la excentricidad escrita bajo cada uno en la dimensión propia de su semidiámetro, de suerte que por adición a los semidiámetros de los orbes y sustracción de allí se establezcan los intervalos extremos desde el Sol a cada uno. Ahora bien, daremos al semidiámetro del orbe de la Tierra una dimensión redonda, 100.000, como es uso en astronomía: y ello con este designio, que este número, ya multiplicado al cuadrado, ya al cubo, conste siempre de puras cifras, y así también llevemos el movimiento medio de la Tierra al número 10.000.000.000, obrando por la regla de proporciones de suerte que el número del movimiento medio de cualquier planeta sea al del movimiento medio de la Tierra como 10.000.000.000 a la nueva dimensión. Con que podría llevarse adelante el negocio con sólo cinco raíces cúbicas, comparadas cada una con un único número, el de la Tierra.

Números de los movimientos medios				*Números de la proporción de orbes hallados entre los cuadrados*	*Semi-diámetros como* supra	*Excentricidades en la dimensión*		*Intervalos extremos que surgen*	
		En la dimensión primitiva	*En la dimensión nueva a buscar en orden inverso entre los cubos*			*Como* supra	*Común*	*Afelio*	*Perihelio*
Saturno	♄	156.917	29.539.960	9.556	85	5	562	10.118	8.994
Júpiter	♃	390.263	11.877.400	5.206	85.222	4.222	258	5.464	4.948
Marte	♂	2.467.584	1.878.483	1.523	55	5	138	1.661	1.384
la Tierra	♁	4.635.322	1.000.000	1.000	95.178	1.647	17	1.017	983
Venus	♀	7.571.328	612.220	721	99.295	705	5	726	716
Mercurio	☿	18.864.680	245.714	392	80.625	17.375	85	476	308

Aparece, por tanto, en la última serie, cuáles números se produzcan en que se expresen intervalos convergentes de dos: todos los cuales vienen a quedar harto próximos a los intervalos con que di yo a partir de las observaciones de Brahe. Sólo en Mercurio hay una muy pequeña diferencia. Pues por astronomía se ve darse en él estos intervalos, 470, 388, 306, todos más breves. Semeja haber de conjeturarse, como causa de esas divergencias, la escasez de las observaciones o bien la magnitud de la excentricidad. Véase el capítulo 3. Mas seguiré adelante hacia el final del cálculo.

Es fácil ya comparar la proporción entre orbes de las figuras con la proporción entre intervalos convergentes. Pues si el semidiámetro del orbe circunscrito a la figura.

Que en la común es 100.000	*Entonces del semidiámetro del orbe o círculo*			*Cuando en las armonías el intervalo es*	
	monta:	*inscrito en:*	*en lugar de:*	*monta:*	
En el cubo	8.994	♄ (Saturno)	57.735	5.194	Medio ♃ 5.206
En el tetraedro	4.948	♃ (Júpiter)	33.333	1.649	en afelio ♃ 1.661
En el dodecaedro	1.384	♂ (Marte)	79.465	1.100	en afelio ♁ 1.018
En el icosaedro	983	♁ (la Tierra)	79.465	781	en afelio ♀ 726
En el erizo	1.384	♂ (Marte)	52.573	728	en afelio ♀ 726
En el octaedro	716	♀ (Venus)	57.735	413	medio ☿ 392
En el cuadrado	716	♀ (Venus)	70.711	506	en afelio ☿ 476
del octoedro	476	☿ (Mercurio)	70.711	336	en perihelio ☿ 308

O lo que es igual, los planos cúbicos descienden un poco por debajo del orbe medio de Júpiter; no alcanzan plenamente al medio de Mercurio los octaédricos; poco por debajo del superior de Marte, los tetraédricos; no de pleno al superior de Venus, los lados

del «erizo»: mas quédanse lejos los planos dodecaédricos de alcanzar el de la Tierra en afelio; lejos también, y casi proporcionalmente, los del icosaedro de alcanzar al de Venus en afelio; y por fin, el cuadrado en el octaedro es inepto; y sin injuria, pues ¿a qué una figura plana entre las sólidas? Véase pues que, si se deducen los intervalos de las proporciones armónicas de los movimientos hasta aquí demostradas, es de necesidad que resulten ser tanto cuanto aquí se hace patente, mas no cuanto requerirían las leyes de una libre inscripción, antes escritas en la proposición XLV: que aquí la perfecta inscripción, κόσμος γεωμετρικος [aderezo geométrico], no venía ya plenamente a la par con aquel otro κόσμον αρμονικον ευδεχόμενοσ [posible aderezo armónico], por usar las palabras de Galeno tomadas del frontispicio de su libro quinto. Tanto hubo que demostrar por cálculo de números para dilucidar la proposición antes escrita.

No disimulo que, si yo aumentare la armonía de los convergentes de Venus y Mercurio en tanto cuanta es la proporción propia de los movimientos de Venus, y por consiguiente menguare la propia de Mercurio, me vendría a encontrar por tal método con estos intervalos entre Mercurio y el Sol, 469, 388, 307, sobremanera exactos a los que se presentan por astronomía. [320] Mas, primero, no puedo defender esa disminución por razones armónicas; pues no cuadraría el movimiento en afelio de Mercurio en ninguna escala musical; ni sostiénese de lleno en los planetas opuestos en el mundo esa razón, que todas las condiciones se opongan mutuamente. Y luego, que el movimiento medio diario de Mercurio es harto grande, y con ello, harto breve el tiempo periódico de Mercurio, del todo certísimo a la astronomía. Y así me mantengo en la política armónica de los movimientos aquí usada y por todo el capítulo 9 confirmada. Sin embargo de que, en verdad, con este ejemplo os convoco a cuantos diereis en leer este libro, imbuidos de disciplinas matemáticas y el sumo conocimiento de la filosofía: trabajad hasta el agotamiento, y dadle la vuelta a alguna de las armonías aquí aplicadas por doquier, trocadla por otra, y experimentad si entonces habéis venido a estar tan cerca de la astronomía, antes escrita en el capítulo 4, o bien disputad con razones si podéis construir algo mejor y más concordante con los movimientos celestes, y destruir en parte o del todo la disposición por mí mostrada. Cuantoquiera que corresponda a la gloria del Fundador y Señor Nuestro os sea lícito igualmente a vosotros por medio de este libro mío; e idéntica licencia me he tomado hasta esta hora misma, cambiando por doquier aquello que en los días anteriores haya podido descubrir estaba trastornadamente concebido, con el cuidado adormecido o con ardor apresurado.

[321] XLIX. EPIFONEMA

Era bueno que, en la génesis de intervalos, las figuras sólidas cedieran en cuanto fuera de necesidad a las razones armónicas, y las más grandes armonías de pareja, a las universales de todos.

Bonito caso, hétenos llegados al XLIX, cuadrado de siete; de suerte que venga esto a manera de Sábado, precedido por seis sólidos octavos de discurso acerca de la obra de los Cielos. Merecidamente también he hecho un epifonema que pudo haber ido antes entre los axiomas: que también Dios, despachada ya la obra de la Creación, «vio todo cuanto hiciera, y halló ser todo sobremanera bueno».

Dos son los miembros del epifonema. El primero, de las armonías en general, se muestra así: que donde se elija entre cosas diversas de desigual ley haya de preferirse la

más excelente y derogarse las más viles en cuanto sea de necesidad, ya parece argüirlo la misma voz του κόσμου [cosmos], que significa aderezo u ornato. Mas tanta cuanta la prestancia en que aventajan la vida al cuerpo, y la forma a la materia, es la que el aderezo armónico tiene sobre el simplemente geométrico.

Pues así como la vida perfeccionó los cuerpos de los seres animados, que para ponerla por obra han nacido éstos, lo cual se sigue del arquetipo del mundo que es la misma esencia divina, así el movimiento mide a su paso las regiones atribuidas a planetas, a cada astro la suya; que le fue asignada al astro su región para que pudiera moverse. Mas las cinco figuras sólidas, en virtud de su mismo nombre, pertenecen a espacios de regiones y al número de éstas y de los cuerpos; la armonía, empero, al movimiento. Y nuevamente, así como la materia es difusa e indefinida de suyo, y la forma, definida y unida, pone término a la materia, así también son infinitas las proporciones geométricas, las armónicas, pocas. Y si bien entre las geométricas hay grados ciertos de definición y formación y de restricción, y no pueden existir más de tres grados de adscripción de orbes a figuras regulares: ello no obstante, síguese un accidente común también a todas las demás proporciones, a saber, que presupónese infinita la sección posible de las cantidades, envuelta ya en acto de algún modo en aquéllas cuyos términos son inconmensurables entre sí. Mas las proporciones armónicas son todas expresables en términos todos conmensurables; y las tomadas de las figuras planas, de especies finitas y fijas. Representa la infinidad de la sección a la materia; pero la expresabilidad o conmensurabilidad de los términos, a la forma. De esta suerte, como la materia, forma, y como la ruda piedra, que es cantidad justa, la idea del cuerpo humano, así apetecen armonía las proporciones de las figuras geométricas; no de suerte que la finjan y formen, sino por cuadrar mejor esta materia a esta forma, esta cantidad de piedra a esta efigie, y también esta proporción de figura a esta armonía; de suerte que así sean fingidas y formadas más ampliamente la materia por su forma, la piedra, por el cincel, en especie de ser animado: y la proporción de los orbes de las figuras, por la armonía suya, es decir, la que le es cercana y apta.

Se hará más claro cuanto hasta aquí queda dicho con la historia de mis hallazgos. Como veinticuatro años ha diera yo en estas contemplaciones, inquirí primero si los orbes de cada planeta distarían entre sí intervalos iguales (pues los orbes así distan en Copérnico, y no se tocan): fácil es ver que nada reconocía yo más pulcro que la razón de igualdad. Mas no tiene ésta pies ni cabeza. Pues tal igualdad material no brindaba ningún número cierto de cuerpos móviles, ninguna cantidad cierta de intervalos. Cavilé entonces acerca de la similitud entre intervalos y orbes, esto es, de la proporción. Mas se siguió igual cuita, pues si bien resultaban intervalos francamente desiguales entre orbes, cierto, no eran empero ni desigualmente desiguales, como quería Copérnico, ni resultaba de ahí ninguna cantidad de proporción ni número de orbes. Pasé a las figuras planas regulares; [322] formábanse de ellas intervalos por adscripción de círculos: mas todavía en ningún número fijo. Venido a las cinco sólidas, se hacían patentes aquí el número de cuerpos y una magnitud de los intervalos bastante cercana a la verdad; como para que apelara yo, respecto a las discrepancias restantes, a la perfección de la astronomía. Se perfeccionó en estos veinte años; y hete aquí que los intervalos aún discrepaban de las figuras sólidas, y no hacían patentes las causas de las excentricidades desigualadísimamente distribuidas entre planetas. Es decir, que en esta casa del mundo yo estaba buscando piedras de forma no sólo más elegante, sino que conviniera a la piedra; ignorante de que el Arquitecto la hubiera fingido en articuladísima efigie de cuerpo ani-

mado. Así, paulatinamente y ante todo estos tres años últimos, vine a dar en las armonías, abandonadas ya las figuras sólidas en lo que se refiere a los mínimos, comoquiera que las armonías quedaban de la parte de la forma que impusiere la última mano, y las figuras, de la parte de la materia, que es en el mundo el número de los cuerpos y la cruda amplitud de los espacios; y también porque aquéllas daban excentricidades que éstas no prometían, esto es, aquéllas conciliaban nariz, ojos y demás miembros de la estatua de la que éstas prescribían tan sólo la cantidad de la ruda masa externa.

Razón por la cual, así como ni los cuerpos de los seres animados son hechos ni suele hacerse la mole de la piedra conforme a la norma pura de alguna figura geométrica; sino que derógase de la redonda figura externa cuanto se quiera (manteniendo no obstante la justa magnitud de la mole), de tal suerte que pueda el cuerpo obtener los órganos necesarios a la vida, y la piedra, empero, la efigie elegante del ser animado, así también la proporción que las figuras sólidas hubieran de haber prescrito a los orbes planetarios, por ser inferior y mirar sólo a cuerpo y materia, debió ceder a las armonías, en tanto en cuanto era necesario para que pudieren estar juntas con ellas y adornar el movimiento de los globos.

El segundo miembro del epifonema, acerca de las armonías universales, tiene probado parentesco con el primero.* Pues mejor aún se le debe una última mano de suprema perfección a aquello que más perfecciona al mundo; y viceversa, mejor ha de derogarse (si derogarse ha alguna cosa) aquello que tiene un puesto posterior. Pero más perfeccionó al mundo la universal armonía de todos que no las singulares de dos, o de parejas vecinas. Pues es la armonía una cierta razón de unidad: y más unidos están todos si se conciertan a una que si cada dos por separado en otras tantas. Razón por la que, en conflicto unas con otras, debieron ceder las de una pareja a las de otra, que pudiere mantenerse la universal de todos. Ahora bien, mejor debieron ceder las más grandes, entre movimientos divergentes, que no las más pequeñas, entre convergentes. Que si divergen aquéllos no mirarán a los planetas de la pareja propuesta, sino a otros vecinos; y viceversa, si convergen éstos, vuélvese el movimiento de un planeta hacia el del restante: como en la pareja de Júpiter y Marte el movimiento en afelio de aquél se vuelve hacia Saturno, el de éste en perihelio, hacia la Tierra; mas aquél en el perihelio vuélvese hacia Marte, éste en afelio, hacia Júpiter. Así pues, la armonía de estos movimientos es más propia a Júpiter y Marte, y la de aquéllos, de algún modo más ajena. Ahora bien, sufría menos aquella razón de unión que coaligue parejas con parejas vecinas si se alteraba la armonía más ajena y remota que la propia, la que hay entre los movimientos más vecinos de planetas vecinos. Sin que tampoco esa alteración fuera sobremanera grande, empero: se ha hallado en efecto la razón en la que se mantendrían armonías universales de todos los planetas, y de dos modos distintos, y en la que abrazaría también las propias de cada uno de dos planetas vecinos, con alguna latitud de tensión que igualaría meramente a una coma; sería perfecta la de los movimientos convergentes en cuatro parejas, y poco menos que perfecta la de movimientos en afelio en una, y en perihelio, en dos parejas; la de movimientos divergentes, empero, en cuatro parejas por debajo de una discrepancia de una diesis, intervalo mínimo por el que casi perpetuamente peca la voz humana [323] en el canto figurado; y sólo en una, Júpiter y Marte, se hallaría esa discrepancia entre diesis y semitono. Se echa de ver, así pues, que por doquier esta mutua cesión es buena sobremanera.

* Recogido en parte entre los axiomas, número XVIII, más arriba.

Hasta aquí pues nuestro epifonema acerca de las obras de Dios Creador. Resta ahora que yo, finalmente, apartados ojos y manos de la mesa de las demostraciones y vueltos al cielo, alce mis preces devoto y suplicante al Padre de las luces: ¡Oh, Tú que con la luz de la Naturaleza mueves en nosotros el deseo de la luz de la Gracia, para que nos lleves por ella a la luz de la Gloria, gracias te doy Señor Creador, porque me deleité en tu hechura y exulté en las obras de tus manos! ¡He aquí consumada la obra de mi oficio, usado en ella tanto ingenio de varón cuanto me diste; he manifestado la gloria de tus obras a los hombres que hayan de leer estas demostraciones, en cuanto de su infinitud pudieron captar estas angosturas de mi mente; presto estuvo siempre mi ánimo a un filosofar más enmendado: si algo indigno de ti hubiera proferido yo, gusano nacido y nutrido en un revolcadero de pecados, inspírame o corrígeme lo que quieres sepan los hombres; si por la belleza admirable de tus obras he sido arrastrado a alguna temeridad, o he amado la gloria propia entre los hombres al progresar en una obra destinada a tu gloria, perdónalo misericordioso y clemente; y por fin, dígnate serme propicio y que estas demostraciones abran paso y en parte alguna sean obstáculo a tu gloria y a la salvación de las ánimas!

10. EPÍLOGO ACERCA DEL SOL, A MODO DE CONJETURAS FERTILÍSIMAS*

De la música celestial a los oyentes, de las Musas a Apolo que guía el Coro, de los seis planetas que en círculo rondan formando armonías al Sol en el centro de todos sus cursos, inmóvil lugar que retorna no obstante en torno a sí mismo, comoquiera que haya en efecto absoluta armonía entre los movimientos extremos de los planetas, no en lo que mira a su celeridad verdadera a través del hálito etéreo, mas a los ángulos que forman los términos de los arcos diarios de las órbitas planetarias conectados con el centro del Sol; y no adorne así la armonía los términos, esto es, los movimientos singulares por sí, pero tan solo juntos y comparados sean objeto de alguna Mente; y comoquiera que ningún objeto se haya ordenado en vano sin que exista alguna cosa que por él sea movida, mas esos ángulos parezcan presuponer alguna acción similar a la de nuestra vista o al menos aquel sensorio por el que la naturaleza sublunar, en el libro cuarto, percibía los ángulos que los rayos de los planetas formaban en la Tierra, sin que sea igualmente fácil a los moradores de la Tierra conjeturar qué visión, qué ojos haya en el Sol o qué otro instinto para percibir aun sin ojos esos ángulos y estimar las armonías de movimientos que por tal puerta ingresan al vestíbulo de alguna mente, ni qué mente sea en fin ésta en el Sol; ello no obstante, fueren estas cosas como fueren, de cierto esa disposición de los seis orbes primarios en torno al Sol, venerándole con sus perpetuas circunvoluciones y como adorándole, de igual modo que, por separado, acompañan cuatro al globo de Júpiter, y dos al de Saturno, mas una sola Luna ciñe, apacienta y abriga el curso de la Tierra y nos sirve a nosotros sus moradores; y añadiéndose ahora a aquellas consideraciones [324] este singular negocio de las armonías, evidentísimo vestigio de la suma providencia en las cosas del Sol, todo ello me arranca esta confesión: no salir tan sólo la Luz desde el Sol al mun-

* Véase el comentario de Kepler a este epílogo en el *Epítome*, pp. 10-11.

do entero como de un foco u ojo del mundo, como salen del corazón vida y calor, como del rey y motor, los movimientos todos; sino también, viceversa, coaligarse a su vez en el Sol, por ley regia, desde todas las provincias del mundo, éstos como retornos de las más deseables armonías, más aún, confluyendo las especies de los movimientos por parejas a reunirse en una sola armonía por obra de alguna mente, y a modo de oro y plata rudos, troquelarse en moneda: y por fin, estar en el Sol la curia, el palacio y el pretorio o sala del trono del entero reino de la naturaleza, cualesquiera que fueren los cancilleres, cortesanos y prefectos para quienes el Creador aderezara estas sedes, creados desde el comienzo, o a trasladar allí en algún tiempo: que aun estas galas terrestres, por su mayor parte, carecieron un tiempo sobremanera largo de quienes las usaran y contemplaran, por más que a ellos estuvieran destinadas, y estaban las sedes vacías. Se me desliza en el ánimo la reflexión que se hicieran según Aristóteles los antiguos pitagóricos, que solían llamar al centro del mundo (con lo que se referían al fuego, mas sobreentendían el Sol) «el guardián de Júpiter», Διὸς Φυλακήν; el que asimismo moviera el ánimo del antiguo intérprete cuando tradujo así el versículo del Salmo, «puso en el Sol su Tabernáculo».

Mas fui a dar poco ha con el himno de Proclo, filósofo platónico, dedicado al Sol,* y henchido de misterios venerandos con sólo que le despojes de ese Κλῦθι [escucha], por más que ya excusaría de hacerlo en cierta medida ese mismo intérprete antiguo antes citado: que al invocarse al Sol entiende éste invocarse a Aquel que allí puso su tabernáculo. Pues vivió Proclo en aquel tiempo en que profesar a Jesús el Nazareno por Dios y Salvador nuestro y refutar a los dioses de los poetas gentiles era crimen que vengaban con todos los suplicios los monarcas del orbe, y con ellos el pueblo.[1] Así Proclo, que desde su filosofía platónica avizorara al Hijo de Dios con la luz natural de su mente, esa luz verdadera que a todo hombre ilumina al venir a este mundo; y que sabía ya no haberse de buscar a la divinidad, con la plebe supersticiosa, en las cosas sensibles, parece haber preferido aun así buscarlo en el Sol que en Cristo, hombre a los sentidos, de suerte que a un tiempo engañara a las gentes, honrando de palabra al Titán de los poetas; que obrare su filosofía para apartar a gentiles y cristianos de las cosas sensibles, a aquéllos del Sol visible, y a éstos, del hijo de María, pues confiado por demás a la luz de la razón natural rechazaba el misterio de la encarnación: y que, por último, adoptare así en su filosofía, tomado de los cristianos, cuanto de más divino y más de concierto con la filosofía platónica habían éstos.[2] Y la doctrina del Evangelio acerca de Cristo actúa así por lo que le compete en la causa contra este himno de Proclo: tiene en el Titán por cosa suya Χρυσὰ ἡνία y ταμιεῖον φάους, μεσσατίην αἰθέρος ἕδρην, κόσμου κραδιαῖον ἐριφεγγέα κύκλον [las riendas doradas y el tesoro de la luz, la sede en el medio del éter, el resplandeciente círculo radiante en torno al corazón del mundo], especie ésta que también Copérnico le concede con largueza; y aun tiene sus παλιννόστους διφρείας [los recorridos en círculo de su carro], por más que no los tuviera en los antiguos pitagóricos, sino en lugar de ellos τὸ κέντρον, διὸς φυλακὴν [el centro, guardián del dios], (dogma de éstos que no reconoció su sucesor Proclo, de-

* Muy citado en los libros anteriores.

1. Bajo Constantino, Majencio y Juliano el Apóstata.

2. Fue el juicio de los antiguos acerca de su libro *Μητρωακη* estar expuesta en él no sin algún rapto divino la doctrina universal acerca de Dios; y borrar toda sospecha de los oyentes con los frecuentes llantos del autor que en él aparecen. A pesar de lo cual, él mismo escribió contra los cristianos dieciocho epiqueremas a los que se opuso Juan Filópono, probándoles ignorancia aun de las mismas cosas de los griegos, no obstante que miraba por defenderlas. Esto es, que Proclo disimulaba aquellas que no hacían favor a su filosofía.

formado por el olvido de siglos como por un diluvio), y tiene asimismo su γενέθλην de sí βλαστήσασαν [retoñar de sí mismo él, y cuanto es natural]: y por su parte, la filosofía de Proclo cede ante el dogma cristiano [325] en que el Sol sensible ceda ante el hijo de María, el hijo de Dios al que alude Proclo bajo la advocación de Titán, ζωαρκέος, ὦ ἄνα, πηγῆς αὐτὸς ἔχων κληῖδα [¡Oh Dios, que guardas la clave de la primavera sustentadora de vida], y que πάντα τεῆς ἐπλησας εγερσινόοιο προνοίης [todas las cosas colmaste de atenta providencia]; y en aquélla su potestad inmensa μοιράων [sobre el destino], y en cosas que no se leían antes de la promulgación del Evangelio en ninguna filosofía,[1] los temibles demonios cual látigo amenazante sobre toda filosofía, los demonios acechando insidiosos a las almas, ὄφρα ὑψιτενους λάθοιντο πατρὸς περιφεγγέος αὐλῆς [por que les escapen las nuevas de las resplandecientes estancias del Padre de las alturas]; y qué, sino el Verbo del padre, es esa εἰκὼν παγγενὲταο θεοῦ, οὗ φανέντος ἀπ' ἀῤῥήτου γενετῆρος παύσατο στοιχείων ὀρυμαγδὸς ἐπ'αλλήλοισιν ἰόντων [imagen del dios que todo lo engendra, con cuya epifanía a partir de una madre inefable acaba el pecado de los elementos cambiantes unos en otros], según aquello: «La Tierra era una masa ruda y sin elaborar, y tinieblas sobre la superficie del abismo; y separó Dios la luz de las tinieblas, las aguas de las aguas, los mares de los desiertos; y Todas las cosas fueron hechas por su Palabra misma». ¿Quién, sino Jesús el Nazareno, ese hijo de Dios pastor de almas, Ψυχῶν ἀναγωγεὺς, a quien ha de ofrendarse ἱκεσίη πολυδάκρους [la oración de un lloroso suplicante], que nos purgue de pecados y nos saque de lo sórdido τῆς γενέθλης [de la generación] (casi adivinando las ascuas de que saliera el pecado original), y nos guarde de males y castigos πρηύνων θοὸν ὄμμα δίκης [haciendo más benigno el raudo ojo de la justicia], esto es, la ira del Padre? Y las otras cosas que leemos, como tomadas del himno de Zacarías, 'Αχλὺν ἀποσκεδάσας ὀλεσίμβροτον ἰολόχευτον [que dispersa los ponzoñosos vapores que destruyen al hombre] de suerte que da a las ánimas que se vuelven a las tinieblas y la sombra de la muerte φάος ἅγνον [la sagrada luz] y ὄλβον ἀστυφέλικτον ἀπ'εὐσεβίης ἐρατεινῆς [la inquebrantable dicha de la piedad digna de amarse], esto es, servir a Dios en santidad y justicia todos nuestros días.

Separemos, pues, entonces estas cosas y similares y remitámoslas de nuevo a la doctrina de la Iglesia católica, a quien pertenecen: mas veamos por qué causa principal se ha hecho mención de ese Himno. Y en efecto, a ese mismo Sol que Ὕψοθεν ἁρμονίης ῥύμα πλούσιον ἐξοχετεύε[2] [riega un rico caudal de armonía desde lo alto]; a ese mismo de cuya prosapia había de nacer Febo κιθάρῃ ὕπο θέσκελα μέλπον Εὐνάζει μέγα κῦμα βαρυφλοίσβοιο γενέθλης, [que canta prodigios con su lira y adormece con su arrullo el grave oleaje de las generaciones], en cuyo coro oficia como pareja suya Pan, Πλήσας ἁρμονίης παναμήμονος εὑρέα κόσμον, [que dispone ordenadamente el tendido plectro de la inocente armonía]; el mismo Sol, digo, es ése al que saluda el primer versículo del himno como Πυρὸς νοεροῦ βασιλέα [rey del fuego de la inteligencia]. Exordio con el que indica qué entendieran por el vocablo fuego los pitagóricos (de suerte que resulte asombroso disentir el discípulo de los maestros en cuanto al lugar de centro que éstos daban al Sol), al tiempo que refiere el himno entero

1. Aunque en Suidas se atribuyan algunas cosas similares al antiquísimo Orfeo, casi igual a Moisés, en cuanto discípulo suyo: véanse los *Himnos a Orfeo*, acerca de los cuales escribió Proclo.

2. Como Orfeo, *κόσμου τὸν ἐναρμόνιου ὀρόμου ἕλκων* [que asimismo hace moverse en armonioso curso al mundo].

ya no al cuerpo del Sol y la calidad de su luz, sensibles, sino a los inteligibles: y asigna a su Πυρὶ νοερῷ [fuego intelectual] (que bien pudiera ser el fuego del artífice de los estoicos) lo que al dios creado de Platón, principio de la mente o Αὐτόνῳ, la sede regia en el cuerpo del Sol; confundiendo en uno a la criatura y a aquél por quien toda cosa es creada. [326] Mas nosotros los cristianos, enseñados a mejor distinguir, reconocemos que ese logos eterno e increado, que era πρὸς τὸν θεόν [junto a Dios], al que ningún sitio contenía, por más que se contuviera en todos, y ninguno excluía, por más que estuviera fuera de todos, ha tomado carne del útero gloriosísimo de la Virgen María en unidad de Persona, y que, consumado el menester de la carne, ha ocupado la sede regia en los cielos en los que se reconoce habitar también, sobresalientes de algún modo sobre las demás partes del mundo por Su gloria y majestad, el padre celestial; y que ha prometido también a sus fieles habitar en aquella casa del padre: inquirir, más curiosos, algo de lo demás acerca de esa sede, y remontarse por los sentidos o razones naturales a indagar en aquello que ojo no vio ni oído oyó, y a lo que corazón del hombre no ascendió, lo estimamos vano. Mas la mente creada, por más que pueda ser su prestancia, la sometemos como merece a su Creador, y no introducimos con Aristóteles y los filósofos gentiles inteligencias divinas, ni innumerables ejércitos de espíritus planetarios, con los magos, ni proponemos se les haya de adorar o convocar a comercio mutuo, con las supersticiones teúrgicas: atendiendo a eso diligentes, inquirimos ya libremente por razones naturales, allende eso, qué Mente y cómo sea, y ante todo si la hay en las cuerdas del mundo, que haga las veces de alma de éste ligada con arte a la naturaleza de las cosas (o si también algunas criaturas inteligentes, de naturaleza diversa de la humana, por ventura habitan o habitarán un globo así animado). Que si es lícito, guiado por el hilo de la analogía, atravesar el laberinto de los misterios de la naturaleza, opino que no sería en balde argumentar así, a saber, que el hábito de seis orbes respecto a lo que les es común, y así, centro de todo el mundo, es el mismo que τῆς διανοίας respecto τὸν νοῦν [el intelecto discursivo respecto al intuitivo], tal como esas facultades se distinguen en Aristóteles, Platón, Proclo y los demás: y nuevamente, que el hábito de las revoluciones locales de los planetas en torno al Sol es al giro del Sol ἀμετάθεδον [inmutable] en el espacio medio de todo el sistema,[1] lo que el hábito τοῦ διανοητικοῦ a τὸ νοερὸν, los múltiples discursos del raciocinio respecto a la simplicísima intelección mental. Pues así como el Sol, girando en sí mismo, por especies emitidas de sí mueve a los planetas todos, así también la mente, como enseñan los filósofos, entendiéndose a sí misma y, con ello, en sí misma todas las cosas, pone en movimiento raciocinios, y desplegando y conduciendo hasta ellas su simplicidad, a todas hace ser entendidas. Y así, son conexos y ligados entre sí los movimientos de los planetas en torno al Sol, en su centro, y el discurrir de los raciocinios: de suerte que si la Tierra, nuestro domicilio, no midiera a su paso el círculo del año, medio entre los demás orbes, trocando lugar por lugar, estación por estación, nunca hubiere andado el raciocinio humano hasta dar con los verdaderos intervalos entre planetas y lo demás de ellos dependiente, ni hubiérese constituido la astronomía.[2] Al contrario, de la quietud del Sol en el centro del mundo síguese en pulcra correspondencia la simplicidad de entendimiento; en lo que hasta aquí usamos siempre no definirse aquéllas armonías de los

1. De lo que dan testimonio las manchas del Sol, según se demuestra en los comentarios al movimiento de Marte.

2. Véase la parte *Óptica de la astronomía*, capítulo 9.

movimientos solares ni por la diversidad de los costados a que tienden ni por la amplitud de los espacios del mundo. Nada hay de asombroso en ello, que si tal mente contempla desde el Sol estas armonías, fáltanle esos adminículos con que entretejer los raciocinios y el discurso necesarios para medir los intervalos planetarios, esto es, el movimiento y sus sedes en las diversas estaciones. Pues compara ella los movimientos diarios de un planeta cualquiera, no tal como son en sus órbitas, pero tal como se deslizan, ángulos mediantes, hasta el centro del Sol. Y así, si tiene conocimiento de la magnitud de las esferas, lo oportuno sería que éste le fuera ínsito a priori, sin trabajo de raciocinio: hasta qué punto sea eso verdad de la mente humana y de la naturaleza sublunar, se hizo patente suso en Platón y Proclo.

Que de ser así, tampoco sería de admirar si alguno que se hubiera arrimado a reconfortarse tomando con harta liberalidad de esa crátera de Pitágoras a la que Proclo invita ya en el primer verso de su himno, rendido luego al sueño por la suavísima armonía de coros planetarios, comenzara a soñar[1] haber diseminadas por los globos restantes, que se suceden de lugar en lugar en torno al Sol, facultades discursivas o raciocinantes, de las que debería juzgar por la más excelsa y absoluta aquélla que estuviere en el medio de esos globos, tal como está la Tierra: mas habitar en el Sol, empero, un intelecto simple, πῦρ νοερὸν o Noῦν [fuego intelectual o inteligencia], fuente de toda armonía, fuere quien fuere.

[327] Pues si la desnuda vastedad de esos globos le pareció a Brahe no estar en balde en el mundo, sino colmada de moradores, ¿cuánto más verosímilmente no conjeturaremos nosotros, a partir de esta variedad de obras y designios de Dios que discernimos en este globo de la Tierra, haberla también en los otros globos? Quien creó las especies que habitan las aguas, bajo las que no hay sin embargo lugar alguno para el aire que los vivientes aspiran; quien en la vastedad del aire puso voladores sustentados en plumas; quien dio a las regiones del septentrión nevoso osos blancos, blancos zorros, y por alimento para aquéllos, los grandes peces marinos, para éstos, huevos de aves; quien dio leones a las soledades hirvientes de Libia, camellos a las extensas planicies de Siria, y tolerancia al hambre a aquéllos, a la sed, a éstos, ¿ése consumiría aquí en el globo de la Tierra todo arte, que no pudiera ya, y toda bondad, que no quisiera ya engalanar también los demás globos con las criaturas convenientes, las que aconsejaban la brevedad o la amplitud de sus revoluciones, o su proximidad o apartamiento del Sol, o la variedad de sus excentricidades, o el brillo o la oscuridad de sus cuerpos, o las propiedades de las figuras en las que cualquier región se sustenta? He aquí que en este globo los sexos de los animales tienen efigie, el macho, en el dodecaedro, la hembra, en el icosaedro (de los que aquél sostiene el orbe exterior de la Tierra, éste, el interior), y en fin, efigie la generación en esa divina inefabilidad y proporción de su ayuntamiento: ¿y qué juzgamos que tendrán, por las demás figuras, los otros globos? ¿A qué sería bueno ceñir a Júpiter cuatro lunas, dos a Saturno, como ciñe nuestro domicilio esta nuestra única Luna? Mas de idéntico modo razonaremos también del globo del Sol, e incorporaremos a las conjeturas sobre armonías sacadas de los demás, del mayor peso ya de suyo, otras conjeturas más encaminadas a los cuerpos y mejor acomodadas a las cabezas del vulgo ¿Está ese globo vacío, llenos los demás, si todas las cosas corresponden más propiamente a alguna otra? ¿Si, como la Tierra nubes, expira el Sol oscuros vapores? ¿Si como aquélla se humedece y florece con la lluvia luce el Sol sus manchas

1. Valga imitar a Platón fabulando de la Atlántica y al Escipión de Cicerón soñando.

quemadas, que saltan refulgentes de su cuerpo, todo fuego, en llamas más claras? ¿A qué empleo, todo este aparato, si el globo está vacío? ¿No exclaman aun los sentidos mismos que ahí habitan cuerpos ígneos, capaces de mentes simples, y que en verdad es el Sol, πυρὸς νοεροῦ [del fuego intelectual], si ya no rey, al menos reina?

Deliberadamente interrumpo aquí el sueño y la vastísima especulación; exclamando tan sólo con el Rey Salmista:

Grande es nuestro Señor, y grande su virtud, y sin cuento su sabiduría: loadle, cielos, loadle, Sol y Luna y planetas, usad cualquier sentido en percibirle, cualquier lengua en declarar al Creador vuestro; loadle, armonías celestes, loadle vosotros, jueces de las armonías manifiestas:[1] y loa tú, alma mía, al Señor Creador tuyo, mientras yo fuere: pues de Él y por Él y en Él son cuantas cosas son, καὶ τὰ αἰσθητὰ, καὶ τὰ νοερὰ [las de los sentidos y las del entendimiento], así las que ignoramos por completo como las que sabemos, parte mínima de aquéllas, porque hay más, allende. Loor a Él, honor y gloria por los siglos de los siglos. Amén.

FIN

Concluyose esta obra los días 17 a 27 de Mayo, en el año de MDCXVIII; mas fue revisado el libro quinto (en tanto avanzaba la impresión) entre el 9 y el 19 de febrero, en el año de MDCXIX. En Linz, metrópolis del Austria Supranisena.

1. Y ante todos tú, Moestlin, de senectud dichosa, pues que solías animar estas preocupaciones con palabras y esperanza.

Isaac Newton

(1643-1727)

VIDA Y OBRA

El 5 de febrero de 1676, Isaac Newton escribió una carta a su más acérrimo enemigo, Robert Hooke, que contenía la frase: «Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes». Presentada a menudo como un homenaje a los descubrimientos científicos de sus predecesores Copérnico, Galileo y Kepler, esta frase se ha convertido en una de las más citadas de la historia de la ciencia. En efecto, Newton reconoció las contribuciones de aquellos hombres, algunas veces en público y otras en escritos privados. Pero en su carta a Hooke, Newton se refería a las teorías ópticas, especialmente al estudio de los fenómenos de las láminas finas, a los que Hooke y René Descartes habían aportado importantes contribuciones.

Algunos estudiosos han interpretado la frase como un velado insulto a Hooke, cuya postura encorvada y su baja estatura le hacían bien diferente de un gigante, especialmente a los ojos de alguien tan rencoroso como Newton. Aun así, y a pesar de sus disputas, Newton parecía reconocer humildemente la valiosa investigación en óptica de Hooke y de Descartes, adoptando un tono conciliador al final de la carta.

Isaac Newton es considerado el padre del estudio del cálculo infinitesimal, la mecánica y el movimiento planetario, y de la teoría de la luz y del color. Pero se aseguró un lugar en la historia al formular la fuerza de la gravitación y definir las leyes del movimiento y de la atracción en su obra cumbre *Principios matemáticos de la filosofía natural* (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*), conocida generalmente como los *Principia*. En ella, fundió las contribuciones científicas de Copérnico, Galileo, Kepler y otros en una gran sinfonía dinámica. Los *Principia*, el primer libro de física teórica, es unánimemente considerado como la obra más importante de la historia de la ciencia y el fundamento científico de la moderna visión del mundo.

Newton escribió los tres libros que forman los *Principia* en tan sólo dieciocho meses y, sorprendentemente, entre graves crisis emocionales —como las debidas a su competición con Hooke. Su rencor llegó a tales extremos, que suprimió del libro todas

las referencias a Hooke, aunque no podemos descartar que el odio hacia su colega hubiera sido una de las fuentes de inspiración de los *Principia*.

La más ligera crítica de su libro, aunque fuera envuelta en abundantes elogios, sumía a Newton en sombríos ensimismamientos durante meses o años. Este rasgo de su carácter se reveló muy tempranamente en su vida, y muchos se han preguntado cuántas preguntas más podría haber contestado de no haberse obsesionado con rencillas personales. Otros han especulado, en cambio, que sus descubrimientos y éxitos científicos podrían deberse en parte a sus rencorosas obsesiones y que quizá no habrían sido posibles si hubiera sido menos arrogante.

Ya desde pequeño, Newton se planteó preguntas que siempre habían intrigado a la humanidad, y se propuso contestar tantas como pudiera. Era el inicio de una vida llena de descubrimientos, a pesar de unos primeros pasos angustiosos. Isaac Newton nació el día de Navidad de 1642, el mismo año de la muerte de Galileo, en la ciudad inglesa industrial de Woolsthorpe, en el Lincolnshire. Su madre no tenía muchas esperanzas de que sobreviviera, ya que nació muy prematuro; años más tarde, él mismo diría que al nacer era tan menudo que habría cabido en un pote de un cuarto de galón. Su padre, también llamado Isaac, había muerto tres meses antes, y cuando Newton cumplió dos años, su madre, Hannah Ayscough, se volvió a casar, ahora con Barnabas Smith, un rico clérigo de North Witham.

Parece que en la nueva familia Smith no había sitio para el joven Newton, que fue confiado al cuidado de su abuela, Margery Ayscough. El espectro de este abandono, junto con la tragedia de no haber conocido a su padre, persiguió a Newton el resto de sus días. Despreciaba a su padrastro; en anotaciones de su diario en 1662, Newton, examinando sus pecados, recordó «haber amenazado a mi padre y mi madre Smith con quemarles a ellos y la casa».

Tal como su período adulto, la niñez de Newton estuvo llena de violentas explosiones de rencor, no solamente contra supuestos enemigos, sino también contra amigos y familiares. También manifestó muy tempranamente el tipo de curiosidad que definiría los grandes éxitos de su vida, interesándose en modelos mecánicos y en dibujo arquitectónico. Newton pasó incontables horas construyendo relojes, cometas llameantes, relojes de sol y molinos en miniatura (movidos por ratoncitos), además de dibujar detallados esbozos de animales y barcos. A los cinco años asistió a las escuelas en Skillington y Stoke, pero fue considerado uno de los peores estudiantes, siendo calificado en los informes de los profesores como «distraído» y «vago». A pesar de su curiosidad y su demostrada pasión por aprender, no consiguió aplicarse a las tareas escolares.

Al cumplir Newton los diez años, Barnabas Smith murió y Hannah heredó una considerable suma. Isaac y su abuela empezaron a vivir con Hannah, un hermanastro y dos hermanastras. Como el rendimiento de Newton en la escuela era tan precario, Hannah decidió que sería mejor que trabajara en la granja, y lo sacó de la escuela gratuita de gramática de Grantham. Desgraciadamente para ella, Newton tenía aún menos aptitudes o interés para llevar la propiedad de la familia que el que tenía por los deberes escolares. El hermano de Hannah, William, que era clérigo, decidió que sería mejor para la familia que el distraído Isaac volviera a la escuela para terminar su educación.

Esta vez, Newton vivió con el director de la escuela libre de gramática, John Stokes, cosa que supuso un cambio de rumbo en educación. Se dice que, de alguna manera, un golpe en la cabeza que le propinó un matón del patio le iluminó, y le permitió corregir el rumbo negativo de sus perspectivas escolares. Mostrando ahora aptitudes intelectuales y cu-

riosidad, Newton empezó a prepararse para proseguir los estudios en una universidad. Decidió ir al Trinity College, el alma mater de su tío William, en la Universidad de Cambridge.

En Trinity, Newton recibía una ayuda para pagar el coste de su educación a cambio de hacer diversos trabajos, como servir las mesas y limpiar habitaciones para la facultad. Pero en 1664 fue admitido como becario, lo que le garantizó apoyo económico y le permitió liberarse de las tareas domésticas. Cuando la universidad cerró a causa de la epidemia de fiebre bubónica en 1665, Newton se retiró al Lincolnshire. En los dieciocho meses que pasó en casa durante la epidemia se dedicó por su cuenta a la mecánica y las matemáticas, y empezó a concentrarse en óptica y gravitación. Este «annus mirabilis» («año milagroso»), como Newton lo llamó, fue uno de los períodos más productivos y fértiles de su vida. Es en esta época, cuenta la leyenda, que le cayó una manzana sobre la cabeza, despertándole de una siesta bajo un árbol y espoleándole a definir las leyes de la gravitación. Por inverosímil que resulte la historia, el mismo Newton escribió que la caída de una manzana había «ocasionado» su irrupción en el estudio de la gravitación, y se cree que fue entonces cuando realizó sus experimentos con péndulos. «Estaba en la flor de mi vida de investigador —recordó Newton años después—y las matemáticas y la filosofía me apasionaban como nunca lo han hecho desde entonces.» A su regreso a Cambridge, Newton estudió la filosofía de Aristóteles y de Descartes, así como la ciencia de Thomas Hobbes y de Robert Boyle. Quedó cautivado por la mecánica de Copérnico y la astronomía de Galileo, además de la óptica de Kepler. Más o menos en esta época empezó sus experimentos con prismas sobre refracción y dispersión de la luz, posiblemente en su habitación del Trinity o en casa, en Woolsthorpe. Un acontecimiento en la universidad ejerció una profunda influencia sobre el futuro de Newton —la llegada de Isaac Barrow, que había sido nombrado profesor Lucasiano de matemáticas. Barrow reconoció las extraordinarias aptitudes matemáticas de Newton, y cuando dimitió de su cátedra en 1669 para dedicarse a la teología recomendó como sucesor en la cátedra al joven Newton, de veintisiete años.

Los primeros estudios de Newton como profesor Lucasiano se centraron en el campo de la óptica. Se propuso demostrar que la luz blanca está compuesta por una mezcla de varios tipos de luz, cada uno de los cuales produce un color diferente del espectro al ser refractada en un prisma. Su serie de experimentos elaborados y precisos para demostrar que la luz está compuesta por partículas diminutas despertaron la ira de científicos como Hooke, que afirmaba que la luz viajaba en ondas. Hooke retó a Newton a presentar más pruebas de sus excéntricas teorías ópticas. La manera de responder de Newton fue característica (una manera que no dejó ni cuando maduró): se retiró, se propuso humillar a Hooke siempre que pudiera, y rehusó publicar su libro, *Opticks*, hasta que éste muriera, cosa que ocurrió en 1703.

Al principio, en su cargo de profesor Lucasiano, Newton había hecho grandes progresos en sus estudios de matemáticas puras, pero compartía su trabajo con muy pocos de sus colegas. Ya en 1666 había descubierto métodos generales de resolver problemas de curvatura —lo que él denominó «teorías de fluxiones y fluxiones inversas». Este descubrimiento provocó una agria disputa con los partidarios del matemático y filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz, que más de una década después publicó sus descubrimientos sobre cálculo diferencial e integral. Ambos investigadores llegaron aproximadamente a los mismos principios matemáticos, pero Leibniz publicó sus trabajos antes que Newton. Los partidarios de éste acusaban a Leibniz de haber visto los papeles del profesor Lucasiano unos años antes, y el apasionado debate entre las dos facciones,

conocido como disputa de la prioridad del cálculo, no concluyó hasta la muerte de Leibniz, en 1716. Los malignos ataques de Newton, que a menudo se ampliaban hasta tocar las teorías sobre Dios y el universo, así como las acusaciones de plagio, amargaron y empobrecieron a Leibniz.

La mayoría de historiadores de la ciencia creen que, de hecho, los dos llegaron independientemente a sus ideas, y que la discusión carecía de sentido. Los vitriólicos ataques de Newton contra Leibniz también cobraron al primero un peaje emocional y físico. Pronto se encontró envuelto en otra batalla, esta vez sobre su teoría de los colores y contra los jesuitas ingleses, y en 1678 sufrió una grave crisis mental. El año siguiente, su madre, Hannah, murió y Newton empezó a distanciarse de los demás. Se dedicó secretamente a la alquimia, un campo que ya en aquella época era ampliamente considerado como estéril. Este episodio de la vida de Newton ha sido motivo de perplejidad para muchos de sus estudiosos. Sólo mucho después de su muerte se comprendió que su interés en los experimentos químicos estaba relacionado con sus investigaciones posteriores en mecánica celeste y gravitación.

Newton ya había empezado a proponer teorías del movimiento hacia 1666, pero todavía no era capaz de explicar adecuadamente la mecánica del movimiento circular. Unos cincuenta años antes, el matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler había propuesto tres leyes del movimiento planetario, que describían con precisión cómo se mueven los planetas respecto al Sol, pero no conseguía explicar por qué los planetas se movían como se movían. Lo más que se acercó Kepler a la comprensión de las fuerzas implicadas fue decir que el Sol y los planetas estaban relacionados «magnéticamente».

Newton se propuso descubrir la causa de que las órbitas de los planetas fueran elípticas. Aplicando su propia ley de la fuerza centrífuga a la tercera ley de Kepler del movimiento planetario (la ley de las armonías) dedujo la ley del inverso de los cuadrados, que establece que la fuerza de la gravedad entre dos objetos cualesquiera es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los centros de los objetos. Newton reconocía así que la gravitación es universal —que una sola fuerza, la misma fuerza, hace que una manzana caiga al suelo y que la Luna gire alrededor de la Tierra. Entonces se propuso contrastar la relación del inverso de los cuadrados con los datos conocidos. Aceptó la estimación de Galileo de que la Luna dista de la Tierra unos sesenta radios terrestres, pero la imprecisión de su propia estimación del diámetro de la Tierra le impidió completar esta prueba satisfactoriamente. Irónicamente, fue un intercambio epistolar en 1679 con su antiguo adversario Hooke lo que renovó su interés en este problema. Esta vez dedicó su atención a la segunda ley de Kepler, la ley de la igualdad de las áreas, que Newton pudo demostrar a partir de la fuerza centrífuga. Hooke, sin embargo, estaba intentando explicar las órbitas planetarias, y algunas de sus cartas sobre este tema resultaron de particular interés para Newton.

En un crucial encuentro en 1684, tres miembros de la Royal Society, Robert Hooke, Edmond Halley y Christopher Wren, el célebre arquitecto de la catedral de San Pablo en Londres, se enzarzaron en un acalorado debate sobre la relación del inverso de los cuadrados que regía el movimiento de los planetas. A comienzos de la década de 1670, las discusiones mantenidas en los cafés de Londres y otros cenáculos intelectuales sostenían que la gravedad emanaba del Sol en todas direcciones y disminuía con un ritmo inverso al cuadrado de la distancia, diluyéndose más y más a medida que aumentaba la superficie de la esfera. El encuentro de 1684 fue, en efecto, el nacimiento de los *Prin-*

cipia. Hooke declaró que había deducido la ley de Kepler de las elipses a partir de la idea de que la gravedad era una fuerza de emanación, pero que no desvelaría su deducción a Halley ni Wren hasta que estuviera a punto de hacerla pública. Furioso, Halley fue a Cambridge, contó a Newton las pretensiones de Hooke y le planteó el siguiente problema: «¿Cuál sería la forma de la órbita de un planeta alrededor del Sol si fuera atraído hacia éste por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia?». La respuesta de Newton fue asombrosa: «Sería una elipse», respondió inmediatamente, y contó a Halley que había resuelto el problema cuatro años antes, pero que había extraviado la demostración en su despacho.

A petición de Halley, Newton pasó tres meses rehaciendo y mejorando la demostración. Entonces, en una explosión de energía sostenida durante dieciocho meses, durante los cuales se absorbía tanto en su trabajo que a menudo se olvidaba de comer, fue desarrollando estas ideas hasta que su presentación llenó tres volúmenes. Newton decidió titular su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, en deliberado contraste con los *Principia Philosophiae* de Descartes. Los tres libros de los *Principia* de Newton proporcionaron el nexo entre las leyes de Kepler y el mundo físico. Halley reaccionó con «estupefacción y entusiasmo» ante los descubrimientos de Newton. Para Halley, el profesor Lucasiano había triunfado donde todos los demás habían fracasado, y financió personalmente la publicación de la voluminosa obra como una obra maestra y un regalo a la humanidad.

Donde Galileo había mostrado que los objetos eran «estirados» hacia el centro de la Tierra, Newton consiguió demostrar que esta misma fuerza, la gravedad, afectaba las órbitas de los planetas. También estaba familiarizado con el trabajo de Galileo sobre el movimiento de proyectiles, y dijo que el movimiento de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra obedecía también a los mismos principios. Newton demostró que la gravedad explicaba y predecía los movimientos de la luna, así como la subida y bajada de las mareas en la tierra. El libro primero de los *Principia* abarca las tres leyes de Newton del movimiento:

1. Todo cuerpo sigue en su estado de reposo o de movimiento uniforme rectilíneo, salvo que sea obligado a cambiar dicho estado por fuerzas aplicadas.
2. El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza que actúa sobre el cuerpo; y tiene lugar en la dirección en que se aplica la fuerza.
3. A cada acción se le opone una reacción igual; o, las acciones mutuas entre dos cuerpos siempre son iguales, y dirigidas en sentidos opuestos.

El libro segundo empezó como una prolongación del libro primero; no estaba incluido en el plan original de la obra. Es esencialmente un tratado sobre la mecánica de fluidos, y permitió a Newton exhibir su talento matemático. Hacia el final del libro, Newton concluyó que los vórtices invocados por Descartes para explicar los movimientos de los planetas no resisten un análisis detallado, ya que los movimientos se pueden realizar en un espacio libre y sin vórtices. Por qué es así, escribió Newton, «puede ser comprendido en el libro primero; y lo trataré más detalladamente en el libro siguiente».

En el libro tercero, subtitulado «Sobre el sistema del mundo», Newton concluía, mediante una aplicación al mundo físico de las leyes del movimiento del libro primero, que «hay una fuerza de gravitación que tiende hacia todos los cuerpos, proporcional a la cantidad de materia que contiene cada uno de ellos». Demostró entonces que su ley

universal de la gravitación lograba explicar el movimiento de los seis planetas conocidos, así como los de las lunas, cometas, precesión de los equinoccios y mareas. La ley establece que dos porciones cualesquiera de materia son atraídas mutuamente con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Newton, mediante un solo conjunto de leyes, había unido la tierra con todo lo que se podía ver en los cielos. En las dos primeras «Reglas para filosofar» del libro tercero, Newton escribió: «No deben admitirse más causas de las cosas naturales que aquellas que sean verdaderas y suficientes para explicar sus fenómenos ... Por ello, en tanto que sea posible, hay que asignar las mismas causas a los efectos naturales del mismo género».

La segunda ley es la que unifica realmente el cielo y la Tierra. Un aristotélico habría afirmado que los movimientos celestes y los terrestres manifiestamente no son los mismos efectos naturales y que, por lo tanto, no se podía aplicar a ambos la segunda ley de Newton. Newton vio las cosas de otra manera.

Los *Principia* fueron celebrados con moderación al ser publicados, en 1687, pero la primera edición sólo constó de unos quinientos ejemplares. Sin embargo, la némesis de Newton, Robert Hooke, había amenazado con aguar la fiesta que Newton hubiera podido disfrutar. Cuando apareció el libro segundo, Hooke afirmó públicamente que las cartas que había escrito en 1679 habían proporcionado ideas científicas vitales para los descubrimientos de Newton. Sus pretensiones, aunque dignas de atención, parecieron abominables a Newton, que juró retrasar o incluso abandonar la publicación del libro tercero. Al final, cedió y publicó el último libro de los *Principia*, no sin antes eliminar cuidadosamente cualquier mención al nombre de Hooke.

El odio que Newton sentía por Hooke le consumió durante años. En 1693, todavía sufrió otra crisis nerviosa y abandonó la investigación. Dejó de asistir a la Royal Society hasta la muerte de Hooke en 1703, y entonces fue elegido presidente y reelegido cada año hasta su propia muerte en 1727. También retrasó la publicación de *Opticks*, su importante estudio de la luz y del color, que sería su libro más leído, hasta después de la muerte de Hooke.

Newton empezó el siglo XVIII en el cargo oficial de director de la Real Casa de la Moneda, donde utilizó su experiencia en alquimia para determinar métodos para restablecer la integridad de la moneda inglesa. Como presidente de la Royal Society, continuó batallando con determinación inexorable contra sus supuestos enemigos, prolongando en particular su eterna disputa con Leibniz sobre su rivalidad acerca de la invención del cálculo. Fue nombrado caballero por la reina Ana en 1705, y vivió para ver la segunda y tercera ediciones de los *Principia*.

Isaac Newton murió en marzo de 1727, tras accesos de inflamación pulmonar y de gota. Tal como se había propuesto, no tuvo rival en el campo de la ciencia. Este hombre que no parece haber tenido relaciones sentimentales con ninguna mujer (algunos historiadores han especulado sobre sus posibles relaciones con hombres, como el filósofo natural suizo Nicolas Fatio de Duillier) no puede ser acusado, sin embargo, de falta de pasión por su trabajo. El poeta Alexander Pope, contemporáneo de Newton, expresó con gran elegancia el regalo del pensador a la humanidad:

> La naturaleza y sus leyes yacían en la noche:
> Dios dijo: «¡Sea Newton!» y todo se hizo luz.

Pese a las mezquinas disputas y la innegable arrogancia que marcaron su vida, hacia su fin Isaac Newton fue considerablemente modesto al enjuiciar sus éxitos: «No sé qué pareceré al mundo, pero tengo la impresión de haber sido tan sólo como un chiquillo, jugando en la costa, divirtiéndome en buscar aquí y allá un guijarro más liso o más hermoso que de ordinario, mientras el gran océano de la verdad yacía ante mí, completamente por descubrir».

PRINCIPIOS MATEMÁTICOS DE LA FILOSOFÍA NATURAL

DEFINICIONES

DEFINICIÓN I

La cantidad de materia es la medida de la misma originada de su densidad y volumen conjuntamente.

El aire dos veces más denso, en también doble espacio, es cuádruple, en triple espacio, séxtuple. Lo mismo se debe entender de la nieve o del polvo condensados por compresión o licuefación. Y esta misma es la razón para todos los cuerpos que por cualquier causa se condensan de modos diversos. No tengo, en cambio, aquí razón ninguna para un medio, si hubiere alguno, que atraviese libremente los intersticios de las partes. A esta cantidad llamo en lo sucesivo cuerpo o masa. Se hace manifiesta por el peso de cualquier cuerpo, pues, por medio de experimentos muy exactos con péndulos, hallé que era proporcional al peso, como después se mostrará.

DEFINICIÓN II

La cantidad de movimiento es la medida del mismo obtenida de la velocidad y de la cantidad de materia conjuntamente.

El movimiento del todo es la suma de los movimientos de cada parte y, por lo tanto, es el doble en un cuerpo el doble mayor con igual velocidad y cuádruple con doble velocidad.

DEFINICIÓN III

La fuerza ínsita de la materia es una capacidad de resistir por la que cualquier cuerpo, por cuanto de él depende, persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo.

Ésta es siempre proporcional al cuerpo y no se diferencia en nada de la inercia de la masa, a no ser en el modo de concebirla. Por la inercia de la materia ocurre que todo cuerpo difícilmente se aparta de un estado de reposo o movimiento. De donde la fuerza ínsita también puede llamarse con toda propiedad fuerza de inercia. Ejerce el cuerpo esta fuerza solamente en el cambio de su estado hecho por otra fuerza impresa en él y es su ejercicio, bajo diverso aspecto, tanto resistencia como ímpetu: resistencia, en tanto en que el cuerpo, para conservar su propio estado, se opone a la fuerza impresa; ímpetu, en tanto que el mismo cuerpo, cediendo difícilmente a la fuerza del obstáculo resistente, intenta cambiar el estado de éste. El vulgo atribuye la resistencia a los cuerpos en reposo y el ímpetu a los cuerpos en movimiento; pero el movimiento y el reposo, tal como el vulgo los concibe, sólo se distinguen relativamente uno de otro, y no siempre verdaderamente reposan las cosas que el vulgo considera en reposo.

DEFINICIÓN IV

La fuerza impresa es la acción ejercida sobre un cuerpo para cambiar su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo.

Consiste esta fuerza en la sola acción y no permanece en el cuerpo después de ella, pues el cuerpo permanece en el nuevo estado únicamente por inercia. La fuerza impresa tiene diferentes orígenes, tales como un golpe, una presión, la fuerza centrípeta.

DIFINICIÓN V

La fuerza centrípeta es aquella en virtud de la cual los cuerpos son atraídos, empujados, o de algún modo tienden hacia un punto como a un centro.

De esta clase es la gravedad por la que los cuerpos tienden al centro de la Tierra; el magnetismo por el que el hierro tiende hacia el imán; y la fuerza, cualquiera que sea, por la que constantemente los planetas se ven apartados de las trayectorias rectilíneas y se ven obligados a permanecer girando en líneas curvas. Una piedra volteada en una honda intenta escapar de la mano del hondero y su intento hace estirarse la honda y más cuanto más rápidamente gira, y en cuanto se suelta se aleja. Llamo centrípeta a la fuerza contraria al mencionado intento; por ella, la honda retiene constantemente la piedra hacia la mano y la mantiene en el círculo, y, por tanto, se dirige hacia la mano o hacia el centro del círculo. Igual ocurre con todos los cuerpos que giran en círculo. Todos intentan alejarse del centro del círculo y, a no ser por una fuerza contraria a este intento, que los cohíba y los obligue en sus órbitas y a la que por ello llamo centrípeta, se alejarían todos en línea recta con movimientos uniformes. Si se despojase de la fuerza de

gravedad, un proyectil no caería a tierra, sino que se alejaría por los cielos en línea recta y esto con movimiento uniforme si además suprimimos la resistencia del aire. La gravedad lo aparta continuamente de la trayectoria rectilínea y lo doblega continuamente hacia la Tierra, y esto más o menos según sea su gravedad y su velocidad de movimiento. Cuanto menor sea su gravedad por la cantidad de materia o la velocidad con que se dispara, tanto menos se desviará de la trayectoria rectilínea y más lejos llegará. Si una bola de plomo disparada con la fuerza de la pólvora desde lo alto de un monte a una determinada velocidad y en la dirección de una línea horizontal recorriese, describiendo una curva, dos millas antes de caer al suelo, con velocidad doble llegaría casi el doble más lejos y con diez veces la velocidad llegaría también casi diez veces más lejos, supuesto que no haya resistencia del aire. Y, aumentando la velocidad, puede aumentarse a voluntad la distancia de lanzamiento y disminuir la curvatura de la trayectoria hasta el punto de alcanzar diez, treinta o noventa grados e incluso circundar la Tierra y hasta alejarse hacia los cielos y con el movimiento de ida escapar al infinito. Y por la misma razón por la que un proyectil podría girar en un círculo por la fuerza de la gravedad y dar vuelta a toda la Tierra, asimismo la Luna por la fuerza de la gravedad, supuesto que sea grave, u otra fuerza cualquiera por la que sea empujada hacia la Tierra, puede ser desviada hacia la Tierra continuamente de la trayectoria rectilínea y girar en su órbita; y sin tal fuerza, la Luna no podría retenerse en su órbita. Esta fuerza, si fuese sólo un poco menor, no podría apartar a la Luna de su curso rectilíneo, y si fuese un poco mayor, la apartaría demasiado y la precipitaría de su órbita hacia la Tierra. Se requiere, pues, que sea de una magnitud exacta. Y es cometido de los matemáticos calcular la fuerza con la que un cuerpo en una órbita determinada y a una velocidad dada podría mantenerse exactamente, y a la inversa, determinar la trayectoria curva a que es empujado un cuerpo que es lanzado con una fuerza dada y desde un punto dado. Además, la magnitud de esta fuerza centrípeta es de tres clases: absoluta, acelerativa y motriz.

DEFINICIÓN VI

Magnitud absoluta de la fuerza centrípeta es la medida mayor o menor de la misma según la eficacia de la causa que la expande desde un centro en todas las direcciones en torno.

Como ocurre con la fuerza magnética, según la masa del imán o según la intensidad de la fuerza magnética, que es mayor en unos imanes que en otros.

DEFINICIÓN VII

La magnitud acelerativa de la fuerza centrípeta es su medida proporcional a la velocidad que genera en un tiempo dado.

Así, la fuerza del imán es mayor a menor distancia y menor a mayor distancia, o la fuerza gravitacional es mayor en los valles y menor en las cimas de los montes muy altos, y menor todavía (como luego se mostrará) a mayores distancias de la superficie terrestre, mientras permanece igual a distancias iguales, puesto que acelera por igual a

todos los cuerpos que caen (graves o leves, grandes o pequeños) si se suprime la resistencia del aire.

DEFINICIÓN VIII

La magnitud motriz de la fuerza centrípeta es la medida de la misma proporcional al movimiento que genera en un tiempo dado.

Así, el peso es mayor en un cuerpo mayor y menor en un cuerpo menor; y en el mismo cuerpo resulta mayor cerca de la Tierra y menor en el cielo. Dicha cantidad es la centripetencia o tendencia al centro de todo el cuerpo y (por así decirlo) su peso; se pone siempre de manifiesto por medio de una fuerza contraria a ella y equivalente por la que sea posible impedir la caída del cuerpo.

Es conveniente, para ser breves, llamar a estas magnitudes fuerzas motrices, aceleративas y absolutas; y para distinguirlas, referirlas a los cuerpos que tienden a un centro, a los lugares de los cuerpos y al centro de fuerzas: a saber, la fuerza motriz a un cuerpo, como si se tratara del impulso de un todo hacia un centro, impulso compuesto de los impulsos parciales de todas las partes; y la fuerza aceleratriz al lugar del cuerpo, como si se tratara de cierta eficacia difundida desde el centro por cada punto en torno para mover los cuerpos situados en él; la fuerza absoluta al centro, como si estuviera, dotado de una causa sin la que las fuerzas motrices no se propagarían por las regiones entorno, ya sea tal causa un cuerpo central (como el imán en el centro de la fuerza magnética o la Tierra en el centro de la fuerza de gravitación) u otra causa oculta. Tal concepto es meramente matemático, puesto que no considero aquí las causas y las bases físicas de las fuerzas.

La fuerza acelerativa es a la fuerza motriz como la velocidad al movimiento. Puesto que surge la cantidad de movimiento de la velocidad y de la cantidad de materia y la fuerza motriz surge de la fuerza acelerativa y de la misma cantidad de materia conjuntamente. Pues la suma de los impulsos de la fuerza aceleratriz sobre cada parte representa la fuerza motriz del todo. Por consiguiente, en la superficie de la Tierra, donde la gravedad aceleratriz o fuerza de gravitación es la misma para todos los cuerpos, la gravedad motriz o peso es idéntico al cuerpo; pero si se sube por el espacio, donde la gravedad aceleratriz es menor, el peso disminuirá también y será siempre igual a la gravedad aceleratriz y al cuerpo conjuntamente. Así, en sitios donde la gravedad aceleratriz es dos veces menor, el peso de un cuerpo dos o tres veces menor será cuatro o seis veces menor.

Por cierto, que llamo en el mismo sentido fuerzas aceleративas y motrices a las atracciones y a los impulsos. Utilizo unas por otras, e indiferentemente, las palabras atracción, impulso, tendencia de cualquier tipo a un centro, y lo hago considerando a tales fuerzas, no en su aspecto físico, sino sólo en el matemático. De ahí que cuide el lector de no creer que con estas palabras yo esté definiendo algún género o modo de acción o causa o propiedad física, o que estoy atribuyendo a los centros (que son puntos matemáticos) verdaderas fuerzas físicas, si me hallare diciendo que los centros atraen o que las fuerzas son centrales.

ESCOLIO

Nos ha parecido oportuno explicar hasta aquí los términos menos conocidos y el sentido en que se han de tomar en el futuro. En cuanto al tiempo, espacio, lugar y movimiento, son de sobra conocidos para todos. Hay que señalar, sin embargo, que el vulgo no concibe estas magnitudes si no es con respecto a lo sensible. De ello se originan ciertos prejuicios para cuya destrucción conviene que las distingamos en absolutas y relativas, verdaderas y aparentes, matemáticas y vulgares.

I. El tiempo absoluto, verdadero y matemático en sí y por su naturaleza y sin relación a algo externo, fluye uniformemente, y por otro nombre se llama duración; el relativo, aparente y vulgar, es una medida sensible y externa de cualquier duración, mediante el movimiento (sea la medida exacta o desigual) y de la que el vulgo usa en lugar del verdadero tiempo; así, la hora, el día, el mes, el año.

II. El espacio absoluto, por su naturaleza y sin relación a cualquier cosa externa, siempre permanece igual e inmóvil; el relativo es cualquier cantidad o dimensión variable de este espacio, que se define por nuestros sentidos según su situación respecto a los cuerpos, espacio que el vulgo toma por el espacio inmóvil: así, una extensión espacial subterránea, aérea o celeste definida por su situación relativa a la Tierra. El espacio absoluto y el relativo son el mismo en especie y en magnitud, pero no permanecen siempre el mismo numéricamente. Pues si la Tierra, por ejemplo, se mueve, el espacio de nuestra atmósfera que relativamente y respecto a la Tierra siempre permanece el mismo, ahora será una parte del espacio absoluto por la que pasa el aire, después otra parte y así, desde un punto de vista absoluto, siempre cambiará.

III. Lugar es la parte del espacio que un cuerpo ocupa y es, en tanto que espacio, absoluto o relativo. Digo parte del espacio, no situación del cuerpo ni superficie externa. Pues los sólidos iguales siempre tienen lugares iguales; las superficies, en cambio, por la desemejanza de las figuras son muchas veces desiguales. La situación, hablando propiamente, no tiene cantidad y no es tanto un lugar cuanto una propiedad del lugar. El movimiento del todo es el mismo que la suma de los movimientos de las partes, esto es, la traslación del todo de su lugar es la misma que la suma de las traslaciones de sus lugares de las partes, y, por tanto, el lugar del todo es igual a la suma de los lugares de las partes y, por consiguiente, interno y solidario con el cuerpo.

IV. Movimiento absoluto es el paso de un cuerpo de un lugar absoluto a otro lugar absoluto, el relativo de un lugar relativo a otro lugar relativo. Así, en una nave empujada por las velas desplegadas, el lugar relativo de un cuerpo es aquella región de la nave en que está el cuerpo, o sea, la parte de la cavidad total que llena dicho cuerpo y que, por consiguiente, se mueve a la vez que la nave: mientras que el reposo relativo es la permanencia del cuerpo en la misma región de la nave o en la misma parte de su cavidad. Pero el reposo verdadero es la permanencia del cuerpo en la misma parte del espacio inmóvil en que se mueve la nave misma junto con su cavidad y todos sus contenidos. De donde si la Tierra verdaderamente está en reposo, el cuerpo que en la nave permanece relativamente en reposo se moverá verdadera y absolutamente con la misma velocidad con que la nave se mueve sobre la Tierra. Si la Tierra también se mueve, constará el verdadero y absoluto movimiento del cuerpo, parte del verdadero movimiento de la Tierra en el espacio inmóvil, parte de los movimientos relativos de la nave sobre la Tierra: y si el cuerpo también se mueve relativamente a la nave, constará su verdadero movimiento, parte del verdadero movimiento de la Tierra en el espacio inmóvil, parte de los movimientos

relativos, tanto de la nave respecto a la Tierra como del cuerpo respecto a la nave, y de estos movimientos relativos constará el total movimiento relativo del cuerpo respecto a la Tierra. Así, si la parte de Tierra ocupada por la nave se mueve verdaderamente hacia oriente con velocidad de 10.010 partes y la nave es empujada hacia occidente por el viento y las velas con velocidad de 10 partes y un marino camina por la nave hacia oriente con velocidad de 1 parte, el marino se moverá absolutamente en el espacio inmóvil hacia oriente con la velocidad de 10.001 partes, y relativamente a la Tierra se moverá hacia occidente con la velocidad de 9 partes.

El tiempo absoluto se distingue del relativo en astronomía por la ecuación del tiempo vulgar. Pues desiguales son los días naturales, que son tenidos por iguales por el vulgo al medir el tiempo. Los astrónomos corrigen esta desigualdad al medir con tiempos más exactos los movimientos celestes. Es posible que no haya ningún movimiento igual con el que medir exactamente el tiempo. Todos los movimientos pueden acelerarse y retardarse, pero el flujo del tiempo absoluto no puede alterarse. La duración o permanencia de las cosas en la existencia es la misma, tanto si los movimientos son rápidos, como si son lentos, como si no los hubiese; por tanto, la duración se distingue claramente de sus medidas sensibles, a la vez que de ellas se deduce por la ecuación astronómica. La necesidad de esta ecuación para la determinación de los fenómenos se patentiza tanto por el experimento del reloj oscilatorio como por los eclipses de los satélites de Júpiter.

Del mismo modo que el orden de las partes del tiempo es inmutable, así lo es el orden de las partes del espacio. Si éstas se movieran de sus lugares, se moverían (por así decirlo) de sí mismas. Pues el tiempo y el espacio son los cuasilugares de sí mismos y de todas las cosas. Todas las cosas se sitúan en el tiempo en cuanto al orden de la sucesión y en el espacio en cuanto al orden de lugar. Es de su esencia el ser lugares y es absurdo pensar que los lugares primeros se muevan. Por tanto, estos son lugares absolutos y únicamente las traslaciones desde estos lugares son movimientos absolutos.

Mas como estas partes del espacio no pueden verse y distinguirse unas de otras por medio de nuestros sentidos, en su lugar utilizamos medidas sensibles. Por las posiciones y distancias de las cosas a un cierto cuerpo que consideramos inmóvil, definimos todos los lugares; posteriormente interpretamos todos los movimientos por respecto a los antedichos lugares, en tanto que los concebimos como pasos de los cuerpos por estos lugares. Así, usamos de los lugares y movimientos relativos en lugar de los absolutos y con toda tranquilidad en las cosas humanas: para la filosofía, en cambio, es preciso abstraer de los sentidos. Pues es posible que en la realidad no exista ningún cuerpo que esté en total reposo, al que referir lugar y movimiento.

Se distinguen el reposo y movimiento absolutos y relativos entre sí por sus propiedades, causas y efectos. Es propiedad del reposo que los cuerpos verdaderamente quietos están en reposo entre sí. Por tanto, al ser posible que un cuerpo cualquiera en la región de las estrellas fijas, o más lejos, permanezca en reposo absoluto y no se pueda saber por las situaciones respectivas de los cuerpos entre sí en nuestras cercanías si alguno de ellos conserva su posición constante respecto al cuerpo lejano, por ende no se puede definir el reposo verdadero por las posiciones relativas de estos cuerpos.

Es propiedad del movimiento que las partes que conservan su posición dada respecto al todo participan de los movimientos de los mismos todos. Pues todas las partes de los cuerpos que giran tienden a separarse del eje del movimiento y la fuerza de los móviles que se desplazan surge de la fuerza conjunta de las partes singulares. Así que, al mover los recipientes de los cuerpos, se mueven también las cosas que reposan relativa-

mente dentro de esos recipientes. Y, por tanto, el movimiento verdadero y absoluto no puede definirse por la traslación respecto a las cercanías del cuerpo que son consideradas como en reposo. Porque los cuerpos exteriores deben, no sólo ser considerados en reposo, sino también reposar verdaderamente. Pues de lo contrario, todo lo incluido, además de participar del de traslación de las cercanías de los recipientes, participará también de los movimientos verdaderos de los recipientes, y suprimida aquella traslación, no reposará verdaderamente, sino que solamente será considerado como en reposo; pues son los recipientes respecto a los contenidos como la parte exterior del todo a la parte interior, o como la corteza al núcleo. Movida la corteza se mueve el núcleo también, como parte del todo, sin traslación de las cercanías de la corteza.

Es afín a la anterior propiedad el que, movido el lugar, se mueva también lo contenido en él: por tanto, el cuerpo que se mueve de un lugar movido, participa también del movimiento de su lugar. Por consiguiente, todos los movimientos, que surgen del movimiento de sus lugares, son partes solamente de movimientos totales y absolutos, y todo movimiento completo se compone del movimiento del cuerpo de su lugar primero, y del movimiento de este lugar del suyo, y así sucesivamente hasta que se llegue al lugar inmóvil, como en el ejemplo del navegante propuesto más arriba. De donde los movimientos completos y absolutos no pueden definirse si no es por lugares inmóviles y por eso más arriba los he relacionado con los lugares inmóviles, y los relativos en cambio con los lugares móviles. Lugares inmóviles no son otra cosa que las posiciones constantes que conservan entre sí todas las cosas desde el infinito hasta el infinito y que, por tanto, siempre permanecen inmóviles y constituyen el espacio que llamo inmóvil.

Las causas, por las que los movimientos verdaderos y los relativos se distinguen mutuamente, son fuerzas impresas en los cuerpos para producir el movimiento. El movimiento verdadero ni se engendra ni se cambia, a no ser por fuerzas impresas en el mismo cuerpo movido; en cambio, el movimiento relativo puede generarse y cambiarse sin fuerzas impresas en tal cuerpo. Basta con imprimirlas solamente en los otros cuerpos respecto a los que se da la relación para que, cediendo éstos, cambie la relación dada en que consiste el reposo o movimiento relativo de aquel cuerpo. Por otra parte, el movimiento verdadero siempre se cambia por fuerzas impresas en el cuerpo movido, mientras que el movimiento relativo no se cambia necesariamente por estas fuerzas impresas. Pues si dichas fuerzas se aplican de tal modo hacia los demás cuerpos respecto a los que se da la relación que se conserve el lugar relativo, se conservará la relación en que consiste el. movimiento relativo. Puede, pues, cambiarse todo el movimiento relativo mientras se conserva el verdadero, y conservarlo mientras se cambia el verdadero y absoluto; por tanto, el movimiento verdadero en absoluto puede consistir en tales relaciones.

Los efectos por los que los movimientos absolutos y los relativos se distinguen mutuamente son las fuerzas de separación del eje de los movimientos circulares. Pues en el movimiento circular meramente relativo estas fuerzas son nulas, pero en el verdadero y absoluto son mayores o menores según la cantidad de movimiento. Si se cuelga un cubo de un hilo muy largo y se gira constantemente hasta que el hilo por el torcimiento se ponga muy rígido y después se llena de agua y se deja en reposo a la vez que el agua, y entonces con un empujón súbito se hace girar continuamente en sentido contrario y, mientras se relaja el hilo, persevera durante un tiempo en tal movimiento, la superficie del agua será plana al principio, al igual que antes del movimiento del vaso, pero des-

pués, al transmitir éste su fuerza poco a poco al agua, hace que ésta también empiece a girar sensiblemente, se vaya apartando poco a poco del centro y ascienda hacia los bordes del vaso, formando una figura cóncava (como yo mismo he experimentado) y con un movimiento siempre creciente sube más y más hasta que efectuando sus revoluciones en tiempos iguales que el vaso, repose relativamente en él. Muestra este ascenso el intento de separarse del centro del movimiento, y por tal intento se manifiesta y se mide el movimiento circular verdadero y absoluto del agua, y aquí contrario totalmente al movimiento relativo. Al principio, cuando mayor era el movimiento relativo del agua en el vaso, ese movimiento no engendraba ningún intento de separación del eje; el agua no buscaba el borde subiendo por los costados del vaso, sino que permanecía plana y, por tanto, su movimiento circular verdadero no había aún empezado, pero después cuando decreció el movimiento relativo del agua, su ascensión por los costados del vaso indicaba el intento de separarse del eje y este conato mostraba su movimiento circular, verdadero y siempre creciente y al final convertido en máximo cuando el agua reposaba relativamente en el vaso. Por tanto, este conato no depende de la traslación del agua respecto de los cuerpos circundantes y, por tanto, el movimiento circular verdadero no puede definirse por tales traslaciones. Único es el movimiento circular verdadero de cualquier cuerpo que gira, y responde a un conato único como un verdadero y adecuado efecto; los movimientos relativos, en cambio, por las múltiples relaciones externas, son innumerables, pero, como las relaciones, carecen por completo de efectos verdaderos, a no ser en tanto que participan de aquel único y verdadero movimiento. De donde, incluso en el sistema de los que quieren que nuestro cielo gire bajo el cielo de las estrellas fijas y arrastre consigo a los planetas, los planetas y cada una de las partes del cielo que reposan relativamente a sus cercanías celestes, se mueven verdaderamente. Pues cambian sus posiciones relativas (al revés de lo que ocurre con las verdaderamente en reposo) y a la vez que son arrastrados con sus cielos participan de sus movimientos y, como partes de todos que giran, intentan alejarse de sus centros.

Así pues, las cantidades relativas no son las cantidades mismas que los nombres indican, sino las mediciones sensibles de ellas (verdaderas o erróneas) de las que se sirve el vulgo en lugar de las cantidades medidas. Pero si los significados de las palabras se han de definir por el uso, por los nombres de tiempo, espacio, lugar y movimiento, más propiamente hay que entender estas mediciones sensibles; y el discurso será insólito y puramente matemático si se entienden aquí las cantidades medidas. Por tanto, violentan las palabras consagradas los que interpretan aquí estos vocablos refiriéndolos a las cantidades medidas. Y no menos dañan a la matemática y a la filosofía quienes confunden las verdaderas cantidades con sus relaciones y las medidas vulgares.

Es muy difícil conocer los movimientos verdaderos de cada cuerpo y distinguirlos de hecho de los aparentes; además, porque las partes de aquel espacio inmóvil, en que los cuerpos se mueven verdaderamente, no se captan por los sentidos. Sin embargo, no es el caso desesperado. Pues surgen argumentos, parte de los movimientos aparentes, que son diferencias de los movimientos verdaderos, parte de las fuerzas, que son causas y efectos de los movimientos verdaderos. Así, si a dos esferas, unidas entre sí por un hilo de determinada longitud, se las hace girar en torno al común centro de gravedad, aparecerá por la tensión del hilo el conato de las esferas de alejarse del eje de giro, y de ello se puede calcular la cantidad de movimiento circular. Después, si se aplican a la vez dos fuerzas iguales en las caras alternas de las esferas para aumentar o disminuir el movimiento circular, aparecerá, por el aumento o disminución de la tensión del hilo,

el aumento o disminución del movimiento; y después, por fin, se podrían hallar las caras de las esferas en que deberían imprimirse las fuerzas para que el movimiento aumentase al máximo, esto es, las caras posteriores, o las que siguen en el movimiento circular. Pero, conocidas las caras que siguen y las caras opuestas que preceden, se conocerá la determinación del movimiento. De este modo se podría averiguar la cantidad y la determinación de este movimiento circular en un cierto vacío inmenso, donde nada hubiese externo y sensible con lo que se pudiesen comparar las esferas. Si ahora se establecen en dicho espacio algunos cuerpos lejanos que guarden entre sí cierta posición dada, tales como las estrellas fijas en nuestro firmamento, entonces no es posible saber a partir de la traslación relativa de las esferas entre los cuerpos si es a éstos o a aquéllos a quienes hay que atribuir el movimiento. Pero si se atiende al hilo y se encuentra que la tensión del mismo es la misma que la requerida por el movimiento de las esferas, será lícito concluir que el movimiento es de las esferas y entonces también deducir la determinación de este movimiento de la traslación de las esferas entre los cuerpos. A inferir, sin embargo, los movimientos verdaderos de sus causas, de sus efectos y diferencias con los aparentes y, al revés, sus causas y efectos a partir de los movimientos ya verdaderos, ya aparentes, se enseñará más extensamente en lo que sigue. Pues para este fin compuse el tratado siguiente.

AXIOMAS O LEYES DEL MOVIMIENTO

LEY I

Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser en tanto que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado.

Los proyectiles perseveran en sus movimientos a no ser en cuanto son retardados por la resistencia del aire y son empujados hacia abajo por la gravedad. Una rueda, cuyas partes en cohesión continuamente se retraen de los movimientos rectilíneos, no cesa de dar vueltas sino en tanto en que el aire la frena. Los cuerpos más grandes de los cometas y de los planetas conservan por más tiempo sus movimientos, tanto de avance como de rotación, realizados en espacios menos resistentes.

LEY II

El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.

Si una fuerza cualquiera produce un movimiento dado, doblada producirá el doble y triplicada el triple, tanto si se aplica de una sola vez como si se aplica gradual y sucesivamente. Este movimiento (dado que se determina siempre en la misma dirección que la fuerza motriz) si el cuerpo se movía antes, o bien se añade sumándose a él, o se res-

ta si es contrario, o se añade oblicuamente, si es oblicuo, y se compone con él según ambas determinaciones.

LEY III

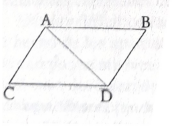
Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: osea, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas.

El que empuja o atrae a otro es empujado o atraído por el otro en la misma medida. Si alguien oprime una piedra con el dedo, también su dedo es oprimido por la piedra. Si un caballo arrastra una piedra atada con una soga, el caballo es retroarrastrado (por así decirlo) igualmente, pues la soga estirada en ambas direcciones y con el propio impulso de contraerse tirará del caballo hacia la piedra y de la piedra hacia el caballo y tanto se opondrá al progreso de uno cuanto ayude al avance del otro. Si un cuerpo cualquiera golpeando sobre otro cuerpo cambiara el movimiento de éste de algún modo con su propia fuerza, él mismo a la vez sufrirá el mismo cambio en su propio movimiento y en sentido contrario por la fuerza del otro cuerpo (por la igualdad de la presión mutua). A tales acciones son iguales los cambios de movimientos, no de velocidades, y siempre que se trate de cuerpos no fijados por otra parte. Igualmente los cambios de velocidad en sentido contrario, puesto que los movimientos cambian igualmente, son inversamente proporcionales a los cuerpos. Se cumple esta ley también para las atracciones como se comprobará en un escolio próximo.

COROLARIO I

Un cuerpo recorre la diagonal de un paralelogramo bajo dos fuerzas conjuntas en el mismo tiempo en que los dos lados bajo las dos acciones por separado.

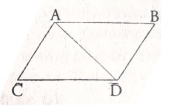
Si un cuerpo, en un tiempo dado, con la sola fuerza M impresa en el punto A es transportado con movimiento uniforme de A a B y con la sola fuerza N impresa en el mismo punto es transportado de A a C, complétese el paralelogramo ABDC y con ambas fuerzas el cuerpo será transportado en el mismo tiempo en diagonal de A a D. Porque, puesto que la fuerza actúa según la línea AC paralela a BD, esta fuerza, por la ley II, en nada modificará la velocidad de acercamiento a la línea BD generada por otra fuerza. Por tanto, un cuerpo llegará en el mismo tiempo hasta la línea BD, tanto si se imprime la fuerza N como si no se imprime; por tanto, al cabo de tal tiempo se hallará al cuerpo en algún lugar de la línea BD. Por la misma razón al final de dicho tiempo se hallará en algún punto en la línea CD y, por tanto, es necesario encontrarla en la unión D de ambas líneas al cabo del mismo tiempo. Seguirá, pues un movimiento rectilíneo de A a D por la ley I.



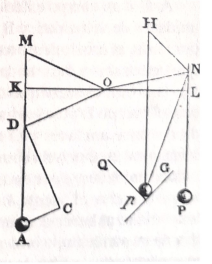
COROLARIO II

Así se evidencia la composición de la fuerza directa AD de las fuerzas oblicuas AB y BD, y a la vez la resolución de cualquier fuerza directa como AD en fuerzas oblicuas como AB y BD. Tales composición y resolución se confirman ampliamente por la mecánica.

Supongamos los radios desiguales OM y ON que parten del centro O de una rueda y sostienen los pesos A y P mediante los hilos MA y NP y se trata de hallar las fuerzas de los pesos para mover la rueda: trácese la recta KOL por el centro O, que corte perpendicularmente los hilos en K y en L. Trácese un círculo con centro en O y con la distancia mayor OL de las de los intervalos OK y OL, círculo que cortará al hilo MA en D; y que sean AC paralela a la recta trazada OD, y DC perpendicular. Puesto que nada importa si los extremos de los hilos están fijos o no al plano de la rueda en K, L y D, los pesos tendrán el mismo valor si se suspenden de los puntos K y L o D y L. Exprésese ahora toda la fuerza del peso A por la longitud de toda la línea AD y ésta se resolverá en las fuerzas AC y CD de las cuales AC, atrayendo el radio OD directamente hacia el centro, en nada influye para mover la rueda; mientras la otra fuerza DC, atrayendo el radio DO perpendicularmente, equivale a atraer perpendicularmente al radio OL igual al propio OD; esto es, igual al peso P, dado que dicho peso es al peso A como la fuerza DC a la fuerza DA, es decir (por la semejanza de los triángulos ADC, DOK) como OK a OD o a OL. Por tanto, los pesos A y P, que son inversamente como los radios OK y OL, puesto uno a continuación de otro, tendrán el mismo valor y permanecerán en equilibrio lo que es una propiedad conocida en la balanza, en la palanca y en la polea. Si el peso de uno de los dos es mayor que el del otro, según esta razón su fuerza para mover la rueda será tanto mayor.



Puesto que si el peso *p* igual a P se suspende parcialmente de un hilo N*p* y de otra parte se apoya en el plano oblicuo *p*G y se trazan *p*H y NH, la primera perpendicular a la horizontal y la segunda perpendicular al plano *p*G, la fuerza del peso *p* hacia abajo puede representarse por la línea *p*H y puede resolverse en las fuerzas *p*N, HN. Si un plano *p*Q fuese perpendicular al hilo *p*N cortando al plano *p*G según una línea paralela al horizonte y el peso *p* solamente reposara sobre estos planos *p*Q, *p*G presionará a estos planos perpendicularmente con las fuerzas *p*N, HN; de tal modo que al plano *p*Q le afectaría la fuerza *p*N y al plano *p*G la fuerza HN. Y en consecuencia, si se suprime el plano *p*Q de modo que el peso tire del hilo, puesto que el hilo sosteniendo al peso hace ahora el papel del plano suprimido, tirará de él con la misma fuerza *p*N con la que antes era presionado el plano. De donde la tensión del hilo oblicuo será a la tensión del otro hilo perpendicular PN como *p*N a *p*H y, por tanto, si las razones de los pesos *p* y A son como la razón compuesta de las razones inversas de las distancias mínimas al centro de



la rueda de sus hilos *p*N, AM y la razón directa *p*H a *p*N, los pesos tendrán el mismo valor para mover la rueda y mutuamente se equilibrarán, como puede experimentar cualquiera.

El peso *p*, por otra parte, al caer sobre dichos dos planos oblicuos tiene el carácter de cuña entre las dos caras internas de un cuerpo hendido y de este modo se ponen de manifiesto las fuerzas de la cuña y del mazo: así ocurre que la fuerza con la que el peso *p* presiona al plano *p*Q es a la fuerza con que él mismo es empujado contra los planos según la línea *p*H por la gravedad o por el golpe del mazo, como *p*N a *p*H, y a la fuerza con que presiona al otro plano *p*G, como *p*N a NH. Incluso se deduce de aquí, por pura división semejante de fuerzas, la fuerza del tornillo sin fin, salvo que la cuña es empujada por una palanca. La utilización de este corolario es muy clara y pone de manifiesto su verdad, al depender de lo dicho toda la mecánica demostrada por los autores de diversos modos. Fácilmente también se derivan de lo dicho las fuerzas de las máquinas que suelen hacerse con ruedas, tornos, poleas, palancas, correas y pesas que suben directa u oblicuamente u otras energías mecánicas, tales como las fuerzas de los tendones para mover los esqueletos de los animales.

COROLARIO III

La cantidad de movimiento que se obtiene tomando la suma de los movimientos hechos en una dirección y la diferencia de los realizados en sentido contrario, no cambia por la acción de los cuerpos entre sí.

Puesto que una acción y su reacción contraria son iguales por la ley III y, por la ley II, producen en los movimientos cambios iguales en dirección contraria. Por tanto, si los movimientos ocurren hacia la misma dirección, lo que se añade al cuerpo que se separa se detrae del movimiento del cuerpo que le sigue, de tal modo que la suma permanece igual que al principio. Y si los cuerpos van al encuentro será igual la cantidad detraída de cada móvil y, por ende, la diferencia de los movimientos en sentido opuesto permanecerá constante.

Así, si un cuerpo esférico A es el triple mayor que un cuerpo esférico B, y tiene dos unidades de velocidad, y B le sigue en la misma recta con diez unidades de velocidad y, por tanto, el movimiento total de A será con respecto a B como seis a diez: supongamos que tienen seis y diez unidades de movimiento, la suma total será de dieciséis unidades. Por tanto, en el encuentro de ambos si el cuerpo A obtiene tres o cuatro o cinco unidades, el cuerpo B pierde otras tantas y saldrá el cuerpo A después del choque con nueve, diez u once unidades y el cuerpo B con siete, seis o cinco, permaneciendo siempre la suma total de dieciséis como al principio. Si el cuerpo A obtuviese nueve o diez u once o doce unidades y, por ende, después del choque sale con quince o dieciséis o diecisiete o dieciocho, el cuerpo B al perder tantas unidades como aumenta A, o bien sale con una unidad al haber perdido otras nueve, o bien reposa al haber perdido sus diez unidades de movimiento, o bien regresa al haber perdido su movimiento (por así decirlo) con una parte más, o bien regresa con dos unidades por haber perdido doce unidades de movimiento hacia adelante. Así las sumas de los movimientos concurrentes 15 + 1 o 16 + 0 y las diferencias de los contrarios 17 – 1 y 18 – 2 siempre darán dieciséis unidades

de movimiento como antes del choque y la reflexión. Conocidos, por tanto, los movimientos con que salen los cuerpos después del choque se halla la velocidad de cualquiera de ellos suponiendo que es a la velocidad anterior al choque como el movimiento posterior es al anterior. Como en el ejemplo anterior, donde el movimiento del cuerpo A era de seis unidades antes del choque y de dieciocho después y la velocidad de dos unidades antes del choque: se hallará que su velocidad será de seis después del choque, diciendo que el movimiento de seis unidades es al movimiento de dieciocho unidades después del choque como la velocidad de dos unidades antes del choque es a seis unidades después del choque.

Porque si se trata de cuerpos no esféricos o que se mueven según rectas distintas que se inciden oblicuamente y se pregunta por sus movimientos después del choque, hay que conocer la situación del plano en el que concurren los cuerpos en el punto de reunión; después (por el corolario II) hay que distinguir en dos los movimientos de cada cuerpo, uno perpendicular a ese plano y otro paralelo al mismo; los movimientos paralelos, dado que los cuerpos actúan entre sí mutuamente según una línea perpendicular a dicho plano, han de conservarse idénticos antes y después de la reflexión. Y a los movimientos perpendiculares hay que atribuirles cambios iguales en sentido contrario, de tal modo que la suma de los movimientos concurrentes y la diferencia de los contrarios permanezca igual que antes. De tales choques suelen originarse también movimientos circulares de los cuerpos en torno a su centro, pero no consideraré en lo que sigue estos casos, ya que sería demasiado prolijo demostrar todo lo relativo a estas cuestiones.

COROLARIO IV

El centro común de gravedad de dos o más cuerpos no cambia su estado de movimiento o reposo por las acciones de los cuerpos entre sí; por tanto, el centro de gravedad común de los cuerpos en interacción (excluidas las acciones o impedimentos externos) o reposa o se mueve uniformemente en línea recta.

Pues si los puntos se mueven con movimiento uniforme en línea recta, y la distancia entre ellos se divide según una razón dada, el punto de división o reposa o se mueve uniformemente en línea recta. Después en el lema XXIII y en su corolario se demostrará esto, si el movimiento de los puntos ocurre en el mismo plano; del mismo modo se puede demostrar si tales movimientos no ocurren en el mismo plano. Luego si cualesquiera cuerpos se mueven uniformemente en líneas rectas, el centro común de gravedad de dos cualesquiera o está en reposo o se mueve en línea recta con movimiento uniforme; ello por el hecho de que la línea que une los centros de los cuerpos que se mueven uniformemente en línea recta es dividida según una determinada razón desde el centro común. De modo semejante el centro común de estos dos y un tercer cuerpo cualquiera o reposa o se mueve uniformemente en línea recta y ello porque desde dicho centro se divide la distancia entre el centro común de los dos cuerpos y el centro del tercero, según una razón dada. Del mismo modo el centro común de estos tres y el de un cuarto cualquiera o reposa o se mueve uniformemente en línea recta, puesto que desde dicho centro se divide la distancia entre el centro común de los tres y el centro del cuarto según una razón dada y así hasta el infinito. Por tanto, en un sistema de

cuerpos que ejercen acciones mutuamente entre sí y carecen por completo de otros influjos exteriores y, por tanto, se mueve cada uno uniformemente en una línea recta el centro común de gravedad de todos o está en reposo o se mueve uniformemente en línea recta.

Además, en un sistema de dos cuerpos que actúan entre sí mutuamente, siendo las distancias de los centros de cada uno respecto al centro común de gravedad inversas a los cuerpos, los movimientos relativos de los propios cuerpos tanto al acercarse a dicho centro como al separarse serán iguales entre sí.

Por tanto, tal centro ni se adelanta ni se atrasa, ni sufre cambio alguno en su estado de movimiento o reposo por causa de cambios iguales de movimiento realizados en sentidos contrarios, ni tampoco por interacciones de esos cuerpos. Pero en un sistema de muchos cuerpos, dado que el centro común de gravedad de dos cuerpos cualesquiera en mutua interacción no se ve afectado en absoluto en su estado por dicha acción, y el centro común de gravedad de los demás, con los que dicha acción no tiene relación alguna, nada sufre por ella, en cambio la distancia de estos dos centros se divide desde el centro común de todos los cuerpos en partes inversamente proporcionales a las sumas totales de los cuerpos de los que son centros; y en consecuencia, al conservar aquellos dos centros su estado de movimiento o reposo, el centro común de todos también conserva el suyo: es evidente que el centro común de todos nunca cambia su estado de movimiento o reposo por la acción de dos cuerpos entre sí. En semejante sistema, pues, todas las acciones de cuerpos entre sí, o son acciones entre dos o son compuestas de acciones entre dos cuerpos y, por tanto, nunca producen cambio en el estado de movimiento o reposo del centro común de todos. Por tanto, como aquel centro, cuando los cuerpos no se influyen mutuamente, o reposa o discurre uniforme y rectilíneamente, persevera, pues, idéntico, sin que lo impidan las acciones de los cuerpos entre sí, o siempre en reposo o siempre en movimiento uniforme y rectilíneo, a no ser que sea apartado de dicho estado por fuerzas impresas extrínsecamente al sistema. Así pues, la ley de un sistema de muchos cuerpos es la misma que la de un solo cuerpo en lo que se refiere a la permanencia en estado de movimiento o reposo, pues el movimiento progresivo, tanto de un cuerpo aislado como de un sistema de cuerpos, debe apreciarse siempre por el movimiento del centro de gravedad.

COROLARIO V

Los movimientos entre sí de los cuerpos incluidos en un determinado espacio son los mismos, ya esté dicho espacio en reposo, ya se mueva recta y uniformemente sin movimiento circular.

Pues las diferencias de los movimientos tendentes a un lado y las sumas de las tendentes al lado contrario, son las mismas desde el principio en ambos casos (por hipótesis) y de tales sumas y diferencias proceden los choques y fuerzas con los que los cuerpos mutuamente se afectan. Por tanto, en virtud de la ley II, serán iguales los efectos de los choques en ambos casos; y, por tanto, los movimientos de los cuerpos permanecerán iguales entre sí en un caso a los movimientos entre sí en el otro. Esto se comprueba con un experimento clarísimo: todos los movimientos se comportan de modo igual entre sí en una nave tanto si se halla en reposo como si se halla en movimiento uniforme y rectilíneo.

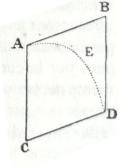
COROLARIO VI

Si los cuerpos se moviesen entre sí de cualquier modo y fuesen empujados por fuerzas aceleratívas iguales según líneas paralelas, todos ellos se seguirán moviendo entre sí del mismo modo que si no estuviesen empujados por tales fuerzas.

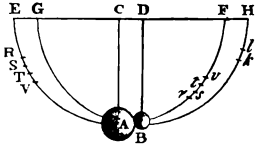
Pues al actuar tales fuerzas de modo igual (según las magnitudes de los cuerpos a mover) y según líneas paralelas, todos los dichos cuerpos se moverán igual (en cuanto a la velocidad) en virtud de la ley II y, por tanto, nunca cambiarán sus posiciones y movimientos entre sí.

ESCOLIO

Hasta ahora he ofrecido los principios aceptados por los matemáticos y confirmados por muy amplia experiencia. Por las dos leyes primeras y los dos corolarios primeros, Galileo descubrió que la caída de los graves ocurre según la razón cuadrada del tiempo y que el movimiento de los proyectiles ocurre en parábola, de acuerdo con la experiencia, a no ser en la medida en que tales movimientos se retardan un poco por la resistencia del aire. Para un cuerpo que cae la gravedad uniforme, actuando de modo igual en cada unidad de tiempo sobre partículas iguales, imprime fuerzas iguales en dicho cuerpo y genera velocidades iguales. Y en la totalidad del tiempo imprime toda la fuerza y genera la velocidad total proporcional al tiempo. Y los espacios recorridos en tiempos proporcionales son como las velocidades y los tiempos conjuntamente; esto es, como la razón cuadrada de los tiempos. Y en un cuerpo lanzado hacia arriba la gravedad uniforme imprime fuerzas y disminuye la velocidad en proporción al tiempo; y los tiempos de ascensión hasta el punto más alto son como son las velocidades a disminuir, y la altura máxima es como los tiempos y las velocidades conjuntas o en razón cuadrada de las velocidades. Y el movimiento de un cuerpo proyectado según una línea recta cualquiera se compone del movimiento procedente de la proyección con el procedente de la gravedad. Así, si un cuerpo A con el solo movimiento de proyección pudiese en un cierto tiempo recorrer la recta AB y con el movimiento de caída en el mismo tiempo pudiese recorrer la línea de caída AC; complétese el paralelogramo ABCD y dicho cuerpo al final del tiempo dado con el movimiento compuesto se hallará en el punto D; y la línea curva AED que describe dicho cuerpo será una parábola a la que la recta AB es tangente en A y cuya ordenada BD es como AB cuadrado. De dichas leyes y corolarios dependen las demostraciones acerca de los péndulos oscilantes, de acuerdo con la experiencia diaria de los relojes. A partir de estos principios y de la tercera ley hallaron sir Christopher Wren, John Wallis S.T.D. y el caballero Christian Huygens, príncipes de los geómetras de la época última, las reglas del choque y reflexión mutua de dos cuerpos, y casi a la vez la comunicaron a la Royal Society colaborando entre ellos plenamente (en cuanto a estas leyes); primero, en verdad, Wallis y después Wren y Huygens ofrecieron su hallazgo. Pero además esta verdad fue corroborada por Wren ante la Royal Society, por medio del experimento de los péndulos; también el preclaro



Mariotte se dignó exponer enseguida todo esto en un libro completo. Pero es cierto que para que este experimento concuerde con las teorías de modo aceptable, hay que tener en cuenta tanto la resistencia del aire como la fuerza elástica de los cuerpos concurrentes. Suspendamos dos cuerpos esféricos AB de hilos paralelos iguales, AC, BD de los centros C, D. Desde dichos centros y con tales intervalos tracemos los semicírculos EAF, GBH bisecados por los radios CA, DB. Empujemos el cuerpo A hasta el punto R del arco EAF y (apartando el cuerpo B) soltémosle desde allí y tras una oscilación regresará al punto V. RV es el retardo debido a la resistencia del aire. Sea ST la cuarta parte puesta en medio de este RV, de tal modo que RS sea igual a TV y RS sea a ST como 3 a 2. Y, dicho ST representará muy aproximadamente el retardo en el descenso desde S a A. Pongamos B en su lugar. Dejemos caer el cuerpo A desde el punto S y su velocidad en el punto de reflexión A será sin gran error muy similar a la que tendría si cayese en el vacío desde el punto T. Representemos, pues, dicha velocidad por la cuerda del arco TA, puesto que es de sobra conocido para los geómetras el enunciado de que la velocidad de un péndulo en el punto más bajo es como la cuerda del arco que describe al caer. Después de la reflexión el cuerpo A alcanzará el punto s, y el cuerpo B el punto *k*. Apartemos el cuerpo B y hallemos el punto *v*. Si el cuerpo A se lanza desde dicho punto y tras una oscilación vuelve al punto *r*, sea *st* la cuarta parte del propio *rv*, situada en medio, de tal modo que *rs* y *tv* sean iguales y esté representada por la cuerda del arco *t*A la velocidad alcanzada por el cuerpo A en el punto A inmediatamente después de la reflexión. Pues *t* será el punto verdadero y correcto al que debería llegar el cuerpo A, suprimida la, resistencia del aire. Del mismo modo hay que corregir el punto *k*, hasta el que llega el cuerpo B, y hallar el punto *l*, hasta el cual debió ascender dicho cuerpo en el vacío. De este modo podría experimentarse todo como si estuviésemos en un medio vacío. Finalmente habría que multiplicar (por así decirlo) al cuerpo A por la cuerda del arco TA que representa su velocidad para obtener su movimiento en el punto A inmediatamente antes de la reflexión; después por la cuerda del arco *t*A para obtener su movimiento en el punto A inmediatamente después de la reflexión. Y del mismo modo el cuerpo B habría de ser multiplicado por la cuerda del arco B*l* para obtener su movimiento inmediatamente después de la reflexión. Y de modo semejante cuando dos cuerpos son lanzados a la vez desde lugares diversos, hay que hallar los movimientos de cada uno, tanto antes como después de la reflexión, y sólo entonces se comparan entre sí los movimientos y se deducen los efectos de la reflexión. Con experimentos sobre la materia en péndulos de diez pies, lo mismo que con pesos iguales o desiguales o tirando cuerpos desde distancias grandes como de ocho, doce o dieciséis pies, siempre he encontrado sin error de medida de tres pulgadas que los cambios de movimiento, cuando los cuerpos se encontraban directamente, eran siempre iguales a los inferidos a los cuerpos en sentido contrario y, por tanto, que la acción y la reacción siempre eran iguales. Así, si el cuerpo A caía sobre el cuerpo B en reposo con nueve unidades de movimiento y, perdidas siete, partía después del choque con dos, el cuerpo B retrocedía con estas otras siete. Si estos cuerpos iban al encuentro, A con doce unidades y B con seis, y A retornaba con dos, B regresaba con ocho, efectuada la resta de catorce entre uno y otro. Quítense doce unidades del movi-



miento del cuerpo A y no quedará nada; quítense otras dos más y se obtendrá un movimiento de dos unidades en la otra dirección; y del mismo modo del movimiento de B que tiene seis unidades quítense catorce y se obtendrán ocho en sentido contrario. Y cuando los cuerpos iban en la misma dirección, A más rápido con catorce unidades de velocidad, B más lento con cinco, después del choque salía A con cinco y B con catorce al haberse transferido nueve unidades de A a B. Y lo mismo en el resto. Jamás se alteraba en la reunión o colisión de cuerpos la cantidad de movimientos concurrentes y de las diferencias de los movimientos contrarios pues el error de una pulgada o dos en las medidas lo atribuía a la dificultad de llevar a cabo cada una de modo suficientemente preciso. Era difícil tanto soltar a la vez los péndulos de tal modo que los cuerpos se encontraran en los puntos más bajos AB, como registrar los puntos *s*, *k* a que ascendían los cuerpos después del encuentro. Y por otra parte, los propios cuerpos de los péndulos con densidades desiguales en diversos puntos y con textura irregular por otras causas, llevaba a error.

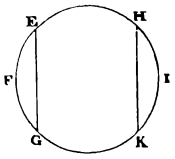
Pero no sea que alguien objete que la regla para cuya prueba se ha aducido este experimento presupone que los cuerpos son absolutamente duros o por lo menos perfectamente elásticos, casos que no se hallan en lo más mínimo entre las cosas naturales; añado que los experimentos descritos acontecen tanto en cuerpos blandos como duros, sin depender en lo más mínimo del grado de dureza. Pues si dicha regla hubiese de ensayarse en cuerpos no completamente duros, la reflexión deberá disminuir sólo en cierta cantidad proporcional a la fuerza elástica. En la teoría de Wren y Huygens los cuerpos absolutamente duros se reflejan con la misma velocidad del choque. Más ciertamente se puede afirmar esto de los perfectamente elásticos. En el caso de los imperfectamente elásticos la velocidad de retorno ha de deducirse junto con la fuerza elástica; por cuanto tal fuerza (salvo cuando las partes se doblan con el choque, o se expanden como lo hacen bajo la acción de un martillo) es cierta y determinada (según creo) y hará que los cuerpos se separen con velocidad relativa que estará en una razón dada con la velocidad relativa de choque. Esto lo ensayé con pelotas de lana bien prensadas. Primero dejando caer el péndulo y midiendo la reflexión hallé la fuerza elástica; después mediante esta fuerza calculé las reflexiones en otros ejemplos de choque y los experimentos concordaban. Retrocedían siempre las pelotas con una velocidad relativa tal que se relacionaba con la velocidad relativa de choque, aproximadamente como 5 a 9.

Las de acero retrocedían casi con la misma velocidad, las de madera con un poco menos, mientras que en las de vidrio la proporción era casi 15 a 16. Y así de este modo se ha comprobado la tercera ley, en cuanto a las acciones y reacciones, por medio de una teoría que se adecua plenamente con los experimentos.

En las atracciones muestro esto brevemente como sigue: imaginemos dos cuerpos cualesquiera A, B que se atraen mutuamente; imaginemos un obstáculo cualquiera interpuesto entre ellos que impida su choque. Si uno de los dos cuerpos A es atraído hacia B más que B hacia A, el obstáculo será empujado más por la presión del cuerpo A que por la presión del cuerpo B y, en consecuencia, no permanecerá en equilibrio. Prevalecerá la presión más fuerte y hará que el sistema de los dos cuerpos y el obstáculo se mueva hacia B en línea recta y, con un movimiento continuamente acelerado, en espacios libres iría hasta el infinito. Lo cual es absurdo y contrario a la primera ley, pues por la primera ley el sistema deberá permanecer en su estado de reposo o de movimiento uniforme y rectilíneo y, por tanto, ambos cuerpos empujarán igualmente al obstáculo y, por tanto, se atraerán mutuamente con igualdad. Ensayé esto con hierro e imán. Si se

colocan éstos aparte en vasijas adecuadas y contiguas y flotan juntas en un baño de agua, ninguno de ellos impulsará al otro, sino que mutuamente con iguales atracciones cada uno sostendrá los impulsos del otro y finalmente puestos en equilibrio reposarán.

Asimismo, la gravedad entre la Tierra y sus partes es mutua. Divídase la Tierra FI con un plano cualquiera EG en dos partes EGF y EGI: los pesos de estas dos partes serán mutuamente iguales. Pues si con otro plano HK, paralelo al anterior EG, se divide la parte mayor EGI en dos partes EGKH y HKI de las cuales AKI es igual a la primeramente separada EFG, es evidente que la parte intermedia EGKH por su peso no se inclinará a ninguna de las dos partes, sino que, por así decirlo, quedará suspendida y en equilibrio entre ambas y reposará. Pero la parte extrema HKI con todo su peso caerá sobre la parte media y la empujará hacia el otro extremo EGF y, por tanto, la fuerza con la que EGI suma de las dos partes HKI y EGKH, tiende hacia la tercera zona EGF, es igual al peso de la parte HKI, esto es, al peso de la parte tercera EGF. Y, por tanto, los pesos de las dos partes EGI, EGF, son iguales entre sí como se ha pretendido demostrar. Y a no ser que dichos pesos fuesen iguales toda la Tierra flotando en el éter libre cedería al mayor peso y huyendo de él se alejaría perdiéndose en el infinito.



Al igual que son equivalentes en los choques y reflexiones los cuerpos cuyas velocidades son inversamente como las fuerzas ínsitas, del mismo modo son equivalentes y se sostienen mutuamente con empujes contrapuestos en el uso de instrumentos mecánicos aquellos agentes cuyas velocidades calculadas según la determinación de las fuerzas son inversamente como las fuerzas. Así, los pesos son equivalentes al mover los brazos de la balanza, los cuales cuando se mueve la balanza son inversamente como sus velocidades hacia arriba o hacia abajo; esto es, los pesos, si suben y bajan en línea recta, son equivalentes y son inversamente como las distancias desde los puntos de los que se suspenden hasta el eje de la balanza; pero si suben o bajan oblicuamente impedidos por planos inclinados u otros obstáculos interpuestos, entonces son inversamente como los ascensos y descensos realizados de acuerdo con la perpendicular; y esto por la dirección de la gravedad hacia abajo.

Del mismo modo en la polea o en el polipasto la fuerza de la mano que tira de la cuerda directamente y que sea al peso, ascendiendo éste directa u oblicuamente, como la velocidad del ascenso perpendicular a la velocidad de la mano que tira de la cuerda, sostendrá el peso.

En los relojes e instrumentos similares que estén hechos de ruedas conectadas, las fuerzas contrarias para promover o impedir el movimiento de las ruedas, si son inversamente como las velocidades de las partes de las ruedas en que actúan, se sostendrán mutuamente. La fuerza de un torno para apretar un cuerpo es a la fuerza de la mano que maneja la manivela como la velocidad circular de la manivela en el lugar donde se aplica la mano a la velocidad de avance del torno hacia el cuerpo oprimido. Las fuerzas con las que una cuña obliga a las dos partes de un madero fijo son a la fuerza del mazo en la cuña como el avance de la cuña según la dirección de la fuerza impresa en ella por el mazo es a la velocidad con que las partes del madero ceden a la cuña según líneas perpendiculares a las caras de la cuña. E igual es la explicación de todas las máquinas.

La eficacia y utilidad de éstas consiste únicamente en que disminuyendo la velocidad aumentamos la fuerza, y viceversa; de donde se resuelve para todo tipo de máqui-

nas apropiadas el problema de mover un determinado peso con una determinada fuerza o de superar con una fuerza dada otra resistencia también dada. Pues si se hicieran las máquinas de tal modo que las velocidades del agente y del resistente fuesen inversamente como las fuerzas, el agente sostendrá la resistencia; y la vencerá con una mayor disparidad de velocidades. Hasta el punto de que si la disparidad de velocidades es tan grande que quede vencida toda resistencia, tanto la procedente de la contigüidad o del rozamiento de los cuerpos como de la cohesión de los cuerpos continuos o que han de ser separados o de los pesos que han de ser elevados, superada toda esa resistencia, la fuerza sobrante producirá una aceleración del movimiento proporcional a ella misma, parte en la máquina parte en el cuerpo resistente. Por lo demás, no es el intento presente tratar de mecánica. Hasta aquí solamente he pretendido mostrar en qué medida es evidente y cuán cierta es la tercera ley del movimiento. Pues si se considera la acción de un agente como el producto de su fuerza y velocidad, y, de modo semejante, la reacción del resistente, como el producto de las velocidades de sus partes singulares y de las fuerzas de resistencia procedentes de su fricción, cohesión, peso y aceleración, acción y reacción en el uso de toda clase de instrumentos siempre serán iguales entre sí. Y en la medida en que la acción se propaga por medio del instrumento y al fin incide en todo el cuerpo resistente, su determinación última siempre será contraria a la determinación de la reacción.

LIBRO PRIMERO
SOBRE EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS

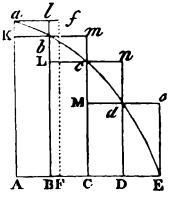
SECCIÓN I

DEL MÉTODO DE LAS RAZONES PRIMERAS Y ÚLTIMAS POR CUYO MEDIO SE DEMUESTRA LO QUE SIGUE

LEMA I

Las cantidades, así como las razones de cantidades, que tienden a la igualdad constantemente en un cierto tiempo finito y antes del límite de dicho tiempo se aproximan mutuamente más que una diferencia dada, al final se hacen iguales.

Si lo niegas, sean al final desiguales y sea su diferencia final D. Luego no pueden acercarse a la igualdad más que hasta una diferencia dada D. Contra la hipótesis.



LEMA II

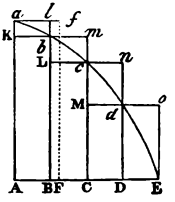
Si en una figura AacE comprendida entre las rectas Aa, AE, y la curva acE se inscriben varios paralelogramos Ab, Bc, Cd, etc., construidos sobre bases iguales AB, BC, CD, etc., y con lados Bb, Cc, Dd paralelos al lado Aa de la figura; y se completan los paralelogramos aKbl, bLcm, cMdn, etc., si entonces se disminuye la anchura de estos paralelogramos y se aumenta infinitamente el número de

ellos: digo que las razones últimas que se dan entre la figura inscrita AKbLcMdD, la circunscrita AalbmcndoE y la curvilínea AabcdE son razones de igualdad.

Pues la diferencia de las figuras inscritas y circunscritas es la suma de los paralelogramos K*l*, L*m*, M*n*, D*o*, esto es (debido a la igualdad de las bases de todos ellos), al rectángulo construido sobre la base de uno de ellos K*b* y la suma de las alturas A*a*, esto es, el rectángulo AB*la*. Pero este rectángulo, dado que su anchura AB disminuye *in infinitum*, deviene menor que uno dado cualquiera. Luego (por el lema I) la figura inscrita y la circunscrita, y mucho más la curvilínea intermedia, al final se hacen iguales. Q.E.D.

LEMA III

Las mismas razones últimas son también razones de igualdad cuando las anchuras AB, BC, CD, etc., de los paralelogramos son desiguales y todas disminuyen in infinitum.



Sea AF igual a la anchura máxima, y complétese el paralelogramo FA*af*. Éste será mayor que la diferencia de la figura inscrita y de la figura circunscrita; pero al disminuir su anchura AF infinitamente se hará menor que un rectángulo cualquiera dado. Q.E.D.

COROLARIO 1. De aquí que la suma última de paralelogramos evanescentes coincide en todo punto con la figura curvilínea.

COROLARIO 2. Y mucho más la figura rectilínea, comprendida por las cuerdas de los arcos evanescentes *ab*, *bc*, *ed*, etc., coincidirá al fin con la figura curvilínea.

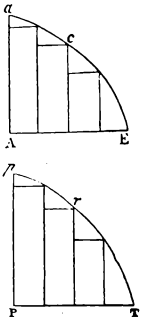
COROLARIO 3. Lo mismo que la figura rectilínea circunscrita comprendida por tangentes de los mismos arcos.

COROLARIO 4. Por ello, estas figuras últimas (en cuanto a los perímetros *ac*E) no son rectilíneas, sino límites curvilíneos de figuras rectilíneas.

LEMA IV

Si en dos figuras AacE, PprT se hallan inscritas (como antes) dos series de paralelogramos y el número es idéntico en ambas y al ir disminuyendo las anchuras in infinitum *las razones últimas de los paralelogramos en una figura respecto a los paralelogramos de la otra, uno a uno, permanecen iguales: digo que las dos figuras AacE y PprT están mutuamente en esa misma razón.*

Pues tal como los paralelogramos son uno a uno, así (por composición) es la suma de todos a la suma de todos, y así será la figura a la figura; pues están (por el lema III) la primera figura a la suma primera, y la figura posterior a la suma posterior, en razón de igualdad. Q.E.D.



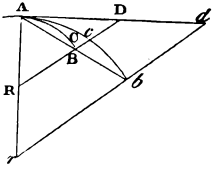
COROLARIO. De aquí que si dos cantidades de cualquier clase se dividen de algún modo en el mismo número de partes; y tales partes, al ir aumentando su número y disminuyendo su tamaño *in infinitum*, alcanzan una razón dada entre sí, la primera con la primera, la segunda con la segunda, y las demás por su orden con las otras, estarán todas entre sí en aquella razón dada. Pues si en las figuras de este lema se toman los paralelogramos entre sí como partes, las sumas de las partes siempre serán como la suma de los paralelogramos; y por esto al ir aumentando el número de paralelogramos y de partes y disminuyendo el tamaño de los mismos *in infinitum*, estarán en razón última de paralelogramo a paralelogramo, esto es (por hipótesis), en razón última de parte a parte.

LEMA V

Todos los lados homólogos de figuras semejantes son proporcionales entre sí tanto si son rectilíneas como si son curvilíneas; y las áreas son como el cuadrado de los lados.

LEMA VI

Si un arco ACB dado en posición es subtendido por la cuerda AB, y en el punto A, en medio de la curvatura continua, es tocado por la recta tangente AD prolongada hacia ambos lados y después los puntos A y B se acercan y coinciden, digo que el ángulo BAD, contenido entre la cuerda y la tangente, disminuye in infinitum y *finalmente desaparece.*

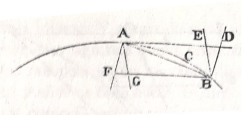


Pues si dicho ángulo no desapareciera, el arco ACB contendría junto con la tangente AD un ángulo igual a un recto y, por tanto, la curvatura en el punto A no sería continua, contra la hipótesis.

LEMA VII

Con los mismos supuestos, digo que la razón última entre la cuerda, el arco y la tangente entre sí, es la razón de igualdad.

Pues mientras el punto B se aproxima al punto A, imagínese a AB y AD prolongadas a los puntos lejanos *b* y *d*, mientras se traza *bd* paralela a la secante BD. Sea el arco A*cb* siempre semejante al arco ACB. Si los puntos A y B se aproximan, por el lema anterior el ángulo *d*A*b* se desvanece, y las líneas rectas finitas A*b* y A*d* y el arco intermedio A*cb* coincidirán y, por tanto, serán iguales. De donde se sigue que las rectas AB y AD y el arco ACB siempre proporcionales a aquéllas también desaparecerán y tendrán como razón última la igualdad. Q.E.D.



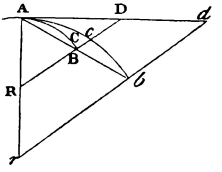
COROLARIO 1. De donde si por B se traza BF paralela a la tangente, que siempre corte a una recta AF trazada por A, esta BF siempre tendrá al fin razón de igualdad respecto al arco evanescente ACB, dado que en el paralelogramo completo AFBD siempre tendrá razón de igualdad con AD.

COROLARIO 2. Y si por B y A se trazaran muchas rectas, BE, BD, AF, AG, secantes de la tangente AD y también de su paralela BF, la razón última de todas las abscisas, AD, AE, BF, BG, de la cuerda y del arco AB será entre sí la razón de igualdad.

COROLARIO 3. Y, por tanto, todas estas líneas pueden sustituirse entre sí en todos los razonamientos sobre razones últimas.

LEMA VIII

Si las rectas dadas AR, BR, junto con el arco ACB, la cuerda AB y la tangente AD, constituyen tres triángulos RAB, RACB, RAD y los puntos A, B se aproximan mutuamente, digo que la forma última de los triángulos evanescentes es la de semejanza y la razón última de igualdad.



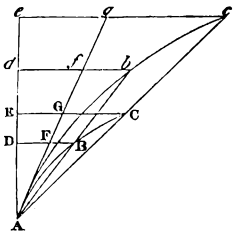
Pues mientras se aproxima B a A imagínese siempre que AB, AD y AR se prolongan hasta los puntos más lejanos *b, d* y *r*, y que se traza *rbd* paralela a RD y que el arco A*cb* permanece siempre semejante al arco ACB. Al coincidir los puntos A y B el ángulo *b*A*d* desaparecerá y, por tanto, los triángulos siempre finitos r*Ab*, r*Acb*, r*Ad* coincidirán y por eso mismo serán semejantes e iguales. Y por ello sus siempre semejantes y proporcionales RAB, RACB, RAD serán también al fin semejantes e iguales entre sí. Q.E.D.

COROLARIO. Y por ello, tales triángulos pueden ser sustituidos uno por otro en toda argumentación sobre razones últimas.

LEMA IX

Si la recta AE y la curva ABC de posiciones dadas se cortan mutuamente en un ángulo dado A y se aplican ordenadamente a dicha recta en un ángulo dado las rectas BD, CE, que a su *vez tocan la curva en B, C, y después los puntos B, C, se acercan a la vez hacia el punto A, digo que las áreas de los triángulos ABD, ACE serán al final entre sí como los cuadrados de los lados.*

En efecto, mientras los puntos B, C se acercan al punto A, imaginemos siempre a AD prolongada hacia los puntos lejanos *d* y *e*, de modo que A*d*, A*c* sean proporcionales a AD y AE y tracemos las ordenadas *db, ec,* paralelas a las ordenadas DB, EC y que corten a las prolongaciones de AB, AC en *b* y *c*. Supóngase que se traza la curva A*bc* semejante a la curva ABC así como la recta A*g* tangente a las curvas en A y que corta a



las ordenadas DB, EC, *db*, *ec* en F, G, *f*, *g*. Entonces, manteniendo la longitud A*e*, que los puntos B, C se aproximen al punto A y al desaparecer el ángulo *c*A*g* las áreas curvilíneas A*bd*, A*ce* coincidirán con las rectilíneas A*fd*, A*ge*; y por ello (por el lema V) serán entre sí como el cuadrado de los lados A*d*, A*e*. Pero a dichas áreas siempre serán proporcionales las áreas ABD, ACE y a tales lados siempre serán proporcionales los lados AD, AE. Luego también las áreas ABD, ACE serán al final como el cuadrado de los lados AD, AE. Q.E.D.

LEMA X

Los espacios que un cuerpo recorre empujado por una fuerza cualquiera finita tanto si dicha fuerza es determinada y siempre la misma, como si es continuamente creciente o decreciente, son como los cuadrados de los tiempos al comienzo del movimiento.

Represéntense los tiempos por las líneas AD, AE y las velocidades originadas por las ordenadas DB, EC; los espacios descritos con estas velocidades serán como las áreas ABD, ACE descritas por estas ordenadas, esto es (por el lema IX), al comienzo del movimiento como el cuadrado de los tiempos AD, AE. Q.E.D.

COROLARIO 1. Y de aquí se deduce fácilmente que los errores de los cuerpos que describen partes semejantes de figuras semejantes en tiempos proporcionales, errores que son originados por fuerzas iguales aplicadas de modo semejante a los cuerpos y que son medidos por las distancias de los cuerpos respecto a los lugares de las figuras semejantes a los que hubiesen llegado dichos cuerpos en los mismos tiempos proporcionales sin tales fuerzas, son aproximadamente como los cuadrados de los tiempos en que se han generado.

COROLARIO 2. Pero los errores que son originados por fuerzas proporcionales a las partes semejantes de figuras semejantes aplicadas semejantemente, son como las fuerzas multiplicadas por el cuadrado de los tiempos.

COROLARIO 3. Lo mismo ha de entenderse de cualesquiera espacios que describan los cuerpos bajo la acción de distintas fuerzas. Serán, respecto al comienzo del movimiento, como las fuerzas multiplicadas por el cuadrado de los tiempos.

COROLARIO 4. Y, por tanto, las fuerzas están, al comienzo del movimiento, en razón directa a los espacios descritos y en razón inversa a los cuadrados de los tiempos.

COROLARIO 5. Y los cuadrados de los tiempos son directamente como los espacios descritos e inversamente como las fuerzas.

ESCOLIO

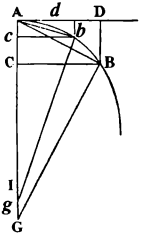
Si se comparan entre sí cantidades indeterminadas de diversos géneros y una de ellas se dice que es como otra, directa o inversamente, esto significa que la primera crece o dis-

minuye según la misma razón que la segunda o según la inversa. Y si una de ellas se dice que es como otras dos o más directa o inversamente, esto significa que la primera aumenta o disminuye según la razón compuesta de las razones, según las cuales las otras o las inversas de las otras aumentan o disminuyen. Así, si se dice que A es directamente como B y directamente como C e inversamente como D, esto significa que A aumenta o disminuye en la razón de B × C × 1/D, esto es, que A y BC/D son mutuamente según una razón dada.

LEMA XI

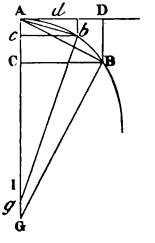
La subtensa evanescente del ángulo de contacto, en todas las curvas que tienen curvatura finita en el punto de contacto, es al fin como el cuadrado de la subtensa del arco contérmino.

Caso 1. Sea dicho arco AB, la tangente AD, sea BD la subtensa del ángulo de contacto perpendicular a la tangente, y AB la subtensa del arco. Trácense AG y BG perpendiculares a la tangente AD y a la subtensa AB y que se encuentren en G. Muévanse después los puntos D, B, G hacia *d*, *b*, *g*, y sea I la última intersección de BG y AG cuando D y B se acercan hacia A. Es evidente que la distancia GI puede ser más pequeña que una distancia dada. Por otra parte (por la naturaleza de los círculos que pasan por los puntos ABG, A*bg*) AB^2 es igual a AG × BD y Ab^2 es igual a A*g* × *bd*; y, por tanto, la razón de AB^2 a Ab^2 se compone de las razones de AG a A*g* y BD a *bd*. Pero como GI puede tomarse como menor que cualquier longitud dada, puede hacerse que la razón AG a A*g* diste menos de la igualdad que una cantidad dada y, por tanto, que la razón AB^2 a Ab^2 diste menos de la razón de BD a *bd* que una cantidad dada. Luego, por el lema I, la razón última entre AB^2 y Ab^2 es la misma que la razón última de BD a *bd*. Q.E.D.



Caso 2. Inclínese BD sobre AD en un ángulo dado cualquiera y la razón última de BD a B*d* siempre será la misma que antes y, por tanto, la misma que AB^2 a Ab^2. Q.E.D.

Caso 3. Y aunque no esté dado el ángulo D, sino que la recta BD converja en un punto dado o bien se construya con otra regla cualquiera, sin embargo, los ángulos D, *d* se construirán con una ley común y siempre tenderán a la igualdad y se acercarán entre sí más que una diferencia dada y, por tanto, al fin serán iguales, por el lema I, y, por tanto, las líneas BD, *bd* están entre sí en la misma razón que antes. Q.E.D.



Corolario 1. De donde, como las tangentes AD, A*d*, de los arcos AB, A*b* y sus senos BC, *bc* sean al final iguales a las cuerdas AB, A*b*; sus cuadrados serán al fin como las subtensas BD, *bd*.

Corolario 2. Tales cuadrados serán asimismo al final como las sagitas de los arcos que bisecan a las cuerdas y convergen en un punto dado. Puesto que dichas sagitas son como las subtensas BD, *bd*.

COROLARIO 3. Por tanto, la sagita es como el cuadrado del tiempo en que un cuerpo describe el arco a una velocidad dada.

COROLARIO 4. Los triángulos rectilíneos ADB, A*db* están al fin en razón cúbica de los lados AD, A*d* y en razón de la potencia 3/2 (sesquiplicada) de los lados DB, *db*; por cuanto que se da la existencia de la razón compuesta de los lados AD y DB, A*d* y D*b*. Igualmente los triángulos ABC, A*bc* están al final en razón cúbica de los lados BC, *bc*. Llamo razón sesquiplicada a la subduplicada de la triplicada, que se compone, pues, de la simple y la subduplicada.

COROLARIO 5. Y puesto que DB, *db* son al final paralelas y en razón cuadrada de las mismas AD, A*d*, las áreas curvilíneas últimas ADB, A*db* serán (por la naturaleza de la parábola) dos tercios de los triángulos rectilíneos ADB, A*db*, y los segmentos AB, A*b* terceras partes de dichos triángulos. Y en consecuencia, dichas áreas y dichos segmentos estarán en razón triplicada, ya de las tangentes AD, A*d*, ya de las cuerdas y arcos AB, A*b*.

ESCOLIO

Por lo demás, en todo esto suponemos que el ángulo de contacto no es ni infinitamente mayor que los ángulos de contacto contenidos por los círculos y sus tangentes, ni infinitamente menor que los mismos; esto es, que la curvatura en el punto A no es ni infinitamente pequeña, ni infinitamente grande, o también, que el intervalo AI es de magnitud finita. Puede, en efecto, tomarse a DB como AD^3: en tal caso ningún círculo puede trazarse por el punto A entre la tangente AD y la curva AB y, por consiguiente, el ángulo de contacto será infinitamente menor que los de los círculos. Y por un argumento semejante si DB se hace sucesivamente como AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, etc., se tendrá una serie de ángulos de contacto que va hasta el infinito y de los cuales cualquiera de los siguientes es infinitamente menor que su antecesor. Y si DB se hiciera sucesivamente como AD^2, $AD^{3/2}$, $AD^{4/3}$, $AD^{5/4}$, $AD^{6/5}$, $AD^{7/6}$, etc., se tendrá otra serie infinita de ángulos de contacto de los cuales el primero es del mismo género que los de los círculos, el segundo infinitamente mayor, y cualquier siguiente infinitamente mayor que el anterior. Además, entre dos ángulos cualesquiera de éstos puede intercalarse una serie, también tendente al infinito, de ángulos intermedios de los cuales cualquier posterior será infinitamente mayor o menor que el anterior. Como si entre los términos AD^2 y AD^3 se intercala la serie $AD^{13/6}$, $AD^{11/5}$, $AD^{9/4}$, $AD^{7/3}$, $AD^{5/2}$, $AD^{8/3}$, $AD^{11/4}$, $AD^{14/5}$, $AD^{17/6}$, etc. Y de nuevo entre dos cualesquiera ángulos de esta serie se puede intercalar una nueva serie de ángulos intermedios, distantes entre sí infinitos intervalos. No conoce la naturaleza un límite.

Lo que se ha demostrado de las líneas curvas y de las superficies comprendidas, puede aplicarse fácilmente a las superficies curvas de los sólidos y a los contenidos. He adelantado estos lemas para evitar tediosas y largas deducciones *ad absurdum* al estilo de los antiguos geómetras. Pues las demostraciones se hacen más breves por el método de los indivisibles. Pero como la hipótesis de los indivisibles es más difícil y, además, tal método se considera menos geométrico, he preferido reducir las demostraciones de las cosas que siguen a las sumas y razones últimas de cantidades evanescentes, y a las sumas y razones primeras de cantidades nacientes, esto es, a los límites de las sumas y de las razones y, por tanto, he preferido anteponer, con la brevedad que he podido, las demostra-

ciones de dichos límites. Por este medio se consigue lo mismo que con el método de los indivisibles y así podremos utilizar con mayor seguridad principios ya demostrados. Por tanto, en lo que sigue, cuantas veces considere cantidades como si constaran de partículas, o cuantas veces tome pequeñas curvas por líneas rectas, no quiero entender nunca que se trata de indivisibles, sino de divisibles evanescentes, ni tampoco de sumas o razones de partes determinadas, sino de los límites de las sumas y de las razones; y la fuerza de tales demostraciones debe atribuirse siempre al método de los lemas precedentes.

Pudiera objetarse que no hay proporción última alguna entre cantidades evanescentes, ya que antes de que desaparezcan no son últimas, y, después de desaparecidas, no puede darse ninguna. Pero por la misma razón podría decirse que un cuerpo que llega a un punto en el que se acaba su movimiento no tendría una velocidad última, puesto que dicha velocidad no sería última antes de que dicho cuerpo alcance el punto final de su movimiento, y cuando le haya alcanzado ya no tendrá velocidad alguna. La respuesta es fácil: por velocidad última se entiende aquella con la que el cuerpo se mueve, no antes de alcanzar el punto final y cesa, por consiguiente, el movimiento, ni tampoco después de haberlo alcanzado, sino aquella con la que se mueve cuando lo alcanza, esto es, aquella velocidad con la que el cuerpo alcanza el punto final y aquella con la que cesa el movimiento. De igual manera ha de entenderse por razón última de cantidades evanescentes la razón de cantidades, no antes de que desaparezcan, ni después de desaparecidas, sino aquella con la que desaparecen. De igual modo ocurre con la razón primera de cantidades nacientes, que es aquella con la que nacen. Y la suma primera y última es aquella con la que empiezan o acaban la existencia (o también a aumentar o disminuir). Existe un límite que puede alcanzar la velocidad al final del movimiento, pero no puede traspasarlo. Ésta es la velocidad última. Y semejante es la razón del límite de todas las cantidades y proporciones nacientes y evanescentes. Y dado que tal límite es cierto y definido, el problema de determinarlo es puramente geométrico. Por lo demás, es legítimo utilizar medios geométricos para determinar y demostrar cosas también geométricas.

También pudiera objetarse que si se dan razones últimas de cantidades evanescentes, también se darán magnitudes últimas; y así toda cantidad constará de indivisibles, contra lo que demostró Euclides sobre los inconmensurables en el libro X de los *Elementos*. Pero esta objeción se apoya en una hipótesis falsa. Las razones últimas con las que tales cantidades desaparecen en realidad no son razones de cantidades últimas, sino límites a los que tienden a acercarse siempre las razones de cantidades continuamente decrecientes, límites a los que pueden acercarse más que una diferencia dada, pero nunca traspasarlo, ni tampoco alcanzarlo antes de que las cantidades disminuyan *in infinitum*. El tema se ve mejor en las cosas infinitamente grandes. Si dos cantidades con una diferencia dada aumentan infinitamente, habrá una razón última de dichas cantidades, a saber, la razón de igualdad, sin que por ello se den también las cantidades últimas o máximas de las cuales era ésta la razón. Por tanto, cuando en lo que sigue diga, con el fin de facilitar la comprensión de las cosas, cantidades mínimas o evanescentes o últimas, no se entienda que son cantidades de determinada magnitud, sino que debe pensarse siempre en cantidades infinitamente decrecientes.

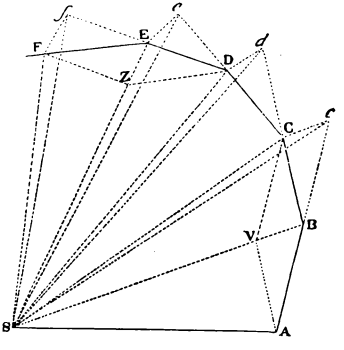
SECCIÓN II

SOBRE EL DESCUBRIMIENTO DE LAS FUERZAS CENTRÍPETAS

PROPOSICIÓN I. TEOREMA I

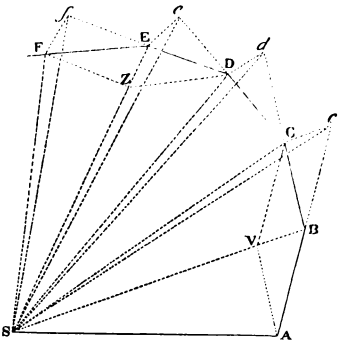
Las áreas, descritas por cuerpos que giran sujetos a un centro de fuerzas inmóvil por radios unidos a dicho centro, están en el mismo plano inmóvil y son proporcionales a los tiempos.

Divídase el tiempo en partes iguales y en la primera parte de tiempo el cuerpo por su fuerza ínsita recorra la recta AB. En la segunda parte de tiempo, si nada lo impide, la recta llegará hasta *c* (por la ley I) describiendo la línea B*c* igual a la misma AB; de modo que las áreas ASB, BS*c* descritas por el trazado de los radios AS, BS, *c*S, al centro habrán de ser iguales. Pero cuando el cuerpo llega a B, supóngase que una fuerza centrípeta produce un único y gran impulso y haga que el cuerpo se separe de la línea B*c* y siga la recta BC. Trácese la paralela *c*C a BS que toca a BC en C; y al completarse la segunda parte de tiempo el cuerpo (por el corolario I de las leyes) se hallará en C, en el mismo plano que el triángulo ASB. Únase SC, y el triángulo SBC, por ser paralelas SB, C*c*, será igual al triángulo SB*c* y, por tanto, también al triángulo SAB. Y por argumentos semejantes, si una fuerza centrípeta actúa sucesivamente en C, D, E, etc., haciendo que el cuerpo en cada parte de tiempo describa cada recta CD, DE, EF, etc., estarán todas ellas en el mismo plano y el triángulo SCD será igual al triángulo SBC, y SDE al propio SCD, y SEF a SDE. Por tanto, en tiempos iguales se describen áreas iguales en un plano inmóvil; y, por composición, las sumas de cualesquiera áreas SADS y SAFS son entre sí como los tiempos en que se describen. Auméntese ahora el número de triángulos y disminúyase su altura *in infinitum* y su perímetro último ADF será una línea curva (por el corolario 4 del lema III); y, por tanto, la fuerza centrípeta, por la que un cuerpo es continuamente separado de la tangente de dicha curva, actúa continuamente; y áreas cualesquiera descritas SADS, SAFS proporcionales siempre a los tiempos en que se describen, serán, en este caso, proporcionales a los mismos tiempos. Q.E.D.



COROLARIO 1. La velocidad de un cuerpo atraído hacia un centro inmóvil en un espacio no resistente es inversamente como la perpendicular trazada desde tal centro a la

tangente de la curva. Pues la velocidad en los puntos A, B, C, D, E, es como las bases AB, BC, CD, DE, EF, de los triángulos iguales; y estas bases son inversamente como las perpendiculares trazadas a ellas.



COROLARIO 2. Si las cuerdas AB, BC, de dos arcos descritos sucesivamente en tiempos iguales por el mismo cuerpo en espacios no resistentes se completan en un paralelogramo ABCV, y la diagonal BV de dicho paralelogramo en la posición que al final tiene cuando el arco disminuye *in infinitum* es prolongada en ambas direcciones, pasará por el centro de fuerzas.

COROLARIO 3. Si las cuerdas AB, BC y DE, EF de arcos descritos en tiempos iguales y en espacios no resistentes se completan en los paralelogramos ABCV, DEFZ, las fuerzas en B y E serán entre sí en razón última de las diagonales BV, EZ, cuando dichos arcos disminuyan *in infinitum*. Pues los movimientos BC y EF del cuerpo (por el corolario I de las leyes) estarán compuestos de los movimientos B*c*, BV y E*f*, EZ. Ahora bien, BV y EZ, iguales a C*c* y F*f*, en la demostración de esta proposición se originaban por impulsos de la fuerza centrípeta en B y E, y, por consiguiente, son proporcionales a tales impulsos.

COROLARIO 4. Las fuerzas, por las que cualesquiera cuerpos en espacios no resistentes son desviados de trayectorias rectilíneas y constreñidos a trayectorias curvas, son entre sí como las sagitas convergentes al centro de fuerzas; sagitas de los arcos descritos en tiempos iguales y bisecantes de las cuerdas de dichos arcos mientras éstos disminuyen *in infinitum*. Pues tales sagitas son las mitades de las diagonales de las que hemos hablado en el corolario 3.

COROLARIO 5. Y, por tanto, estas fuerzas son a la fuerza de la gravedad como tales sagitas son a las sagitas perpendiculares al horizonte de los arcos parabólicos que describen los proyectiles en los mismos tiempos.

COROLARIO 6. Lo mismo vale (por el corolario V de las leyes) cuando los planos en que se mueven los cuerpos junto con el centro de fuerzas situado en los mismos no están en reposo, sino que se mueven uniformemente y en línea recta.

PROPOSICIÓN II. TEOREMA II

Todo cuerpo que se mueve en una curva descrita en un plano, y con un radio trazado a un punto, inmóvil o en movimiento rectilíneo y uniforme, describe áreas en torno a dicho punto proporcionales a los tiempos, es empujado por una fuerza centrípeta tendente a dicho punto.

CASO 1. Pues todo cuerpo que se mueve en una curva es desviado de su trayectoria recta por alguna fuerza actuante sobre él (por la ley I). Y esta fuerza que aparta al cuerpo

de la trayectoria rectilínea y le obliga a describir en torno al punto inmóvil S los triángulos iguales e infinitamente pequeños SAB, SBC, SDC, etc., actúa en el punto B según una línea paralela a *c*C (por la proposición XL del libro I de los *Elementos* y la ley II), esto es, según la dirección de la línea BS; y en el punto C actúa según la línea paralela a *d*D, esto es, según la línea SC, etc. Por tanto, actúa siempre según líneas tendentes al mencionado punto S inmóvil. Q.E.D.

CASO 2. Y, por el corolario V de las leyes, es indiferente que la superficie en que un cuerpo describe una línea curva esté en reposo o que se mueva, junto con el cuerpo, la figura descrita y su punto S, uniformemente y en directo.

COROLARIO 1. En espacios o medios no resistentes, si las áreas no son proporcionales a los tiempos, las fuerzas no tienden al punto donde concurren los radios, sino que se adelantan hacia la región hacia la que se dirige el movimiento, caso de que la descripción de las áreas se acelere, o se atrasan, caso de que se retarde.

COROLARIO 2. Incluso en medios resistentes, si se acelera la descripción de las áreas, las direcciones de las fuerzas se apartan del punto de encuentro de los radios hacia la dirección hacia la que va el movimiento.

ESCOLIO

Un cuerpo puede ser urgido por una fuerza centrípeta compuesta de muchas fuerzas. En tal caso el sentido de la proposición es que dicha fuerza, compuesta de todas las demás, tiende al punto S. Además, si alguna fuerza actúa constantemente según una línea perpendicular a la superficie descrita, obligará al cuerpo a separarse del plano de su movimiento; pero no aumentará ni disminuirá la cantidad de superficie descrita y, por tanto, ha de despreciarse al componer las fuerzas.

PROPOSICIÓN III. TEOREMA III

Todo cuerpo que, unido por un radio al centro de otro cuerpo que se mueve de cualquier modo, describe alrededor de dicho centro áreas proporcionales a los tiempos es urgido por una fuerza compuesta de la fuerza centrípeta tendente a ese otro cuerpo y de toda la fuerza aceleratriz con la que es urgido ese otro cuerpo.

Sea L el primer cuerpo, y sea T el otro; y (por el corolario VI de las leyes) si ambos cuerpos son urgidos según líneas paralelas por una fuerza nueva, igual y contraria a aquella que urge al otro cuerpo T, el primer cuerpo L describiría alrededor del otro cuerpo T las mismas áreas que antes: en cambio, la fuerza por la que era urgido el otro cuerpo T será ahora destruida por una fuerza igual y contraria y, por tanto (por la ley I), ese otro cuerpo T abandonado ya a sí mismo o bien quedará en reposo o bien en movimiento uniforme y directo: y el cuerpo primero L urgido por la fuerza restante pasará a describir en torno al otro cuerpo T áreas proporcionales a los tiempos. Por tanto (por el teorema II), la diferencia de fuerzas tiende hacia el otro cuerpo T como a su centro. Q.E.D.

COROLARIO 1. Por tanto, si un cuerpo L, unido por un radio a otro T, describe áreas proporcionales a los tiempos y de la fuerza total (tanto si es simple como si está com-

puesta de muchas fuerzas según el corolario II de las leyes) por la que es urgido el primer cuerpo L se resta (por el mismo corolario de las leyes) toda la fuerza aceleratriz por la que es urgido el otro cuerpo, toda la fuerza restante por la que es urgido el primer cuerpo tenderá al otro cuerpo T como a su centro.

COROLARIO 2. Y si esas áreas son aproximadamente proporcionales a los tiempos, la fuerza restante tenderá aproximadamente al otro cuerpo T.

COROLARIO 3. Y viceversa, si la fuerza restante tiende aproximadamente al otro cuerpo T, esas áreas serán aproximadamente proporcionales a los tiempos.

COROLARIO 4. Si un cuerpo L, unido por un radio a otro cuerpo T, describe áreas que, comparadas con los tiempos, son muy desiguales y el otro cuerpo T o reposa o se mueve uniformemente en directo, la acción de la fuerza centrípeta tendente hacia ese otro cuerpo T o es nula o se mezcla y se compone con acciones muy potentes de otras fuerzas, y la fuerza total compuesta de todas ellas, si son más de una, tiende hacia otro centro (móvil o en reposo). Lo mismo ocurre cuando el otro cuerpo se mueve con cualquier clase de movimiento si se toma la fuerza centrípeta que resulta después de restar toda la fuerza que actúa sobre el otro cuerpo T.

ESCOLIO

Puesto que la igual descripción de áreas es índice del centro hacia el que tiende la fuerza por la que más afectado es un cuerpo y por la que es apartado del movimiento rectilíneo y mantenido en su órbita, ¿por qué no podemos en lo sucesivo tomar la igualdad en la descripción de áreas como un índice del centro en torno al que ocurre todo movimiento circular en los espacios libres?

PROPOSICIÓN IV. TEOREMA IV

Las fuerzas centrípetas de los cuerpos que describen círculos distintos con movimientos iguales tienden a los centros de los mismos círculos; y son entre sí como los cuadrados de los arcos descritos en tiempos iguales divididos respectivamente por los radios de los círculos.

Estas fuerzas tienden a los centros de los círculos, por la proposición II y por el corolario 2, proposición I, y son entre sí como los senos versos de los arcos descritos en tiempos iguales muy pequeños, por el corolario 4 de la proposición I, esto es, como los cuadrados de los mismos arcos divididos por los diámetros de los círculos, por el lema VII; y, por tanto, como estos arcos son como los arcos descritos en unos tiempos iguales y los diámetros son como los radios, las fuerzas serán como los cuadrados de los arcos descritos en el mismo tiempo divididos por los radios de los círculos. Q.E.D.

COROLARIO 1. Puesto que estos arcos son como las velocidades de los cuerpos, las fuerzas centrípetas estarán en razón compuesta, directamente de la razón cuadrada de las velocidades e inversamente de la razón simple de los radios.

COROLARIO 2. Y, como los tiempos periódicos están en razón compuesta directamente de la razón de los radios e inversamente de la razón de las velocidades, las fuerzas centrípetas están en razón compuesta directamente de la razón de los radios e inversamente de la razón cuadrada de los tiempos periódicos.

COROLARIO 3. De donde, si se igualan los tiempos periódicos y, por tanto, las velocidades son como los radios, también las fuerzas centrípetas serán como los radios; y al contrario.

COROLARIO 4. Si tanto los tiempos periódicos como las velocidades están en razón de la raíz cuadrada de los radios, las fuerzas centrípetas serán iguales entre sí; y al contrario.

COROLARIO 5. Si los tiempos periódicos son como los radios y, por tanto, las velocidades iguales, las fuerzas centrípetas serán inversamente como los radios; y al contrario.

COROLARIO 6. Si los tiempos periódicos están en razón de la potencia 3/2 de los radios y, por tanto, las velocidades están en razón de la raíz cuadrada de los radios, las fuerzas centrípetas serán inversamente como los cuadrados de los radios; y al contrario.

COROLARIO 7. Y, en general, si el tiempo periódico es como una potencia R^n cualquiera del radio R y, por tanto, la velocidad es inversamente como la potencia R^{n-1} del radio, la fuerza centrípeta será inversamente como la potencia R^{2n-1} del radio; y al contrario.

COROLARIO 8. Con respecto a los tiempos, las velocidades y las fuerzas con los que los cuerpos describen partes semejantes de cualesquiera figuras semejantes y que tienen los centros colocados en posición semejante dentro de dichas figuras se siguen las mismas cosas de la demostración de los casos precedentes aplicada a estas otras. Se aplica sustituyendo la descripción igual de las áreas por los movimientos iguales y tomando las distancias de los cuerpos a los centros como radios.

COROLARIO 9. Se sigue también de esta demostración que el arco que describe un cuerpo que gira uniformemente en círculo con una fuerza centrípeta dada en un tiempo cualquiera es media proporcional entre el diámetro del círculo y el descenso realizado por el cuerpo con la misma fuerza dada y cayendo durante el mismo tiempo.

ESCOLIO

El caso del corolario 6 se da en los cuerpos celestes (como ya observaron por su parte nuestros Wren, Hooke y Halley); por ello, en lo que sigue he decidido exponer más ampliamente lo relativo a la fuerza centrípeta que decrece en razón del cuadrado de las distancias a los centros.

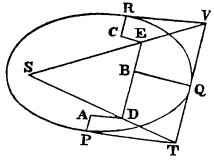
Además, como resultado de la proposición precedente y de sus corolarios, se puede deducir también la proporción entre una fuerza centrípeta y otra fuerza cualquiera conocida, tal como la de la gravedad, pues si un cuerpo gira en círculo concéntrico a la Tierra por la fuerza de su gravedad, esta gravedad es la fuerza centrípeta del mismo. Pues el tiempo de una revolución, así como el arco descrito en un tiempo dado, vienen dados a partir del descenso de los graves, por el corolario 9 de dicha proposición. Y por medio de tales proposiciones. Huygens comparó la fuerza de la gravedad con las fuerzas centrífugas de los cuerpos que giran, en su célebre tratado *De horologio oscillatorio*.

Lo que antecede puede también demostrarse de este modo: imagínese descrito dentro de un círculo a un polígono de los lados que se quiera. Si un cuerpo moviéndose con una velocidad dada por los lados del polígono en cada ángulo del mismo es rechazado por el círculo, la fuerza con la cual en cada ocasión choca contra el círculo será como

su velocidad; y, por tanto, la suma de las fuerzas en un tiempo dado será como dicha velocidad y el número de rechazos conjuntamente; esto es (si se da la clase del polígono), como la longitud descrita en el tiempo dado aumentada o disminuida en razón de la misma longitud al radio del círculo predicho; es decir, como el cuadrado de dicha longitud dividido por el radio; y, por tanto, si el polígono, acortando sus lados *in infinitum*, coincidiese con el círculo, como el cuadrado del arco descrito en un tiempo dado dividido por el radio. Ésta es la fuerza centrífuga con la que el cuerpo empuja contra el círculo; e igual a ella es la fuerza contraria con la cual el círculo repele continuamente al cuerpo hacia el centro.

PROPOSICIÓN V. PROBLEMA I

Hallar el centro de una figura dada, descrita por un cuerpo con fuerzas tendentes a dicho centro común y con una velocidad dada en un lugar cualquiera.



Sean las tres rectas PT, TQV, VR tangentes a la figura descrita en los puntos P, Q, R y que se corten en T y V. Trácense PA, QB, RC perpendiculares a las tangentes e inversamente proporcionales a las velocidades del cuerpo en los dichos puntos P, Q, R desde los que parten; esto es, de tal modo que PA sea a QB como la velocidad en Q a la velocidad en P y QB sea a RC como la velocidad en R a la velocidad Q. Trácense en ángulo recto por los extremos A, B, C de las perpendiculares las líneas AD, DBE, EC que se cortan en D y E. Y trazadas TD, VE se cortarán en el centro buscado S.

Pues las perpendiculares trazadas desde el centro S a las tangentes PT, QT (por el corolario I de la proposición I) son inversamente proporcionales a las velocidades del cuerpo en los puntos P y Q, y por ello, por construcción, directamente proporcionales a las perpendiculares AP, BQ, esto es, como las perpendiculares trazadas a las tangentes desde el punto D. De donde se sigue fácilmente que los puntos S, D, T están en una misma recta y por un argumento semejante los puntos S, E, V están también en la misma recta; y, por tanto, el centro S se halla en el cruce de las rectas TD, VE. Q.E.D.

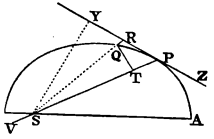
PROPOSICIÓN VI. TEOREMA V

Si en un espacio sin resistencia un cuerpo gira en una órbita alrededor de un centro inmóvil y describe en un tiempo muy pequeño un arco naciente en ese instante e imaginamos trazada la sagita del arco que a su vez divida en dos la cuerda y, prolongada, pase por el centro de fuerzas: la fuerza centrípeta en el punto medio del arco será directamente como la sagita e inversamente como el cuadrado del tiempo.

Pues la sagita en un tiempo dado es como la fuerza (por el corolario 4 de la proposición I) y al aumentar el tiempo según una razón cualquiera, la sagita, por el aumento del arco según la dicha razón, aumenta según la misma razón cuadrada (por los corolarios 2 y 3 del lema XI) y, por tanto, es como la fuerza y el cuadrado del tiempo. Divídase por el cuadrado del tiempo a ambos y la fuerza será directamente como la sagita e inversamente como el cuadrado del tiempo. Q.E.D.

También se puede demostrar esto fácilmente por el corolario 4 del lema X.

COROLARIO 1. Si un cuerpo P girando en torno a un centro S describe la curva APQ; hágase que la recta ZPR sea tangente a dicha curva en un punto cualquiera P y trácese hasta la tangente desde otro punto cualquiera Q una paralela a SP con distancia QR y trácese QT perpendicular a la línea SP; entonces la fuerza centrípeta será inversamente como el sólido $\frac{SP^2 \times QP^2}{QR}$ siempre que se considere la magnitud del sólido alcanzada en el último momento, cuando coinciden los puntos P y Q.



Pues QR es igual a la sagita del doble del arco QP en cuya mitad se halla P, y el doble del triángulo SQP o SP × QT es proporcional al tiempo en que es descrito dicho doble arco; por tanto, puede tomarse como representación del tiempo.

COROLARIO 2. Por un argumento semejante la fuerza centrípeta es inversamente como el sólido $\frac{SY^2 \times QP^2}{QR}$ siempre que SY sea perpendicular desde el centro de fuerza a PR tangente a la órbita. Pues los rectángulos SY × QP y SP × QT son iguales.

COROLARIO 3. Si una órbita es, o un círculo, o toca concéntricamente un círculo, o corta concéntricamente a un círculo, esto es, contiene un ángulo muy pequeño de contacto o de sección con el círculo y tiene la misma curvatura y el mismo radio de curvatura en el punto P; y si la cuerda PV del círculo es trazada desde el cuerpo por el centro de fuerzas; la fuerza centrípeta será inversamente como el sólido $SY^2 \times PV$. Pues PV es $\frac{QP^2}{QR}$.

COROLARIO 4. Supuesto esto, la fuerza centrípeta es como el cuadrado de la velocidad directamente, y dicha cuerda inversamente. Pues la velocidad es inversamente como la perpendicular SY, por el corolario 1 de la proposición I.

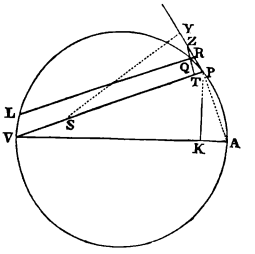
COROLARIO 5. De aquí que si se da una figura curvilínea APQ y se da también en ella el punto S al que se dirige continuamente la fuerza centrípeta se puede hallar la ley de la fuerza centrípeta por la que un cuerpo P es retenido en el perímetro de dicha figura, desviado continuamente de la trayectoria recta, figura que resultará descrita al girar. Efectivamente se puede hallar calculando, o bien el sólido $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$, o bien el sólido $SY^2 \times PV$ inversamente proporcional a dicha fuerza.

Daremos ejemplos de esto en los problemas siguientes.

PROPOSICIÓN VII. PROBLEMA II

Si un cuerpo gira en la circunferencia de un círculo, hállese la ley de la fuerza centrípeta tendente a un punto dado cualquiera.

Sea VQPA la circunferencia del círculo; y sea S el punto dado hacia el que tiende la fuerza como hacia su centro; sea P el cuerpo que se mueve en la circunferencia y Q el punto inmediato hacia el cual se mueve y sea PRZ la tangente del círculo en el punto precedente. Trácese por el punto S la cuerda PV; y trazado el diámetro del círculo VA únanse AP y trácese sobre SP la perpendicular QT que prolongada cortará a la tangente PR en Z y, finalmente, trácese por el punto Q la recta LR paralela a SP que corte el círculo en L y a la tangente PZ en R. Por la semejanza de los triángulos ZQR, ZTP, VPA tendremos que RP^2, esto es, QRL será a QT^2 como AV^2 a PV^2. Y, por tanto, $\frac{QRL \times PV^2}{AV^2} = QT^2$. Multiplíquense estos dos miembros iguales por $\frac{SP^2}{QR}$ y al coincidir los puntos P y Q sustitúyase PV por RL. Tendremos así que $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2} = \frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Luego (por los corolarios 1 y 5 de la proposición VI) la fuerza centrípeta es inversamente como $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$; esto es (por estar dado AV^2), inversamente como el producto del cuadrado de la distancia o de la altura SP por el cubo de la cuerda PV. Q.E.I.

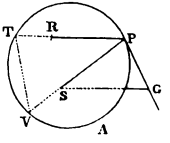


Lo mismo de otro modo

Trácese la perpendicular SY sobre la prolongación de la tangente PR; y, por semejanza de los triángulos SYP, VPA, tendremos que AV será a PV como SP a SY. Por tanto, $\frac{SP \times PV}{AV} = SY$, y $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2} = SY^2 \times PV$. Y, por tanto (por los corolarios 3 y 5 de la proposición VI), la fuerza centrípeta es inversamente como $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$; esto es, por estar dada AV, inversamente como $SP^2 \times PV^3$. Q.E.I.

Corolario 1. De aquí que si el punto dado S hacia el que tiende continuamente la fuerza centrípeta se ubica en la circunferencia del círculo, por ejemplo en Y, la fuerza centrípeta será inversamente como la quinta potencia de la altura SP.

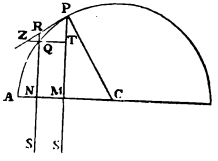
Corolario 2. La fuerza por la que un cuerpo P gira en un círculo APTV en torno a un centro de fuerza S es a la fuerza por la que el mismo cuerpo P puede girar en el mismo círculo y en el mismo tiempo periódico en torno a otro centro de fuerza como $RP^2 \times SP$ al cubo de la recta SG trazada desde el centro de fuerza primitivo S a la tangente PG de la circunferencia y paralela a la recta que une el cuerpo P con el segundo centro de fuerza. Pues por la construcción de esta proposición la fuerza primera es a la segunda como $RP^2 \times PT^3$ es a $SP^2 \times PV^3$, esto es, como $SP \times RP^2$ es a $\frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$; o también (por semejanza de los triángulos PSG, TPV) a SG^3.



COROLARIO 3. La fuerza por la que gira un cuerpo P en una órbita en torno a un centro de fuerzas S es a la fuerza por la que el mismo cuerpo P giraría en la misma órbita en el mismo tiempo periódico en torno a otro centro de fuerzas R, como el sólido $SP \times RP^2$, contenido a su vez por la distancia del cuerpo al primer centro de fuerzas S y por el cuadrado de su distancia al segundo centro de fuerzas R, es al cubo de la recta SG trazada desde el primer centro de fuerzas S a la tangente a la órbita PG y paralela a la recta RP que une el cuerpo P con el segundo centro de fuerzas R. Pues las fuerzas en esta órbita para un punto P son iguales que en un círculo de la misma curvatura.

PROPOSICIÓN VIII. PROBLEMA III

Si un cuerpo se mueve en el semicírculo PQA: hállese la ley de la fuerza centrípeta tendente a un punto S tan lejano que todas las líneas PS, RS dirigidas a él puedan ser consideradas como paralelas.



Desde el centro C del semicírculo trácese el semidiámetro CA que corte perpendicularmente dichas paralelas en M y N y únase CP. Por semejanza de los triángulos CPM, PZT y RZQ tenemos que CP^2 es a PM^2 como PR^2 a QT^2 y por la naturaleza del círculo PQ^2 es igual al rectángulo $QR \times (RN \times QN)$ o, cuando los puntos P y Q tienden a juntarse, igual al rectángulo $QR \times 2PM$.

Luego CP^2 es a PM^2 como $QR \times 2PM$ a QT^2 y, por tanto, $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$, y $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$.

Así pues (por los corolarios 1 y 5 de la proposición VI), la fuerza centrípeta es inversamente como $\frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$, esto es $\left(\text{despreciando la razón dada } \frac{2SP^2}{CP^2}\right)$, inversamente como PM^2. Q.E.I.

Esto mismo se deduce fácilmente también de la proposición precedente.

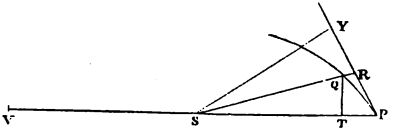
ESCOLIO

Y por un argumento no muy distinto se hallará que un cuerpo se movería en una elipse, o también en una hipérbola o en una parábola, por una fuerza centrípeta que sería a su vez inversamente como el cubo de la ordenada dirigida a un centro de fuerzas infinitamente lejano.

PROPOSICIÓN IX. PROBLEMA IV

Si un cuerpo gira en una espiral PQS que corta a todos los radios SP, SQ, etc., en un ángulo dado, hállese la ley de la fuerza centrípeta tendente al centro de la espiral.

Sea dado el ángulo infinitamente pequeño PSQ y por estar dados todos los ángulos se obtendrá una figura de la forma SPRQT. Luego está dada la razón $\frac{QT}{QR}$, y $\frac{QT^2}{QR}$ es como QT, esto es (por la forma de la figura dada), como SP. Altérese cuanto sea el ángulo PSQ y la recta que subtiende al ángulo de contacto QRT se alterará (por el lema XI) en razón cuadrada del propio PR o QT. Luego $\frac{QT^2}{QR}$ permanecerá igual que antes, esto es, como SP. Por lo tanto, $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$ es como SP3 y por lo mismo (por los corolarios 1 y 5 de la proposición VI), la fuerza centrípeta es inversamente como el cubo de la distancia SP. Q.E.I.



LO MISMO DE OTRO MODO

La perpendicular SY trazada a la tangente y la cuerda PV del círculo concéntrico secante de la espiral están en razones dadas con respecto a la altura SP. Por tanto, SP^3 es como $SY^2 \times PV$, esto es (por los corolarios 3 y 5 de la proposición VI), inversamente como la fuerza centrípeta.

LEMA XII

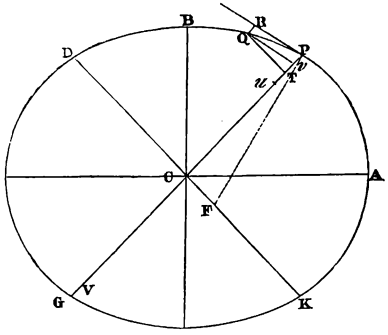
Todos los paralelogramos descritos en torno a cualesquiera diámetros conjugados de una elipse o de una hipérbola dadas son iguales entre sí.

Consta por las cónicas.

PROPOSICIÓN X. PROBLEMA V

Si un cuerpo gira en una elipse, hallar la ley de la fuerza centrípeta tendente al centro de la elipse.

Sean CA, CB los semiejes de la elipse: GP, DK diámetros conjugados; PF, QT las perpendiculares a los diámetros, QV una ordenada del diámetro GP, y si se completa el paralelogramo Qv PR, el rectángulo PvG será (por las cónicas) a Qv^2 como PC^2 a CD^2 y (por semejanza de los triángulos QvT, PCF) Qv^2 es a QT^2 como PC^2 a PF^2 y multiplicando las razones, el rectángulo PvG a QT^2 como PC^2 a CD^2, y PC^4 a PF^2, esto es,



v G a $\frac{QT^2}{Pv}$ como PC^2 a $\frac{CD^2 \times PF^2}{PC^2}$. Sustitúyase QR por P$v$ y (por el lema XII) BC × CA por CD × PF, así como (al acercarse los puntos P y Q) 2PC por v G tendremos que, multiplicando extremos y medios entre sí, $\frac{QT^2 \times PC^2}{QR} = \frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$. Así pues (por el corolario 5 de la proposición VI), la fuerza centrípeta es inversamente como $\frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$; esto es (por estar dados $2BC^2 \times CA^2$) inversamente como $\frac{1}{PC}$; o lo que es lo mismo directamente como la distancia PC. Q.E.I.

Lo mismo de otro modo

En la recta PG y en la otra parte del punto T tómese el punto u de tal modo que Tu sea igual al propio Tv; después tómese uV de modo que sea a vG como DC^2 a PC^2. Y puesto que por las cónicas Qv^2 es a Pv G como DC^2 a PC^2, Qv^2 será igual a Pv × uV. Añádase a ambos el rectángulo uPv y el cuadrado de la cuerda del arco PQ resultará igual al rectángulo V Pv y, por tanto, el círculo tangente a la sección cónica en el punto P, y que pase por el punto Q, pasará también por el punto V. Acérquense los puntos P y Q, y la razón uV a vG que es la misma que la de DC^2 a PC^2, vendrá a ser la misma que la de PV a PG o la de PV a 2PC; y por tanto PV será igual a $\frac{2DC^2}{PC}$. Por ello la fuerza por la que un 2 cuerpo P gira en una elipse será inversamente como $\frac{2DC^2}{PC} \times PF^2$ (por el corolario 3 de la proposición VI), esto es (por estar dado $2DC^2 \times PF^2$), directamente como PC. Q.E.I.

Corolario 1. La fuerza es, por tanto, como la distancia del cuerpo al centro de la elipse; y viceversa, si la fuerza es como la distancia, el cuerpo girará en una elipse que

tiene su centro en el centro de fuerzas, o si no, tal vez en un círculo en el que también puede convertirse la elipse.

COROLARIO 2. Y serán iguales también los tiempos periódicos de las revoluciones efectuadas en torno al mismo centro en todas las elipses. Pues los tiempos mencionados en las elipses semejantes serán iguales (por los corolarios 3 y 8 de la proposición IV); en cambio, en las elipses que tienen el eje mayor común están entre sí directamente como el área total de las elipses e inversamente como las partes de área descritas en el mismo tiempo; esto es, directamente como sus ejes menores e inversamente como las velocidades de los cuerpos en los vértices principales; o lo que es lo mismo, directamente como los ejes menores e inversamente como las ordenadas al mismo punto del eje común; en consecuencia (por la igualdad de las razones directas e inversas), en razón de igualdad.

ESCOLIO

Si una elipse, por alejarse su centro infinitamente, se convierte en una parábola, el cuerpo se moverá en esta parábola; y la fuerza ahora tendente a un centro infinitamente distante resultará constante. Éste es el teorema de Galileo. Y si la sección parabólica de un cono (al cambiar la inclinación del plano secante del cono) se convierte en una hipérbola, el cuerpo se moverá en el perímetro de ésta con una fuerza centrípeta transformada en centrífuga. Y del mismo modo que si en un círculo o una elipse las fuerzas tienden al centro de la figura situado en la abscisa, estas fuerzas, aumentando o disminuyendo las ordenadas según una razón dada o también alterando el ángulo de inclinación de las ordenadas a la abscisa, siempre aumentan o disminuyen en razón a las distancias al centro, mientras los tiempos periódicos permanezcan iguales, del mismo modo en todas las figuras si las ordenadas aumentan o disminuyen en una razón dada, o el ángulo de inclinación se altera en cualquier sentido permaneciendo igual el tiempo periódico, las fuerzas tendentes a cualquier centro situado en la abscisa aumentan o disminuyen en cada ordenada en razón a las distancias al centro.

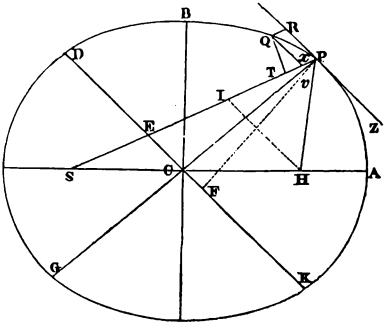
SECCIÓN III

DEL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS EN SECCIONES CÓNICAS EXCÉNTRICAS

PROPOSICIÓN XI. PROBLEMA VI

Si un cuerpo gira en una elipse, hallar la ley de la fuerza centrípeta tendente al foco de la elipse.

Sea S el foco de la elipse. Trácese SP secante tanto del diámetro DK de la elipse en E como de la ordenada Qv en x y complétese el paralelogramo QxPR. Es evidente que EP es igual al semieje mayor AC dado que trazada desde el otro foco H la línea HI parale-



la a la propia EC, por ser iguales CS, CH, son iguales ES, EI, igual que EP es la semisuma de PS, PI, esto es (por ser paralelas HI, PR e iguales los ángulos IPR, HPZ), de PS, PH que conjuntamente son iguales a todo el eje 2AC. Trácese la perpendicular QT sobre SP y llamando L al «latus rectum» principal de la elipse $\left(\text{o sea, } \frac{2BC^2}{AC}\right)$, $L \times QR$ será a $L \times Pv$ como QR a Pv, esto es, como PE o AC a PC; y $L \times Pv$ será a Gv P como L a Gv; y Gv P será a Qv^2 como PC^2 a CD^2 y (por el corolario 2 del lema VII), al coincidir Q y P, ocurrirá que Qv^2 será igual a Qx^2; y Qx^2 o Qv^2 es a QT^2 como EP^2 a PF^2, esto es, como CA^2 a PF^2 o también (por el lema XII) como CD^2 a CB^2, y multiplicando todas estas razones $L \times QR$ será a QT^2 como $AC \times L \times PC^2 \times CD^2$, o también como $2CB^2 \times PC^2 \times CD^2$ a $PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$, o bien, como 2PC a Gv. Pero al coincidir los puntos Q y P ocurre que 2PC es igual a Gv. Luego también se igualan $L \times QR$ y QT^2 por ser proporcionales a aquéllos. Multiplicando ahora estos iguales por $\frac{SP^2}{QR}$ tendremos que $L \times SP^2$ es igual a $\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR}$. Luego (por los corolarios 1 y 5 de la proposición VI) la fuerza centrípeta es inversamente como $L \times SP^2$, esto es, inversamente como el cuadrado de la distancia SP. Q.E.I

Lo mismo de otro modo

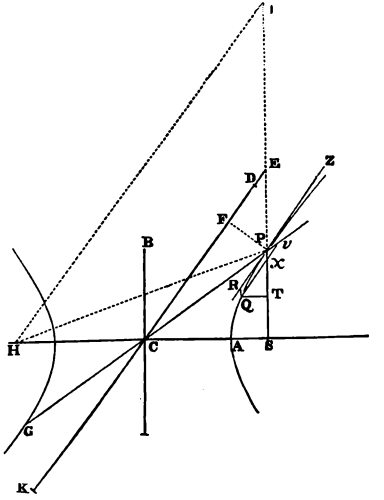
Puesto que la fuerza tendente al centro de una elipse, por la que un cuerpo P puede girar en dicha elipse, es (por el corolario 1 de la proposición X) como la distancia CP del cuerpo al centro de la elipse; trácese CE paralela a la tangente de la elipse PR; y la fuerza por la que el cuerpo P puede girar en torno a otro punto cualquiera S, si CE y PS se cruzan en E, será como $\frac{PE^3}{SP^2}$ (por el corolario 3 de la proposición VII), esto es, si el punto S es foco de la elipse y, por tanto, PE está dado, como el inverso de SP^2. Q.E.I.

Con la misma brevedad con que aplicábamos el problema quinto a la parábola y a la hipérbola podríamos hacerlo aquí. Pero dada la dignidad del problema y su utilidad en lo sucesivo no hay inconveniente en confirmar mediante demostración los demás casos.

PROPOSICIÓN XII. PROBLEMA VII

Si un cuerpo se mueve en una hipérbola, hállese la ley de la fuerza centrípeta tendente al foco de la figura.

Sean CA, CB los semiejes de la hipérbola; sean PG, KI) otros diámetros conjugados; PF una perpendicular al diámetro KD; y Q*v* una ordenada al diámetro GP. Trácese SP secante del diámetro DK en E y de la ordenada Q*v* en *x*, y complétese el paralelogramo QRP*x*. Es evidente que EP es igual al semieje transverso A*c*, puesto que trazada la línea HI, paralela a EC, desde el otro foco H de la hipérbola, por la igualdad de CS y CH serán iguales ES y EI; además porque EP es la semidiferencia de PS, PI esto es (por el paralelismo de IH, PR y la igualdad de los ángulos IPR, HPZ) de PS, PH, cuya diferencia es igual a todo el eje 2AC. Trácese QT perpendicular a SP. Llamando L al «latus rectum» principal de la hipérbola $\left(\text{o } \frac{2BC^2}{AC}\right)$ tendremos $\frac{L \times QR}{L \times Pv} = \frac{QR}{Pv} = \frac{Px}{Pv}$ esto es (por la semejanza de los triángulos P*xv*, PEC) $\frac{PE}{PC} = \frac{AC}{PC}$. Y también $\frac{L \times Pv}{Gv \times Pv} =$



$\frac{L}{Pv}$; y (por la naturaleza de las cónicas), el rectángulo $\frac{Gv \times vP}{Gv^2} = \frac{PC^2}{CD^2}$; y (por el corolario 2 del lema VII) cuando P y Q coinciden $Qx^2 = Qv^2$; y $\frac{Qx^2}{GT^2}$ o $\frac{Qv^2}{GT^2} = \frac{Qx^2}{GT^2} = \frac{CA^2}{PF^2}$ = (por el lema XII) = $\frac{CD^2}{CB^2}$ y multiplicando (ordenadamente) todas estas razones resultará que $\frac{L \times QR}{QT^2} = \frac{AC \times L \times PC^2 \times CD}{PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2} = \frac{2CB^2 \times PC^2 \times CD^2}{PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2} = \frac{2PC}{Gv}$. Pero al coincidir P y Q resulta que $2PC = Gv$. Luego también se igualan $L \times QR$ y QT^2 proporcionales a los anteriores. Multiplicando estas igualdades por $\frac{SP^2}{QR}$ tendremos que $L \times SP^2 = \frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Luego (por los corolarios 1 y 5 de la proposición VI) la fuerza centrípeta es inversamente como $L \times SP^2$, es decir, inversamente como el cuadrado de la distancia SP. Q.E.I.

Lo mismo de otro modo

Hállese la fuerza que parte desde el centro C de la hipérbola. Será proporcional a la distancia CP. Por ello la fuerza tendente al foco S será (por el corolario 3 de la proposición VIII) como $\frac{PE^3}{SP^2}$, esto es, por estar dada PE, inversamente como SP^2. Q.E.I.

Del mismo modo se demuestra que un cuerpo cuya fuerza centrípeta se cambia en centrífuga se moverá en una hipérbola opuesta.

LEMA XIII

El «latus rectum» correspondiente a un vértice cualquiera de una parábola es cuatro veces la distancia de dicho vértice al foco de la figura.

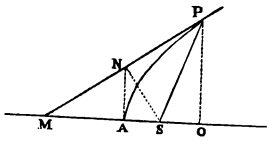
Es evidente por las cónicas.

LEMA XIV

La perpendicular que se traza desde el foco de una parábola a su tangente es media proporcional entre las distancias desde el foco al punto de contacto y al vértice principal de la figura.

Sea AP la parábola, S su foco, A el vértice principal, P el punto de contacto, PO la ordenada al diámetro principal, PM la tangente al diámetro principal concurrente en M, y SN la perpendicular desde el foco a la tangente. Únanse A, N y por la igualdad de MS y SP, MN y NP, MA y AO; las rectas AN y OP serán paralelas; y, por tanto, el triángu-

lo SAN será rectángulo en A y semejante a los triángulos iguales SNM, SNP; luego PS es a SN como SN a SA. Q.E.D.



COROLARIO 1. PS^2 es a SN^2 como PS a SA.

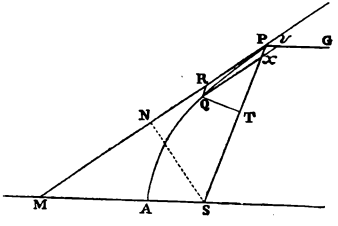
COROLARIO 2. Y por estar dada SA, SN^2 es como PS.

COROLARIO 3. Y el cruce de una tangente cualquiera PM con la recta SN que le es perpendicular desde el foco, incide sobre la recta AN que es tangente a la parábola en el vértice principal.

PROPOSICIÓN XIII. PROBLEMA VIII

Si un cuerpo se mueve en el perímetro de una parábola, hállese la ley de la fuerza centrípeta tendente al foco de dicha figura.

Sea la misma figura construida para el lema, y sea P el cuerpo en el perímetro de la parábola, y desde el punto Q, hacia el que el cuerpo se mueve, tracemos QR paralela a SP, así como la perpendicular QT y la recta Qv paralela a la tangente y que corta tanto al diámetro PG en v como a SP en x. Ahora bien, por la semejanza de los triángulos Pxv, SPM, y por la igualdad de los lados SM, SP de uno, son iguales los lados Px o QR y Pv del otro. Pero (por las cónicas) el cuadrado de la ordenada Qv es igual al rectángulo bajo el «latus rectum» y el segmento Pv del diámetro; esto es (por el lema XIII), al rectángulo $4PS \times Pv$ o $4PS \times QR$; y al coincidir P y Q la razón Qv a Qx (por el corolario 2 del lema VII) es una razón de igualdad. Luego Qx^2, en tal caso, es igual al rectángulo $4PS \times QR$. Por lo tanto (por la semejanza de los triángulos QxT, SPN), $\frac{Px^3}{QT^2} = \frac{PS^2}{SN^2}$ (esto es, por el corolario 1 del lema XIV) $\frac{PS}{SA} = \frac{4PS \times QR}{4SA \times QR}$, y de aquí (por la proposición IX del libro V de los *Elementos*), $QT^2 = 4SA \times QR$. Multiplicando estas igualdades por $\frac{SP^2}{QR}$ obtendremos que $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR} = SP^2 \times 4SA$; y por esto (por los corolarios 1 y 5 de la proposición VI) la fuerza centrípeta es inversamente como $SP^2 \times 4SA$, esto es, por estar dado 4SA, inversamente como el cuadrado de la distancia SP. Q.E.I.



COROLARIO 1. Se sigue de las tres últimas proposiciones que si un cierto cuerpo P parte del punto P con una velocidad cualquiera según la dirección de cierta línea recta

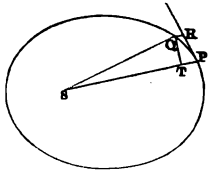
PR y bajo la acción simultánea de una fuerza centrípeta inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares al centro, dicho cuerpo se moverá en alguna de las secciones cónicas que tenga su foco en el centro de fuerzas, y viceversa. Pues conocidos el foco, el punto de contacto y la posición de la tangente, se puede describir la cónica que tendrá en dicho punto una curvatura dada. Pero se da la curvatura si se da la fuerza centrípeta y la velocidad del cuerpo; y dos órbitas tangentes entre sí con la misma fuerza centrípeta y la misma velocidad no pueden describirse.

COROLARIO 2. Si la velocidad con que un cuerpo parte de su lugar P es tal que el segmento PR puede ser recorrido en una parte infinitésima de tiempo y la fuerza centrípeta es tal que en el mismo tiempo puede mover al cuerpo a lo largo del espacio QR, dicho cuerpo se moverá en una sección cónica cuyo «latus rectum» principal es la susodicha cantidad $\frac{QT^2}{QR}$ en el último instante cuando las líneas PR, QR disminuyen *in infinitum*. En estos corolarios considero al círculo como una elipse; y exceptúo el caso en que el cuerpo desciende hacia el centro según una línea recta.

PROPOSICIÓN XIV. TEOREMA VI

Si varios cuerpos giran en torno a un centro común y la fuerza centrípeta es inversamente como el cuadrado de la distancia de los lugares al centro, digo que los «latera recta» principales de las órbitas son como los cuadrados de las áreas descritas en tiempos iguales por los radios trazados al centro.

Pues (por el corolario 2 de la proposición XIII) el «latus rectum» L es igual a la magnitud $\frac{QT^2}{QR}$ en el último instante cuando P y Q tienden a coincidir. Pero la pequeña línea QR en un tiempo dado es como la fuerza centrípeta generatriz, esto es (por hipótesis), inversamente como SP^2. Luego $\frac{QT^2}{QR}$ es como $QT^2 \times SP^2$, esto es, el «latus rectum» L por el cuadrado del área QT × SP. Q.E.D.



COROLARIO. De aquí que el área total de la elipse, así como la del rectángulo, proporcional a ella, comprendido entre los ejes es como el producto de la raíz cuadrada del «latus rectum» y el tiempo periódico. Pues el área total es como el área QT × SP, descrita en un tiempo dado, multiplicada por el tiempo periódico.

PROPOSICIÓN XV. TEOREMA VII

Supuesto esto, digo que los tiempos periódicos en las elipses son como los ejes mayores elevados a la potencia 3/2.

Puesto que el eje menor es media proporcional entre el eje mayor y el «latus rectum» y, por tanto, el rectángulo comprendido entre los ejes es como el producto de la raíz cuadrada del «latus rectum» y del eje mayor elevado a 3/2. Pero este rectángulo (por el corolario de la proposición XIV) es como el producto de la raíz cuadrada del «latus rectum» y del tiempo periódico. Dividamos uno y otro por la raíz cuadrada del «latus rectum» y tendremos que el tiempo periódico sigue en la misma razón que la potencia 3/2 del eje mayor. Q.E.D.

COROLARIO Los tiempos periódicos en las elipses son iguales a los de los círculos, cuyos diámetros son iguales a los ejes mayores de las elipses.

PROPOSICIÓN XVI. TEOREMA VIII

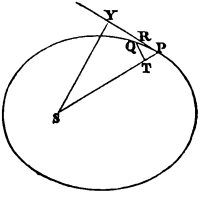
Supuesto lo dicho y trazadas a los cuerpos líneas rectas tangentes también en ese punto a la órbita, y trazadas perpendiculares desde el foco común a dichas tangentes: digo que las velocidades de los cuerpos están en razón compuesta, inversamente, de las perpendiculares y, directamente, de la raíz cuadrada de los «latera recta» principales.

Tracemos desde el foco S a la tangente PR la perpendicular SY y la velocidad del cuerpo P será inversamente como la raíz de la cantidad $\frac{SY^2}{L}$. Pues dicha velocidad es como el arco infinitamente pequeño PQ descrito en una partícula instantánea de tiempo, esto es (por el lema VII) como la tangente PR, lo que es lo mismo, por la proporcionalidad de PR a QT y de SP a SY, como $\frac{SP \times QT}{SY}$, o también, inversamente como SY y directamente como SP × QT; y SP × QT es como el área descrita en un tiempo dado, esto es (por la proposición XIV) como la raíz cuadrada del «latus rectum». Q.E.D.

COROLARIO 1. Los «latera recta» principales están en razón compuesta de los cuadrados de las perpendiculares y del cuadrado de las velocidades.

COROLARIO 2. Las velocidades de los cuerpos en las distancias máximas y mínimas al foco común están en razón compuesta inversamente de las distancias y directamente de la raíz cuadrada de los «latera recta» principales. Pues las perpendiculares son ahora las distancias mismas.

COROLARIO 3. Y, por tanto, la velocidad en una sección cónica, en la distancia máxima o mínima al foco, es a la velocidad en un círculo, a la misma distancia del centro, como la raíz cuadrada del «latus rectum» principal al doble de dicha distancia.



COROLARIO 4. Las velocidades de los cuerpos que giran en elipses a distancias medias del foco común son iguales a las de los cuerpos que giran en círculos a las mismas distancias; esto es (por el corolario 6 de la proposición IV) inversamente como la raíz cuadrada de las distancias. Pues ahora las perpendiculares son se-

miejes menores y éstos son como las medias proporcionales entre las distancias y los «latera recta». Multiplíquense la inversa de esta razón por la raíz cuadrada de la razón directa de los «latera recta» y obtendremos la raíz cuadrada de la razón inversa de las distancias.

COROLARIO 5. En la misma figura, o incluso en figuras distintas, cuyos «latera recta» principales son iguales, la velocidad del cuerpo es inversamente como la perpendicular trazada desde el foco a la tangente.

COROLARIO 6. En una parábola la velocidad es inversamente como la raíz cuadrada de la distancia del cuerpo al foco de la figura; en una elipse varía más y en una hipérbola menos que la razón susodicha. Pues (por el corolario 2 del lema XIV) la perpendicular trazada desde el foco a la tangente de la parábola es como la raíz cuadrada de la distancia. En la hipérbola la perpendicular varía menos y en la elipse varía más.

COROLARIO 7. En una parábola la velocidad de un cuerpo a cualquier distancia del foco es a la velocidad de un cuerpo que gira en un círculo a la misma distancia del centro, como la raíz cuadrada de la razón de 2 a 1; en la elipse es menor que esta razón y en la hipérbola mayor. Pues, por el corolario 2 de esta proposición, la velocidad en el vértice de la parábola está en esta razón, y, por el corolario 6 de esta proposición y por la 4, se conserva la misma proporción en todas las distancias. Y, por tanto, también, en una parábola, la velocidad es en todas partes igual a la velocidad de un cuerpo que gire en un círculo a la mitad de distancia, y es menor en una elipse y mayor en una hipérbola.

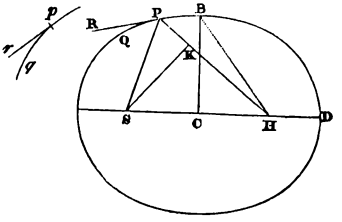
COROLARIO 8. La velocidad de un cuerpo que gira en una sección cónica cualquiera es a la velocidad de un cuerpo que gira en un círculo a la distancia del semi «latus rectum» principal de la sección como dicha distancia es a la perpendicular trazada desde el foco a la tangente de la sección. Es evidente por el corolario 5.

COROLARIO 9. De donde, dado que (por el corolario 6 de la proposición IV) la velocidad de un cuerpo que gira en este círculo es a la velocidad de otro cuerpo que gira en cualquier otro círculo inversamente como la raíz cuadrada de las distancias, por lo mismo se seguirá que la velocidad de un cuerpo que gira en una sección cónica será a la velocidad de un cuerpo que gira en un círculo a la misma distancia como es la media proporcional entre dicha distancia común y la mitad del «latus rectum» principal de la sección, a la perpendicular trazada desde el foco común a la tangente de la sección.

PROPOSICIÓN XVII. PROBLEMA IX

Supuesto que la fuerza centrípeta es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares al centro y que la cantidad absoluta de dicha fuerza es conocida, hállese la línea descrita por el cuerpo desde un punto dado, con una velocidad dada y partiendo en la dirección de una recta dada.

Sea la fuerza centrípeta tendente a un punto S la fuerza con la que gira un cuerpo *p* en una órbita dada *pq* y supongamos conocida su velocidad en el punto *p*. Parta el cuerpo P desde el punto P según la línea PR con una velocidad dada, e inmediatamente, obligado por la fuerza centrípeta, desvíese por la sección cónica PQ. La recta PR será tangente a la sección en P. Del mismo modo, la recta *pr* sea tangente a la órbita *pq* en *p* y si se supone que se trazan perpendiculares a dichas tangentes desde S, ocurrirá (por el corolario 1 de la proposición XVI) que el «latus rectum» principal de la sección cóni-



ca estará, respecto al «latus rectum» principal de la órbita, en razón compuesta de la razón cuadrada de las perpendiculares y de la razón cuadrada de las velocidades y, por ello, está dada. Sea L el «latus rectum» de la sección. Se da también el foco S de la misma sección cónica. Sea el ángulo RPH el suplementario de RPS y tendremos dada en posición la línea PH en la que está el otro foco H. Una vez trazada la perpendicular SK sobre PH, supongamos que se traza el semieje conjugado BC y tendremos que:

$$SP^2 - 2PH \times PK + PH^2 = SH^2 = 4CH^2 = 4(BH^2 - BC^2) =$$
$$= (SP + PH)^2 - L(SP + PH) =$$
$$= SP^2 + 2PS \times PH + PH^2 - L(SP+PH)$$

añádase a ambos miembros

$$2PK \times PH - SP^2 - PH^2 + L(SP + PH)$$

y resultará

$$L(SP + PH) = 2PS \times PH + 2PK \times PH,$$

o también

$$\frac{(SP \times PH)}{PH} = \frac{2(SP + KP)}{L}$$

De donde tenemos dada tanto en longitud, como en posición, PH. Esto es, si la velocidad del cuerpo en P es tal que el «latus rectum» L fuera menor que 2SP + 2KP entonces PH caerá, con la línea PS, del mismo lado de la tangente PR y, por tanto, la figura será una elipse, y vendrá dada, por estar dados los focos S, H y el eje principal SP + PH. Pero si la velocidad del cuerpo es tal que el «latus rectum» L fuese igual a 2SP + 2KP la longitud de PH será infinita; y, por tanto, la figura será una parábola que tiene por eje a SH paralelo a la línea PK, por tanto, también estará dada. Y si el cuerpo parte de P con una velocidad aún mayor, la longitud PH estará al otro lado de la tangente y, por tanto, la tangente pasa por entre ambos focos, siendo entonces la figura una hipérbola que tiene como eje principal la diferencia de las líneas SP y PH; y por eso estará dada. Pues si el cuerpo en todos estos casos gira en una sección cónica así hallada, está demostrado en las proposiciones XI, XII, XIII que la fuerza centrípeta será inversamente como el cuadrado de la distancia del cuerpo al centro de fuerzas S; y, por tanto, la línea PQ representa correctamente la trayectoria descrita por el cuerpo con semejante fuerza, partiendo de un punto dado P, con una velocidad dada y según una recta PR dada en posición. Q.E.F.

COROLARIO 1. De aquí que en toda sección cónica, dados el vértice principal D, el «latus recturn» L y el foco S, se obtiene el otro foco H, tomando DH a DS como el

«latus rectum» a la diferencia entre el «latus rectum» y 4DS. Pues la proporción $\frac{SP + PH}{PH} = \frac{2SP + 2KP}{L}$ se convierte para este corolario en $\frac{DS + DH}{DH} = \frac{4DS}{L}$ y $\frac{DS}{DH} = \frac{4DS - L}{L}$.

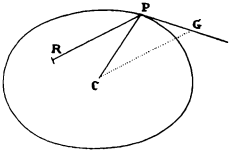
COROLARIO 2. De donde, dada la velocidad de un cuerpo en el vértice principal D, se hallará directamente la órbita, a saber, tomando su «latus rectum» al doble de la distancia DS, en razón cuadrada de esta velocidad dada a la velocidad del cuerpo que gira en el círculo a la distancia DS (por el corolario 3 de la proposición XVI), y tomando después DH a DS como el «latus rectum» a la diferencia entre el «latus rectum» y 4DS.

COROLARIO 3. De aquí también que, si un cuerpo se mueve en cualquier sección cónica y es expulsado de su órbita por cualquier impulso, se puede conocer la órbita en la que continuará después su curso. Pues, componiendo el movimiento propio del cuerpo con aquel movimiento que generaría el mero impulso, se tendrá el movimiento con que partió el cuerpo impulsado de un lugar dado y según una recta dada en posición.

COROLARIO 4. Y si dicho cuerpo es perturbado continuamente por una fuerza impresa desde fuera, podemos conocer muy aproximadamente su curso calculando los cambios que en algunos puntos produce dicha fuerza y estimando a partir de la analogía de la serie los cambios continuos en los lugares intermedios.

ESCOLIO

Si un cuerpo P, con una fuerza centrípeta tendente a un punto dado cualquiera R, se mueve en el perímetro de una sección cualquiera dada cuyo centro sea C, y se desea hallar la ley de la fuerza centrípeta, trácese GC paralela al radio RP y cortando a la tangente PG en G; y entonces la fuerza mencionada será (por el corolario 1 y el escolio de la proposición X, y por el corolario 3 de la proposición VII) como $\frac{CG^3}{RP^2}$.



SECCIÓN IV

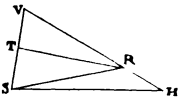
DE CÓMO HALLAR ÓRBITAS ELÍPTICAS, PARABÓLICAS E HIPERBÓLICAS A PARTIR DE UN FOCO DADO

LEMA XV

Si de los dos focos S, H, de una elipse o de una hipérbola trazamos hasta un tercer punto V las rectas SV, HV, una de las cuales HV es, igual al eje principal de la figura,

esto es, al eje en que están situados los focos y la otra SV es bisecada en T por la perpendicular TR trazada sobre ella, dicha perpendicular TR tocará a la sección cónica en algún punto; y al contrario, si la toca, HV será igual al eje principal de la figura.

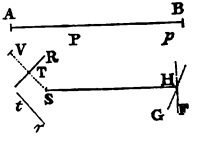
Corte la perpendicular TR a la recta HV, prolongada si es preciso, en R, y únanse S y R. Por ser iguales TS y TV serán también iguales las rectas SR, VR, y los ángulos TRS y TRV. De donde el punto R estará en la sección cónica y la perpendicular TR será tangente a ella; «et contra». Q.E.D.



PROPOSICIÓN XVIII. PROBLEMA X

Dados el foco y los ejes principales trazar trayectorias elípticas e hiperbólicas que pasen por puntos dados y toquen a rectas dadas en posición.

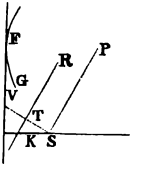
Sea S el foco común de las figuras; sea AB la longitud del eje principal de una trayectoria cualquiera; P el punto por el que debe pasar la trayectoria y sea TR la recta que debe tocar. Con centro en P y radio AB – SP, si la órbita es una elipse, AB + SP si fuere una hipérbola, trácese el círculo HG. Trácese la perpendicular ST sobre la tangente TR y prolónguese aquella hasta V, de modo que TV sea igual a ST y con centro en V y radio AB trácese el círculo FH. De esta manera, ya se den dos puntos P, *p*, ya dos tangentes, TR, *tr*, ya un punto P y la tangente TR, hay que trazar dos círculos. Sea H su intersección, y desde los focos S, H, con el eje dado trácese la trayectoria. Digo que está dada. Pues la trayectoria descrita (dado que PH + SP en una elipse y PH – SP en una hipérbola, es igual al eje) pasará por el punto P y (por el lema anterior) será tangente a la recta TR. Y por el mismo argumento o pasará por los dos puntos P, *p*, o será tangente a las dos rectas TR, *tr*. Q.E.F.



PROPOSICIÓN XIX. PROBLEMA XI

Trazar en torno a un foco dado una trayectoria parabólica que pase por unos puntos dados y sea tangente a rectas dadas en posición.

Sea S el foco, P el punto y TR la tangente a la trayectoria que se ha de trazar. Trácese el círculo FG, con centro en P y radio PS. Trácese desde el foco a la tangente la perpendicular ST y prolónguese hasta V de tal modo que TV sea igual a ST. Del mismo modo habría que trazar el otro círculo *fg si* se diera otro punto *p*, o también hallar otro punto *v* si se diera otra tangente *tr*; después trácese la recta IF, tangente a los dos círculos FG, *fg* si se dan dos puntos P, *p*, o que pase por los puntos V, *v*, si se dan dos tangen-



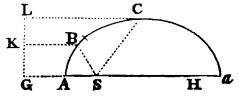
tes TR, *tr*, o que sea tangente al círculo FG y pase por el punto V si se da el punto P y la tangente TR. Trácese sobre FI la perpendicular SI, bisecándola en K; y con eje SK y vértice principal en K, trácese la parábola. Digo que está resuelto. Pues la parábola, por ser iguales SK, IK entre sí y SP, FP, también, pasará por el punto P; y (por el lema XIV, corolario 3) al ser iguales ST y TV y ser recto el ángulo STR, será tangente a la recta TR. Q.E.F.

PROPOSICIÓN XX. PROBLEMA XII

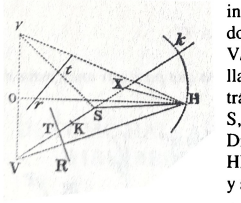
Trazar en torno a un foco dado una trayectoria dada de cualquier género que pase por puntos dados y sea tangente a rectas dadas en posición.

CASO 1. Dado el foco S, trazar la trayectoria ABC por los dos puntos B, C. Puesto que se da la clase de trayectoria también se dará la razón entre el eje principal y la distancia entre focos.

Según esa razón tómense KB a BS y LC a CS. Con centros en B y C, y radios BK y CL, trácense dos círculos y, sobre la recta KL tangente a ellos en K y L, trácese la perpendicular SG y córtese ésta en A y *a* de tal modo que GA sea a AS y G*a* a *a*S como KB es a BS y con eje A*a* y vértices en A, *a*, trácese la trayectoria. Digo que está resuelto. Pues sea H el otro foco de la figura trazada y al ser GA a AS como G*a* a *a*S, restando también estará G*a* − GA (o sea A*a*) a *a*S − AS (o sea, SH) en la misma razón y, por tanto, en la misma razón en que está el eje principal de la figura que debe ser trazada con la distancia entre sus focos; y, por tanto, la figura trazada es del mismo tipo que la que había que trazar. Y dado que KB respecto a BS y LC respecto a CS están en la misma razón, esta figura pasará por B, C, como se sabe por las cónicas.

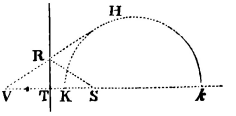


CASO 2. Dado el foco S trazar la trayectoria que sea tangente a las rectas TR, *tr*, en cualquier punto. Trácense desde el foco a las tangentes las perpendiculares ST, *st*, y prolónguense hasta V, *v*, de tal modo que TV, *tv*, sean iguales respectivamente a TS y *ts*. Bisecando V*v* en O trácese desde ésta una perpendicular infinita OH y prolónguese al infinito la recta VS cortándola en los puntos K, *k* de tal modo que VK sea a KS y V*k* a *k*S como el eje principal de la figura que ha de hallarse es a la distancia entre focos. Sobre el diámetro K*k* trácese el círculo que corte a OH en H; y con los focos S, H, y el eje principal igual a VH trácese la trayectoria. Digo que está resuelto. Pues biséquese K*k* en *x* y únanse HX, HS, HV, H*v*. Puesto que VK es a KS como V*k* a *kS*; y sumando como VK + *Vk* a KS + *kS* y restando como *Vk* − *VK* a *k*S − KS, esto es, como 2VX a 2KX y 2KX a 2SX, y, por tanto, como VX a HX y HX a SX, los triángulos VXH y HXS serán semejantes y, en consecuencia, VH será a SH como VX a XH y, por tanto, como VK a KS. Por consiguiente, el eje principal VH de la trayectoria descrita está en la misma razón respecto a la distancia entre los focos que la del eje principal respecto a la distancia

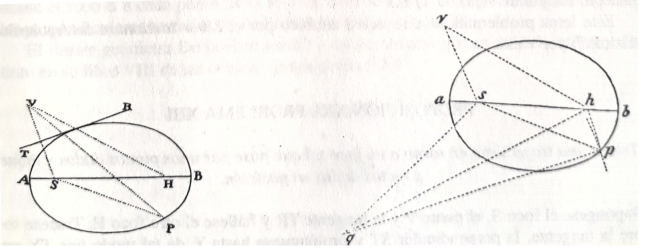


entre sus focos en la trayectoria que había que hallar y, en consecuencia, son de la misma especie. Además al ser VH, *v* H, iguales al eje principal y estar VS, *v* S, bisecadas perpendicularmente por las rectas TR, *tr*, es evidente (por el lema XV) que dichas rectas son tangentes a la trayectoria descrita. Q.E.F.

CASO 3. Dado el foco S trazar una trayectoria que sea tangente en el punto dado R a la recta TR. Trácese la perpendicular ST a la recta TR y prolónguese aquélla hasta V, de tal modo que TV sea igual a ST. Únase VR, y con la recta VS prolongada infinitamente y cortada en K y *k*, de tal modo que VK sea a SK y *vk* sea a S*k* como el eje principal de la elipse que hay que describir es a la distancia entre sus focos, y trazado un círculo sobre el diámetro K*k*, corte aquél en H a la prolongación de la recta VR, y con los focos S, H, y el eje principal igual a, la recta VH trácese la trayectoria. Digo que está resuelto. Pues que VH es a SH como VK es a SK y, por tanto, como el eje principal de la trayectoria que hay que trazar es a la distancia entre sus focos, es evidente por las demostraciones del caso segundo y, por tanto, que la trayectoria descrita es de la misma especie que la que había que describir, mientras que la recta TR, bisectriz del ángulo VRS, es tangente a la trayectoria en el punto R, es evidente por las cónicas. Q.E.F.



CASO 4. Trácese ahora en torno al foco S la trayectoria APB tangente a la recta TR y que pase por un punto cualquiera P dado fuera de la tangente. Y que sea semejante a la figura *apb* cuyo eje principal es *ab* y trazada con los focos *s*, *h*. Trácese sobre la tangente TR, la perpendicular ST y prolónguese hasta V de modo que sea TV igual a ST. Constrúyanse los ángulos *hsq*, *shq*, iguales a VSP, SVP; con centro en *q* y con radio tal que sea a *ab* como SP a VS trácese un círculo que corte la figura *apb* en *p*. Únase *sp* y hágase que SH sea a *sh* como SP a *sp* y éstas construyan así el ángulo PSH igual al ángulo *psh* y el ángulo VSH igual al *psq*. Por fin con los focos S, H, el eje principal AB, igual a la distancia VH, trácese la sección cónica. Digo que está resuelto. Pues si se hace que *sv* sea a *sp* como *sh* es a *sq*, y que el ángulo *vsp* sea igual al ángulo *hsq* y el ángulo *vsh* igual al ángulo *psq*, entonces los triángulos *svh* y *spq* serán semejantes y, por tanto, *vh* será a *pq* como *sh* es a *sq*, esto es (por la semejanza de los triángulos VSP, *hsq*), como VS es a SP o como *ab* es a *pq*. Son, pues, iguales *vh* y *ab*. Pero, por la semejanza de los triángulos VSH, *vsh*, ocurre que VH es a SH como *vh* es a *sh*, esto es, el

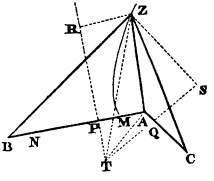


eje de la sección cónica descrita es a la distancia entre sus focos, como el eje *ab* a la distancia *sh* entre sus focos; y, por tanto, la figura descrita es semejante a la figura *apb*. Pasará, pues, dicha figura por el punto P, dado que el triángulo PSH es semejante al triángulo *psh*; y dado que VH es igual a su eje y que VS es bisecada perpendicularmente por la recta TR, también será tangente a dicha recta TR. Q.E.F.

LEMA XVI

Trazar desde tres puntos dados a otro cuarto punto no dado tres rectas cuyas diferencias o se dan o son nulas.

CASO 1. Sean los puntos dados A, B, C, y el cuarto punto Z, que es necesario hallar; por la diferencia conocida de las líneas AZ, BZ, el punto Z se situará en una hipérbola cuyos focos son A y B, y el eje principal la mencionada diferencia dada. Sea tal eje MN. Tómese PM a MA como MN a AB y trácese PR perpendicular a AB y también trácese ZR perpendicular a PR; por la naturaleza de esta hipérbola ocurrirá que ZR es a AZ como MN es a AB. Por un razonamiento similar el punto Z estará ubicado en otra hipérbola cuyos focos son AC y cuyo eje principal es la diferencia entre AZ y CZ, y puede ahora trazarse QS perpendicular a AC y si después se traza ZS, normal a QS, desde el punto Z de la hipérbola, dicha ZS será a AZ como la diferencia entre AZ y CZ es a AC. Se tienen dadas, pues, las razones entre ZR y ZS con AZ y, por tanto, también las de ZR y ZS entre sí; por lo cual, si las rectas RP, SQ, se encuentran en T, y se trazan TZ y TA, la figura TRZS estará dada en especie y la recta TZ en la que estará contenido en algún lugar el punto Z estará dada en posición. También estará dada la recta TA lo mismo que el ángulo ATZ; y puesto que están dadas las razones de AZ y TZ a ZS, estarán dadas sus razones entre sí; y de aquí se tendrá dado el triángulo ATZ cuyo vértice es el punto Z. Q.E.I.



CASO 2. Si dos de las tres líneas, por ejemplo, AZ y BZ se igualan, trácese la recta TZ, de tal modo que biseque la recta AB; después hállese el triángulo ATZ «ut supra».

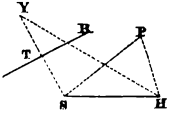
CASO 3. Si las tres son iguales, el punto Z está ubicado en el centro del círculo que pase por los puntos A, B, C. Q.E.I.

Este lema problemático se resuelve también por el *Liber tactionum* de Apolonio, restituido por Vieta.

PROPOSICIÓN XXI. PROBLEMA XIII

Trazar una trayectoria en torno a un foco tal que pase por unos puntos dados y toque a rectas dadas en posición.

Supóngase el foco S, el punto P y la tangente TR y hállese el otro foco H. Trácese sobre la tangente, la perpendicular ST y prolónguese hasta Y, de tal modo que TY sea

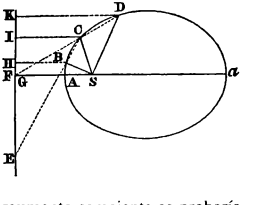


igual a ST y ocurrirá que YH será igual al eje principal. Únase SP y PH, y SP será la diferencia entre HP y el eje principal. De este modo, si se dieran varias tangentes TR, o varios puntos P, se llegará siempre a líneas tales como YH o PH trazadas desde dichos puntos Y o P al foco H, las cuales o son iguales a los ejes o se diferencian de ellos según las longitudes dadas SP y que, por tanto, o son iguales entre sí o tienen entre sí diferencias dadas; en consecuencia, por el lema anterior, el otro foco H está dado. Hallados los focos y la longitud del eje (el cual o es YH, o, si la trayectoria es una elipse, PH + SP, o, si es una hipérbola, PH – SP) se tendrá la trayectoria. Q.E.I.

ESCOLIO

Cuando la trayectoria es una hipérbola no incluyo bajo la definición de ésta a su hipérbola opuesta. Pues un cuerpo, permaneciendo en su movimiento, no puede pasar a la hipérbola opuesta.

El caso en que se dan tres puntos se resuelve más rápidamente así. Sean los tres puntos B, C, D. Únanse BC, CD, y prolónguense hasta E, F, de modo que EB sea a EC como SC a SD y FC a FD como SC a SD. Trácense sobre EF y su prolongación las rectas normales SG, BH, y sobre la prolongación al infinito de GS tómense GA respecto a AS y G*a* respecto a *a*S como HB es a BS y A será el vértice, mientras A*a* será el eje principal de la trayectoria; la cual, según que GA sea mayor, igual o menor que AS, será elipse, parábola o hipérbola; en el primer caso el punto *a* caerá al mismo lado de la línea GF que el punto A, en el segundo caso se alejará al infinito y en el tercero caerá al lado opuesto que la línea GF. Pues si se trazan sobre GF las perpendiculares CI, DK, entonces IC será a HB como EC a EB, esto es, como SC a SB; y al revés, IC a SC como HB a SB o como GA a S*a*. Y por un argumento semejante se probaría que KD está en la misma razón con SD. Están situados, pues, los puntos B, C, D, en la sección cónica descrita en torno al foco S, de tal modo que todas las rectas trazadas desde el foco S a cada punto de la sección estén en la susodicha razón con respecto a las perpendiculares trazadas desde dichos puntos a la recta GF.



El ilustre geómetra De la Hire resuelve este problema por un método no muy distinto en su libro VIII de las cónicas, proposición XXV.

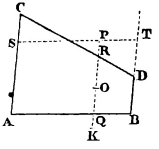
SECCIÓN V

LA OBTENCIÓN DE ÓRBITAS CUANDO NO SE DA NINGUNO DE LOS FOCOS

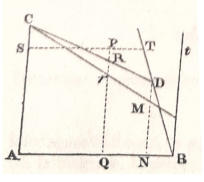
LEMA XVII

Si de un punto cualquiera P de una sección cónica dada se trazan las líneas rectas PQ, PR, PS, PT según ángulos dados sobre los lados prolongados infinitamente AB, CD, AC, DB de un trapecio ABDC que se halla inscrito en la dicha sección cónica y trazadas las líneas una a cada uno; ocurrirá que el rectángulo de las rectas trazadas sobre los dos lados opuestos PQ × PR estará con respecto al rectángulo de las trazadas sobre los otros dos lados opuestos PS × PT en una razón dada.

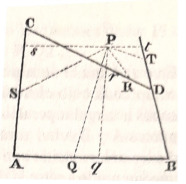
CASO 1. Supongamos, en primer lugar, que las líneas trazadas sobre los lados opuestos son paralelas a otro de los restantes lados, por ejemplo PQ y PR al lado AC, y PS y PT al lado AB. Además, sean dos de los lados opuestos, por ejemplo AC y BD, paralelos entre sí. Entonces también la recta que biseca dichos lados paralelos será uno de los diámetros de la sección cónica y bisecará también a RQ. Sea O el punto en que RQ es bisecada, y PO será ordenada aplicada al diámetro. Prolónguese PO hasta K de tal modo que OK sea igual a PO y OK será ordenada aplicada al diámetro en sentido opuesto. Dado que los puntos A, B, P y K están en la sección cónica y que PK corta a AB en un ángulo dado, tendremos (por las proposiciones 17, 19, 21 y 23 del libro III de las cónicas de Apolonio) que el rectángulo PQK está con el rectángulo AQB en una razón dada. Pero QK y PR son iguales, por cuanto son diferencias iguales de OK, OP y OQ, OR, y, por tanto, también los rectángulos PQK y PQ × PR son iguales; y en consecuencia, el rectángulo PQ × PR está con el rectángulo AQB, esto es, con el rectángulo PS × PT en una razón dada. Q.E.D.



CASO 2. Supongamos ahora que los lados opuestos del trapecio AC y BD no sean paralelos. Tracemos B*d* paralela a AC y que corte tanto a la recta ST en *t* como a la sección cónica en *d*. Unamos C*d*, secante de PQ en *r*, y tracemos DM paralela a PQ y secante de C*d* en M y de AB en N. Ahora, por la semejanza de los triángulos BT*t*, DBN, ocurre que B*t* o PQ es a T*t* como DN a NB. Y así también R*r* es a AQ o a PS como DM es a AN.



Luego multiplicando antecedentes por antecedentes y consecuentes por consecuentes, como el rectángulo PQ × R*r* es al rectángulo PS × T*t*, del mismo modo el rectángulo NDM es al rectángulo ANB, y (por el caso 1) el rectángulo PQ × P*r* es al rectángulo PS × P*t* y, dividiendo, también es el rectángulo PQ × PR al rectángulo PS × PT. Q.E.D.

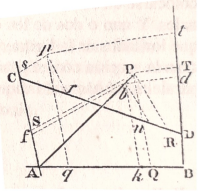


CASO 3. Supongamos, por fin, que las cuatro líneas PQ, PR, PS, PT, no son paralelas a los lados AC, AB, sino que son inclinadas respecto a ellos. Tracemos en su lugar P*q*, P*r*, paralelas al lado AC; y tracemos P*s*, P*t*, paralelas a AB; por estar dados los ángulos de los triángulos PQ*q*, PR*r*, PS*s*, PT*t*, se darán las razones PQ a P*q*, PR a P*r*, PS a P*s*, y PT a P*t*; y, por tanto, las razones compuestas PQ × PR a P*q* × P*r* y PS × PT a P*s* × P*t*. Pero según lo demostrado más arriba, la razón P*q* × P*r* a P*s* × P*t* está dada: luego también lo estará la razón PQ × PR a PS × PT. Q.E.D.

LEMA XVIII

Con los mismos supuestos, si el rectángulo de las dos líneas trazadas a dos lados opuestos del trapecio, PQ × PR, está al rectángulo PS × PT de las trazadas sobre los otros dos lados en una razón dada, entonces el punto P desde el que se trazan dichas líneas es tangente a la sección cónica descrita en torno al trapecio.

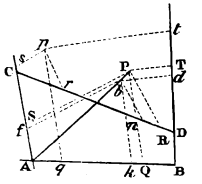
Supongamos una sección cónica descrita por los puntos A, B, C, D, e infinitos puntos P como por ejemplo *p*: digo que el punto P siempre será tangente a esta sección. Si lo negaras, únase AP secante a la sección cónica en un punto distinto de P, si ello es posible, como por ejemplo en *b*. Por consiguiente, si de estos puntos *p* y *b* se trazan sobre los lados del trapecio según ángulos dados las rectas *pq*, *pr*, *ps*, *pt*, y *bk*, *bn*, *bf*, *bd*; tendremos que *bk* × *bn* será *a bf* × *bd* como (por el lema XVII) *pq* × *pr* a *ps* × *pt* y, por tanto (por hipótesis), como PQ × PR a PS × PT. Y debido a la semejanza de los trapecios *bk*A*f*, PQAS, como es *bk* a *bf* así es PQ a PS. Por lo cual, dividiendo los términos de la primera proporción por los correspondientes de ésta, *bn* será a *bd* como PR a PT. Por tanto, los trapecios equiángulos *Dnbd*, DRPT son semejantes y sus diagonales D*b*, DP coinciden. Y de este modo *b* cae en la intersección de las líneas AP, DP y, por tanto, coincide con P. Por ello sea cual sea el punto donde se suponga P caerá en la sección cónica supuesta. Q.E.D.



COROLARIO. De aquí que si desde un punto común P se trazan tres rectas PQ, PR, PS sobre otras tres dadas en posición, una a cada una y según ángulos dados y el rectángulo formado por dos de las trazadas PQ × PR es al cuadrado de la tercera PS según una razón dada, el punto P desde el que fueron trazadas estará ubicado en la sección cónica tangente a las líneas AB, CD en A y C, y viceversa. Pues aproxímese hasta juntarse la línea BD a la línea AC manteniendo su posición las tres AB, CD, AC; después hagamos lo mismo con PT, hacia PS; y entonces el rectángulo PS × PT devendrá PS^2 y las rectas AB, CD que cortaban la curva en los puntos A y B, C y D ya no pueden cortar más la curva en aquellos puntos coincidentes, sino sólo ser tangentes en ellos.

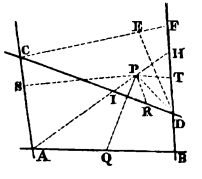
ESCOLIO

En este lema el nombre de sección cónica se toma en sentido amplio, de modo que se comprenda bajo el mismo tanto la sección rectilínea que pase por el vértice del cono como la circular paralela a la base. Pues si el punto *p* cae en la recta con que se unen los puntos A y B o los puntos C y D, la sección cónica se transforma en dos rectas de las cuales una coincide con la recta en la que cae el punto *p* y la otra es la recta con la que quedan unidos entre sí dos de los otros cuatro puntos. Si dos ángulos opuestos del trapecio tomados conjuntamente son iguales a dos rectos y las cuatro líneas PQ, PR, PS, PT, se trazan sobre sus lados ya perpendicularmente ya con un grado de inclinación dado y el rectángulo comprendido entre dos de ellas PQ × PR es igual a PS × PT comprendido entre las otras dos, entonces la sección cónica resultará un círculo. Y lo mismo ocurre si se trazan cuatro líneas con ángulos cualesquiera y el rectángulo PQ × PR comprendido entre dos de ellas es al rectángulo PS × PT comprendido entre las otras dos como el rectángulo comprendido entre los senos de los ángulos S, T, en los que inciden las dos últimas PS, PT es al rectángulo comprendido entre los senos de los ángulos Q, R, en que inciden las dos primeras PQ, PR. En todos los demás casos el lugar del punto P será una de las tres figuras que comúnmente se denominan secciones cónicas. Pero en lugar del trapecio ABCD puede colocarse un cuadrilátero cuyos dos lados opuestos se crucen mutuamente como diagonales. Y uno o dos de los cuatro puntos A, B, C, D, pueden llevarse al infinito con lo que los lados de la figura que convergen en dichos puntos resultarán paralelos; y en tal caso la sección cónica pasará por los demás puntos mientras que en la dirección de las paralelas irá hacia el infinito.



LEMA XIX

Hallar el punto P a partir del cual, si se trazan las cuatro dados, el rectángulo PQ, PR, PS, PT sobre otras cuatro en posición dada AB, CD, AC, BD, una a una y con ángulos dados, el rectángulo PQ × PR comprendido entre dos de aquéllas sea el rectángulo PS × PT comprendido entre las otras dos según una razón dada.

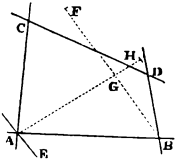


Hagamos que las líneas AB, CD, sobre las que se trazan las rectas PQ, PR, que contienen uno de los rectángulos, se crucen con las otras dos líneas de posición dada en los puntos A, B, C, D. Desde cualquiera de ellos A tracemos la recta AH en la que queremos hallar el punto P. Corte esta línea a las opuestas BD, CD, a saber, a BD en H y a CD en I, y por estar dados todos los ángulos de la figura estarán dadas las razones de PQ a PA y de PA a PS y, por tanto, la de PQ a PS. Restando ésta de la razón dada de

PQ × PR a PS × PT tendremos la razón de PR a PT, y sumando las razones dadas PI a PR y PT a PH tendremos la razón PI a PH y, por ende, el punto P. Q.E.I.

COROLARIO 1. De aquí que también se pueda trazar una tangente a un punto cualquiera D del lugar de los infinitos puntos P. Pues la cuerda PD, cuando coinciden los puntos P y D, esto es, cuando discurre AH por el punto D, resulta una tangente. En tal caso, la razón última de las evanescentes IP y PH se halla como se ha visto más arriba. Tracemos CF, paralela a la propia AD, tal que corte a BD en F y cortada en E según la dicha razón última, y también de DE será tangente dado que CF y la evanescente IH son paralelas e igualmente cortadas en E y en P.

COROLARIO 2. De aquí también puede definirse el lugar de todos los puntos P. Tracemos por uno cualquiera de los puntos A, B, C, D, por ejemplo A, la tangente AE al lugar de todos los puntos y por otro punto cualquiera B tracemos una paralela BF a la tangente y que corte al lugar en F. Por el lema XIX se hallará el punto F. Bisecando a BF en G y siendo indefinida la línea AG, ésta será la posición del diámetro al que vienen aplicadas ordenadamente BG y FG. Corte ahora AG al lugar en H y entonces AH será el diámetro o «latus transversum» al cual el «latus rectum» será como BG^2 a AG × GH. Si AG nunca cortase el lugar de los puntos, permaneciendo la línea AH infinita, entonces el lugar será una parábola y su «latus rectum» perteneciente al diámetro AG será $\frac{BG^2}{AG}$. Pero si corta al lugar en algún punto, entonces el lugar será una hipérbola cuando los puntos A y H estén situados al mismo lado del punto G; y una elipse cuando G esté entre A y H, salvo cuando por casualidad se dé que AGB sea recto y, por tanto, BG^2 sea igual al rectángulo AGH, caso en el que tendremos un círculo.

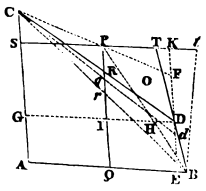


Y de este modo tenemos resuelto en el corolario, no por cálculo sino por composición geométrica como querían los antiguos, el problema por ellos planteado de las cuatro líneas, sugerido por Euclides y replanteado por Apolonio.

LEMA XX

Sea un paralelogramo cualquiera ASPQ cuyos dos ángulos opuestos A y P son tangentes a una sección cónica cualquiera en los puntos A y P; y prolónguense los lados AQ, AS de uno de ellos al infinito, hasta cortar a dicha sección en B y C; desde los puntos de cruce B y C trácense hasta un quinto punto D de la sección otras dos rectas BD, CD que corten en T y R a los otros dos lados PS, PQ prolongados del paralelogramo: las abscisas parciales PR y PT de los lados estarán siempre en una razón dada. Y al contrario, si tales abscisas parciales están entre sí en una razón dada, el punto D será tangente a la sección cónica que pase por los dichos cuatro puntos A, B, C, P.

CASO 1. Únanse BP, CP y trácense desde el punto D las dos rectas DG, DE, de las que la primera DG sea paralela a AB y corte a PB, PQ, CA, en H, I, G; y la otra DE sea paralela a AC y corte a PC, PS, AB, en F, K, E: (por el lema XVII) el rectángulo DE × DF será al rectángulo DG × DH según una razón dada. Pero PQ es a DE (o IQ) como



PB a HB y, por tanto, como PT a DH; y miembro a miembro, PQ es a PT como DE a DH. Y además, PR es a DF como RC es a DC y, por tanto, como PS (o IG) a DG, y alternativamente PR es a PS como DF a DG; y conjugando las razones, el rectángulo PQ × PR es al rectángulo PS × PT como el rectángulo DE × DF al rectángulo DG × DH y, por ende, en razón dada. Pero PQ y PS están dados, luego también está dada la razón PR a PT. Q.E.D.

CASO 2. Pero si se supone que PR y PT están entre sí en una razón dada, entonces razonando de igual modo en sentido inverso se seguirá que el rectángulo DE × DF está con el rectángulo DG × DH en una razón dada y, por tanto, el punto D (por el lema XVIII) cae en la sección cónica que pasa por los puntos A, B, C, P. Q.E.D.

COROLARIO 1. De aquí que si se hace a BC secante de PQ en *r*, y se toma P*t* sobre PT en razón a P*r* precisamente en la misma que guarda PT a PR: entonces B*t* será tangente a la sección cónica en el punto B. Pues imaginemos al punto D acercándose al punto B de modo que, al tender a desaparecer la cuerda BD, BT resulte tangente; y CD lo mismo que BT coincidirían con CB y B*t*.

COROLARIO 2. Y viceversa, si B*t* es tangente y BD, CD coinciden en un punto D cualquiera de una sección cónica, entonces PR será a PT como P*r* a P*t*. Y, por el contrario, si PR es a PT como P*r* a P*t*, entonces BD, CD coinciden en un punto cualquiera D de una sección cónica.

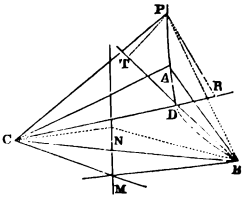
COROLARIO 3. Una sección cónica no corta a otra sección cónica más que en cuatro puntos. Pues, si posible fuera, pasen dos secciones cónicas por cinco puntos A, B, C, P, O, y córtelas la recta BD en los puntos D, *d*, mientras que la recta *Cd* corta a PQ en *q*. En consecuencia, PR es a PT como P*q* a PT; de donde PR y P*q* son iguales entre sí, contra la hipótesis.

LEMA XXI

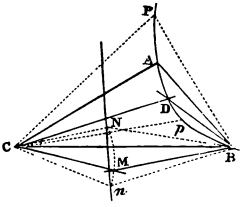
Si dos rectas BM, CM, móviles e infinitas trazadas por puntos dados B, C, a modo de polos, describen mediante el punto M en que se cruzan una recta MN de posición dada, y si otras dos rectas infinitas BD, CD, son trazadas de modo que constituyan con las primeras en los puntos B, C, los ángulos dados MBD, MCD, digo que estas dos BD, CD, mediante el punto en que se cruzan D, describen una sección cónica que pasa por los puntos B, C. Y viceversa, si las rectas BD, CD, mediante el punto en que se cruzan D, describen una sección cónica que pasa por los puntos B, C, A, y el ángulo DBM es siempre igual al ángulo dado ABC y el ángulo DCM es siempre igual al ángulo dado ACB, entonces el punto M cae en una recta de posición dada.

Pues trácese sobre la recta MN el punto N y cuando el punto móvil M coincide con el inmóvil N, coincida también el punto móvil D con el inmóvil P. Únanse CN, BN, CP, BP, y desde el punto P trácense las rectas PT, PR, que cortan a BD, CD, en T y R y que forman el ángulo BPT igual al ángulo dado BNM y el ángulo CPR igual también al ángulo dado CNM. Dado (por hipótesis) que los ángulos MBD, NBP son iguales, así

como los ángulos MCD, NCP, si se restan los ángulos comunes NBD y NCD, permanecerán iguales los ángulos NBM y PBT, NCM y PCR: y, por tanto, los triángulos NBM, PBT son semejantes lo mismo que los triángulos NCM, PCR. Por lo cual PT es a NM como PB a NB, y PR a NM como PC a NC. Pero los puntos B, C, N, P son inmóviles. En consecuencia, PT y PR están en razón dada a NM y, por ende, en razón dada entre sí; consecuentemente (por el lema XX), el punto D, en el que constantemente concurren las rectas móviles BT y CR, coincide con los de la sección cónica que pasa por los puntos B, C, P. Q.E.D.



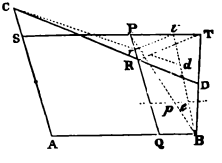
Y por el contrario, si el punto móvil D coincide con la sección cónica que pasa por los puntos B, C, A, y el ángulo DBM es siempre igual al ángulo dado ABC y el ángulo DCM también es siempre igual al ángulo dado ACB, y cuando el punto D coincide sucesivamente en dos puntos cualesquiera inmóviles *p*, P de la sección, el punto móvil M coincide también sucesivamente en dos puntos inmóviles *n*, N: trácese por dichos puntos *n*, N la recta *n*, N y ella será el lugar constante de dicho punto móvil M. Pues, si fuera posible, hágase correr al punto M por una curva. El punto D será tangente a una sección cónica que pase por cinco puntos B, C, A, *p*, P, mientras el punto M es tangente constantemente a una línea curva. Pero, según lo ya demostrado, el punto D toca también la sección cónica que pasa por los mismos cinco puntos B, C, A, *p*, P, mientras el punto M toca constantemente una línea recta. Luego las dos secciones cónicas pasan por los mismos cinco puntos, contra el corolario 3 del lema XX. Por tanto, hacer al punto M recorrer una línea curva es absurdo. Q.E.D.



PROPOSICIÓN XXII. PROBLEMA XIV

Trazar una trayectoria por cinco puntos dados.

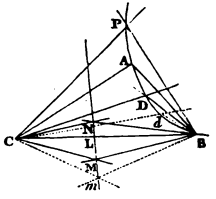
Sean los cinco puntos A, B, C, P, D, dados. Desde uno de ellos cualquiera A hasta otros dos cualesquiera B, C, considerados como polos, tracemos las rectas AB, AC, así como las paralelas a éstas TPS, PRQ, por el cuarto punto P. Tracemos después desde los dos polos B, C, por el quinto punto D, las dos rectas infinitas BDT, CRD, que corten a las últimamente trazadas TPS, PRQ (la primera a la primera y la segunda a la segunda) en T y R. Por fin, trazada *tr* paralela a TR, córtense las líneas P*t*, P*r*, tales que sean proporcionales a PT, PR; y si por los extremos *t*, *r*, de tales líneas y por los polos B, C, se trazan las líneas B*t*, C*r* concurrentes en *d*, entonces dicho punto *d* estará situado en la trayectoria buscada. Pues



(por el lema XX) dicho punto está situado en la sección cónica que pasa por los cuatro puntos A, B, C, P; y al tender a desaparecer las líneas R*r*, T*t*, tiende a coincidir el punto *d* con el punto D. Luego la sección cónica pasa por los cinco puntos A, B, C, P, D. Q.E.D.

Lo mismo de otro modo

Únanse tres de entre los puntos dados, A, B, C; y en torno a dos tomados como polos, B, C, háganse girar los ángulos ABC, ACB, de magnitud dada y aplíquense los lados BA, CA primero al punto D y después al punto P y señálense los puntos M, N en los que se cruzan entre sí los otros dos lados BL, CL. Trácese la recta infinita MN y háganse girar los mencionados ángulos móviles en torno a sus polos B, C, con la condición de que la intersección de los lados BL, CL o de BM, CM, supongámosla *m*, caiga siempre sobre la recta infinita MN; y la intersección de los lados BA, CA o BD, CD, supongámosla *d*, definirá la trayectoria buscada PAD*d*B. Pues (por el lema XXI) el punto *d* coincidirá con la sección cónica que pase por los puntos B, C: y cuando el punto *m* llega a los puntos L, M, N, el punto *d* (por construcción) llegará a los puntos A, D, P. Describirá, pues, una sección cónica que pase por los cinco puntos A, B, C, P, D. Q.E.F.



Corolario 1. De aquí que, con facilidad, se pueda trazar una recta que toque a la trayectoria en un punto dado B cualquiera. Llévese el punto *d* hasta el punto B y la recta *Bd* será la tangente buscada.

Corolario 2. De donde también pueden hallarse los centros de las trayectorias, los diámetros y los «latera recta», como en el corolario 2 del lema XIX.

ESCOLIO

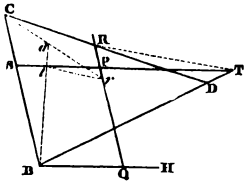
La construcción primera resulta un poco más simple uniendo BP y tomando sobre ella, prolongada si es menester, B*p* a BP como PR es a PT; y trazando por *p* la recta infinita *pe* paralela a SPT, tomando además sobre ella a *pe* siempre igual a P*r* y haciendo que las rectas B*e*, C*r*, concurran en *d*. Pues dado que serán iguales las razones de P*r* a P*t*, PR a PT, *p*B a PB, *pe* a P*t*, también lo serán *pe* y P*r*. Con este método los puntos de la trayectoria se hallan muy fácilmente, salvo que se prefiera describir la curva mecánicamente, como en la segunda construcción.

PROPOSICIÓN XXIII. PROBLEMA XV

Trazar una trayectoria que pase por cuatro puntos y sea tangente a una recta dada en posición.

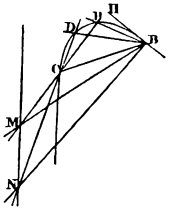
Caso 1. Supóngase dada la tangente HB, el punto de contacto B, y los otros tres puntos C, D, P. Únanse BC, procurando que PS sea paralela a la recta BH y que PQ lo sea a la

recta BC; complétese el paralelogramo BSPQ. Trácese BD secante de SP en T, y CD secante de PQ en R. Finalmente, trazada la línea *tr* paralela a TR, tomemos sobre PQ, PS los segmentos P*r*, P*t*, respectivamente proporcionales a PR, PT; y trazadas las líneas C*r*, B*t*, el punto *d* en que se cortan (por el lema XX) caerá siempre en la trayectoria que hay que describir.



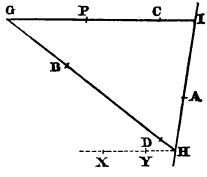
Lo mismo de otro modo

Hágase girar tanto el ángulo de magnitud dada CBH en torno al polo B, como el radio rectilíneo prolongado en ambas direcciones DC en torno al polo C. Señálense los puntos M, N en los cuales el lado BC del ángulo corta a dicho radio cuando el otro lado BH del ángulo coincide con el susodicho radio en los puntos P y D. Después, haciendo que el radio dicho CP o CD y el lado BC del ángulo coincidan siempre con la recta infinita MN, el cruce del otro lado BH con el radio describirá la trayectoria buscada.



Pues si en la construcción del problema anterior el punto A alcanza el punto B, las líneas CA y CB coincidirán y la línea AB en su última situación se convertirá en la tangente BH; y, por tanto, las construcciones hechas antes vienen a ser las mismas que las hechas ahora. En consecuencia, la concurrencia del lado BH con el radio describirá la sección cónica por los puntos C, D, P y la recta BH será tangente en el punto B. Q.E.F.

Caso 2. Sean los cuatro puntos dados B, C, D, P situados fuera de la tangente HI. Únanse dos a dos con las líneas BD, CP concurrentes en G y que cortan a la tangente, en H e I. Córtese la tangente en A de tal modo que HA sea a IA como es el rectángulo bajo la media proporcional entre CG y GP y la media proporcional entre BH y HD al rectángulo bajo la media proporcional entre DG y GB y la media proporcional entre PI e IC; y será A el punto de contacto. Pues si HX, paralela a PI, cortase a la trayectoria en cualesquiera puntos X e Y, habrá que colocar (por las cónicas) al punto A de tal modo que HA^2 sería a AI^2 en razón compuesta de la razón del rectángulo XHY al rectángulo BHD, o del rectángulo CGP al rectángulo DGB, y de la razón del rectángulo BHD al rectángulo PIC. Así pues, una vez hallado el punto de contacto A, se describirá la trayectoria como en el caso primero. Q.E.F.

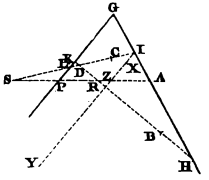


Sin embargo, puede tomarse el punto A entre los puntos H e Y o fuera de ellos; y, en consecuencia, describir por duplicado la trayectoria.

PROPOSICIÓN XXIV. PROBLEMA XVI

Trazar una trayectoria que pase por tres puntos dados y sea tangente a dos rectas de posición dada.

Sean las tangentes dadas HI, KI, y los puntos B, C, D. Trácese por dos cualesquiera puntos B, D la recta infinita BD que cruza a las tangentes en los puntos H, K. Después, por otros dos puntos cualesquiera C, D, trácese la recta infinita CD que cruce a las tangentes en los puntos I, L. Córtese a las rectas así trazadas en R y S de tal modo que sea HR a KR como es la media proporcional entre BH y HD a la media proporcional entre BK y KD, e IS a LS como la media proporcional entre CI e ID a la media proporcional entre CL y LD. Pero córtese por un punto arbitrario, ya entre los puntos K y H, I y L, ya fuera de ellos; trácese RS secante de las tangentes en A y P y serán A y P los puntos de contacto. Pues si se supone que A y P fuesen puntos de contacto situados en otros puntos de las tangentes y por uno de los puntos H, I, K, L, por ejemplo I, situado en otra tangente HI, se traza la recta IY, paralela a la otra tangente KI, y que corte a la curva en X e Y, en la cual recta se toma además IZ como media proporcional entre IX e IY: el rectángulo XIY, o IZ^2 (por las cónicas), será a LP^2 como el rectángulo CID al rectángulo CLD, esto es (por construcción), como SI^2 a SL^2 y, por tanto, IZ a LP como SI a SL. Los puntos S, P, Z, pertenecen, por tanto, a una misma recta. Ahora bien, al concurrir las tangentes en G, ocurrirá (por las cónicas) que el rectángulo XIY o IZ^2 será a IA^2 como GP^2 a GA^2 y, por tanto, IZ a IA como GP a GA. Pertenecen, pues, los puntos P, Z, y A a la misma recta y por tanto los puntos S, P y A están en la misma recta. Y con un argumento semejante se probará que los puntos R, P y A están en la misma recta. Pertenecen, pues, los puntos de contacto A y P a la recta RS. Y una vez hallados éstos, la trayectoria se trazará como en el caso primero del problema anterior. Q.E.F.

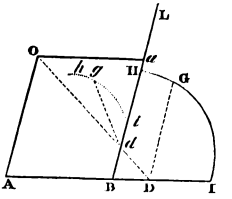


En esta proposición, y en el caso 2 de la anterior, las construcciones son las mismas, tanto si la recta XY corta a la trayectoria en X e Y como si no la corta; tales construcciones no dependen de dicha sección. Sino que, una vez demostradas las construcciones cuando la recta corta a la trayectoria, quedan también patentes las construcciones cuando no la corta; y por amor a la brevedad no me detengo en demostrarlas más profusamente.

LEMA XXII

Transformar unas figuras en otras del mismo género.

Sea la figura a transformar una figura cualquiera HGI. Trácense según plazca dos rectas paralelas OA, BL secantes a una tercera AB en los puntos A y B y en posición dada, y desde un punto cualquiera G de la figura trácese una línea GD, paralela a la misma OA. Después, desde un punto O, dado en la línea OA, trácese hasta el punto D la recta OD que corte a la recta BL en *d*, y desde el punto de cruce elévese la recta *dg* de modo



que contenga con la recta BL un ángulo dado, y además tal que tenga respecto a O*d* la misma razón que DG tiene respecto a OD; será *g* entonces en la nueva figura *hgi* el punto correspondiente a G. Del mismo modo cada punto de la primera figura vendrá a dar cada punto de la nueva figura. Pues imagínese que el punto G recorre con un movimiento continuo todos los puntos de la primera figura, y que el punto *g* también con movimiento continuo recorre todos los puntos de la nueva figura describiéndola de paso. Para distinguirlas llamemos DG a la primera ordenada, *dg* a la ordenada nueva; llamemos AD a la abscisa primera y *ad* a la abscisa nueva; llamemos O al polo y OD al radio abscindente, OA al radio ordenado primero y O*a* (con el que se cierra el paralelogramo OAB*a*) al radio ordenado nuevo.

Digo ahora que si el punto G toca a la línea recta en posición dada, el punto *g* tocará también a la línea recta de posición dada. Si el punto G toca la sección cónica, el punto *g* tocará también la sección cónica. Incluyo aquí el círculo entre las secciones cónicas. Pues si el punto G toca una línea de tercer orden analítico, el punto *g* tocará una línea del mismo orden; y lo mismo para curvas de orden superior. Dos líneas que sean tocadas por los puntos G, *g* serán siempre del mismo orden analítico. Puesto que *ad* es a OA como son O*d* a OD, *dg* a DG y AB a AD; por tanto, AD es igual a $\frac{OA \times AB}{ad}$, y DG es igual a $\frac{OA \times dg}{ad}$. Ahora si el punto G toca una línea recta y, por tanto, en la ecuación que contenga la relación entre la abscisa AD y la ordenada DG, dichas líneas indeterminadas AD y DG no alcanzan más que una única dimensión, escribiendo en esta ecuación $\frac{OA \times AB}{ad}$ en lugar de AD, y $\frac{OA \times dg}{ad}$ en lugar de DG, se obtendrá una nueva ecuación en la que la abscisa nueva *ad* y la nueva ordenada *dg* no alcanzarán más que una sola dimensión, y precisamente la que da por resultado una línea recta. Pero si AD y DG, o una de ellas, alcanzase en la primera ecuación una segunda dimensión, también *ad* y *dg* alcanzarán segundas dimensiones en la segunda ecuación. Y lo mismo para tres o más dimensiones. Las indeterminadas *ad*, *dg* en la segunda ecuación y AD, DG en la primera alcanzarán siempre el mismo número de dimensiones y, por tanto, las líneas a las que toquen los puntos G, *g* son del mismo orden analítico.

Digo además que si una recta tocase una línea curva en la primera figura, esta recta trasladada del mismo modo con la curva a la nueva figura tocará a esta línea curva en la nueva figura, y viceversa. Pues si dos puntos cualesquiera de la curva se acercan entre sí y llegan a coincidir en la primera figura, los mismos puntos trasladados se acercarán entre sí y llegarán a coincidir en la nueva figura; y, por tanto, las rectas con las que estos puntos estuvieron unidos resultarán a la vez tangentes de las curvas en ambas figuras.

Pueden construirse demostraciones de estas afirmaciones de modo más geométrico. Pero prefiero la brevedad.

Por tanto, si se ha de transformar una figura rectilínea en otra bastará trasladar las intersecciones de las rectas que constituyen la primera figura y por ellas trazar las rectas de la nueva. Si se ha de tratar, en cambio, de transformar una figura curvilínea, hay

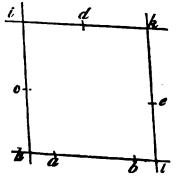
que trasladar los puntos, las tangentes y demás rectas en cuya virtud se define la curva. Sirve así este lema para resolver los problemas más difíciles, trasformando las figuras propuestas en otras más sencillas. Por tanto, cualesquiera rectas convergentes pueden trasformarse en paralelas si se toma como primer radio ordenado una línea recta cualquiera que pasa por el punto de convergencia; y esto porque dicho punto de convergencia cae de este modo en el infinito; y líneas paralelas son aquellas que nunca se encuentran. Pero, después que se resuelve el problema en la nueva figura, si realizando operaciones inversas, esta figura se transforma en la primitiva, se tendrá la solución buscada.

También es útil este lema para la solución de problemas de sólidos. Pues cuantas veces se presenten dos secciones cónicas con cuya intersección se pueda resolver el problema, se puede transformar cualquiera de ellas, si es una hipérbola o una parábola en una elipse: después la elipse se transforma fácilmente en un círculo. También una recta y una sección cónica, en la construcción de problemas de planos, se transforman en una recta y un círculo.

PROPOSICIÓN XXV. PROBLEMA XVII

Describir una trayectoria que pase por dos puntos dados y sea tangente a tres rectas de posición dada.

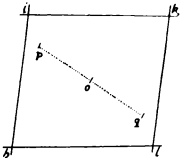
Trácese una recta infinita por el punto de intersección mutua de dos tangentes cualesquiera y por el punto de intersección de una tercera tangente con la recta que pase por los dos puntos dados; tomando como primer radio ordenado la recta así trazada, transfórmese la figura, por el lema anterior, en una nueva figura. En esta nueva figura las dos tangentes aquéllas resultarán entre sí paralelas, y la tangente tercera vendrá a ser paralela a la recta que pase por los dos puntos dados. Sean *hi*, *kl* dichas tangentes paralelas, *ik* la tercera tangente y *hl* la recta paralela a esta tercera tangente y que pasa por los puntos *ab*, por los que en esta nueva figura debe pasar la sección cónica, y que completa el paralelogramo *hikl*. Córtense las rectas *hi*, *ik*, *kl* en *c*, *d*, *e*, de modo que *he* sea al lado cuadrado del rectángulo *ahb*, que *ic* sea a *id*, y *ke* a *kd* como la suma de las rectas *hi* y *kl* es a la suma de las tres líneas de las cuales la primera es la recta *ik*, y las otras dos son los lados cuadrados de los rectángulos *ahb* y *alb*; y serán *c*, *d*, *e* los puntos de contacto. Pues, por las cónicas, hc^2 es al rectángulo *alb* como ic^2 es a id^2 y como ke^2 es a kd^2 y como el^2 es al rectángulo *alb*; y, por tanto, están en dicha razón subduplicada *he* al lado cuadrado del rectángulo *ahb*, *ic* a *id*, *ke* a *kd* y *el* al lado cuadrado del rectángulo *alb*, y sumando estarán en la razón dada todos los antecedentes *hi* y *kl* respecto a todos los consecuentes que son el lado cuadrado del rectángulo *alb*. Se tienen, pues, a partir de aquella razón dada los puntos de contacto *c*, *d*, *e*, en la nueva figura. Por las operaciones inversas del último lema trasládense estos puntos sobre la primera figura, y en ella (por el problema XIV) se trazará la trayectoria. Q.E.F. Por lo demás, como los puntos *a*, *b*, bien caerán entre los puntos *h*, *l*, bien fuera, los puntos *c*, *d*, *e*, deberán caer o entre los puntos *h*, *i*, *k*, *l*, o fuera. Si uno de los puntos *a*, *b*, cae entre los puntos *h*, *l*, y el otro cae fuera, el problema es imposible.



PROPOSICIÓN XXVI. PROBLEMA XVIII

Trazar una trayectoria que pase por un punto dado y sea tangente a cuatro rectas de posición dada.

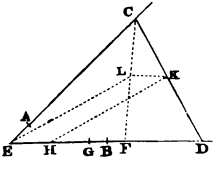
Trácese desde la intersección de dos tangentes cualesquiera una recta infinita hasta la intersección de las otras dos tangentes; tomando dicha recta por primer radio ordenado, transfórmese la figura (por el lema XXII) en una nueva figura, y los dos pares de tangentes, que concurrían en el primer radio ordenado, resultarán paralelas. Sean éstas *hi* y *kl*, *ik* y *hl* que completan el paralelogramo *hikl*. Sea *p* el punto correspondiente en esta nueva figura al punto dado en la primera. Trácese por el centro O de la figura la línea *pq*, y siendo O*q* igual a O*p* será *q* el otro punto por el que pasará la sección cónica en esta nueva figura. Por la operación inversa del lema XXII trasládese este punto a la figura primera y se tendrán en ella dos puntos por los que debe trazarse la trayectoria. Por ellos, en efecto, por el problema XVII, puede trazarse dicha trayectoria. Q.E.F.



LEMA XXIII

Si dos rectas de posición dada AC, BD terminan en dos puntos dados A, B, y están entre sí en una razón dada y la recta CD con la que se unen los puntos indeterminados C, D, es cortada en K en una razón dada: digo que el punto K está en una recta de posición dada.

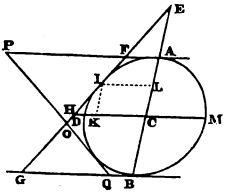
Concurran, pues, las rectas AC, BD, en E, y sobre BE tómese BG a AE como es BD a AC, y sea FD siempre igual a la distancia dada EG; y por construcción EC será a GD, esto es, a EF como AC a BD, y, por tanto, en razón dada, y, por tanto, estará dado el tipo de triángulo EFC. Córtese CF en L de modo que CL esté en razón a CF como CK a CD; y por la razón dada anterior, se dará también el tipo de triángulo EFL; y, por tanto, el punto L estará situado en la recta EL de posición dada. Únase LK, y los triángulos CLK, CFD serán semejantes; y por estar dadas FD y la razón de LK a FD, estará dada también LK. Igual a ésta tómese EH y ELKH será siempre un paralelogramo. Se halla, pues, el punto K en el lado de posición dada HK de dicho paralelogramo. Q.E.D.



COROLARIO. Por estar la figura EFLC dada en especie, las tres rectas EF, EL y EC, esto es, GD, HK y EC están entre sí en una razón dada.

LEMA XXIV

Si tres rectas fuesen tangentes a cualquier sección cónica de las cuales dos fuesen paralelas y de posición dada, digo que el semidiámetro de la sección paralelo a estas dos será media proporcional entre los segmentos de las mismas comprendidos entre los puntos de contacto y la tercera tangente.



Sean AF, GB dos paralelas tangentes a la sección cónica ADB en los puntos A y B; sea EF una tercera recta tangente a la sección cónica en I, y que se corte con las dos tangentes anteriores en F y G; y sea CD el semidiámetro de la figura paralelo a las tangentes: digo que AF, CD, BG, están en proporción continua.

Pues si los diámetros conjugados AB, DM cortasen a la tangente FG en E y H y se cortasen mutuamente en C y se completase el paralelogramo IKCL, ocurrirá por la naturaleza de las cónicas que EC será a CA como CA a CL, y también como las diferencias EC – CA a CA – CL, esto es, como EA a AL y sumando, EA a EA + AL, o sea, EL como EC a EC + CA, o sea, EB; y, por tanto, por la semejanza de los triángulos EAF, ELI, ECH, EBG, AF es a LI como CH es a BG. Al igual que, por la naturaleza de las cónicas, LI o CK es a CD como CD es a CH; y, por tanto, permutadas adecuadamente AF es a CD como CD es a BG. Q.E.D.

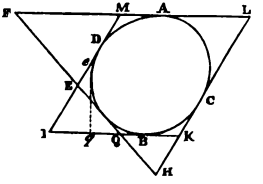
COROLARIO 1. De aquí que si dos tangentes FG, PQ cortasen a las tangentes paralelas AF, BG en F y G, P y Q y se cortasen entre sí en O; permutadas adecuadamente ocurriría que AF es a BQ como AP es a BG, y por separación como FP a GQ y, por tanto, como FO a OG.

COROLARIO 2. De donde también dos rectas PG, FQ trazadas por los puntos P y G, F y Q concurren en la recta ACB que pase por el centro de la figura y por los puntos de contacto A, B.

LEMA XXV

Si los cuatro lados de un paralelogramo, prolongados infinitamente, fuesen tangentes a una sección cónica y son cortados a su vez por una quinta tangente cualquiera; tomando las abscisas de dos lados cualesquiera contiguos y terminadas ellas en los ángulos opuestos del paralelogramo: digo que cada una de las abscisas será al lado del que es abscisa como la parte del otro lado contiguo comprendida entre el punto de contacto y el tercer lado es a la otra parte de las abscisas.

Sean los cuatro lados ML, IK, KL, MI del paralelogramo MLIK tangentes a la sección cónica en A, B, C, D, y corte la quinta tangente FQ a dichos lados en F, Q, H y E; tómese sobre los lados MI, KI, las abscisas ME, KQ, o sobre los lados KL, ML, las abscisas KH, MF: digo que ME será a MI como BK a KQ; y KH a KL como AM a MF.



Pues, por el corolario primero del lema anterior, ME es a EI como AM o BK a BQ, y sumando ME a MI como BK a KQ. Q.E.D. Y también KH a HL como BK o AM a AF, y dividiendo KH a KI como AM a MF. Q.E.D.

COROLARIO 1. De aquí que si se tiene dado el paralelogramo IKLM, descrito en torno a una sección cónica dada, se tendrá dado también el rectángulo KQ × ME, al igual que el rectángulo igual a este KH × MF. Pues dichos rectángulos son iguales por la semejanza de los triángulos KQH, MFE.

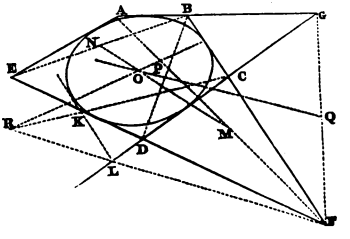
COROLARIO 2. Y si se traza una sexta tangente *eq* que incida sobre las tangentes KI, MI en *q* y *e*, el rectángulo KQ × ME será igual al rectángulo K*q* × M*e*; y KQ será a M*e* como K*q* a ME y sustrayendo como Q*q* a E*e*.

COROLARIO 3. De donde también, si se unen y se bisecan E*q* y *e*Q y se traza una recta por los puntos de las bisecciones, pasará esta recta por el centro de la sección cónica. Puesto que al ser Q*q* a E*e* como KQ a M*e*, dicha recta pasará por la mitad de todas las rectas E*q*, *e*Q, M*k* (por el lema XXIII) y el medio de la recta MK es el centro de la sección.

PROPOSICIÓN XXVII. PROBLEMA XIX

Describir una trayectoria que sea tangente a cinco rectas de posición dada.

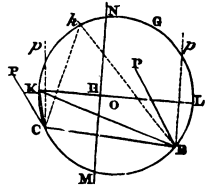
Supónganse dadas en posición las tangentes ABG, BCF, GCD, FDE, EA. Biséquense en M y N las diagonales AF, BE, contenidas entre cuatro tangentes cualesquiera ABFE y (por el corolario 3 del lema XXV) la recta MN trazada por los puntos de las bisecciones pasará por el centro de la cónica. Después biséquense en P y Q las diagonales (digamos) BD, GF, de la figura cuadrilátera BGDF contenidas entre otras cuatro tangentes cualesquiera, y la recta PQ trazada por los puntos de la bisección pasará por el centro de la trayectoria cónica. Se tendrá, pues, el centro en el punto de concurso de las bisecantes. Sea O dicho punto. Trácese a cualquiera tangente BC una paralela KL, tal que esté situada a la distancia precisa, para que el centro O quede en el punto medio entre las paralelas, y trazada KL será tangente a la trayectoria a describir. Por los puntos de contacto C y K, F y L de estas tangentes no paralelas CL, FK, con las paralelas CF, KL, trácense CK, FL, concurrentes en R, y la recta OR trazada y prolongada cortará a las tangentes paralelas CF, KL, en los puntos de contacto. Esto es evidente por el corolario 2 del lema XXIV. Del mismo modo es posible hallar los demás puntos de contacto y finalmente, por la construcción del problema XIV, describir la trayectoria. Q.E.F.



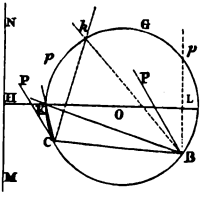
ESCOLIO

Los problemas en que se dan o los centros o las asíntotas de las trayectorias quedan incluidos en lo que precede. Pues dados a la vez los centros y los puntos y las tangentes, están dados también todos los demás puntos y tangentes de la otra parte equidistantes del centro. Una asíntota debe ser considerada como si fuera una tangente y su término infinitamente distante (por decirlo así) como el punto de contacto. Imagínese que el punto de contacto de una tangente cualquiera se alejase hasta el infinito; en tal caso, la tangente se transforma en asíntota y las construcciones de los problemas precedentes se transforman en construcciones en las que se da una asíntota.

Una vez descrita la trayectoria es posible hallar los ejes y los focos de la misma por este método. En la construcción y figura del lema XXI hágase que los lados BP, CP, de los ángulos móviles PBN, PCN, con cuya intersección se describía la trayectoria, sean entre sí paralelos y, conservando su misma posición, giren sobre sus polos B, C, en dicha figura. Entretanto, los otros lados CN, BN, de dichos ángulos describirán con su intersección en K o *k* el círculo BGKC. Seá O el centro de este círculo. Desde este centro trácese sobre la regla MN, en la que concurrían los lados CN, BN, mientras se trazaba la trayectoria cónica, la normal OH que corta el círculo en K y L. Y cuando los otros lados CK, BK, concurren en el punto susodicho K que está más cerca de la regla, los lados primeros CP, BP, serán paralelos al eje mayor, y perpendiculares al menor; y lo contrario ocurrirá si los mismos lados concurren en el punto más distante L. De donde si se da el centro de la trayectoria se darán también los ejes. Y dados éstos, los focos están a un paso.



Pero los cuadrados de los ejes están entre sí como KH a LH, y de aquí es fácil describir una cónica de una especie dada por cuatro puntos dados. Pues si dos de los puntos dados se toman como los polos C, B, el tercero dará los ángulos móviles PCK, PBK; dados éstos se puede trazar el círculo BGKC. Entonces, por estar dada la especie de trayectoria cónica, se tendrá la razón OH a OK y, por tanto, la propia OH. Con centro en O y con distancia OH trácese otro círculo y la recta tangente a este círculo que pasa por el cruce de los lados CK, BK, cuando los lados primeros CP, BP, concurren en el cuarto punto dado, será la regla aquella MN con cuya ayuda se traza la trayectoria. De donde también a veces un trapecio de especie dada (si se exceptúan algunos casos imposibles) puede inscribirse en cualquiera sección cónica dada.

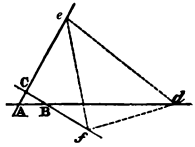


Hay otros lemas en cuya virtud pueden trazarse trayectorias de una especie dada, si se dan los puntos y las tangentes. De este género es el de que si se traza una línea recta por un punto de posición dada que corte a una sección cónica dada en dos puntos y se biseca el intervalo comprendido entre las intersecciones, el punto de la bisección es tangente a otra sección cónica de la misma especie que la anterior y cuyos ejes son paralelos a los ejes de la anterior. Pero paso a cosas más útiles.

LEMA XXVI

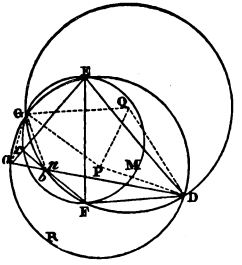
Situar uno a uno los tres ángulos de un triángulo de especie y magnitud dadas sobre tres rectas dadas también en posición y que no sean entre sí paralelas ninguna.

Se tienen en posición tres rectas infinitas AB, AC, BC y es preciso colocar el triángulo DEF de tal manera que su ángulo D toque la línea AB, el ángulo E toque la línea AC y el ángulo F la línea BC. Sobre DE, DF y EF trácense tres segmentos circulares DRE, DGF, EMF, que comprendan ángulos respectivamente iguales a los ángulos BAC, ABC, ACB. Pero se han de trazar estos segmentos sobre aquellas partes de las líneas DE, DF, EF, de tal modo que al girar las letras DRFD lo hagan en el mismo orden que las letras BACB y que las letras DGFE giren en el mismo orden que las letras ACBA; después complétense estos segmentos circulares en sus círculos completos. Sea G el punto en que se corten los dos primeros círculos y sean sus centros P y Q. Unidos GP, PQ, tómese G*a* a AB como GP a PQ y, con centro en G y con distancia G*a*, trácese un círculo que



corte al círculo primero DGE en *a*. Únase por una parte *a*D secante del círculo segundo DFG en *b* y por otra *a*E secante del círculo tercero EMF en *c*. Y ya es factible la figura ABC*def* semejante e igual a la figura *abc*DEF. Con lo cual se completa el problema.

Trácese, pues, Fc que toque a *a*D en *n*, y únanse *a*G, *b*G, QG, QD, PD. Por construcción, el ángulo E*a*D es igual al ángulo CAB, y el ángulo *ac*F igual al ángulo ACB, y, por tanto, el triángulo *anc* equiángulo con el triángulo ABC. Luego el ángulo *anc* o F*n*D es igual al ángulo ABC y, por tanto, al ángulo F*b*D, y por eso el punto *n* coincide con el punto *b*. Además, el ángulo GPQ, que es la mitad del ángulo central GPD, es igual al ángulo en la circunferencia G*a*D, y el ángulo GQP, que es la mitad del ángulo central GQD, es igual al complemento para dos rectos del ángulo en la circunferencia G*b*D y, por tanto, igual al ángulo G*ba*; y así los ángulos GPQ, G*ab* son semejantes; y G*a* es respecto a *ab* como GP es a PQ; esto es (por construcción), como G*a* a AB. Pero son iguales *ab* y AB y, por tanto, los triángulos *abc* y ABC, que acabamos de probar que son semejantes, son también iguales. En consecuencia, puesto que los ángulos D, E, F, del triángulo DEF caen respectivamente sobre los lados *ab*, *ac*, *be*, del triángulo *abc*, la figura ABC*def* puede ser completada semejante e igual a la figura *abc*DEF, y construyéndola quedará resuelto el problema. Q.E.F.

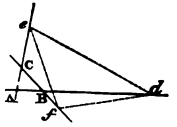


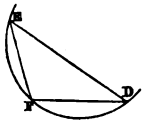
COROLARIO. Ahora puede trazarse una recta cuyas partes de longitud dada queden interceptadas entre tres rectas de posición dada. Supongamos el triángulo DEF, cuyo punto D se acerca al lado EF, y cuyos lados DE, DF, están colocados sobre una recta, convirtiéndose en una línea recta cuya parte dada DE estará interceptada por las rectas

de posición dada AB, AC y la otra parte dada DF estará interceptada por las rectas de posición dada AB, BC; y aplicando la construcción precedente a este caso quedará el problema resuelto.

PROPOSICIÓN XXVIII. PROBLEMA XX

Describir una trayectoria dada en cuanto a forma y magnitud cuyas partes dadas queden interceptadas por tres rectas de posición dada.





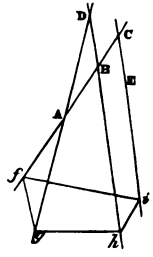
La trayectoria que se ha de describir habrá de ser semejante e igual a la curva DEF y habrá de estar cortada por tres rectas AB, AC, BC, de posición dada en partes semejantes e iguales a las partes dadas de esta DE y EF.

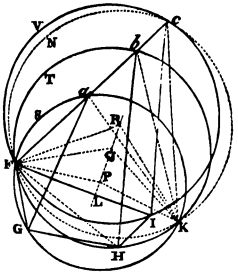
Tracemos las rectas DE, EF, DF y hagamos que los ángulos D, E, F, de este triángulo DEF caigan sobre las rectas de posición dada (por el lema XXVI) y después tracemos la trayectoria en torno al triángulo semejante e igual a la curva DEF. Q.E.F.

LEMA XXVII

Describir un trapecio de forma dada cuyos ángulos toquen cada uno a cada una de cuatro rectas dadas en posición tales que ni todas sean paralelas ni converjan en un punto común.

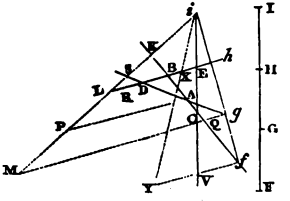
Sean las cuatro rectas dadas en posición ABC, AD, BD, CE, de las cuales, la primera corta a la segunda en A, a la tercera en B y a la cuarta en C; y hay que describir un trapecio *fghi*, que sea semejante al trapecio FGHI; y cuyo ángulo *f*, igual al ángulo dado F, toque a la recta ABC y el resto de los ángulos *g*, *h*, *i*, iguales a los ángulos también dados G, H, I, toquen a las otras líneas AD, BD, CE, respectivamente. Únase FH y sobre FG, FH, FI, trácense otros tantos segmentos circulares FSG, FTH, FYI, de los cuales el primero FSG comprenda un ángulo igual al ángulo BAD, el segundo FTH comprenda un ángulo igual al ángulo CBD y el tercero FVI comprenda un ángulo igual al ángulo ACE. Pero deben trazarse los segmentos hacia aquellas partes de las líneas FG, FH, FI, de modo tal que el orden de las letras FSGF sea el mismo orden circular que el de las letras BADB y que el orden de las letras FTHF sea el mismo que el de las letras CBDC y que el de las letras FVIF sea el mismo en su giro que el de las letras ACEA. Complétense los segmentos en círculos completos y sea P el centro del primer círculo FSG, y Q el centro del segundo FTH. Únanse y prolónguese PQ y tómese sobre ella QR en la misma proporción a PQ que tiene BC a AB. Pero tómese QR hacia el lado del punto Q tal que el orden de las letras P, Q, R, sea el mismo que el de las





letras A, B, C; y con centro en R y con distancia RF trácese un cuarto círculo FN*c* que corte al círculo tercero FVI en *c*. Únase F*c* cortando al círculo primero en *a* y al segundo en *b*. Trácense *a*G, *b*H, *c*I, y puede obtenerse la figura ABC*fghi* semejante a la figura *abc*FGHI. Una vez hecho esto el trapecio *fghi* será el mismo que era preciso construir.

Pues, los dos círculos primeros FSG, FTH, córtense mutuamente en K. Únanse PK, QK, RK, *a*K, *b*K, *e*K, y prolónguese QP hasta L. Los ángulos en las circunferencias F*a*K, F*b*K, F*c*K, son mitades de los ángulos centrales FPK, FQK, FRK y, por tanto, iguales a los ángulos que son mitad de ellos, LPK, LQK, LRK. Por tanto, la figura PQRK es equiángula y semejante a la figura *abc*K y por ello *ab* es a *bc* como PQ es a QR, esto es, como AB a BC. Y además, por construcción, los ángulos *f*Ag, *f*Bh, *f*Ci son iguales a los ángulos F*a*G, F*b*H, F*c*I. Luego puede construirse la figura ABC*fghi* semejante a la figura *abc*FGHI. Hecho esto se tendrá el trapecio *fghi*, semejante al trapecio FGHI, y con sus ángulos *f*, *g*, *h*, *i*, tocará a las rectas ABC, AD, BD, CE. Q.E.F.



Corolario. Ahora se puede trazar una recta cuyas partes, interceptadas por cuatro rectas dadas en posición según un cierto orden, tendrán entre sí una proporción dada. Auméntense los ángulos FGH, GHI, hasta el punto que las rectas FG, GH, HI, se hallen sobre una misma recta y para construir el problema en el presente caso se trazará la recta *fghi* cuyas partes *fg*, *gh*, *hi*, interceptadas por las cuatro rectas de posición dada AB y AD, AD y BD, BD y CE, serán entre sí como las líneas FG, GH, HI, y mantendrán entre sí el mismo orden. Pero esto mismo se halla más directamente como sigue.

Prolónguese AB hasta K y BD hasta L, de modo que BK sea a AB como HI a GH, y DL a BD como GI a FG, y únanse KL con la prolongación de CE pasando por *i*. Prolónguese *i*L hasta M de modo que LM sea a *i*M como GH es a HI y trácese ahora MQ paralela a LB y que corte a la recta AD en *g* así como *gi* que corte a AB, BD en *f*, *h*. Y digo que está hecho.

Pues corte M*g* a la recta AB en Q, y AD a la recta KL en S, y trácese AP que sea paralela a BD y toque a *i*L en P, y estarán en idéntica razón *g*M *a* L*h* (*gi* a *hi*, M*i* a L*i*, GI a HI, AK a BK) y AP a BL. Córtese DL en R de modo que DL sea a RL en la misma dicha razón; y por ser proporcionales *g*S a *g*M, AS a AP y DS a DL, por lo mismo, como *g*S es a L*h* será AS a BL y DS a RL; y conjuntamente BL – RL a L*h* – BL como AS – DS a *g*S – AS. Esto es, BR a B*h* como AD a A*g* y, por tanto, como BD a *g*Q. Y alternativamente BR a BD como B*h* a *g*Q, o sea, *fh* a *fg*. Pero, por construcción, la línea BL fue cortada en razón idéntica en D y en R a como lo fue la línea FI en G y en H: por ello BR

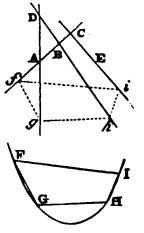
es a BD como FH es a FG. Luego *fh* es a *fg* como FH es a FG. Pero como también sea *gi* a *hi* como M*i* a L*i*, esto es, como GI a HI, es evidente que las líneas FI, *fi* están cortadas de modo igual en G, H y en *g*, *h*. Q.E.F.

En la construcción de este corolario, después de trazar LK secante de CE en *i*, se puede prolongar *i*E hasta V de modo que EV sea a E*i* como FH es a HI, y trazar V*f* paralela a BD. Lo mismo ocurre si con centro en *i* y distancia IH se describe un círculo que corte a BD en X y se prolonga *i*X hasta Y de modo que *i*Y sea igual a IF, y se traza Y*f* paralela a BD.

De este problema ya dieron otras soluciones Wren y Wallis hace tiempo.

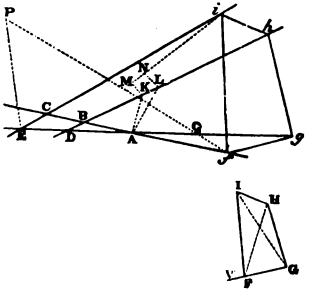
PROPOSICIÓN XXIX. PROBLEMA XXI

Describir una trayectoria de forma dada que esté cortada en partes dadas en orden, forma y proporción por cuatro rectas dadas en posición.



Ha de trazarse una trayectoria que sea semejante a la línea curva FGHI y cuyas partes, semejantes y proporcionales a las partes de aquella FG, GH, HI, estén interceptadas entre las rectas AB y AD, AD y BD, BD y CE dadas en posición, la primera entre las primeras, la segunda entre las segundas, la tercera entre las terceras. Trazadas las rectas FG, GH, HI, FI, trácese (por el lema XXVII) el trapecio *fghi*, semejante al trapecio FGHI, y tal que sus ángulos *f*, *g*, *h*, *i*, toquen las rectas de posición dada AB, AD, BD, CE, cada uno a cada una en el orden dicho. Después trácese la trayectoria en torno a este trapecio y será semejante a la línea curva FGHI.

ESCOLIO



También se puede construir este problema como sigue. Unidos FG, GH, HI, FI, prolónguese GF hasta V, y únanse FH, IG, y háganse los ángulos CAK, DAL iguales a los ángulos FGH, VFH. Sean concurrentes AK y AL con la recta BD en K y en L, y desde aquí trácense KM y LN tales que KM forme el ángulo AKM igual al ángulo GHI y sea como HI es a GH, y LN forme el ángulo ALN igual al ángulo FHI y sea a AL como HI es a FH. Pero han de trazarse AK, KM, AL, LN hacia aquel lado de las líneas AD, AK, AL que permita que las letras CAKMC, ALKA, DALND giren en el mismo orden que las letras FGHIF; y trazada MN

vaya a encontrar a CE en *i*. Hágase el ángulo *i*EP igual al ángulo IGF, y sea PE a E*i* como FG a GI; y trácese por P la recta PQ*f* que contenga con la recta ADE al ángulo PQE igual al ángulo FIG, y corte a la recta AB en *f*, y únase *fi*. Pero trácense PE y PQ hacia los lados de las líneas CE, PE de modo que la disposición circular de las letras PE*i*P y PEQP sea la misma que la de las letras FGHIF, y si sobre la línea *fi*, también con el mismo orden de las letras, se forma el trapecio *fghi*, semejante al trapecio FGHI, y se circunscribe la trayectoria de forma dada, se habrá resuelto el problema.

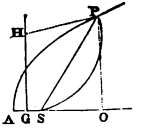
Hasta aquí hemos tratado de cómo hallar las órbitas. Falta ahora que tratemos de cómo determinar los movimientos de los cuerpos en las órbitas descubiertas.

SECCIÓN VI

SOBRE CÓMO HALLAR LOS MOVIMIENTOS EN ÓRBITAS DADAS

PROPOSICIÓN XXX. PROBLEMA XXII

Hallar el lugar, en un momento dado, de un cuerpo que se mueve en una trayectoria parabólica dada.



Sea S el foco y A el vértice principal de la parábola, y 4AS × M sea igual al área de la sección parabólica APS que ha sido descrita por el radio SP, bien sea después del paso del cuerpo por el vértice, bien se haya de describir hasta su llegada al dicho vértice. Se conoce la magnitud del área de dicha sección por su proporcionalidad al tiempo. Elévese la perpendicular GH tal que corte en dos partes iguales a AS en G y sea igual a 3M, y el círculo trazado con centro en H y radio HS cortará a la parábola en el lugar buscado P. Pues, trazada PO perpendicular al eje y trazada PH, ocurre que $AG^2 + GH^2 [= HP^2 = (AO - AG)^2 + (PO - GH)^2] = AO^2 + PO^2 - 2GAO - 2GH \times PO + AG^2 + GH^2$. De donde $2GH \times PO [= AO^2 + PO^2 - 2GAO] = AO^2 + \frac{1}{4}PO^2$. En lugar de AO^2 póngase $AO \times \frac{PO^2}{4AS}$; dividiendo todos los términos por 3PO y multiplicándolos por 2AS resultará $\frac{1}{6}GH \times AS$ $[= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{12}AS \times PO = \frac{AO + 3AS^2}{6} \times PO = \frac{4AO - 350}{6} \times PO$ = área de (APO − SPO)] = al área de APS. Pero GH era 3M y, por tanto, $\frac{1}{6}GH \times AS$ es 4AS × M. Luego el área comprendida en la sección APS es igual a la de la sección que corresponde a 4AS × M. Q.E.D.

COROLARIO 1. De aquí que GH es a AS como el tiempo en el que el cuerpo describe el arco AP al tiempo en que el cuerpo describe el arco comprendido entre el vértice A y la perpendicular al eje elevada por el foco S.

COROLARIO 2. Y, en el círculo ASP que pasa perpetuamente por el cuerpo en movimiento P, la velocidad en el punto H es a la velocidad que tenía el cuerpo en el vértice

A como 3 a 8; y, por tanto, la línea GH está en esa misma razón respecto a la recta que podría describir en el tiempo de su movimiento desde A hasta POG, con la velocidad que tenía en el vértice A.

COROLARIO 3. Y viceversa, también puede hallarse, a partir de aquí, el tiempo en que un cuerpo describe un arco cualquiera determinado AP. Únase AP y por su punto medio elévese una perpendicular que toque a la recta GH en H.

LEMA XXVIII

No existe figura oval alguna cuya área, seccionada por rectas cualesquiera, pueda hallarse de modo general mediante ecuaciones finitas en cuanto al número de términos y dimensiones.

Dése dentro del círculo oval un punto cualquiera, en torno al cual como polo gire perpetuamente una línea recta, con movimiento uniforme, y mientras tanto, sobre dicha línea, salga desde el polo un punto móvil que camine siempre con una velocidad que sea como el cuadrado de la recta dentro del óvalo. Con este movimiento dicho punto describirá una espiral de infinitos giros. Ahora bien, si pudiese hallarse mediante una ecuación finita la parte de área oval cortada por la tal recta, también se hallaría mediante esa misma ecuación la distancia desde el polo al punto, ya que es proporcional a dicha área, y, en consecuencia, podrían hallarse todos los puntos de la espiral mediante una ecuación finita; y, por tanto, también podría hallarse mediante una ecuación finita la intersección de cualquier recta dada en posición con la espiral. Pero toda recta prolongada infinitamente corta a la espiral en infinitos puntos, y la ecuación por la que se halla la intersección de dos líneas contiene todas las intersecciones entre ellas mediante otras tantas raíces y alcanza por tanto tantas dimensiones como intersecciones haya. Puesto que dos círculos se cortan mutuamente en dos puntos, una intersección no se halla más que mediante una ecuación de dos dimensiones, mediante la cual también puede hallarse la otra. Puesto que las intersecciones de dos secciones cónicas pueden ser cuatro, no podrá hallarse de modo general una de ellas más que mediante una ecuación de cuatro dimensiones, la cual permitirá hallarlas todas a la vez. Pues si se buscan separadamente cada una de dichas intersecciones, dado que la ley y condición de cada una es la misma, el cálculo será el mismo en todos los casos y por ello la conclusión será siempre la misma, la cual deberá además por ello contener a la vez todas las intersecciones y expresarlas indistintamente. De donde también se sigue que las intersecciones de las secciones cónicas con las curvas de tercer grado, dado que pueden ser seis, se resolverán conjuntamente mediante ecuaciones de seis dimensiones, y las intersecciones de dos curvas de tercer grado, puesto que pueden ser nueve, se resolverán a la vez mediante ecuaciones de nueve dimensiones. Si esto no fuese así de modo necesario, sería posible reducir todos los problemas de sólidos a problemas de planos y los de orden superior a los sólidos a problemas de sólidos. Hablo aquí de curvas de grado irreductible. Pues si la ecuación por la que se define la curva se puede reducir a un grado inferior, no sería una sola curva, sino compuesta de dos o más cuyas intersecciones pueden hallarse por separado mediante cálculos distintos. Del mismo modo, las dos intersecciones de las rectas y las secciones cónicas se resuelven siempre mediante ecuaciones de dos dimensiones; las tres intersecciones de las rectas con las curvas irreductibles de tercer grado mediante ecua-

ciones de tres dimensiones, las cuatro intersecciones de rectas con curvas irreductibles de cuarto grado mediante ecuaciones de cuatro dimensiones, y así hasta el infinito. Por tanto, las infinitas intersecciones entre una recta y una espiral, dado que esta curva es simple y no se puede reducir a otras varias curvas, requieren ecuaciones de infinito número de dimensiones y raíces mediante las cuales puedan resolverse todas las intersecciones a la vez. Ello porque la ley y el cálculo de todas son idénticos. Pues si se traza una perpendicular desde el polo sobre dicha recta secante y se hace girar dicha perpendicular en torno al polo junto con la secante, las intersecciones de la espiral se sucederán mutuamente una a otra y la que estaba la primera o más cercana será la segunda al cabo de una revolución, la tercera después de dos, y así sucesivamente; pero mientras tanto no cambiará la ecuación salvo en la medida en que cambien las magnitudes de las cantidades por cuyo medio se determina la posición de la secante. Por lo cual, dado que dichas cantidades vuelven a ser, después de cada revolución, las mismas que eran al principio, la ecuación también vuelve a ser de la misma forma y, por tanto, una y la misma ecuación ofrecerá todas las intersecciones y por ello tendrá el infinito número de raíces por medio de las cuales sería posible ofrecer todas aquellas. En consecuencia, no se puede hallar de modo general la intersección de una recta y una espiral mediante una ecuación finita, y por eso mismo no existe figura oval cuyo área cortada por rectas cualesquiera pueda ser determinada de modo general por medio de ecuación alguna de este tipo.

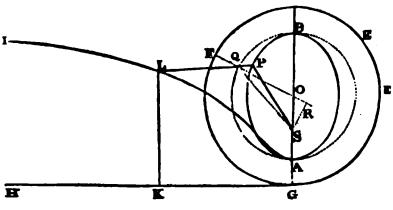
Mediante el mismo argumento puede probarse que, si el intervalo entre el polo y el punto con el que se describe la espiral se tomase proporcionalmente al perímetro de la figura oval abscindida, tampoco es posible hallar la longitud del perímetro de un modo general mediante una ecuación finita. Pero aquí hablo de óvalos a los que no son tangentes figuras conjugadas que evaden al infinito.

COROLARIO. De aquí que el área de una elipse descrita por el radio trazado desde un foco hasta un cuerpo en movimiento no puede hallarse a partir del tiempo dado por medio de una ecuación finita; y por eso no se podrá determinar mediante la descripción de curvas racionales geométricamente. Denomino racionales geométricamente a las curvas cuyos puntos todos pueden ser establecidos por medio de longitudes definidas mediante ecuaciones, esto es, por razones complejas de longitudes; a las demás (espirales, cuadráticas, trocoides) las denomino irracionales. Pues las longitudes que son o que no son como número a número (según el libro X de los *Elementos*) son racionales o irracionales aritméticamente. Así pues, de una elipse segrego el área proporcional al tiempo mediante una curva geométricamente irracional del modo siguiente.

PROPOSICIÓN XXXI. PROBLEMA XXIII

Hallar el lugar en un momento dado de un cuerpo que se mueve en una trayectoria elíptica dada.

Sea A el vértice principal, S el foco y O el centro de la elipse APB, y sea P el lugar a hallar del cuerpo. Prolónguese OA hasta G de modo que OG sea a OA como OA a OS. Elévese la perpendicular GH, y con centro en O y distancia OG trácese el círculo GEF, y sobre la regla GH a modo de base hágase avanzar la rueda GEF girando sobre su eje y mientras tanto va describiendo con su punto A la trocoide ALI. Hecho esto, tómese GK

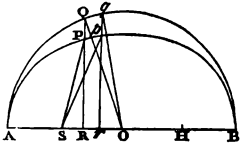


en razón al perímetro de la rueda GEFG como el tiempo en que el cuerpo partiendo de A describió el arco AP al tiempo de una revolución en la elipse. Elévese la perpendicular KL que se encuentra con la trocoide en L, y trazada LP paralela a la propia KG, encontrará a la elipse en el lugar buscado, P, del cuerpo.

Pues con centro en O y distancia OA trácese el semicírculo AQB y LP, prolongada si es preciso, toque en Q al arco AQ, y únanse SQ y OQ. Toque OQ al arco EFG en F y sobre la propia OQ trácese la perpendicular SR. El área APS es como el área AQS, esto es, como la diferencia entre el sector PQA y el triángulo OQS o también como la diferencia entre los rectángulos ½OQ × AQ y ½OQ × SR, esto es, por estar dado ½OQ, como la diferencia entre el arco AQ y la recta SR y, por tanto (al ser iguales las razones dadas SR al seno del arco AQ, OS a OA, OA a OG, AQ a GF, y dividiendo, AQ – SR a GF – seno del arco AQ), como GK, diferencia entre el arco GF y el seno del arco AQ. Q.E.D.

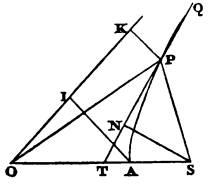
ESCOLIO

Por lo demás, como la descripción de esta curva sea dificultosa, es mejor dar una solución aproximada. Hállese entonces un cierto ángulo B que sea al ángulo de 57,29578 grados, que es el que subtiende un arco igual al radio, como la distancia SH entre focos al diámetro AB de la elipse; a continuación hállese una determinada longitud L que esté inversamente en la misma razón al radio. Una vez halladas ambas cosas, puede resolverse el problema mediante el análisis siguiente. Supóngase conocido el lugar P del cuerpo, próximo a su verdadero lugar *p*, a través de cualquiera construcción, o incluso mediante una conjetura. Trazada sobre el eje de la elipse la ordenada PR, por la proporción de los diámetros de la elipse, tendremos dada la ordenada RQ del círculo circunscrito AQB, la cual es el seno del ángulo AOQ, siendo el radio AO, y corta también a la elipse en P. Basta hallar dicho ángulo con un cálculo rudimentario en valor aproximado. Supóngase también conocido el ángulo que es proporcional al tiempo, esto es, el que sea a cuatro rectos como el tiempo en el que el cuerpo describe el arco A*p* al tiempo de una revolución en la elipse. Sea N este ángulo. Tómense ahora un ángulo D que sea al ángulo B como el seno del ángulo AOQ al radio, y un ángulo E que sea al ángulo N—AOQ+D como la longitud L a la propia longitud L, disminuida o aumentada en el coseno del ángulo AOQ según este ángulo sea menor o mayor que un recto. Después tómense un ángulo F que sea al ángulo B como el seno del ángulo AOQ + E al radio y un ángulo G que sea al ángulo N – AOQ – E + F como

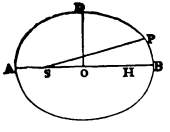


la longitud L es a la propia longitud L disminuida o aumentada en el coseno del ángulo AOQ + E según este ángulo sea menor o mayor que un recto. Por tercera vez tómense un ángulo H que sea al ángulo B como el seno del ángulo AOQ + E + G es al radio y un ángulo I que sea al ángulo N – AOQ – E – G + H como la longitud L es a la propia longitud L disminuida o aumentada en el coseno del ángulo AOQ + E + G según este ángulo sea menor o mayor que un recto. Y así es posible seguir hasta el infinito. Tómese por fin el ángulo AO*q* igual al ángulo AOQ + E + G + I + etc. Y a partir de su coseno O*r* y de su ordenada *pr*, que es a su seno *qr* como es el eje menor de la elipse al eje mayor, se tendrá el lugar correcto *p* del cuerpo. Cuando el ángulo N – AOQ + D resulta negativo, el signo + de E debe cambiarse siempre en – y el signo – en +. Lo mismo ha de entenderse para los signos de G e I, cuando resultan negativos N – AOQ – E + F y N – AOQ – E – G + H. Pero la serie infinita AOQ + E + G + I, etc., converge tan rápidamente que muy escasamente será necesario pasar del segundo término E. Y el cálculo se basa en el teorema de que el área APS es como la diferencia entre el arco AQ y la recta trazada perpendicularmente desde el foco S al radio OQ.

Con un cálculo similar se resuelve el problema en la hipérbola, Sea O su centro, A su vértice, S el foco y OK la asíntota. Sea conocida la cantidad del área a segregar proporcional al tiempo. Sea ésta A, y hágase la conjetura sobre la posición de la recta SP que segrega muy aproximadamente el área verdadera de APS. Únase OP y trácense desde A y P hasta la asíntota AI, PK paralelas a la otra asíntota, y se tendrá, por la tabla de logaritmos, el área AIKP y el área igual a ésta de OPA, la cual restada del área del triángulo OPS da como resto el área segregada APS. Aplicando el doble de la diferencia del área a segregar A y de la segregada APS, 2APS – 2A o 2A – 2APS, a la línea SN, que es perpendicular desde el foco S a la tangente TP, resultará la longitud de la cuerda PQ. Pero esta cuerda PQ ha de inscribirse entre A y P si el área segregada APS es mayor que el área a segregar A, de no ser así ha de inscribirse hacia el otro lado de P: y el punto Q será un lugar más exacto del cuerpo. Y repitiendo el cálculo se hallará siempre con mayor exactitud.



Así pues, con estos cálculos el problema alcanza una solución analítica general. Pero para usos astronómicos es más cómodo el cálculo particular siguiente. Sean AO, OB, OD los semiejes de la elipse, L el «latus rectum» de la misma, D la diferencia entre el semieje menor OD y la mitad del «latus rectum», 1/2L; hállese entonces el ángulo Y cuyo seno sea al radio como el rectángulo bajo dicha diferencia D y la semisuma de los ejes AO + OD es al cuadrado del eje mayor AB; después hállese el ángulo Z cuyo seno sea al radio como el doble del rectángulo bajo la distancia SH entre los focos y dicha diferencia D al triple del cuadrado del semieje mayor AO. Una vez hallados éstos, el lugar del cuerpo se determinará a continuación del modo siguiente. Tómese el ángulo T proporcional al tiempo en que se ha descrito el arco BP, o igual al movimiento medio (como se dice); y un ángulo V, primera ecuación del movimiento medio, al ángulo Y, primera ecuación máxima, como es el seno del doble del ángulo T al radio; y un ángulo X, segunda ecuación, al ángulo Z, se-



gunda ecuación máxima, como el cubo del seno del ángulo T es al cubo del radio. De los ángulos T, V, X, tómese el ángulo BHP, ecuación del movimiento medio, tal que sea igual o a la suma de T + X + V si el ángulo T es menor que un recto, o a la diferencia de T + X – V si fuese mayor que un recto y menor que dos; y si HP toca a la elipse en P, trazada SP, segregará el área BSP muy aproximadamente proporcional al tiempo. Esta fórmula parece bastante fácil, habida cuenta de que basta hallar las dos o tres primeras figuras de los ángulos muy pequeños V y X establecidos, si se quiere, en minutos segundos. Y además es suficientemente exacta para la teoría de los planetas. Pues en la órbita de Marte, cuya ecuación máxima del centro es de diez grados, el error apenas será mayor que un minuto segundo. Pero una vez hallado el ángulo BHP, ecuación del movimiento medio, ya se tiene inmediatamente por un método bien conocido tanto el ángulo del movimiento real BSP como la distancia SP.

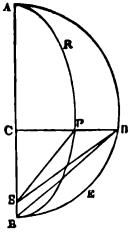
Hasta aquí sobre el movimiento de los cuerpos en líneas curvas. Pero puede ocurrir que un móvil ascienda o descienda por una línea recta, y paso a exponer ahora lo que se refiere a estos movimientos.

SECCIÓN VII

DEL ASCENSO Y DESCENSO RECTILÍNEO DE LOS CUERPOS

PROPOSICIÓN XXXII. PROBLEMA XXIV

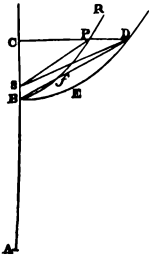
Supuesto que la fuerza centrípeta sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares al centro, determinar los espacios que, en tiempos dados, recorre un cuerpo cayendo en línea recta.



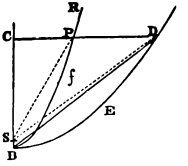
CASO 1. Si un cuerpo no cae perpendicularmente describirá (por el corolario 1 de la proposición XIII) una cierta sección cónica cuyo foco coincidirá con el centro de fuerzas. Sea ARPB dicha sección cónica y S su foco. Primero en el caso de que dicha figura sea una elipse; sobre su eje mayor AB trácese el semicírculo ADB, y pase por el cuerpo que cae la recta DPC perpendicular al eje; y trazadas DS, PS, el área ASD será proporcional al área ASP, así como al tiempo. Manteniendo el eje AB, disminuya la latitud de la elipse continuamente y el área ASD seguirá siendo continuamente proporcional al tiempo. Disminúyase infinitamente aquella latitud y, al coincidir la órbita APB con el eje AB y el foco S con el extremo B del eje, también resultará el área ABD proporcional al tiempo. Y así se tendrá el espacio AC que será el descrito por el cuerpo que cae perpendicularmente desde A en un tiempo dado, siempre que se tome el área ABD proporcional al tiempo y se trace desde el punto D hasta la recta AB la perpendicular DC. Q.E.I.

CASO 2. Si dicha figura RPB es una hipérbola, trácese sobre su diámetro principal AB la hipérbola rectangular BED; y puesto que las áreas CSP, CB*f*P, SP*f*B son a las

áreas CSD, CBED, SDEB, cada una a cada una, como la razón dada de las alturas CP, CD; y como el área SP*f*B es proporcional al tiempo en el que el cuerpo se moverá a lo largo del arco P*f*B, el área SDEB será también proporcional a ese mismo tiempo. Disminúyase el «latus rectum» de la hipérbola RPB hasta el infinito manteniendo el lado transverso, y el arco PB coincidirá con la recta CB y el foco S con el vértice B y la recta SD con la recta BD. Por tanto, el área BDEB será proporcional al tiempo en el que el cuerpo C en caída recta describe la línea CB. Q.E.I.



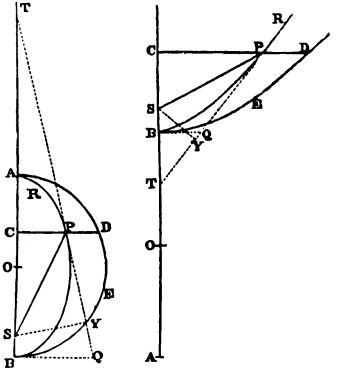
Caso 3. Y con similar argumento si la figura RPB es una parábola, y por el mismo vértice principal B se describe otra parábola BED que siempre permanezca dada, mientras la primera parábola, en cuyo perímetro se mueve el cuerpo P, va disminuyendo su «latus rectum» hasta que se anula, llegará a coincidir con la línea CB; hará entonces que el segmento parabólico BDEB sea proporcional al tiempo en que dicho cuerpo P o C cae hasta el centro S o B. Q.E.I.



PROPOSICIÓN XXXIII. TEOREMA IX

Supuesto lo ya descubierto, digo que la velocidad de un cuerpo que cae en un lugar C es a la velocidad de un cuerpo que gira en círculo con centro B y distancia BC, como la raíz cuadrada de la razón de AC, distancia del cuerpo al vértice A ulterior del círculo o de la hipérbola rectangular, respecto a $\frac{1}{2}AB$*, semidiámetro principal de la figura.*

Hágase en O la bisección de AB, diámetro común de ambas figuras RPB, DEB; y trácese la recta PT, tangente a la figura RPB en P, y que corte también a dicho diámetro común AB (prolongado si es necesario) en T; y sea SY perpendicular a dicha recta, lo mismo que BQ al susodicho diámetro, y supóngase que L sea el «latus rectum» de la figura RPB. Se sabe por el corolario 9 de la proposición XVI que la velocidad de un cuerpo que se mueve sobre la línea RPB en torno al centro S en un lugar cualquiera P será a la velocidad de un cuerpo que se mueve en torno al mismo centro describiendo un círculo a la distancia SP, como la raíz cuadrada de la razón del rectángulo $\frac{1}{2}L \times SP$ a SY al cuadrado. Pues, por las cóni-



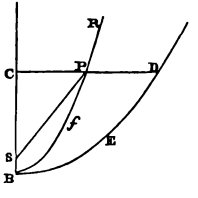
cas, ACB es a CP^2 como 2AO a L y, por tanto $\frac{2CP^2 \times AO}{ACB}$ es igual a L. Por tanto, dichas velocidades son entre sí como la raíz cuadrada de $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{AC \times CB}$ es a SY^2. Además, por las cónicas, CO es a BO como BO es a TO y, componiendo o dividiendo, como CB a BT. De donde, dividiendo o componiendo, será BO ± CO a BO como CT a BT, esto es, AC a AO como CP a BQ; y de aquí que $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{ACB}$ sea igual a $\frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Disminúyase ahora la anchura CP de la figura RPB hasta el infinito de modo que el punto P coincida con el punto C y el punto S con el punto B y la línea SP con la línea BC y la línea SY con la línea BQ; y ahora la velocidad del cuerpo que cae por la línea recta CB será a la velocidad de un cuerpo que describe un círculo de centro B y distancia BC como la raíz cuadrada de la razón $\frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times BC}$ a SY^2, esto es (despreciando las razones de igualdad de SP a BC y BQ^2 a SY^2), como la raíz cuadrada de la razón de AC a AO o de $\frac{1}{2}$AB. Q.E.D.

COROLARIO 1. Al coincidir los puntos B y S, TC será a TS como AC a AO.

COROLARIO 2. Si un cuerpo gira en un círculo de determinada distancia al centro, al desviar su movimiento hacia arriba subirá hasta duplicar su distancia al centro.

PROPOSICIÓN XXXIV. TEOREMA X

Si la figura BED es una parábola, digo que la velocidad de un cuerpo que cae en cualquier punto C es igual a la velocidad con la que un cuerpo puede describir uniformemente un círculo de centro B y con la mitad de su intervalo BC.



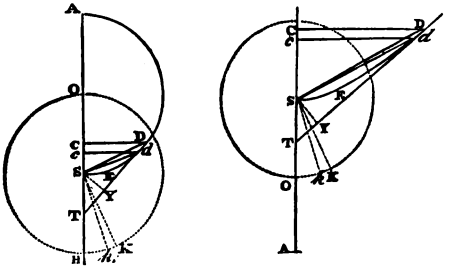
Pues la velocidad de un cuerpo que describe una parábola de centro S siendo la parábola RPB será en un punto P cualquiera (por el corolario 7 de la proposición XVI) igual a la velocidad de un cuerpo que describe un círculo uniformemente en torno al mismo centro S a la mitad del intervalo SP. Disminúyase infinitamente la anchura CP de la parábola hasta que el arco parabólico PIB coincida con la recta CB, el centro S con el vértice B y el intervalo SP con el intervalo BC, y la proposición será evidente. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XXXV. TEOREMA XI

Con los mismos supuestos, digo que el área de la figura DES, descrita con radio indefinido SD, será igual al área que puede describir en el mismo tiempo un cuerpo girando uniformemente en torno al centro S y con radio igual a la mitad del «latus rectum» de la figura DES.

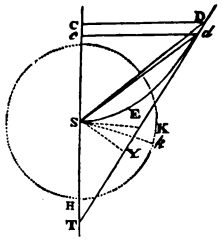
Pues imagínese que un cuerpo C describe al caer en la mínima partícula de tiempo el segmento C*c*, mientras otro cuerpo K, girando uniformemente en el círculo OK*k* en torno al centro S, describe el arco K*k*. Elévense las perpendiculares CD, *cd* que se encuentran con la figura DES en D y en *d*. Únanse SD, S*d*, SK, S*k* y trácese D*d* que encuentra al eje AS en T y sobre ella hágase descender la perpendicular SY.

Caso 1. Si ahora la figura DES es un círculo o una hipérbola rectangular trácese en O la bisección de su diámetro transverso AS, y SO será la mitad de su «latus rectum». Y puesto que TC es a TD como C*c* a D*d* y TD a TS como CD a SY, también será TC a TS como CD × C*c* a SY × D*d*. Pero (por el corolario 1 de la proposición XXXIII) TC



es a TS como AC es a AO si al confundirse los puntos D, *d* se toman las razones últimas de las líneas. Luego AC es a AO o SK como CD × C*c* es a SY × D*d*. Además, la velocidad de un cuerpo que cae en C es a la velocidad de un cuerpo que describe un círculo de intervalo SC y centro S como la raíz cuadrada de la razón de AC a AO o SK (por la proposición XXXIII). Y esta velocidad es a la velocidad de un cuerpo que describa el círculo OK*k* como la raíz cuadrada de la razón de SK a SC (por el corolario 6 de la proposición IV) y, por tanto, la velocidad primera es a la última, esto es, el segmento C*c* al arco K*k*, como la raíz cuadrada de la razón de AC a SC, esto es, en razón de AC a CD. Por lo cual CD × C*c* es igual a AC × K*k* y, por tanto, AC es a SK como AC × K*k* a SY × D*d*, y de aquí que SK × K*k* sea igual a SY × D*d*, y ½SK × K*k* igual a ½SY × D*d*, esto es, el área KS*k* igual al área SD*d*. Por lo tanto, en cada partícula de tiempo se generan partículas de dos áreas KS*k* y SD*d* que si disminuyen en magnitud y aumentan en número infinitamente, llegan a ser iguales, y por consiguiente (por el corolario del lema IV), todas las áreas generadas a la vez son siempre iguales. Q.E.D.

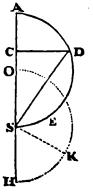
Caso 2. Pero si la figura DES fuese una parábola, hallaremos como antes que CD × C*c* es a SY × D*d* como TC a TS, esto es, como 2 a 1, y, por lo tanto, ½CD × C*c* es



igual a $\frac{1}{2}SY \times Dd$. Pero la velocidad de un cuerpo que cae en C es igual a la velocidad con que puede describir un círculo uniformemente con intervalo de $\frac{1}{2}SC$ (por la proposición XXXIV). Y esta velocidad es a la velocidad con la que puede describir un círculo de radio SK, esto es, el segmento Cc al arco Kk (por el corolario 6 de la proposición IV) como la raíz cuadrada de la razón de SK a $\frac{1}{2}SC$, esto es, en la razón de SK a $\frac{1}{4}CD$. Por lo cual, $\frac{1}{2}SK \times Kk$ es igual a $\frac{1}{4}CD \times Cc$ y, por tanto, igual a $\frac{1}{2}SY \times Dd$, esto es, el área KSk igual al área SDd, como antes. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XXXVI. PROBLEMA XXV

Determinar los tiempos de descenso de un cuerpo que cae desde un punto dado A.

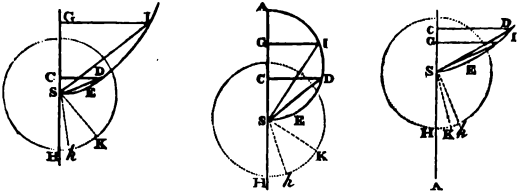


Sobre el diámetro AS, distancia inicial del cuerpo al centro, trácese el semicírculo ADS, y también el semicírculo OKH igual al anterior y con centro en S. Desde C, lugar cualquiera del cuerpo, elévese la ordenada CD. Únase SD, y hágase el sector OSK igual al área ASD. Por la proposición XXXV es evidente que un cuerpo al caer recorre el espacio AC en el mismo tiempo en que otro cuerpo, girando uniformemente en torno al centro S, puede describir el arco OK. Q.E.F.

PROPOSICIÓN XXXVII. PROBLEMA XXVI

Determinar los tiempos de ascenso o caída de un cuerpo lanzado hacia arriba o hacia abajo desde un punto dado.

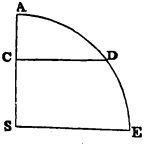
Sea G el punto de partida del cuerpo siguiendo la línea GS y con una velocidad cualquiera. Tómese GA a $\frac{1}{2}AS$ como el cuadrado de la razón de dicha velocidad a la velocidad uniforme con que un cuerpo puede girar en un círculo de intervalo dado G y centro S. Si dicha razón es de 2 a 1, el punto A dista infinitamente, en cuyo caso ha de trazarse una parábola con vértice S, eje SG, y «latus rectum» cualquiera. Esto es evidente por la proposición XXXIV. Pero si dicha razón es menor o mayor que 2 a 1, en el primer caso, debe describirse un círculo sobre el diámetro SA y en el segundo una hipérbola rectangular. Es evidente por la proposición XXXIII. Ahora con centro S e intervalo igual a la mitad del «latus rectum» trácese el círculo HkK, y desde el punto G del cuerpo que asciende o cae y desde otro punto cualquiera C elévense las perpendiculares GI, CD que tocan a la sección cónica o al círculo en I y en D. Después, unidas SI, SD, iguálense los segmentos SEIS, SEDS a los sectores HSK, HSk, y por la proposición XXXV, el cuerpo G recorrerá el espacio GC en el mismo tiempo en que el cuerpo K puede describir el arco Kk. Q.E.F.



PROPOSICIÓN XXXVIII. TEOREMA XII

Supuesto que la fuerza centrípeta sea proporcional a la altura o distancia de los lugares al centro, digo que los tiempos de caída, las velocidades y los espacios recorridos son respectivamente proporcionales a los arcos, a los senos rectos y a los senos versos de los arcos.

Sea un cuerpo que cae desde un lugar cualquiera A y según la línea AS; y desde el centro de fuerzas S, y con intervalo AS, trácese el cuadrante circular AE, y sea CD el seno recto de un arco cualquiera AD; y el cuerpo A, en el tiempo AD, recorrerá al caer el espacio AC, y en el punto C alcanzará la velocidad CD.



Se demuestra esto partiendo de la proposición X del mismo modo que partiendo de la proposición XI se demostró la proposición XXXII.

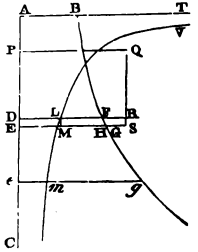
COROLARIO 1. De aquí que sean iguales los tiempos en que un cuerpo que cae desde el punto A llega hasta S y otro cuerpo girando recorre el arco cuadrantal ADE.

COROLARIO 2. Por lo tanto, los tiempos todos en que los cuerpos que caen desde un lugar cualquiera hasta el centro son iguales. Pues todos los tiempos periódicos de cuerpos en revolución son iguales (por el corolario 3 de la proposición IV).

PROPOSICIÓN XXXIX. PROBLEMA XXVII

Supuesta una fuerza centrípeta de cualquier clase, y concedidas las cuadraturas de las figuras curvilíneas, se pide la velocidad de un cuerpo que asciende o cae según una recta en cada punto de la misma, y también el tiempo en que llegará a cada uno de los puntos, y viceversa.

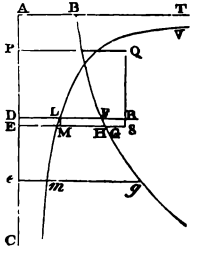
Sea el cuerpo E que cae desde el punto cualquiera A según la recta ADEC, y desde su lugar E elévese la perpendicular EG, proporcional siempre a la fuerza centrípeta tendente en ese lugar hacia el centro C: sea BFG una línea curva continuamente tangente del punto G. Al comienzo del movimiento coincida EG con la perpendicular AB, y la velocidad del cuerpo en un punto cualquiera E será como la recta que elevada al cuadrado sea igual al área curvilínea ABGE. Q.E.I.



Tómese sobre EG la distancia EM, inversamente proporcional a la recta que elevada al cuadrado sea igual al área ABGE, y sea VLM una línea curva a la que el punto M sea continuamente tangente, y cuya asíntota sea la prolongación de la recta AB; y el tiempo en que un cuerpo al caer recorre el espacio AE será como el área curvilínea ABTVME. Q.E.I.

Pues sobre la recta AE tómese el segmento mínimo DE de una longitud dada, y sea DLF el lugar de la línea EMG, cuando el cuerpo pasaba por D; y si la fuerza centrípeta fuese tal que la recta, cuyo cuadrado es igual al área ABGE, sea como la velocidad del cuerpo que cae, el área misma será como el cuadrado de la velocidad, esto es, si se representan las velocidades en D y E por V y V + I, el área ABFD será como V V, y el área ABGE como VV + 2VI + II y, restando, el área DFGE como 2VI + II, por lo cual $\frac{DFGE}{DE}$ como $\frac{2VI + II}{DE}$, esto es, si se toman las razones razones primeras de estas cantidades en su momento inicial, la longitud DF es como $\frac{2VI}{DE}$, y en consecuencia también como la mitad de esta cantidad $\frac{I \times V}{DE}$. Pero el tiempo en el que el cuerpo al caer recorre el segmento aquel DE es directamente como dicho segmento e inversamente como la velocidad V, y la fuerza es directamente como el incremento I de la velocidad e inversamente como el tiempo y, por tanto, si se toman las razones primeras iniciales, como $\frac{I \times V}{DE}$, esto es, como la longitud DF. Luego una fuerza proporcional a DF o también a EG hará que el cuerpo caiga con una velocidad tal que sea como la recta cuyo cuadrado sea el área ABGE. Q.E.D.

Por lo demás, como el tiempo en que puede recorrerse un segmento mínimo DE de longitud dada sea inversamente como la velocidad y, por ende, inversamente como la línea recta cuyo cuadrado sea el área ABFD; y, por otra parte, sea DL, y también el área naciente DLME, inversamente como dicha línea recta, el tiempo será como el área DLME, y la suma de todos los tiempos como la suma de todas las áreas, esto es (por el corolario del lema IV), la totalidad de los tiempos en que se recorre la línea AE como el área total ATVME. Q.E.D.



COROLARIO 1. Si fuese P el lugar desde el que debiese caer un cuerpo urgido por una fuerza centrípeta uniforme conocida (como se supone generalmente la gravedad) de modo que en el punto D adquiera una velocidad igual a la de otro cuerpo en ese punto D que la ha adquirido al caer merced a otra fuerza cualquiera, y sobre la perpendicular DF se tomara DR tal que sea a DF como dicha fuerza uniforme es a la otra fuerza en D, y se completase el rectángulo PDRQ, y se segregase el área ABFD igual al mismo; entonces A será el lugar desde el

cual cayó el otro cuerpo. Pues, completando el rectángulo DRSE, como el área ABFD sea al área DFGE como VV a 2VI, y por lo mismo como $\frac{1}{2}$V a I, esto es, como la mitad de la velocidad total al incremento de la velocidad del cuerpo que cae empujado por la fuerza no uniforme; y similarmente el área PQRD es al área DRSE como la mitad de toda la velocidad al incremento de la velocidad del cuerpo que cae con fuerza uniforme, y como dichos incrementos (por la igualdad de los tiempos nacientes) son como las fuerzas generatrices, esto es, como las ordenadas DF, DR y, por tanto, como las áreas nacientes DFGE, DRSE; en consecuencia, las áreas totales ABFD, PQED serán entre sí como las mitades de las velocidades totales y, por lo tanto, serán iguales por ser las velocidades iguales.

COROLARIO 2. De aquí que si un cuerpo es lanzado desde cualquier punto D hacia arriba o hacia abajo con una velocidad dada, y se supone la ley de la fuerza centrípeta, su velocidad en otro punto *e* se hallará elevando la ordenada *eg*, y tomando dicha velocidad a la velocidad en el punto D como la recta, cuyo cuadrado equivalga al rectángulo PQRD aumentado en el área curvilínea DF*ge* si el punto *e* está por debajo del punto D y disminuido si está por arriba, es a la recta cuyo cuadrado equivalga sólo al rectángulo PQRD.

COROLARIO 3. También se halla el tiempo elevando la ordenada *em* inversamente proporcional al lado cuadrado de PQRD $\pm$ DF*ge*, y tomando el tiempo en que el cuerpo hubiese descrito la línea D*e* al tiempo en que otro cuerpo cayendo con fuerza uniforme desde P llega hasta D, como el área curvilínea DL*me* al rectángulo 2PD $\times$ DL. Puesto que el tiempo en el que cayendo con fuerza uniforme un cuerpo describe la línea PD es al tiempo en el que el mismo cuerpo describe la línea PE, como la raíz cuadrada de la razón de PD a PE, esto es (considerando el segmento DE en el instante de su nacimiento), como la razón de PD a PD + $\frac{1}{2}$DE o como 2PD + DE, y por partes, al tiempo en que dicho cuerpo recorrió el segmento DE como 2PD a DE y, por tanto, como el rectángulo 2PD $\times$ DL al área DLME; y el tiempo en que un cuerpo describió el segmento DE es al tiempo en que el otro describió con movimiento variable la línea D*e* como el área DLME al área DL*me*, y por consiguiente, el primer tiempo es al último como el rectángulo 2PD $\times$ DL al área Dl*me*.

SECCIÓN VIII

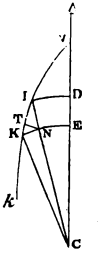
DE CÓMO HALLAR ÓRBITAS EN LAS CUALES GIRASEN CUERPOS SUJETOS A FUERZAS CENTRÍPETAS CUALESQUIERA

PROPOSICIÓN XL. TEOREMA XIII

Si un cuerpo se mueve de cualquier forma sujeto a la acción de una fuerza centrípeta, y otro cuerpo sube o baja por una línea recta, y en algún momento de alturas iguales fuesen iguales sus velocidades, serán iguales sus velocidades en todas las alturas iguales.

Caiga un cuerpo desde A a través de D, E hacia un centro C, y muévase otro cuerpo desde V según la línea curva VI*k*. Con centro en C y distancias cualesquiera, trácense

los círculos concéntricos DI, EK que tocan a la recta AC en D y E y a la curva VIK en I y K. Únase IC que cortará a KE en N; y sobre IK trácese la perpendicular NT; sea también muy pequeño el intervalo entre circunferencias DE o IN, y sean iguales las velocidades de los cuerpos en D y I. Puesto que las distancias CD, CI son iguales, las fuerzas centrípetas en D y en I serán iguales. Representen a estas fuerzas los segmentos iguales DE, IN; si una de las fuerzas IN (por el corolario II de las leyes) se descompone en dos NT y IT, la fuerza NT, actuando según la línea NT, perpendicular a la trayectoria ITK del cuerpo, en nada alterará la velocidad de dicho cuerpo en su curso, sino que solamente lo desviará de su curso rectilíneo y hará que dicho cuerpo, apartándose continuamente de la tangente de la órbita, camine según la trayectoria curva ITK*k*. Toda dicha fuerza se consumirá en la producción de este efecto: mientras que la otra fuerza IT, actuando según la marcha del cuerpo, toda ella lo acelerará, y en un tiempo mínimo dado generará una aceleración proporcional a ella misma. Por tanto, las aceleraciones de los cuerpos en D e I alcanzadas en tiempos iguales (si se consideran las razones primeras de los segmentos nacientes DE, IN, IK, IT, NT) son como las líneas DE, IT: mientras que en tiempos desiguales son como el producto de dichas líneas por los tiempos. Por lo demás, los tiempos en que se describirán DE e IK, por la igualdad de velocidades, son como las trayectorias descritas DE e IK y, por tanto, las aceleraciones en el paso de los cuerpos por DE e IK son como el producto de DE e IT, DE e IK, esto es, como DE cuadrado y el rectángulo IT × IK. Pero el rectángulo IT × IK es igual a IN cuadrado, esto es, igual a DE cuadrado y, por tanto. las aceleraciones generadas en el paso de los cuerpos desde D e I hasta E y K son iguales. Luego las velocidades de los cuerpos en E y K son iguales: y por el mismo argumento siempre resultarán iguales a distancias subsiguientes iguales. Q.E.D.



Y además, por el mismo argumento, cuerpos con velocidades iguales y a iguales distancias del centro se desacelerarán igual al ascender a distancias iguales. Q.E.D.

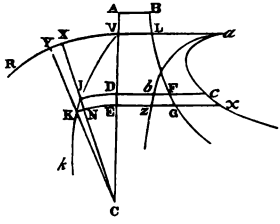
COROLARIO 1. De aquí que si un cuerpo oscila colgado de un hilo o se ve obligado a girar en círculo mediante un impedimento completamente pulido y lubrificado, y otro cuerpo sube o baja por una recta, y a una altura cualquiera igual son sus velocidades iguales, también serán iguales sus velocidades en cualesquiera otras alturas iguales. Pues con el hilo del cuerpo pendular o con la pared completamente lubrificada del recipiente se consigue exactamente lo mismo que con la fuerza transversal NT. Por ella el cuerpo no se acelera ni se desacelera, sino que solamente es obligado a apartarse de la trayectoria recta.

COROLARIO 2. De aquí también que si la cantidad P fuese la máxima distancia al centro que puede alcanzar un cuerpo, tanto oscilando como girando en cualquier trayectoria, y la que alcanzaría por tanto lanzado hacia arriba desde un punto cualquiera de la trayectoria con la velocidad que tiene en ese punto; y fuese la cantidad A la distancia del cuerpo al centro en otro punto cualquiera de la órbita, y siendo siempre la fuerza centrípeta como una potencia de A tal como A^{n-1}, cuyo índice $n-1$ es cualquier número n disminuido en una unidad; a cualquier altura A la velocidad del cuerpo será como $\sqrt{P^n - A^n}$, y por tanto estará dada. Pues la velocidad recta de ascenso o descenso (por la proposición XXXIX) está en esta misma razón.

PROPOSICIÓN XLI. PROBLEMA XXVIII

Dada una fuerza centrípeta de cualquier clase y supuestas las cuadraturas de las figuras curvas, hállense tanto las trayectorias en que se mueven los cuerpos como los tiempos de los movimientos en las trayectorias halladas.

Tienda una fuerza cualquiera hacia el centro C y hállese la trayectoria VIK*k*. Sea dado el círculo VR con centro en C y trazado con una distancia cualquiera CV, y con el mismo centro trácense otros círculos ID, KE que corten a la trayectoria en I y K y a la recta CV en D y E. Trácese tanto la recta CNIX que corta a los círculos KE, VR en N y X, como la recta CKY que toca al círculo VR en Y. Y sean los puntos I y K muy próximos entre sí y que el cuerpo se mueva desde V por I y K hasta *k*; sea, asimismo A el punto desde el cual otro cuerpo debe caer para que adquiera en el punto D una velocidad igual a la del cuerpo anterior en I. Y, dado lo dicho en la proposición XXXIX, el segmento IK, descrito en el menor tiempo dado, será como la velocidad y, por tanto, como la recta cuyo cuadrado sea igual al área ABFD, y se tendrá dado el triángulo ICK proporcional al tiempo, y por lo mismo KN será inversamente como la altura IC, esto es, si se da una cantidad Q cualquiera y a la altura IC la denominamos A, como $\frac{Q}{A}$. A esta cantidad $\frac{Q}{A}$ llamémosla Z, y supongamos que la magnitud Q es tal que en algún caso $\sqrt{ABFD}$ es a Z como IK a KN, entonces en todos los casos $\sqrt{ABFD}$ será a Z como IK a KN, y ABFD a ZZ como IK^2 a KN^2 y restando ABFD − ZZ:ZZ = IN^2: KN^2,



por tanto $$\sqrt{ABFD - ZZ} : Z \text{ o } \frac{Q}{A} = IN : KN$$

y por ello $$A \times KN = \frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$$

de donde, como YX × XC : A × KN = CX^2: AA

será el rectángulo XY × XC = $$\frac{Q \times YN \times CX^2}{AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$$

Por tanto, si en la perpendicular DF se toman siempre D*b*, D*c* iguales respectivamente a

$$\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}} \text{ y a } \frac{Q \times CX^2}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$$

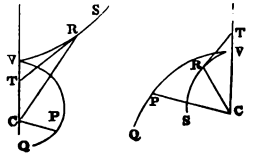
y se trazan las curvas *ab*, *ac*, a las cuales son siempre tangentes los puntos *b*, *c*; y se eleva hasta la línea AC desde el punto V la perpendicular V*a* que corta las áreas curvilíneas VD*ba*, VD*ca* y se elevan también las ordenadas Ez, Ex: dado que el rectángulo D*b* × IN o D*bz*E es igual a la mitad del rectángulo A × KN o al triángulo ICK; y el rectángulo D*c* × IN o D*cx*E es igual a la mitad del rectángulo YX × XC, o sea, al triángulo XCY; esto

es, puesto que las partículas nacientes D*bz*E, ICK de las áreas VD*ba*, VIC son siempre iguales, y las partículas nacientes D*cx*E, XCY de las áreas VD*ca*, VCX son siempre iguales, el área generada VD*ba* siempre será igual al área generada VIC y, por tanto, proporcional al tiempo, y el área generada VD*ca* igual al sector generado VCX. Así pues, dado el tiempo de partida de un cuerpo desde V, se tendrá dada también el área VD*ba* proporcional a él, y de aquí se tendrá también la altura del cuerpo CD o CI, así como el área VD*ca* y su igual el sector VCX a la vez que su ángulo VCI. Una vez dados el ángulo VCI y la altura CI se tiene el punto I en el que al completar ese tiempo se hallará el cuerpo. Q.E.I.

COROLARIO 1. De aquí que las alturas máximas y mínimas de los cuerpos, esto es, los ápsides de las trayectorias se puedan hallar fácilmente. Puesto que los ápsides son los puntos en los que la recta IC trazada por el centro cae perpendicularmente sobre la trayectoria VIK: cosa que ocurre cuando las rectas IK y NK se igualan y, por tanto, cuando el área ABFD es igual a ZZ.

COROLARIO 2. Y también, partiendo de la altura dada del cuerpo IC, se halla fácilmente el ángulo KIN con el cual corta la trayectoria en cualquier punto a dicha línea IC; a saber, tomando el seno del ángulo al radio como KN a IK, esto es, como Z al lado cuadrado del área ABFD.

COROLARIO 3. Si con centro en C y vértice principal en V se describe una sección cónica cualquiera VRS, y desde un punto cualquiera R de la misma se traza una tangente que corte al eje principal CV prolongado infinitamente en un punto T; después, uniendo CR, se traza la recta CP igual a la abscisa CT, y el ángulo VCP proporcional al sector VCR; y si además una fuerza centrípeta inversamente proporcional al cubo de las distancias de los lugares al centro tiende hacia el centro C, y un cuerpo sale con una velocidad precisa desde V según una línea perpendicular a la recta CV: dicho cuerpo circulará por la trayectoria VPQ siempre tangente al punto P; y, por lo tanto, si la sección cónica VRS fuese una hipérbola, descenderá hacia el centro: pero si fuese una elipse, ascenderá continuamente y marchará hacia el infinito. Y por el contrario, si un cuerpo con velocidad cualquiera parte de V y desde allí empieza bien a descender oblicuamente hacia el centro o bien a ascender oblicuamente desde él, según sea la figura VRS una hipérbola o una elipse, se puede hallar la trayectoria aumentando o disminuyendo el ángulo VCP según una razón dada. Por lo demás, al convertirse la fuerza centrípeta en centrífuga, el cuerpo ascenderá oblicuamente por la trayectoria VPC, la cual se halla tomando el ángulo VCP proporcional al sector elíptico VRC y la longitud CP igual a CT como antes. Todas estas cosas se siguen de la proposición anterior, mediante la cuadratura de determinada curva cuyo hallazgo, por ser fácil, en aras de la brevedad, doy por hecho.

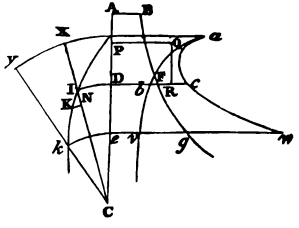


PROPOSICIÓN XLII. PROBLEMA XXIX

Dada la ley de la fuerza centrípeta, hallar los movimientos de un cuerpo que parte de un lugar dado, con una velocidad dada y según una recta dada.

Supuesto lo dicho en las tres proposiciones precedentes, parta un cuerpo de I según el segmento IK con la velocidad que otro cuerpo puede adquirir en D cayendo desde P

con fuerza centrípeta uniforme: y sea esta fuerza uniforme a la fuerza que actúa en I sobre el cuerpo anterior, como DR a DF. Diríjase, pues, el cuerpo hacia *k*; y con centro en C y distancia C*k* trácese el círculo *ke* que corta a la recta PD en *e* y elévense *eg*, *ev*, *ew* ordenadas a las curvas BF*g*, *abv*, *acw*. A partir del rectángulo dado PDRQ y de la ley dada de la fuerza centrípeta con la que se mueve el primer cuerpo, se tiene dada la curva BF*g*, por construcción del problema XXVII y su corolario 1. De aquí, por estar dado el ángulo CIK, se tiene la proporción de las líneas nacientes IK, KN, y después, por la construcción del problema XXVIII, se tiene la cantidad Q junto con las líneas curvas *abv*, *acw*: y, por lo tanto, al cumplirse cualquier tiempo D*bve*, se tiene tanto la altura del cuerpo C*e* o C*k*, como el área D*cwe* y el sector igual a ella XZ*y*, así como el ángulo ICK y el punto *k* en el cual se hallará el cuerpo en ese momento. Q.E.I.



En estas proposiciones estamos suponiendo que la fuerza centrípeta varía al alejarse del centro según una ley cualquiera, que puede imaginarse cada cual, pero que permanece igual a iguales distancias del centro. Además, hasta ahora hemos considerado el movimiento de los cuerpos en órbitas inmóviles. Falta añadir algo sobre el movimiento de los cuerpos en órbitas que giren en torno a un centro de fuerzas.

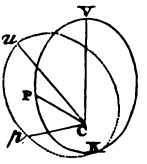
SECCIÓN IX

DEL MOVIMIENTO DE CUERPOS EN ÓRBITAS MÓVILES Y DEL MOVIMIENTO DE ÁPSIDES

PROPOSICIÓN XLIII. PROBLEMA XXX

Hágase que un cuerpo, que se halla en una trayectoria cualquiera la cual gira en torno a un centro de fuerzas, se pueda mover igual que otro cuerpo en esa misma trayectoria en reposo.

Gire el cuerpo P en la órbita de posición dada VPK partiendo de V hacia K. Desde el centro C trácese C*p*, que sea siempre igual a CP, y el ángulo VC*p* resulte proporcional al ángulo VCP; y el área descrita por la línea C*p* será al área VCP que resulta simultáneamente descrita por la línea CP como la velocidad de la línea descriptora C*p* a la velocidad de la línea descriptora CP; esto es, como el ángulo VC*p* al ángulo VCP, y, por tanto, en una razón dada, y, por tanto, proporcional al tiempo. Al ser proporcional al tiempo el área descrita por C*p* en un plano inmóvil, es evidente que un cuerpo bajo la acción de una adecuada fuerza centrípeta puede girar junto con el punto *p* en la línea curva que por la razón expuesta describe el punto *p* en el plano inmóvil. Háganse igua-

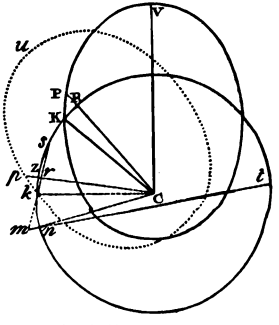


les el ángulo VC*u* y el ángulo PC*p*, la línea C*u* y la línea CV y la figura *u*C*p* con la figura VCP, y el cuerpo siempre presente en *p* se moverá en el perímetro de la figura en revolución *u*C*p*, además describirá el arco de la misma *up* en el mismo tiempo en que otro cuerpo P podría describir el arco VP igual al anterior sobre la figura en reposo VPK. Hállese por consiguiente, por el corolario 5 de la proposición VI, la fuerza centrípeta con la que un cuerpo puede girar en la curva que describe el punto *p* en el plano inmóvil, y quedará resuelto el problema. Q.E.F.

PROPOSICIÓN XLIV. TEOREMA XIV

La diferencia entre las fuerzas por las que dos cuerpos pueden moverse igualmente, el uno en una órbita fija y el otro en una órbita igual en revolución, está en razón inversa del cubo de las alturas comunes.

Sean semejantes e iguales las partes *up*, *pk* de la órbita en revolución a las partes VP, PK de la órbita fija; supóngase que es mínima la distancia entre los puntos P, K. Trácese desde el punto *k* sobre la recta *p*C la perpendicular *kr*, prolongándola hasta *m*, de modo que *mr* sea a *kr* como el ángulo VC*p* al ángulo VCP. Dado que las alturas de los cuerpos PC y *p*C, KC y *k*C siempre son iguales, es evidente que los incrementos y decrementos de las líneas PC y *p*C serán siempre iguales, y por ello si el movimiento de cada uno de los cuerpos situados respectivamente en P y en *p* se divide en dos (por el corolario II de las leyes) uno de los cuales tiende al centro, o sea, según las líneas PC, *p*C, y el otro, transversal al anterior, tiene una dirección perpendicular a dichas líneas PC, *p*C; el movimiento hacia el centro será igual en ambos, mientras el movimiento transversal del cuerpo *p* será al movimiento transversal del cuerpo P como el movimiento angular de la línea *p*C al movimiento angular de la línea PC, esto es, como el ángulo VC*p* al ángulo VCP. Por consiguiente, en el mismo tiempo en el que el cuerpo P con sus dos movimientos alcanza el punto K, el cuerpo *p* con movimiento igual hacia el centro se moverá igualmente desde *p* hacia C, y, por tanto, al cumplirse dicho tiempo, se hallará en algún lugar sobre la línea *mkr* que es perpendicular a *p*C pasando por *k*; y con el movimiento transversal habrá adquirido una distancia de *p*C que será a la distancia adquirida por el otro cuerpo P respecto a PC como el movimiento transversal del cuerpo *p* al movimiento transversal del cuerpo P. Por lo cual, al ser *kr* igual a la distancia adquirida por el cuerpo P respecto a la línea PC, y al ser *mr* a *kr* como el ángulo VC*p* al ángulo VCP, esto es, como el movimiento transversal del cuerpo *p* al movimiento transversal del cuerpo P, es evidente que al cumplirse dicho tiempo el cuerpo *p* se hallará en el punto

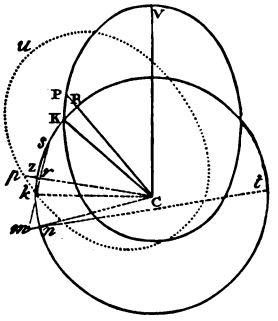


m. Esto será así siempre que los cuerpos *p* y P se muevan igualmente según las líneas *p*C, PC, y por tanto siempre que se hallen bajo la acción de fuerzas iguales según dichas líneas. Tómese en cambio el ángulo *p*C*n* al ángulo *p*C*k* como el ángulo VC*p* al ángulo VCP y sea *n*C igual a *k*C, y el cuerpo *p* al cumplirse el tiempo se hallará realmente en *n*; y, por tanto, se halla bajo la acción de una fuerza mayor que el cuerpo P, si el ángulo *n*C*p* es mayor que el ángulo *k*C*p*, esto es, si la órbita *upk*, o se mueve progresivamente o se mueve regresivamente, con velocidad mayor que el doble de la velocidad con que la línea CP se mueve progresivamente; y es urgido con fuerza menor en el caso de que la órbita se mueva regresivamente más lentamente. Y la diferencia de las fuerzas es como la distancia de los puntos *mn*, la cual debería recorrer dicho cuerpo *p* en el tiempo dado bajo la acción de esa diferencia de fuerzas. Imagínese un círculo con centro en C y distancia C*n* o C*k* que cortase a las líneas *mr*, *mn* prolongadas en *s* y *t*, y el rectángulo *mn* × *mt* será igual al rectángulo *mk* × *ms* y, por tanto, *mn* igual a $\frac{mk \times ms}{mt}$. Como, por otra parte, los triángulos *p*C*k*, *p*C*n* para un tiempo dado alcancen magnitudes dadas, *kr* y *mr*, y su diferencia *mk* y su suma *ms* son inversamente como la altura *p*C, por tanto, el rectángulo *mk* × *ms* es inversamente como el cuadrado de la altura *p*C. Y además, *mt* es directamente como $\frac{1}{2}mt$, esto es, como la altura *p*C. Éstas son las razones primeras de las líneas nacientes; y por ello ocurre que $\frac{mk \times ms}{mt}$ esto es, que el segmento naciente *mn*, y la diferencia de fuerzas proporcional a ella sea como el inverso del cubo de la altura *p*C. Q.E.D.

COROLARIO 1. De aquí que la diferencia de fuerzas en los puntos P y *p*, o K y *k*, es a la fuerza con que un cuerpo podría girar con movimiento circular desde R a K en el mismo tiempo en que el cuerpo P describe en la órbita fija el arco PK, como el segmento naciente *mn* al seno verso del arco naciente RK, esto es, como $\frac{mk \times ms}{mt}$ a $\frac{rk^2}{2kC}$, o como *mk* × *ms* a *rk* cuadrado; esto es, si se toman cantidades dadas, F, G, mutuamente en la misma proporción que tienen entre sí el ángulo VCP a VC*p*, como GG – FF a FF. Y, por tanto, si con centro en C y distancia cualquiera CP o C*p* se traza un sector circular igual al área de todo VPC, el cual ha sido descrito por el cuerpo P girando en la órbita inmóvil en un tiempo cualquiera con el radio trazado al centro, la diferencia de fuerzas, con las que el cuerpo P en la órbita inmóvil y el cuerpo *p* en la órbita en revolución están girando, será a la fuerza centrípeta con la que otro cuerpo con radio trazado al centro puede describir uniformemente ese sector en el mismo tiempo en que se describe el área VPC, como GG – FF a FF. Pues dicho sector y el área *p*C*k* son entre sí como los tiempos en que son descritos.

COROLARIO 2. Si la órbita VPK fuese una elipse con su foco en C y su ápside superior en V; y se supone la elipse *upk* semejante e igual a ella de modo que *p*C sea siempre igual a PC y el ángulo VC*p* respecto a VCP en una razón dada G a F, y por la altura PC o *p*C se escribe A, y por el «latus rectum» de la elipse. 2R: la fuerza, con la que un cuerpo puede girar en la elipse móvil, será como $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$, y viceversa. Represéntese la fuerza con la cual un cuerpo puede girar en una elipse fija por la canti-

dad $\frac{FF}{AA}$ y la fuerza en V será $\frac{FF}{CV^2}$. Pero la fuerza con la que un cuerpo puede girar en un círculo a la distancia CV con la velocidad que tiene un cuerpo en V girando en una elipse, es a la fuerza con la que un cuerpo girando en una elipse se ve urgido en el ápside V, como la mitad del «latus rectum» de la elipse al semidiámetro CV del círculo, siendo por tanto $\frac{RFF}{CV^3}$; y la fuerza que sea a ésta como GG – FF a FF vale $\frac{RGG - RFF}{CV^3}$: y esta fuerza (por el corolario 1 de esta proposición) es la diferencia de fuerzas en V con las cuales giran el cuerpo P en la elipse inmóvil VPK y el cuerpo *p* en la elipse móvil *upk*. De donde, puesto que (por esta proposición) dicha diferencia en otra altura cualquiera A es a sí misma en la altura CV como $\frac{1}{A^3}$ a $\frac{1}{CV^3}$, dicha diferencia para toda altura A valdrá $\frac{RGG - RFF}{A^3}$. Por tanto, añádase a la fuerza $\frac{FF}{AA}$ con la cual un cuerpo puede girar en una elipse fija VPK el exceso $\frac{RGG - RFF}{A^3}$ y se tendrá la fuerza total $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$ con la cual puede un cuerpo girar en la elipse móvil *upk* en tiempos iguales.



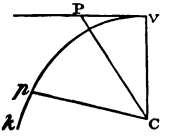
Corolario 3. De igual modo se hallará que si la órbita inmóvil VPK fuese una elipse cuyo centro está en el centro de fuerzas C; y si se supone la elipse móvil *upk* semejante, igual y concéntrica a ella; y fuese 2R el «latus rectum» principal de tal elipse, y 2T el «latus transversum» o eje mayor, y el ángulo VC*p* es constantemente a VCP como G a F; las fuerzas, con las cuales los cuerpos pueden girar en la elipse fija y en la móvil en tiempos iguales, serán respectivamente como $\frac{FFA}{T^3}$ y $\frac{FFA}{T^3} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$.

Corolario 4. Y, en general, si llamamos T a la altura máxima del cuerpo CV, y llamamos R al radio de la curvatura que tiene en V la órbita VPK, esto es, al radio de un círculo de curvatura igual, y se denomina $\frac{VFF}{TT}$ a la fuerza centrípeta con que un cuerpo puede girar en cualquier trayectoria inmóvil VPK en el punto V, mientras en otros puntos P se denomina indeterminadamente X, y se denomina A a la altura CP, y se toma G respecto a F en la razón dada del ángulo VC*p* al ángulo VCP: la fuerza centrípeta con la cual el mismo cuerpo podría realizar los mismos movimientos en los mismos tiempos sobre la misma trayectoria movida circularmente *upk* será como la suma de las fuerzas $X + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$.

Corolario 5. Por lo tanto, dado el movimiento de un cuerpo en una órbita fija cualquiera, su movimiento angular en torno al centro de fuerzas puede aumentarse o

disminuirse en una razón dada, de donde se pueden encontrar órbitas fijas nuevas en las cuales giren los cuerpos con nuevas fuerzas centrípetas.

COROLARIO 6. Así pues, si sobre la recta CV de posición dada se eleva la perpendicular VP de longitud indeterminada y se une CP y se traza C*p* igual a la anterior formando el ángulo VC*p* tal que sea al ángulo VCP según una razón dada; la fuerza con que un cuerpo puede girar en la curva V*pk*, que describe continuamente el punto *p*, será inversamente como el cubo de la altura C*p*. Pues el cuerpo P, por la fuerza de inercia, no actuando ninguna otra fuerza, continuará por la recta VP. Añádase la fuerza tendente hacia el centro C inversamente proporcional al cubo de la altura CP o C*p* y (por lo que se acaba de demostrar) el movimiento aquel rectilíneo se desviará según la línea curva V*pk*. Pero esta curva V*pk* es la misma que aquella curva VPK hallada en el corolario 3 de la proposición XLI por la cual, dijimos allí, ascienden oblicuamente los cuerpos atraídos por fuerzas como éstas.



PROPOSICIÓN XLV. PROBLEMA XXXI

Hallar el movimiento de ápsides en órbitas muy próximas a círculos.

Se resuelve aritméticamente este problema haciendo que la órbita descrita en un plano fijo por un cuerpo que gira en una elipse móvil (como en los corolarios 2 y 3 de la proposición anterior) se convierta en la figura de la órbita cuyos ápsides se buscan, y calculando después los ápsides de la órbita descrita por dicho cuerpo en el plano fijo. Pero las órbitas devienen de formas iguales si las fuerzas centrípetas con las que son descritas, comparadas entre sí, resultan proporcionales a alturas iguales. Sea el punto V el ápside superior, y escríbase T por la altura máxima CV, A por la altura cualquiera CP o C*p*, y X por la diferencia de alturas CV – CP; entonces, la fuerza con la que un cuerpo se mueve en la elipse que gira en torno a su foco C (como en el corolario 2) y que en el corolario 2 era como $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$, esto es, como $\frac{FFA + RGG - RFF}{A^3}$, sustituyendo T – X por A, será como $\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A^3}$. De modo semejante ha de reducirse otra fuerza centrípeta a una fracción cuyo denominador sea A^3 y los numeradores habrán de ser análogos mediante la correlación de términos homólogos entre sí. Resultará más claro con ejemplos.

EJEMPLO I. Supongamos que la fuerza centrípeta es uniforme y, por consiguiente, como $\frac{A^3}{A^3}$, o (escribiendo T – X por A en el numerador) como $\frac{T^3 - 3TTX + 3TXX - X^3}{A^3}$; y al poner en correspondencia los términos de los numeradores, a saber, los valores dados con los dados y los no dados con los no dados, resultará RGG – RFF + TFF a T^3 como – FFX a – 3TTX + 3TXX – X^3 o como – FF a – 3TT + 3TX – XX. Al suponer ahora que la órbita se aproxima mucho a un círculo, hágase coincidir con él, y al hacerse iguales R y T, y disminuir X a la vez hasta el infinito, las razones últimas serán

RGG a T^3 como – FF a – 3TT, o también, GG a TT como FF a 3TT y, viceversa, GG a FF como TT a 3TT, esto es, como 1 a 3; y por tanto, G a F, esto es, el ángulo VC*p* al ángulo VCP como 1 a $\sqrt{3}$. Por tanto, dado que un cuerpo en una elipse inmóvil completa al caer desde el ápside superior al inferior un ángulo (por así decirlo) de 180 grados; el otro cuerpo en una elipse móvil, pero también en la órbita inmóvil de que tratamos, al caer desde el ápside superior al inferior completará un ángulo de $\frac{180}{\sqrt{3}}$ grados: esto también gracias a la semejanza de esta órbita, descrita por un cuerpo bajo la acción de una fuerza centrípeta uniforme, con la órbita descrita por un cuerpo que gira en una elipse en revolución sobre un plano fijo. Por la correlación de términos anterior devienen dichas órbitas semejantes, no universalmente sino sólo cuando se aproximan muy sensiblemente a la forma circular. Por tanto, cuando un cuerpo bajo la acción de una fuerza centrípeta gira en una órbita casi circular completará siempre entre los ápsides superior e inferior un ángulo de $\frac{180}{\sqrt{3}}$ grados, o sea, de 103°, 55', 23" en el centro; cada vez que pasa del ápside superior al inferior completa dicho ángulo, y al volver desde aquí hasta el ápside superior de nuevo completa el mismo ángulo; y así siempre hasta el infinito.

EJEMPLO II. Supongamos que la fuerza centrípeta fuese como una potencia cualquiera de la altura A tal como A^{n-3}, o $\frac{A^n}{A^3}$, donde $n-3$ y n significan exponentes enteros o fraccionarios cualesquiera, racionales o irracionales, positivos o negativos. Dicho numerador A^n o $(T-X)^n$ convertido en serie indeterminada por nuestro método de series, convergentes devendrá en $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2} XXT^{n-2}$, etc. Y comparados sus términos con los del otro numerador RGG – RFF + TFF – FFX resulta que RGG – RFF + TFF es a T^n como –FF a $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2} XXT^{n-2}$, etc. Y tomando las razones últimas en el momento en que las órbitas se aproximan a la forma de círculos RGG será a T^n como –FF a $-nT^{n-1}$ o también GG a T^{n-1} como FF a nT^{n-1} y alternativamente, GG a FF como T^{n-1} a nT^{n-1}, esto es, como 1 a n; y, por tanto, G es a F, esto es, el ángulo VC*p* es al ángulo VCP, como 1 a $\sqrt{n}$. Por lo cual, al ser de 180 grados el ángulo descrito por el cuerpo en su descenso desde el ápside superior al inferior de una elipse, el ángulo VC*p*, descrito en el descenso del cuerpo desde el ápside superior al inferior de una órbita cuasicircular, la cual es descrita por el cuerpo que gire con una fuerza centrípeta proporcional a la potencia A^{n-3}, será igual a un ángulo de $\frac{180}{\sqrt{n}}$ grados, y al repetirse este ángulo el cuerpo regresará al ápside superior y así hasta el infinito. De modo que si la fuerza centrípeta fuese como la distancia del cuerpo al centro, esto es, como A o como $\frac{A^4}{A^3}$; entonces n será igual a 4, y $\sqrt{n}$ igual a 2; y, por lo tanto, el ángulo entre ápsides superior e inferior igual a $\frac{180}{2}$ grados, o sea, de 90 grados. Por consiguiente, al completar la cuarta parte de una revolución el cuerpo llegará al ápside inferior, y al completar otra cuarta parte llegará al ápside superior, y así cada vez hasta el infinito. Lo cual es también evidente por la proposición X. Pues un cuerpo bajo la acción de dicha

fuerza centrípeta gira en una elipse inmóvil cuyo centro está en el centro de fuerzas. Pero si la fuerza centrípeta es inversamente como la distancia, esto es, como $\frac{1}{A}$ o como $\frac{A^2}{A^3}$, *n* será igual a 2, y el ángulo entre ápsides superior e inferior será de $\frac{180}{\sqrt{2}}$ o sea, de 127°, 16', 45", y por lo mismo, el cuerpo que gire con semejante fuerza se moverá desde el ápside superior al inferior y de éste al superior repitiendo siempre este ángulo. Pero si la fuerza fuese como el inverso de la raíz cuarta de la onceava potencia de la altura, esto es, inversamente como $A^{\frac{11}{4}}$, y, por tanto, directamente como $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ o como $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ entonces *n* será igual a $\frac{1}{4}$ y $\frac{180}{\sqrt{n}}$ grados será igual a 360 grados y por tanto el cuerpo que descienda desde el ápside superior en su descenso continuo desde él alcanzará el ápside inferior cuando complete una revolución completa, y después, al cumplir desde allí en su ascenso continuo otra revolución completa, regresará al ápside superior; y así sucesivamente para siempre.

EJEMPLO III. Si se toman *m* y *n* por cualesquiera índices de potencias de la altura y *b, c,* por números dados cualesquiera, supongamos que la fuerza centrípeta fuese como $\frac{vA^m + cA^n}{A^3}$, esto es, como

$$\frac{b(T - X)^m + c(T - X)^n}{A^3}$$

o (por nuestro método de series convergentes) como

$$\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm - m}{2}\, bXXT^{m-2} + \frac{nn - n}{2}\, cXXT^{n-2},\ldots}{A^3}$$

y al comparar los términos de los numeradores ocurrirá que RGG –RFF + TFF será a $bT^m + cT^n$ como – FF a $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm - m}{2}\, bXT^{m-2} + \frac{nn - m}{2}\, cXT^{n-2}$, etc. Y tomando las razones últimas resultantes cuando las órbitas se aproximan a la forma circular resultará que GG es a $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ como FF a $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, y viceversa, GG a FF como $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ a $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Expresando la altura máxima CV o T aritméticamente por la unidad, esta proporción se transforma en GG a FF como $b + c$ a $mb + nc$ y, por tanto, como 1 a $\frac{mb + nc}{b + c}$. De donde G es a F, esto es, el ángulo VC*p* al ángulo VCP, como 1 a $\sqrt{\frac{mb + nc}{b + c}}$. Y por tanto, al ser de 180 grados el ángulo VCP entre los ápsides superior e inferior en la elipse fija, el ángulo VC*p* entre los mismos ábsides en la órbita descrita por un cuerpo con fuerza, centrípeta proporcional a $\frac{bA^m + cA^n}{A^3}$ será igual a un ángulo de 180° $\sqrt{\frac{b + c}{mb + nc}}$. Y por el mismo argumento si

la fuerza centrípeta fuese como $\frac{bA^m - cA^n}{A^3}$, el ángulo entre ábsides resultará de 180° $\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Y el problema se resuelve de igual modo en casos más difíciles. La cantidad, a la cual es proporcional la fuerza centrípeta, debe descomponerse siempre en series convergentes cuyo denominador sea A^3. Después hay que suponer en la misma razón la parte dada del numerador proveniente de dicha operación respecto a la parte no dada del mismo, la parte dada de este numerador RGG – RFF + TFF – FFX a su otra parte no dada: eliminando las cantidades superfluas y tomando como unidad a T, se obtiene la proporción G a F.

COROLARIO 1. De aquí que, si la fuerza centrípeta fuese como cualquier potencia de la altura, podría hallarse dicha potencia a partir del movimiento de los ápsides y viceversa. Efectivamente, si la totalidad del movimiento angular con el cual el cuerpo retorna al mismo ápside es al movimiento angular de una sola revolución o a 360 grados como un número *m* a otro número *n* y se denomina A a la altura: entonces la fuerza será como aquella potencia de la altura $A_{\frac{nn}{mm}-3}$ cuyo índice es $\frac{nn}{mm} - 3$. Lo cual está claro por el segundo ejemplo. De donde es evidente que dicha fuerza al alejarse del centro no puede decrecer en razón mayor que el cubo de la altura: un cuerpo girando con tal fuerza y partiendo del ápside si empieza a descender, nunca llegará al ápside inferior o altura mínima, sino que caerá hasta el centro, describiendo aquella línea curva que hemos visto en el corolario 3 de la proposición XLI. Pero si al partir del ápside, éste fuese el inferior y comenzase a ascender mínimamente, ascenderá hasta el infinito y jamás llegará al ápside superior. Pues describirá aquella curva de que se ha tratado en el mismo corolario y en el corolario 6 de la proposición XLIV. Así, cuando la fuerza, al alejarse del centro, decrece en razón mayor que el cubo de la altura, el cuerpo que parte de un ápside, en cuanto comience a descender o a ascender, o bien desciende hasta el centro o bien asciende hasta el infinito. Pero si la fuerza, al alejarse del centro, o decrece en razón menor que el cubo de la altura, o crece en una razón cualquiera de la altura, el cuerpo nunca descenderá hasta el centro, sino que en algún momento alcanzará el ápside inferior; y por el contrario, si un cuerpo asciende y desciende alternativamente desde un ápside a otro y jamás alcanza el centro, la fuerza o bien crece con la lejanía al centro, o bien decrece en razón menor que el cubo de la altura; y cuanto más rápidamente retorne un cuerpo de un ápside a otro, más se aleja la razón de las fuerzas de la razón cúbica. Si el cuerpo hubiese de retornar desde y hasta el ápside superior mediante ascensos y descensos alternos en 8 revoluciones, o en 4, o en 2, o en $1\frac{1}{2}$, esto es, si *m* fuese a *n* como 8 o 4 o 2 o $1\frac{1}{2}$ son a 1, y $\frac{nn}{mm} - 3$ valiese entonces $\frac{1}{64} - 3$, o $\frac{1}{16} - 3$, o $\frac{1}{4} - 3$, o $\frac{4}{9} - 3$, la fuerza será como $A_{\frac{1}{64}-3}$, o $A_{\frac{1}{16}-3}$, o $A_{\frac{1}{4}-3}$, o $A_{\frac{4}{9}-3}$, esto es, inversamente como $A^{-3\frac{1}{64}}$, o $A^{-3\frac{1}{16}}$, o $A^{-3\frac{1}{4}}$, o $A^{-3\frac{4}{9}}$. Si después de cada revolución el cuerpo regresa al mismo ápside y éste permanece inmóvil, entonces m será a *n* como 1 a 1 y por ello $A_{\frac{nn}{mm}-3}$ será igual a A^{-2}, o también $\frac{1}{AA}$ de donde el decremento de las fuerzas esta-

rá en razón cuadrada de la altura, como antes se ha demostrado. Si el cuerpo alcanzase el mismo ápside en tres cuartos, o en dos tercios, o en un tercio, o en un cuarto de revolución completa, entonces m será a n como $\frac{3}{4}$, o $\frac{2}{3}$, o $\frac{1}{3}$, o $\frac{1}{4}$, a 1 respectivamente, y, por lo tanto, $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ será igual a $A^{\frac{16}{9}-3}$, o $A^{\frac{9}{4}-3}$, o A^{9-3}, o A^{16-3}, de tal modo que la fuerza o bien es inversamente como $A^{\frac{11}{9}}$, o $A^{\frac{3}{4}}$, o directamente como A^6 o A^{13}. Por fin, si el cuerpo en su recorrido desde el ápside superior hasta alcanzar de nuevo el mismo ápside hiciese una revolución completa y tres grados más y, por tanto, en cada revolución del cuerpo dicho ápside avanza tres grados, entonces m será a n como 363 grados a 360 grados, o como 121 a 120, y por tanto $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ será igual a $A^{-\frac{29523}{14641}}$; en consecuencia, la fuerza centrípeta será inversamente como $A^{\frac{29523}{14641}}$, o inversamente como $A^{2\frac{4}{243}}$ aproximadamente. La fuerza centrípeta decrece, por tanto, en razón algo mayor que la del cuadrado, pero esta razón es $59\frac{3}{4}$ veces más próxima a la razón cuadrada que a la razón cúbica.

COROLARIO 2. De aquí también que si un cuerpo bajo la acción de una fuerza centrípeta que sea como el inverso del cuadrado de la altura girase en una elipse cuyo foco se hallase en el centro de fuerzas, y a dicha fuerza centrípeta se añadiese o se quitase otra fuerza externa cualquiera, podría conocerse (por el ejemplo tercero) el movimiento de los ápsides originado por dicha fuerza externa, y viceversa. Pues si la fuerza con la cual gira el cuerpo en la elipse fuese como $\frac{1}{AA}$, y la fuerza externa aplicada fuese como cA; y por tanto la fuerza restante fuese como $\frac{A - cA^4}{A^3}$; (en el ejemplo tercero) b será igual a 1, m igual a 1 y n igual a 4, y por lo tanto el ángulo de revolución entre ápsides será igual a un ángulo de $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ grados. Supongamos que la fuerza externa fuese 357,45 veces menor que la otra fuerza con que el cuerpo se mueve en la elipse, esto es, $\frac{100}{35745}$, siendo A o T igual a 1, y $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ resultará valer $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, o sea, 180, 7623, esto es, 180°, 45', 44". Por lo tanto, el cuerpo que parte del ápside superior con un movimiento angular de 180°, 45', 44", llegará al ápside inferior, y repitiendo este movimiento regresará al superior: y en consecuencia, el ápside superior vendrá a progresar en cada revolución 1°, 31', 28". Aproximadamente dos veces más veloz es el ápside de la Luna.

Hasta aquí sobre el movimiento de cuerpos en órbitas cuyos planos pasan por el centro de fuerzas. Falta determinar también los movimientos en planos excéntricos. Pues los autores que tratan el movimiento de los graves suelen considerar los ascensos y descensos de los pesos tanto perpendicular como oblicuamente en cualesquiera planos dados: y con igual razón se ha de considerar aquí el movimiento de cuerpos tendentes a un centro bajo cualesquiera fuerzas y moviéndose en

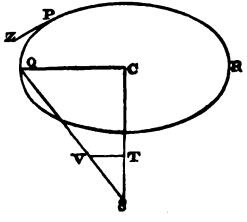
planos excéntricos. Suponemos que dichos planos son perfectamente lisos y lubricados de modo que no retarden a los cuerpos. Además, en estas demostraciones, en lugar de planos sobre los que se deslizan los cuerpos y a los que tocan al deslizarse, utilizaremos planos paralelos a ellos, en los cuales se mueven los centros de los cuerpos y describen órbitas al moverse. Y por la misma ley determinamos después los movimientos de los cuerpos realizados en superficies curvas.

SECCIÓN X

DEL MOVIMIENTO DE CUERPOS EN SUPERFICIES DADAS, Y DEL MOVIMIENTO DE VAIVÉN DE LOS PÉNDULOS

PROPOSICIÓN XLVI. PROBLEMA XXXII

Supuesta una fuerza centrípeta de cualquier tipo, y dado tanto el centro de fuerzas como un plano cualquiera en el que gira el cuerpo, y concedidas las cuadraturas de las figuras curvas: hállese el movimiento de un cuerpo que parte de un lugar dado, con velocidad dada y según una recta dada en dicho plano.



Sea S el centro de fuerzas, SC la distancia mínima desde ese centro al plano dado, P un cuerpo que parte del punto P según la recta PZ, Q el mismo cuerpo girando en su trayectoria, y PQR dicha trayectoria descrita en dicho plano y que ha de hallarse. Únanse CQ, QS, y si sobre QS se toma SV proporcional a la fuerza centrípeta con la cual el cuerpo es atraído hacia el centro S, y se traza VT paralela a CQ cortando a SC en T: la fuerza SV (por el corolario II de las leyes) se descompone en las fuerzas ST, TV, de las cuales ST, atrayendo al cuerpo según la línea perpendicular al plano, en nada cambia su movimiento en este plano. Pero la otra fuerza TV, actuando según la posición del plano, atrae al cuerpo directamente hacia el punto C dado en el plano y, por tanto, hace que por ello dicho cuerpo se mueva en ese plano como si la fuerza ST desapareciese y el cuerpo girase únicamente con la fuerza TV en torno al centro C en un espacio libre. Mas, estando dada la fuerza centrípeta TV con la que el cuerpo Q gira en un espacio libre en torno al centro dado C, está dada (por la proposición XLII) también la trayectoria PQR, descrita por el cuerpo, así como el punto Q donde se hallará el cuerpo en un tiempo cualquiera dado y, finalmente, la velocidad del cuerpo en dicho punto Q; y viceversa. Q.E.I.

PROPOSICIÓN XLVII. TEOREMA XV

Supuesto que la fuerza centrípeta sea proporcional a la distancia desde el cuerpo al centro, todos los cuerpos que giren en planos cualesquiera describirán elipses y completarán sus revoluciones en tiempos iguales; mientras que aquellos que se muevan según líneas rectas, alternativamente hacia adelante y hacia atrás, completarán sus diferentes períodos de ida y vuelta en los mismos tiempos.

Puesto que, manteniendo los supuestos de la proposición anterior, la fuerza SV, por la que el cuerpo Q que gira en un plano cualquiera PQR es atraído hacia el centro S, es como la distancia SQ; y puesto que SV y SQ, TV y CQ son proporcionales, la fuerza TV, con la cual el cuerpo es atraído hacia el punto dado C en el plano de la órbita, es como la distancia CQ. Consecuentemente, las fuerzas, por las cuales los cuerpos que se hallan en el plano PQR son atraídos hacia el punto C, son proporcionales, a distancias iguales, a las fuerzas por las que los mismos cuerpos son atraídos en dondequiera hacia el centro S; y, por tanto, los cuerpos se moverán en iguales tiempos y con iguales figuras, en cualquier plano PQR que rodee al punto C, tal y como lo harían en espacios libres en torno al centro S; y, en consecuencia (por el corolario 2 de la proposición X y el corolario 2 de la proposición XXXVIII), siempre en tiempos iguales, o bien describirán elipses en dicho plano en torno al centro C, o bien completarán períodos moviéndose adelante y atrás según líneas rectas trazadas en dicho plano por el centro C. Q.E.D.

ESCOLIO

Afines a éstos son los ascensos y descensos de los cuerpos en superficies curvas. Imagínense líneas curvas descritas en un plano que giran luego en torno a ciertos ejes dados que pasan por el centro de fuerzas y, mediante esa revolución, describen superficies curvas; y también que los cuerpos se mueven de tal forma que sus centros se encuentren siempre en dichas superficies. Si tales cuerpos ascendiendo y descendiendo oblicuamente marchan hacia adelante y hacia atrás, realizarán sus movimientos en planos que pasan por el eje y, por tanto, en líneas curvas por cuya revolución se generaron aquellas superficies. En estos casos, por consiguiente, será suficiente considerar el movimiento en dichas líneas curvas.

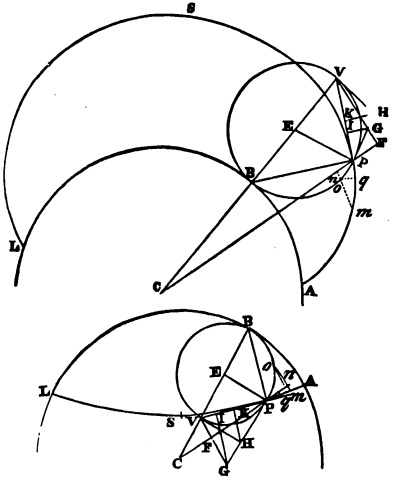
PROPOSICIÓN XLVIII. TEOREMA XVI

Si una rueda se apoya en el exterior de un globo formando ángulo recto y, girando como una rueda, describiese un círculo máximo, la longitud del camino curvilíneo descrito por un punto cualquiera dado en el perímetro de la rueda desde que toca al globo (que se puede llamar cicloide o epicicloide) será al doble del seno verso de la mitad del arco que ha tocado al globo al ir recorriéndolo desde aquel momento, como la suma de los diámetros del globo y la rueda al semidiámetro del globo.

PROPOSICIÓN XLIX. TEOREMA XVII

Si una rueda se apoya en el interior de un globo cóncavo formando ángulo recto y avanza rodando por un círculo máximo, la longitud del camino curvilíneo descrito por un punto cualquiera dado en el perímetro de la rueda desde que toca al globo será al doble del seno verso de la mitad del arco que ha tocado al globo al ir recorriéndolo durante todo ese tiempo, como la diferencia de los diámetros del globo y la rueda al semidiámetro del globo.

Sea ABL el globo, C su centro, BPV la rueda que se apoya en él, E el centro de la rueda, B el punto de contacto y P el punto dado en el perímetro de la rueda. Imaginemos a esta rueda moviéndose sobre el círculo máximo ABL desde A por B hacia L, y girando de tal modo al desplazarse que los arcos AB, PB sean siempre iguales entre sí y mientras tanto el punto P dado en el perímetro de la rueda va describiendo el camino curvilíneo AP. Sea AP el total del camino curvilíneo descrito desde que la rueda tocó al globo en A, y la longitud AP de este camino será al doble del seno verso del arco $\frac{1}{2}$PB como 2CE a CB. Pues toque la recta CE (prolongada si es preciso) a la rueda en V, y únanse CP, BP, EP, VP y descienda VF normal sobre la prolongación de CP. Sean PH, VH tangentes al círculo en P y V y concurrentes en H, y corte PH a VF en G, y sobre VP caigan las perpendiculares GI, HK. De nuevo con centro en C e intervalo cualquiera descríbase el círculo *nom* que corte a la recta CP en *n*, al perímetro BP de la rueda en *o*, y al camino curvilíneo AP en *m*; y con centro en V e intervalo V*o* descríbase el círculo que corta en *q* a VP prolongada.



Puesto que la rueda al moverse gira siempre en torno al punto de contacto B, es evidente que la recta BP es perpendicular a aquella línea curva AP descrita por el punto P de la rueda y, por tanto, que la recta VP es tangente a dicha curva en el punto P. El radio del círculo *nom* aumentado o disminuido gradualmente iguale siempre a la distancia CP; y por la semejanza de la figura evanescente P*nomq* y de la figura PFGVI, la razón última de los segmentos evanescentes P*m*, P*n*, P*o*, P*q*, esto es, la razón de las

variaciones instantáneas de la curva AP, de la recta CP, del arco circular BP, y de la recta VP será respectivamente la misma que la de las líneas PV, PF, PG, PI. Pero como VF es perpendicular a CF y VH a CV y, por tanto, los ángulos HVG, VCF son iguales; y (puesto que los ángulos del cuadrilátero HVEP son rectos en V y P) el ángulo VHG es igual al ángulo CEP, los triángulos VHG y CEP serán semejantes; de donde ocurrirá que EP : CE = HG : HV, o HP = KI : PK y sumando o restando, CB : CE = PI : PK, y duplicando denominadores, CB : 2CE = PI : PV = Pq : Pm. El decremento, por tanto, de la línea VP, esto es, el incremento de la línea BV – VP, está respecto al incremento de la curva AP en la razón dada CB a 2CE, por lo cual (por el corolario del lema IV) las longitudes BV – VP y AP generadas por dichos incrementos están en la misma razón. Pero, siendo BV el radio, VP es el coseno del ángulo BVP o $\frac{1}{2}$BEP, y, por tanto, BV – VP es el seno verso del mismo ángulo; y consecuentemente en esta rueda cuyo radio es $\frac{1}{2}$BV, ocurrirá que BV – VP será el doble del seno verso del arco $\frac{1}{2}$BP. Luego AP es al doble del seno verso del arco $\frac{1}{2}$BP como 2CE a CB. Q.E.D.

En la primera de estas proposiciones llamaremos a la línea AP la cicloide exterior al globo, y a la otra, para distinguirlas, la llamaremos, en la segunda, la cicloide interior al globo.

COROLARIO 1. De aquí que si se describiera la cicloide completa ASL, al bisecarla en S, la longitud de la parte PS será a la longitud VP (que es el doble del seno del ángulo VBP, siendo EB el radio) como 2CE a CB, y, por tanto, en razón dada.

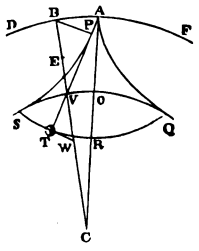
COROLARIO 2. Y la longitud del semiperímetro de la cicloide AS será igual a la recta que sea al diámetro BV de la rueda como 2CE a CB.

PROPOSICIÓN L. PROBLEMA XXXIII

Hacer oscilar a un cuerpo pendular en una cicloide dada.

Dentro del globo QVS, descrito con centro en C, sea dada la cicloide QRS bisecada en R y que toca a ambos lados con sus puntos extremos Q y S a la superficie del globo. Trácese CR bisecante del arco QS en O y prolónguese hasta A, de modo que CA sea a CO como CO a CR. Y con centro en C e intervalo CA descríbase el globo exterior DAF, y dentro de este globo descríbanse por medio de una rueda cuyo diámetro sea AO las dos semicicloides AQ y AS tangentes al globo interior en Q y S y que toquen al globo exterior en A. Desde dicho punto A, mediante un hilo APT igual en longitud a AR, suspéndase el cuerpo T y hágasele oscilar entre las semicicloides AQ, AS de modo tal que, cuantas veces se aparta el péndulo de la perpendicular AR, la parte superior del hilo AP se aplica a la semicicloide APS hacia la cual se dirige el movimiento, plegándose en torno a ella como si fuera un obstáculo, y la parte restante PT a la cual no obstaculiza la cicloide permanezca extendida en línea recta; y el peso T oscilará en la cicloide dada QRS. Q.E.F.

Hágase, pues, que el hilo PT se encuentre con la cicloide QRS en T, y con el círculo QOS en V, y trácese CV; y elévense las perpendiculares BP, TW hasta la parte recta del hilo PT desde los puntos extremos P y T, tales que encuentren a la recta CV en B y W. Por construcción y por la génesis de las figuras semejantes AS, SR, es evidente que las perpendiculares PB, TW cortan sobre CV las longitudes VB, VW iguales a los diámetros OA, OR de las ruedas. Por lo tanto, TP es a VP (doble del seno del ángulo VBP,

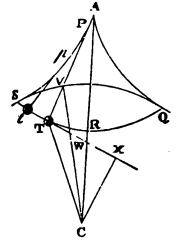


siendo $\frac{1}{2}$BV el radio) como BW a BV, o AO + OR a AO, esto es (siendo proporcionales CA a CO, CO a CR y por división AO a OR), como CA + CO a CA, o, bisecando a BV en E, como 2CE a CB. Por consiguiente (por el corolario 1 de la proposición XLIX), la longitud de la parte recta del hilo PT es siempre igual al arco PS de la cicloide, y el hilo completo APT es siempre igual a la mitad del arco cicloide APS, esto es (por el corolario 2 de la proposición XLIX,) a la longitud AR. Y por lo mismo a la inversa, si el hilo permanece siempre igual a la longitud AR el punto T se moverá en la cicloide dada QRS. Q.E.D.

COROLARIO. El hilo AR es igual a la semicicloide AS y, por lo tanto, está en la misma razón respecto al semidiámetro AC del globo exterior, que la semicicloide SR semejante a aquélla tiene con respecto al semidiámetro CO del globo interior.

PROPOSICIÓN LI. TEOREMA XVIII

Si una fuerza centrípeta tendente por todas partes al centro C de un globo fuese en cada punto singular como la distancia de cada lugar desde el centro, y bajo la acción de esta sola fuerza el cuerpo T oscilase (del modo ya descrito) en el perímetro de la cicloide QRS: digo que serán iguales los tiempos de las oscilaciones desiguales bajo otro aspecto.



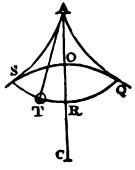
Pues sobre la tangente TW de la cicloide, prolongada indefinidamente, descienda la perpendicular CX y únase CT. Puesto que la fuerza centrípeta por la que el cuerpo T es impulsado hacia C es como la distancia CT y ésta (por el corolario II de las leyes) se descompone en las partes CX, TX, de las cuales CX empujando directamente al cuerpo desde P estira al hilo PT y se agota íntegramente en esa resistencia sin producir ningún otro efecto; mientras que la otra parte TX, al empujar transversalmente al cuerpo, o sea, hacia X, acelera directamente su movimiento en la cicloide; es evidente que la aceleración del cuerpo, proporcional a esta fuerza aceleratriz, es en cada momento como la longitud TX, esto es, por estar dadas CV, WV y las proporcionales a ellas TX, TW, como la longitud TW, esto es (por el corolario 1 de la proposición XLIX), como la longitud del arco cicloide TR. Por tanto, si se desvían desigualmente de la perpendicular AR dos péndulos APT, A*pt* y se dejan caer a la vez, sus aceleraciones serán siempre como los arcos a describir TR, *t*R. Pero las partes descritas en el inicio son como las aceleraciones, esto es, como el total a describir desde el principio y, por tanto, las partes que restan por describir y las aceleraciones subsiguientes, proporcionales a estas partes, son también como el total; y así sucesivamente. Por tanto, las aceleraciones, así como las velocidades generadas y las partes descritas con estas velocidades y las partes a describir son siempre como el total; y en consecuencia, las partes

a describir, al conservar entre sí una razón dada, evanescen a la vez, esto es, los dos cuerpos oscilantes llegarán a la vez a la perpendicular AR. Y puesto que el respectivo ascenso de los péndulos desde el punto inferior R, realizado a través de los mismos arcos cicloides con movimiento retrógrado, es retardado en cada lugar por las mismas fuerzas por las que eran acelerados los descensos, es evidente que las velocidades de los ascensos y descensos realizados por los mismos arcos son iguales y que, por tanto, se cumplen en tiempos iguales; y por lo mismo como las dos partes RS y RQ de la cicloide situadas a cada lado de la perpendicular son semejantes e iguales, los dos péndulos realizarán, tanto las oscilaciones completas como las mitades, siempre en los mismos tiempos. Q.E.D.

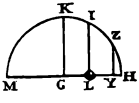
COROLARIO. La fuerza por la que el cuerpo T es acelerado o retardado en cualquier punto T de la cicloide es al peso total de ese cuerpo en el lugar más elevado S o Q como el arco TR de la cicloide al arco de la misma SR o QR.

PROPOSICIÓN LII. PROBLEMA XXXIV

Definir las velocidades de péndulos en cada lugar así como los tiempos en que se completan tanto las oscilaciones como cada parte de ellas.



Con centro cualquiera G, con radio GH igual al arco de la cicloide RS, trácese el semicírculo HLM bisecado por el semidiámetro GK. Y si una fuerza centrípeta proporcional a las distancias de los lugares al centro tendiera hacia el centro G y fuera en el perímetro HIK igual a la fuerza centrípeta tendente hacia el mismo centro en el perímetro del globo QOS, y a la vez que se deja caer el péndulo desde el punto más alto S se deja caer otro cuerpo L desde H hasta G, dado que las fuerzas que actúan sobre los cuerpos son iguales desde el principio y proporcionales siempre a los espacios a recorrer TR y LG, y por lo mismo, si TR y LG son iguales, también lo son en los lugares T y L, es evidente que dichos cuerpos describen al principio espacios iguales ST y HL y continúan desde allí igualmente urgidos y recorriendo espacios iguales. Por tanto, (por la proposición XXXVIII) el tiempo en el cual el cuerpo describe el arco ST es al tiempo de una oscilación como el arco HI, tiempo en el cual el cuerpo H va hasta L, es al semiperímetro HKM, tiempo en el cual el cuerpo H va hasta M. Y la velocidad del péndulo en el punto T es a su velocidad en el punto ínfimo R (esto es, la velocidad del cuerpo H en el punto L a su velocidad en el punto G, o también el incremento momentáneo de la línea HL al incremento momentáneo de la línea HG, siendo constante la velocidad de crecimiento de los arcos HI y HK) como la ordenada LI al radio GK, o también como $\sqrt{SR^2 - TR^2}$) a SR. De donde, como para oscilaciones desiguales los arcos descritos en tiempos iguales son proporcionales a los arcos enteros de las oscilaciones, si se tienen dados los tiempos se tendrán tanto las velocidades como los arcos descritos en cualquiera oscilación. Que era lo primero que había que hallar.



Oscilen ahora los cuerpos pendulares en cicloides distintas descritas en el interior de globos diferentes cuyas fuerzas absolutas son también distintas; y, si se denomina V a la fuerza absoluta

de un globo cualquiera QOS, la fuerza aceleratriz que actúa sobre el péndulo en la circunferencia de dicho globo cuando empieza a moverse directamente hacia su centro será como la distancia del cuerpo pendular a dicho centro conjuntamente con la fuerza absoluta del globo, esto es, como CO × V. Y, por tanto, el segmento HY, que es como la fuerza aceleratriz CO × V, será descrito en un tiempo dado: y si se eleva la perpendicular YZ que toque a la circunferencia en Z, el arco naciente HZ denotará dicho tiempo dado. Pero este arco naciente HZ es como la raíz cuadrada del rectángulo GHY y, por tanto, como $\sqrt{GH \times CO \times V}$. De aquí que el tiempo de una oscilación completa en la cicloide QRS (siendo directamente como el semiperímetro HKM, que denota esa oscilación completa; e inversamente como el arco HZ, que análogamente denota el tiempo. dado) será directamente como GH e inversamente como $\sqrt{GH \times CO \times V}$, esto es, puesto que GH y SR son iguales, como $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, o (por el corolario de la proposición L) como $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Por consiguiente, las oscilaciones en todos los globos cicloides, efectuadas con cualesquiera fuerzas absolutas, están en razón compuesta directamente de la raíz cuadrada de la longitud de la cuerda e inversamente de la raíz cuadrada de la distancia entre el punto de suspensión y el centro del globo y también inversamente de la raíz cuadrada de la fuerza absoluta del globo. Q.E.I.

COROLARIO 1. De aquí también que puedan compararse entre sí los tiempos de los cuerpos en oscilación, en caída o en giro. Pues si el diámetro de la rueda con la cual se describe la cicloide dentro del globo se supone igual al semidiámetro del globo, la cicloide resultará una línea recta que pasa por el centro del globo, y la oscilación será ahora un descenso y posterior ascenso en dicha recta. De donde están dados tanto el tiempo del descenso desde cualquier lugar hasta el centro como el tiempo igual a éste en el cual el cuerpo, girando uniformemente en torno al centro del globo y a cualquier distancia, describe el arco cuadrante. Pues dicho tiempo (por el caso 2) es al tiempo de una semioscilación en toda cicloide QRS como 1 a $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

COROLARIO 2. De aquí se siguen también los descubrimientos de Wren y de Huygens sobre la cicloide común. Pues si se aumenta infinitamente el diámetro de un globo, la superficie esférica del mismo se convertirá en un plano y la fuerza centrípeta actuará uniformemente en la dirección de las líneas perpendiculares a dicho plano, con lo que nuestra cicloide viene a ser una cicloide común. En este caso, la longitud del arco de la cicloide entre ese plano y el punto descriptor resultará ser cuatro veces el seno verso del semiarco de la rueda entre dicho plano y el punto descriptor, como lo mostró Wren: y el péndulo entre dos cicloides semejantes oscilará con tiempos iguales en una cicloide semejante e igual, como demostró Huygens. Y también el descenso de los graves en el tiempo de una oscilación será el indicado por Huygens.

Se adaptan las proposiciones que hemos demostrado a la constitución real de la Tierra en la medida en que ruedas circulantes sobre sus círculos máximos describirán, con el movimiento de clavos fijados en sus perímetros, cicloides exteriores al globo; mientras que por debajo los péndulos suspendidos en minas y cavernas terrestres deben oscilar en cicloides interiores al globo para que resulten isocronas todas las oscilaciones. Pues la gravedad (como se mostrará en el libro tercero) decrece al alejarse de la super-

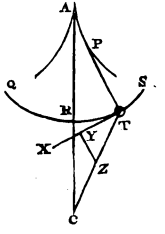
ficie terrestre; hacia arriba como el cuadrado de la distancia al centro y hacia abajo en razón simple.

PROPOSICIÓN LIII. PROBLEMA XXXV

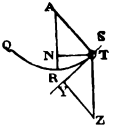
Concedidas las cuadraturas de figuras curvas, hallar las fuerzas con las cuales cuerpos que se muevan en curvas dadas realicen siempre sus oscilaciones en tiempos iguales.

Oscile el cuerpo T en una curva cualquiera STRQ, cuyo eje sea AR que pasa por el centro de fuerzas C. Trácese TX, que toque a dicha curva en un lugar cualquiera T del cuerpo, y en esa tangente TX tómese TY igual al arco TR. La longitud de dicho arco es conocida por los métodos usuales para la cuadratura de figuras. Trácese desde el punto Y la recta YZ perpendicular a la tangente. Trácese CT que corte a dicha perpendicular en Z y la fuerza centrípeta será proporcional a TZ. Q.E.I.

Ya que si la fuerza con la cual es atraído el cuerpo desde T hacia C se expresa por la recta TZ tomada proporcionalmente a ella, dicha fuerza se descompondrá en las fuerzas TY e YZ, de las cuales YZ, atrayendo el cuerpo según la longitud del hilo PT, en nada cambia su movimiento, mientras la otra fuerza TY acelera o retarda directamente su movimiento en la curva STRQ. Por tanto, al ser ésta como el espacio a recorrer TR, las aceleraciones o retardos del cuerpo al recorrer partes (mayor y menor) proporcionales de dos oscilaciones, siempre serán como esas partes y, por ende, harán que esas partes siempre sean descritas simultáneamente. Pero los cuerpos que siempre describen a la vez partes proporcionales al todo, describirán los todos a la vez. Q.E.D.



COROLARIO 1. De aquí que si el cuerpo T pende del hilo rectilíneo AT desde el centro A y describe el arco circular STRQ, y entretanto es urgido hacia abajo según líneas paralelas por una fuerza que sea a la fuerza uniforme de la gravedad como el arco TR a su seno TN, los tiempos de cada oscilación serán iguales. Puesto que TZ y AR son paralelas, los triángulos ATN y ZTY serán semejantes y, por tanto, TZ será a AT como TY a TN; esto es, si la fuerza uniforme de la gravedad se expresa por la longitud dada AT, la fuerza TZ, por la que las oscilaciones resultan isócronas, será a la fuerza AT de la gravedad como el arco TR, igual a TY, es a TN, seno del mismo.

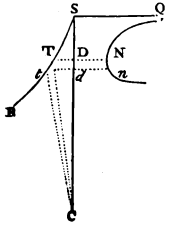


COROLARIO 2. Y, por tanto, en los relojes, si las fuerzas impresas por alguna máquina sobre el péndulo para conservar el movimiento se pueden componer con la fuerza de la gravedad de tal modo que la fuerza total hacia abajo sea siempre como la línea que se obtenga al dividir el producto del arco TR y el radio AR por el seno TN, todas las oscilaciones serán isócronas.

PROPOSICIÓN LIV. PROBLEMA XXXVI

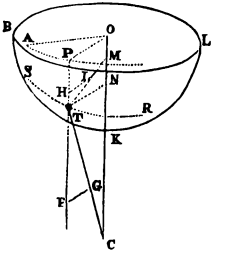
Concedidas las cuadraturas de figuras curvas, hallar los tiempos en que con cualquier fuerza centrípeta los cuerpos descenderán o ascenderán por cualesquiera líneas curvas descritas sobre un plano que atraviesa el centro de fuerza.

Descienda un cuerpo desde un lugar cualquiera S a través de una cierta línea curva STtR dada en un plano que pasa por el centro de fuerzas C. Únase CS y divídase en innumerables partes iguales, y sea una de ellas D*d*. Con centro en C y distancias CD y C*d* trácense los círculos DT *dt* que encuentran a la curva STtR en T y *t*. Y estando dadas tanto la ley de la fuerza centrípeta como la altura CS desde la que cayó el cuerpo, estará dada la velocidad del cuerpo en cualquiera otra altura CT (por la proposición XXXIX). Pero el tiempo en que el cuerpo describe el segmento T*t* es como la longitud de este segmento, esto es, directamente como la secante del ángulo *t*TC; e inversamente como la velocidad. Sea proporcional a este tiempo la ordenada DN perpendicular a CS en el punto D, y, por estar dada D*d*, el rectángulo D*d* × DN, esto es, el área DN*nd*, será proporcional a dicho tiempo. Por lo tanto, si PN*n* fuese aquella línea curva a la que siempre es tangente el punto N y su asíntota fuese la recta SQ que cae perpendicularmente sobre la recta CS, el área SQPND será proporcional al tiempo en que el cuerpo al caer ha descrito la línea ST; por tanto, hallada esta área estará dado el tiempo. Q.E.I.



PROPOSICIÓN LV. TEOREMA XIX

Si un cuerpo se mueve en cualquier superficie curva cuyo eje pasa por el centro de fuerzas y se traza una perpendicular desde el cuerpo al eje; y desde cualquier punto dado del eje se traza otra línea igual y paralela a la anterior, digo que dicha paralela describirá un área proporcional al tiempo.



Sea BKL la superficie curva, T el cuerpo que gira en ella, STR la trayectoria descrita en ella por el cuerpo, S el comienzo de la trayectoria, OMK el eje de la superficie curva, TN la perpendicular del cuerpo al eje, OP la paralela e igual a ésta trazada desde el punto dado O en el eje; sea AP la proyección de la trayectoria descrita por el punto P de la línea giratoria OP sobre el plano AOP; sea A el comienzo del trazo correspondiente al punto S, TC la recta trazada desde el cuerpo al centro, TG una parte de la misma proporcional a la fuerza centrípeta con que el cuerpo es atraído hacia el centro C, TM una recta perpendicular a la superficie curva, TI una parte de la misma que es proporcional a

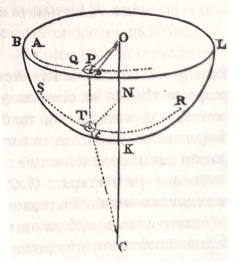
la presión con la que el cuerpo actúa sobre la superficie y a la vez es repelido por ella hacia M; PTF una paralela al eje y que pasa (por el corolario II de las leyes) se descompone en las fuerzas TF, desde los puntos G e I sobre dicha paralela PHTF. Digo ahora que el área AOP, descrita por el radio OP desde el inicio del movimiento, es proporcional al tiempo. Puesto que la fuerza TG (por el corolario 2 de las leyes) se descompone en las fuerzas TF, FG; y la fuerza TI en las fuerzas TH, HI: ahora bien, las fuerzas TF, TH al actuar según la línea PF perpendicular al plano AOP sólo cambian el movimiento del cuerpo respecto a la perpendicular a dicho plano. Y, por tanto, su movimiento, en tanto que realizado según la posición del plano, esto es, el movimiento del punto P, con el que se describe el trazo de la trayectoria AP en dicho plano, es el mismo que si se suprimiesen las fuerzas TF, TH y el cuerpo fuese únicamente urgido por las fuerzas FG, HI; esto es, el mismo que si el cuerpo describiese la curva AP en el plano AOP con una fuerza centrípeta tendente al centro O e igual a la suma de las fuerzas FG y HI. Pero con semejante fuerza (por la proposición I) se describirá el área AOP proporcional al tiempo. Q.E.D.

COROLARIO. Por el mismo argumento, si un cuerpo, urgido por fuerzas que tienden a dos o más centros en la misma recta dada CO, describiese en un espacio libre una curva cualquiera ST, el área AOP siempre será proporcional al tiempo.

PROPOSICIÓN LVI. PROBLEMA XXXVII

Concedida la cuadratura de figuras curvilíneas y supuesto que tanto la ley de la fuerza centrípeta tendente a un centro dado como la superficie curva cuyo eje pasa por dicho centro están dadas, hallar la trayectoria que en esa superficie describirá un cuerpo que parte de un lugar dado, con una velocidad dada y hacia una dirección dada en esa superficie.

Manteniendo la construcción de la proposición anterior, salga el cuerpo T desde el lugar dado S según una recta de posición dada hacia la trayectoria a hallar STR, cuya proyección en el plano BDO sea AP. Y al estar dada la velocidad del cuerpo en la altura SC estará dada su velocidad en cualquier otra altura TC. Con dicha velocidad describa en un tiempo dado mínimo la parte T*t* de su trayectoria, y sea P*p* la proyección de la misma descrita sobre el plano AOP. Únase O*p* y trazado un pequeño círculo en la superficie curva con centro en T e intervalo T*t* sea su proyección en el plano AOP la elipse *p*Q. Y puesto que está dado en magnitud el pequeño círculo T*t*, y está dada su distancia TN o PO del eje CO, estará dada en magnitud dicha elipse *p*Q tanto en especie y magnitud como en posición respecto a la recta PO. Y dado que el área PO*p* es proporcional al tiempo y está dada al estar dado el tiempo, estará dado el ángulo PO*p*. Y, por consiguiente, estará dado *p*, intersección común de la elipse y de la recta O*p*, así como el ángulo OP*p*, ángulo con el que la proyección AP*p* de la trayectoria corta a la línea OP. Y de aquí (aplicando la proposición XLI y su corola-



rio 2) se ve fácilmente el modo de determinar AP*p*. Entonces, a partir de cada punto P de la proyección, elevando sobre el plano AOP las perpendiculares PT que corten a la superficie curva en T, quedará dado cada punto T de la trayectoria. Q.E.I.

SECCIÓN XI

DEL MOVIMIENTO DE CUERPOS QUE TIENDEN UNOS A OTROS CON FUERZAS CENTRÍPETAS

He expuesto hasta aquí los movimientos de cuerpos atraídos hacia un centro inmóvil, aunque puede que tal cosa no exista en la naturaleza de las cosas. Pues las atracciones suelen darse hacia los cuerpos, y las acciones de los cuerpos atrayentes y atraídos son siempre mutuas e iguales, por la ley tercera: hasta el punto de que si fuesen dos cuerpos, ni el atrayente ni el atraído podrían estar en reposo, sino que ambos (por el corolario IV de las leyes) girarán en torno a un centro común de gravedad, como con atracción mutua; y si fuesen varios los cuerpos, bien sean atraídos por uno y éste por los otros, bien se atraigan todos mutuamente, habrán de moverse entre sí de tal modo que o bien esté en reposo el centro común de gravedad o bien se mueva uniformemente en línea recta. Por lo cual paso ahora a exponer el movimiento de cuerpos que se atraen mutuamente, considerando a las fuerzas centrípetas como atracciones, aunque quizá, si hablásemos en términos físicos, se denominarían más propiamente impulsos. Pero ahora nos movemos en matemáticas y, por tanto, dejando de lado disputas físicas, hacemos uso de un lenguaje común en el cual podemos ser comprendidos más fácilmente por lectores matemáticos.

PROPOSICIÓN LVII. TEOREMA XX

Dos cuerpos que se atraen mutuamente describen figuras semejantes tanto en torno a su centro común de gravedad como uno en torno al otro mutuamente.

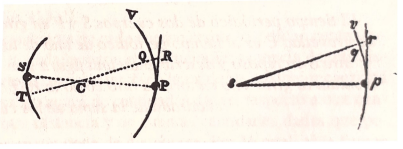
Pues las distancias de los cuerpos a su centro común de gravedad son inversamente proporcionales a los cuerpos, y se hallan, por tanto, en una razón dada entre sí, y componiendo razones, en una razón dada respecto a la distancia total entre cuerpos. Tales distancias se desplazan en torno a su extremo común con igual movimiento angular, puesto que al estar sobre una recta jamás cambian su inclinación mutua. Mas las líneas rectas que guardan entre sí una razón dada y giran en torno a sus extremos con igual movimiento angular en planos que o bien reposan a la vez que dichos extremos, o bien se mueven con cualquier movimiento no angular, describen en torno a tales extremos figuras totalmente semejantes. Por consiguiente, las figuras descritas con los giros de estas distancias, son semejantes. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LVIII. TEOREMA XXI

Si dos cuerpos se atraen mutuamente con fuerzas cualesquiera, y giran también en torno al centro común de gravedad, digo que con las mismas fuerzas y en torno a uno cualquiera de los dos cuerpos en reposo se puede describir una figura semejante e igual a las figuras que describen los cuerpos uno en torno a otro con los movimientos mencionados.

Giren los cuerpos S, P en torno al centro común de gravedad C, progresando de S a T y de P a Q: desde el punto dado *s* trácense *sp*, *sq* siempre iguales y paralelas a SP, TQ; y la curva *pqv*, descrita por el punto *p* al girar en torno al punto inmóvil *s*, será semejante e igual a las curvas descritas por los cuerpos S, P al girar mutuamente uno en torno a otro: por tanto (por el teorema XX), será semejante a las curvas ST y PQV descritas por los mismos cuerpos en torno al centro común de gravedad C: y esto porque las proporciones de las líneas SC, CP, y SP o *sp* entre sí están dadas.

Caso 1. Dicho centro común de gravedad C, por el corolario IV de las leyes, o está en reposo o se mueve uniformemente en línea recta. Primero supongamos que reposa y que en *s* y *p* se sitúan dos cuerpos, uno inmóvil en *s* y otro móvil en *p*, semejantes e iguales a los cuerpos S y P. Hágase después que las rectas PR y *pr* sean tangentes a las curvas PQ y *pq* en P y *p* y prolónguense CQ y *sq* hasta R y *r*. Y por la semejanza de las figuras CPRQ, *sprq*, RQ será a *rq* como CP a *sp* y, por tanto, en una razón dada. En consecuencia, si la fuerza con la cual es atraído el cuerpo P hacia el cuerpo S y, por tanto, hacia el centro intermedio C, se hallase respecto a la fuerza con la cual el cuerpo *p* es atraído hacia el centro *s* en esa misma razón dada, esas fuerzas en tiempos iguales atraerán siempre a los cuerpos desde las tangentes PR y *pr* hacia los arcos PQ y *pq* a través de los intervalos RQ y *rq* proporcionales a dichas fuerzas; por ello, la segunda fuerza hará que el cuerpo *p* gire en la curva *pqv*, semejante a la curva PQV en la cual la primera fuerza hará girar al cuerpo P; y completarán revoluciones en los mismos tiempos. Pero como dichas fuerzas no son entre sí como CP a *sp*, sino que (por la semejanza e igualdad de los cuerpos S y *s*, P y *p*, y la igualdad de las distancias SP, *sp*) son iguales entre sí, los cuerpos en tiempos iguales son atraídos igualmente de las tangentes; y, por tanto, para que el cuerpo segundo *p* sea atraído a través de un intervalo mayor *rq*, se requiere un tiempo mayor y esto como la raíz cuadrada de los intervalos, por cuanto que (por el lema X) los espacios recorridos en el mismo comienzo del movimiento son como el cuadrado de los tiempos. Supóngase, pues, que la velocidad del cuerpo *p* es a la velocidad del cuerpo P como la raíz cuadrada de la distancia *sp* a la distancia CP, de tal modo que en tiempos que estén en esta misma razón se describan los arcos *pq*, PQ que están en razón simple: los cuerpos P, *p* atraídos siempre por fuerzas iguales describirán alrededor de los centros en reposo C y *s* las figuras semejantes PQV, *pqv*, de las cuales la segunda *pqv* es semejante e igual a la descrita por el cuerpo P al girar en torno al cuerpo móvil S. Q.E.D.



Caso 2. Ahora supongamos que el centro común de gravedad junto con el espacio en el cual los cuerpos se mueven entre ellos, avanza uniformemente en línea recta, y

(por el corolario VI de las leyes) todos los movimientos en tal espacio se producirán igual que antes y, por tanto, los cuerpos describirán entre sí las mismas figuras que antes, y consecuentemente iguales y semejantes a la figura *pqv*. Q.E.D.

COROLARIO 1. De aquí que dos cuerpos que se atraigan entre sí con fuerzas proporcionales a su distancia (por la proposición X) describen alrededor de su centro común de gravedad y uno alrededor del otro elipses concéntricas; y viceversa, si las figuras descritas son tales, entonces las fuerzas son proporcionales a la distancia.

COROLARIO 2. Y dos cuerpos, con fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia entre ellos, describirán (por las proposiciones XI, XII, XIII) tanto alrededor de su centro común de gravedad como el uno en torno al otro secciones cónicas que tienen su foco en el centro en torno al cual se describen las figuras. Y viceversa, si las figuras descritas son tales, entonces las fuerzas centrípetas son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia.

COROLARIO 3. Dos cuerpos cualesquiera girando en torno al centro común de gravedad describen áreas proporcionales a los tiempos con los radios trazados a dicho centro y a sí mismos.

PROPOSICIÓN LIX.TEOREMA XXII

El tiempo periódico de dos cuerpos S y P en giro alrededor de su centro común de gravedad C es al tiempo periódico de uno de los cuerpos P en giro alrededor del otro S en reposo y describiendo una figura semejante e igual a las figuras que resultan al girar uno en torno a otro como la raíz cuadrada de un cuerpo S a la raíz cuadrada de la suma de los cuerpos S + P.

Pues, por la demostración de la proposición anterior, los tiempos en que son descritos cualesquiera arcos semejantes PQ y *pq* son como las raíces cuadradas de CP y SP o *sp*, esto es, como la raíz cuadrada del cuerpo S a la de la suma de los cuerpos S + P. Y componiendo, las sumas de los tiempos en que son descritos todos los arcos semejantes PQ y *pq*, esto es, los tiempos totales en que son descritas todas las figuras semejantes, se hallan en la susodicha razón subduplicada. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LX. TEOREMA XXIII

Si dos cuerpos S y P que se atraen mutuamente con fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de sus distancias giran en torno a su centro común de gravedad: digo que el eje principal de la elipse que uno de los cuerpos, P, describe con su movimiento en torno al otro, S, será al eje principal de la elipse que dicho cuerpo P pudiera describir en el mismo tiempo periódico en torno al otro cuerpo S en reposo como la suma de los dos cuerpos S + P a la primera de las dos medias proporcionales entre esta suma y el otro cuerpo S.

Pues si las elipses descritas fuesen iguales entre sí, los tiempos periódicos (por el teorema anterior) serán como la raíz cuadrada de la razón del cuerpo S a la suma de los cuerpos S + P. Disminúyase el tiempo periódico en la última elipse según la dicha ra-

zón y los tiempos periódicos se harán iguales; pero el eje principal de la elipse (por la proposición XV) disminuirá en una razón, de la cual ésta es sesquiplicada, esto es, en una razón respecto a la cual la razón S a S + P es cúbica, por lo cual será al eje principal de la otra elipse como la primera de dos medias proporcionales entre S + P y S a S + P. Y a la inversa, el eje principal de la elipse descrita en torno al cuerpo móvil será al eje principal de la descrita en torno al inmóvil como S + P a la primera de dos medias proporcionales entre S + P y S. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXI. TEOREMA XXIV

Si dos cuerpos se atraen mutuamente con cualquier fuerza y no son empujados ni obstruidos externamente y se mueven de cualquier modo; sus movimientos vienen a ser los mismos que si no se atrajesen entre ellos, sino que ambos fuesen atraídos por un tercero situado en el centro común de gravedad con las mismas fuerzas; y la ley de tales fuerzas de atracción será la misma tanto respecto a la distancia a dicho centro común como respecto a la distancia total entre cuerpos.

Pues las fuerzas con las cuales los cuerpos se atraen mutuamente, al tender hacia los cuerpos, tienden al centro intermedio común de gravedad; y por eso son las mismas que si procediesen del cuerpo intermedio. Q.E.D.

Y como está dada la razón de la distancia de cada cuerpo respecto a dicho centro común a la distancia entre cuerpos, está dada la razón entre cualquier potencia de una distancia y la misma potencia de la otra distancia; y también la razón de cualquier cantidad derivada de cualquier forma de una distancia y de cantidades dadas, respecto a otra cantidad derivada similarmente de la otra distancia y de cuantas cantidades dadas que posean respecto a la primera la dicha razón dada de distancias. Por lo cual, si la fuerza por la que un cuerpo es atraído por otro fuese directa o inversamente como la distancia mutua entre cuerpos, o como cualquier potencia de esta distancia, o, finalmente, como cualquier cantidad derivada de cualquier forma de esta distancia y cantidades dadas: la fuerza por la cual el dicho cuerpo es atraído hacia el centro común de gravedad será también directa o inversamente como la distancia del cuerpo atraído al centro común de gravedad, o como la dicha potencia de esta distancia o, por fin, como la cantidad derivada de esta distancia y de análogas cantidades dadas. Esto es, la ley de la fuerza de atracción será la misma para una y otra distancia. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXII. PROBLEMA XXXVIII

Determinar los movimientos de dos cuerpos que atrayéndose mutuamente con fuerzas inversamente proporcionales a los cuadrados de la distancia entre ellos, se dejan caer desde lugares dados.

Los cuerpos (por el último teorema) se moverán de modo semejante a como lo harían siendo atraídos por un tercero situado en el centro común de gravedad; dicho centro, por hipótesis, estará en reposo en el comienzo mismo del movimiento y, por lo tanto, (por el corolario IV de las leyes) siempre estará en reposo. Por lo tanto, los movimien-

tos de los cuerpos (por el problema XXV) han de ser determinados como si fuesen impelidos por fuerzas tendentes a ese centro; y se tendrán los movimientos de los cuerpos que se atraen mutuamente. Q.E.I.

PROPOSICIÓN LXIII. PROBLEMA XXXIX

Determinar los movimientos de dos cuerpos que se atraen mutuamente con fuerzas inversamente proporcionales a los cuadrados de su distancia y parten de lugares dados, según rectas dadas y con velocidades dadas.

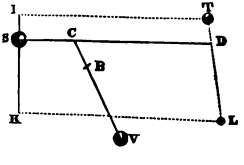
Al estar dados los movimientos de los cuerpos en el inicio, también está dado el movimiento del centro común de gravedad, así como el movimiento del espacio que se mueve uniformemente en línea recta junto con dicho centro, lo mismo que los movimientos iniciales de los cuerpos respecto a dicho espacio. Pero los movimientos siguientes (por el corolario V de las leyes y el teorema anterior) tendrán lugar en ese espacio como si éste reposase junto con el centro común de gravedad y los cuerpos no se atrajesen mutuamente, sino que fuesen atraídos por un tercer cuerpo situado en dicho centro. Por lo tanto, el movimiento de cada cuerpo, partiendo de un lugar dado, según una recta dada y con una velocidad dada y afectado por una fuerza centrípeta tendente a dicho centro, en semejante espacio móvil, ha de determinarse por los problemas IX y XXVI: y a la vez se tendrá el movimiento del otro cuerpo alrededor del mismo centro. Con este movimiento ha de componerse aquel movimiento uniforme del sistema espacial y de los cuerpos que giran en él y se tendrá el movimiento absoluto de los cuerpos en el espacio inmóvil. Q.E.I.

PROPOSICIÓN LXIV. PROBLEMA XL

Si los cuerpos se atraen mutuamente con fuerzas que crecen en razón simple de sus distancias a los centros, hállense los movimientos de varios cuerpos entre sí.

Primero supónganse dos cuerpos T y L que tienen su centro común de gravedad en D. Describirán (por el corolario 1 del teorema XXI) elipses con centro en D, cuyas magnitudes son conocidas por el problema V.

Ahora un tercer cuerpo S atraiga a los dos primeros T y L con las fuerzas aceleratrices ST, SL y sea a la vez atraído por ellos. La fuerza ST (por el corolario II de las leyes) se descompone en las fuerzas SD y DT; y la fuerza SL en las fuerzas SD y DL. Pero las fuerzas DT, DL, que son como su suma TL y, por tanto, como las fuerzas aceleratrices con las cuales los cuerpos T y L se atraen mutuamente, añadidas a las fuerzas de los cuerpos T y L, la primera a la primera y la segunda a la segunda, componen fuerzas proporcionales a las distancias DT y DL como al principio, pero ahora con fuerzas mayores que antes; y, por tanto (por el corolario 1 de la proposición X y por los corolarios 1 y 8 de la proposi-



ción IV) hacen que describan elipses como antes, pero con movimiento más rápido. Las restantes fuerzas aceleratrices SD y SD, por las acciones motrices SD × T y SD × L, que son como los cuerpos, al atraer a dichos cuerpos igualmente y según las líneas TI, LK paralelas a la propia DS, en nada cambian sus posiciones relativas, sino que hacen que se acerquen a la línea IK, la cual ha de imaginarse trazada por el centro de S y perpendicular a DS. Pero esta aproximación a IK se impedirá procurando que el sistema de cuerpos T y L por una parte, y el cuerpo S por otra, giren con velocidades precisas en torno al centro común de gravedad C. Con tal movimiento, dado que la suma de las fuerzas motrices SD × T y SD × L proporcional a la distancia CS tiende al centro C, el cuerpo S describe una elipse en torno al centro C; y el punto D, al ser proporcionales CS y CD, describirá en su zona una elipse similar. Pero los cuerpos T y L, atraídos por las fuerzas motrices SD × T y SD × L, el primero por la primera y el segundo por la segunda, igualmente y según las paralelas TI y LK, como se he dicho antes, continuarán describiendo (por los corolarios V y VI de las leyes) sus elipses en torno al centro móvil D, como anteriormente. Q.E.I.

Añádase ahora un cuarto cuerpo V y, con un razonamiento semejante, se concluirá que dicho cuerpo junto con el punto C describirá elipses en torno al punto común de gravedad B; los movimientos de los cuerpos T, L y S en torno a los centros D y C, permanecerán, pero acelerados. Y con el mismo método podríamos añadir muchos cuerpos. Q.E.I.

Esto es así aun cuando los cuerpos T y L se atrajesen mutuamente con fuerzas aceleratrices mayores o menores que aquellas con las cuales atraen a los demás cuerpos en razón de las distancias. Sean las atracciones aceleratrices de todos mutuamente como las distancias multiplicadas por los cuerpos atrayentes, y de lo dicho se desprende fácilmente que todos los cuerpos describirán elipses distintas en iguales tiempos periódicos en torno a su centro común de gravedad B, en el plano inmóvil. Q.E.I.

PROPOSICIÓN LXV. TEOREMA XXV

Varios cuerpos, cuyas fuerzas decrecen como el cuadrado de las distancias desde sus centros, pueden moverse entre sí en elipses, y describir mediante radios trazados a los focos áreas muy aproximadamente proporcionales a los tiempos.

Se ha demostrado en la proposición anterior el caso en el cual los movimientos ocurren exactamente en elipses. Cuanto más se aparte la ley de las fuerzas de la ley allí propuesta, tanto más perturbarán los cuerpos sus mutuos movimientos; y tampoco es posible que los cuerpos, con atracción mutua según la ley aquí supuesta, se muevan en elipses exactas, salvo que mantengan entre sí determinada proporción de distancias. En los casos siguientes, no obstante, no nos apartaremos mucho de las elipses.

Caso 1. Imagínese que varios cuerpos pequeños giran en torno de uno muy grande a distancias diferentes, y fuerzas absolutas, proporcionales a cada uno de ellos, tendiendo hacia cada uno. Y puesto que el centro común de gravedad de todos (por el corolario IV de las leyes) o está en reposo, o se mueve uniformemente en línea recta, imaginemos que los cuerpos pequeños lo son tanto que el cuerpo mayor jamás dista sensiblemente de dicho centro: y dicho cuerpo mayor o está en reposo, o se mueve uniformemente en línea recta sin desvío apreciable: los cuerpos pequeños girarán en elip-

ses en torno del mayor y con radios trazados hasta éste describirán áreas proporcionales a los tiempos, salvo en la medida en que puedan ocurrir desvíos procedentes de la separación del cuerpo mayor del centro común de gravedad o de las interacciones mutuas de los cuerpos menores. Pero los cuerpos pequeños pueden disminuirse tanto que tanto dicho desvío, como las interacciones mutuas, sean menores que unas dadas y, por tanto, hasta que las órbitas coincidan con elipses y las áreas respondan a los tiempos sin error mayor que uno dado. Q.E.O.

CASO 2. Supongamos ahora un sistema de cuerpos pequeños que giran en torno a uno muy grande del modo antes descrito; u otro sistema cualquiera de dos cuerpos, que giran uno en torno al otro, que se desplaza con movimiento uniforme y rectilíneo, y que a la vez es influido lateralmente por la fuerza de otro cuerpo mucho mayor y situado a gran distancia. Y puesto que las fuerzas aceleratrices iguales que influyen en los cuerpos según líneas paralelas no cambian la situación de los cuerpos entre sí, sino que hacen que todo el sistema cambie de lugar preservándose los movimientos de las partes entre ellas, es evidente que en esos movimientos de los cuerpos atraídos no puede ocurrir ningún cambio procedente de la atracción del mayor, sino sólo de las desigualdades de las atracciones aceleratrices o de las inclinaciones de las líneas según las cuales ocurren las respectivas atracciones. Supóngase, pues, que todas las atracciones aceleratrices hacia el cuerpo mayor sean entre sí inversamente como el cuadrado de las distancias; aumentando, entonces, la distancia del cuerpo mayor hasta que las diferencias entre longitudes de las rectas trazadas desde él hasta los otros, y las inclinaciones respectivas de dichas líneas sean menores que unas dadas, los movimientos de las partes del sistema entre sí proseguirán sin errores que no sean menores que unos dados. Y como la distancia mutua entre dichas partes es muy pequeña, el sistema entero, como si fuera un solo cuerpo, es atraído y se moverá bajo dicha atracción como si de un solo cuerpo se tratara; esto es, con su centro de gravedad describirá alrededor del cuerpo mayor alguna sección cónica (es decir, una hipérbola o una parábola si la atracción es suave y una elipse si es más fuerte) y con un radio trazado hasta el cuerpo mayor describirá áreas proporcionales a los tiempos sin más errores que los originados de las distancias de las partes, desde luego pequeñas, y disminuibles cuanto se quiera. Q.E.O.

Con argumentos similares pueden tratarse casos más complejos hasta el infinito.

COROLARIO 1. En el caso segundo, cuanto más se acerca el cuerpo mayor al sistema de dos o más cuerpos, tanto más resultarán perturbados los movimientos de las partes del sistema entre sí; puesto que mayores serán las inclinaciones de las líneas trazadas desde este cuerpo mayor hasta los otros y también será mayor la desigualdad de la proporción.

COROLARIO 2. Pero resultará máxima la perturbación suponiendo que las atracciones aceleratrices de las partes del sistema hacia el cuerpo mayor no son entre sí como el inverso del cuadrado de las distancias desde dicho cuerpo mayor; sobre todo si la desigualdad de dicha proporción es mayor que la desigualdad de la proporción de las distancias desde dicho cuerpo mayor. Porque si la fuerza aceleratriz, al actuar igualmente y según líneas paralelas, no produce perturbación alguna entre los movimientos del sistema, es necesario que surja alguna perturbación debida a la desigualdad de acción, y que sea mayor o menor según sea mayor o menor dicha desigualdad. El exceso de impulsos mayores actuando sobre algunos cuerpos y no sobre otros cambiará necesariamente su situación respectiva. Y esta perturbación, añadida a la que surge de la inclinación y desigualdad de las líneas, aumenta la perturbación, total.

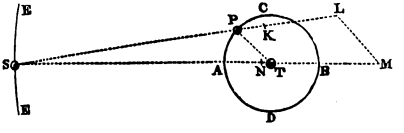
COROLARIO 3. Por tanto, si las partes de este sistema se mueven en elipses o en círculos sin perturbaciones notables, es evidente que o no se hallan impelidas hacia otros cuerpos, por fuerzas aceleratrices más que de modo insensible, o lo son de un modo uniforme y según líneas paralelas muy aproximadamente.

PROPOSICIÓN LXVI. TEOREMA XXVI

Si tres cuerpos, cuyas fuerzas decrecen como el cuadrado de las distancias, se atraen mutuamente y las atracciones aceleratrices de dos cualesquiera sobre el tercero son entre ellas inversamente como el cuadrado de las distancias, y los más pequeños giran en torno al mayor, digo: que el interior más próximo al central y mayor, con radios trazados hasta él describirá áreas más proporcionales a los tiempos, y una figura más cercana a la de una elipse con foco en el punto de intersección de los radios, tanto si el cuerpo mayor es perturbado por dichas atracciones, como si permanece en reposo no siendo atraído por los pequeños o si, siendo atraído unas veces mucho y otras poco, resultase perturbado unas veces mucho y otras poco.

Casi se sigue de la demostración del segundo corolario de la proposición anterior; pero se prueba mediante una demostración más clara y estricta del modo siguiente.

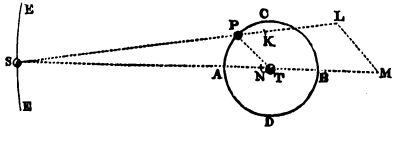
CASO 1. Supongamos que en torno al cuerpo mayor T giran los cuerpos menores P y S en el mismo plano, de los cuales P describe la órbita interior PAB, y S la exterior ESE. Sea SK la distancia media entre los cuerpos P y S, y valga también como expresión de la atracción aceleratriz de P hacia S a esa distancia media. Tómese SL a SK como el cuadrado de la razón de SK a SP, y SL será la atracción aceleratriz de P hacia S a cualquier distancia SP. Únase PT, y paralela a ella trácese LM que toca a ST en M; y la atracción SL se descompondrá (por el corolario II de las leyes) en las atracciones SM, LM. El cuerpo P será urgido de este modo por una triple fuerza aceleratriz. Una fuerza tiende hacia T, y se origina por la atracción mutua entre los cuerpos T y P. Con esta fuerza sola el cuerpo P debería describir, en torno al cuerpo T y con el radio PT, áreas proporcionales a los tiempos, así como una elipse cuyo foco se halla en el centro del cuerpo T, y esto tanto si T permanece en reposo como si oscila por causa de esta atracción. Esto es evidente por la proposición XI y por los corolarios 2 y 3 del teorema XXI. La otra fuerza es la de la atracción LM; que porque tiende de P hacia T se superpone a la fuerza anterior y coincide con ella, y de este modo hará que las áreas sigan siendo proporcionales a los tiempos, por el corolario 3 del teorema XXI. Pero, puesto que no es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia PT, al ser añadida a la anterior compondrá con ella una fuerza que se aparta de dicha proporción; y esto tanto más cuanto mayor sea la proporción de esta fuerza respecto a la anterior, permaneciendo igual el resto. Por tanto, ya que (por la proposición XI y por el corolario 2 del teorema XXI) la fuerza con la cual se describe la elipse en torno al foco T



ha de tender hacia dicho foco y ser inversamente proporcional al cuadrado de dicha distancia PT, tal fuerza compuesta, al apartarse de dicha proporción, hará que la órbita PAB se aparte de la forma elíptica con foco en T, y esto tanto más cuanto mayor sea la diferencia con respecto a dicha proporción; y, por lo tanto, también cuanto mayor es la proporción de la segunda fuerza LM respecto a la primera, manteniendo el resto igual. Pero, ahora, la tercera fuerza, SM, al atraer al cuerpo P en una dirección paralela a ST, compone con las fuerzas anteriores una fuerza que ya no se dirige de P hacia T; y que diverge tanto más de esa dirección cuanto mayor es la proporción de esta tercera fuerza respecto a las anteriores, «caeteris paribus»; la cual, por tanto, hace que el cuerpo P, con radio TP, ya no describa más áreas proporcionales a los tiempos, y que la aberración con respecto a esta proporcionalidad sea mayor cuanto mayor sea la proporción de esta tercera fuerza respecto de las otras. Pero esta tercera fuerza aumentará la aberración de la órbita PAB respecto a la mencionada forma elíptica por doble causa, bien porque no se dirija de P hacia T, bien porque no sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia PT. Comprendido esto, es evidente que las áreas se tornan más proporcionales a los tiempos, permaneciendo las demás fuerzas, cuanto más pequeña sea la tercera fuerza; y que la órbita PAB se aproxima máximamente a la mencionada forma elíptica cuando tanto la segunda como la tercera fuerza, y sobre todo la tercera, se hacen mínimas, permaneciendo la primera.

Represéntese mediante la línea SN la atracción aceleratriz del cuerpo T hacia S; y si las atracciones aceleratrices SM, SN fuesen iguales, al atraer éstas a los cuerpos T, P, igualmente y según líneas paralelas, en nada cambiarán sus situaciones respectivas. Los movimientos de dichos cuerpos entre sí serían iguales (por el corolario VI de las leyes) que si desapareciesen dichas atracciones. Y por similar razón, si la atracción SN fuese menor que la SM, la propia SN restará una parte de la atracción SM, y quedará sólo la parte MN con la que resultarán perturbadas tanto la proporcionalidad de tiempos y áreas como la susodicha forma elíptica de la órbita. De manera semejante, si la atracción SN fuese mayor que la atracción SM, surgirá de la sola diferencia MN la perturbación de la proporcionalidad y de la órbita. Así, la atracción SN siempre reduce la atracción SM, tercera de antes, a la atracción MN, permaneciendo iguales la primera y la segunda; y, por lo tanto, las áreas y los tiempos se aproximan de modo máximo a la proporcionalidad, y la órbita PAB a la figura elíptica mencionada, cuando la atracción MN es nula o la mínima posible; esto es, cuando las atracciones aceleratrices de los cuerpos P y T realizadas hacia S se aproximan cuanto sea posible a la igualdad; o sea, cuando la atracción SN ni es nula ni es inferior a la más pequeña de todas las atracciones SM, sino como la media entre la máxima y la mínima de las atracciones SM, esto es, ni mucho mayor ni mucho menor que la atracción SK. Q.E.D.

Caso 2. Ahora supóngase que los cuerpos menores S, P giran en distintos planos en torno a otro mayor T; y la fuerza LM, al actuar según la línea PT situada sobre el plano de la órbita PAB, producirá el mismo efecto que antes, y no desviará al cuerpo P del plano de su órbita. Pero la otra fuerza MN, al actuar según una línea paralela a ST (y, por tanto, cuando el cuerpo S se mueve fuera de la línea nodal, inclinada hacia el plano de la órbita PAB) produce, además



de la perturbación del movimiento ya mencionada de sentido longitudinal, otra de sentido latitudinal, al atraer al cuerpo P fuera de su plano orbital. Y esta perturbación, para cualquier situación mutua dada de los cuerpos P y T, será como la fuerza generadora MN; y resultará, por tanto, mínima cuando MN sea mínima, esto es (como ya he dicho) cuando la atracción SN no es ni mucho mayor ni mucho menor que la atracción SK. Q.E.D.

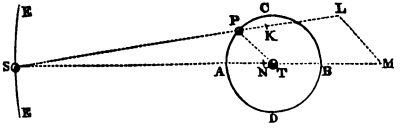
COROLARIO 1. De esto se sigue fácilmente que si varios cuerpos pequeños, P, S, R, etc., giran en torno a otro mayor T, el movimiento del cuerpo más interior P será perturbado mínimamente por las atracciones de los exteriores, toda vez que el cuerpo mayor T es atraído y perturbado en igual medida por los demás, en razón de las fuerzas aceleratrices, que los otros entre sí.

COROLARIO 2. Pero en un sistema de tres cuerpos, T, P, S, si las atracciones aceleratrices de dos cualesquiera sobre un tercero son entre sí como el inverso del cuadrado de las distancias; el cuerpo P, con radio PT, describirá el área en torno al cuerpo T más rápidamente en las inmediaciones de la conjunción A y de la oposición B, que en las inmediaciones de las cuadraturas C, D. Pues toda fuerza que actúa sobre el cuerpo P y no actúa sobre el cuerpo T, puesto que no actúa según la línea PT, acelera o retarda la descripción del área, según actúe por delante o por detrás. Tal es la fuerza MN. Esta fuerza, al ir el cuerpo P desde C hacia A atrae hacia adelante y acelera el movimiento; después hasta llegar a D actúa por detrás y retarda el movimiento, después por delante hasta B, y finalmente por detrás al ir desde B hasta C.

COROLARIO 3. Y por el mismo razonamiento es claro que el cuerpo P, permaneciendo iguales las demás cosas, se mueve más rápidamente en la conjunción y en la oposición que en las cuadraturas.

COROLARIO 4. La órbita del cuerpo P, permaneciendo igual lo demás, es más curva en las cuadraturas que en la conjunción y en la oposición. Puesto que cuanto más rápidamente se mueve un cuerpo menos se desvía de la línea recta. Y además, la fuerza KL, o MN, en la conjunción y en la oposición es contraria a la fuerza con la cual el cuerpo T atrae al cuerpo P y, por lo tanto, hace disminuir a la tal fuerza; y entonces el cuerpo P se desviará de la línea recta tanto menos cuanto menos es atraído hacia el cuerpo T.

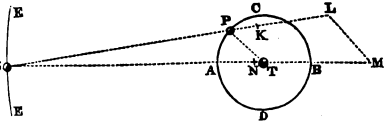
COROLARIO 5. De donde el cuerpo P, permaneciendo el resto igual, se alejará más del cuerpo T en las cuadraturas que en la conjunción y la oposición. Esto es así excluyendo el movimiento de excentricidad. Puesto que si la órbita del cuerpo P fuese excéntrica, su excentricidad (como se verá en el siguiente corolario 9) resultará máxima cuando los ápsides se hallen en las sicigias; y por ello puede ocurrir que el cuerpo P, al alcanzar el ápside máximo, se aleje más del cuerpo T en las sicigias que en las cuadraturas.



COROLARIO 6. Dado que la fuerza centrípeta del cuerpo central T, mediante la cual el cuerpo P es retenido en su órbita, aumenta en las cuadraturas por la suma de la fuerza LM y disminuye en las sicigias por la resta de la fuerza KL, y, dada la magnitud de la fuerza KL, disminuye más que aumenta; y además, puesto que dicha fuerza centrípeta (por el corolario 2 de la proposición IV) está en razón compuesta directamente como el radio TP e inversamente como el cuadrado del tiempo periódico, es eviden-

te que dicha razón compuesta es disminuida por la acción de la fuerza KL; y por lo mismo que el tiempo periódico aumenta, si el radio TP de la órbita permanece constante, y ello como la raíz cuadrada de la razón en que disminuye dicha fuerza centrípeta; y, por tanto, al aumentar o disminuir este radio, el tiempo periódico aumentará más o disminuirá menos que la potencia $\frac{3}{2}$ de dicho radio (por el corolario 6 de la proposición IV). Si la fuerza del cuerpo central disminuyera paulatinamente, el cuerpo P se alejaría siempre más del centro T al estar cada vez menos atraído; y, por el contrario, si dicha fuerza aumenta se acercará cada vez más. Por tanto, si la acción del cuerpo lejano S, mediante la cual disminuye la susodicha fuerza, aumenta y disminuye alternativamente, aumentará y disminuirá alternativamente el radio TP; y también el tiempo periódico aumentará y disminuirá según una razón compuesta de la potencia $\frac{3}{2}$ del radio y de la raíz cuadrada de la cantidad en que disminuyó o aumentó la fuerza centrípeta del cuerpo central T por causa del aumento o disminución de la acción del cuerpo lejano S.

COROLARIO 7. De lo antedicho se desprende también que el eje de la elipse descrita por el cuerpo P, o línea de los ápsides, en cuanto a su movimiento angular, avanza y retrocede alternativamente, aunque los avances son mayores, y gracias a estos excesos, en conjunto se desplaza hacia adelante. Pues la fuerza con la cual el cuerpo P es atraído hacia el cuerpo T en las cuadraturas, momento en que la fuerza MN se desvanece, se compone de la fuerza LM y de la fuerza centrípeta con la cual el cuerpo T atrae al cuerpo P. Si se aumenta la distancia PT, la primera fuerza LM aumenta casi en la misma proporción que la distancia, mientras la segunda disminuye como el cuadrado de dicha distancia; con lo cual la suma de ambas fuerzas decrece en una razón menor que la del cuadrado de la distancia PT, y por lo mismo (por el corolario 1 de la proposición XLV) el auge, o ápside superior, resultará retrasado. Pero en la conjunción y en la oposición la fuerza con la cual el cuerpo P es atraído hacia el cuerpo T es la diferencia entre la fuerza con la cual el cuerpo atrae al cuerpo P y la fuerza KL; y esta diferencia, por cuanto que la fuerza KL aumenta muy aproximadamente en razón de la distancia PT, disminuye en razón mayor que la del cuadrado de la distancia PT y, por tanto (por el corolario 1 de la proposición XLV), hará que el auge se adelante. En los puntos comprendidos entre sicigias y cuadraturas el movimiento del auge depende conjuntamente de ambas causas, de modo que avanza o retrocede según el exceso de una o de otra. Puesto que la fuerza KL en las sicigias es casi el doble que la fuerza LM en las cuadraturas, el exceso se hallará hacia el lado de la fuerza KL y empujará hacia adelante al auge. Se comprenderá más fácilmente la verdad de este corolario y la del precedente imaginando el sistema de los dos cuerpos T y P rodeado por todas partes de muchos cuerpos S, S, S, etc., colocados sobre la órbita ESE. Puesto que por la acción de éstos disminuye por todas partes la acción del propio T, disminuirá ésta más que en razón del cuadrado de la distancia.

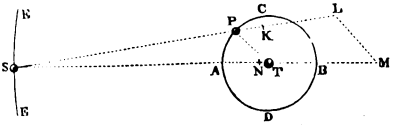


COROLARIO 8. Pero como el progreso o retroceso de los ápsides depende de la disminución de la fuerza centrípeta, según resulte aquélla en razón mayor o menor que el cua-

drado de la distancia TP, al ir pasando el cuerpo desde el ápside inferior al superior; lo mismo que del incremento análogo al regresar al ápside inferior; y, por tanto, es máximo cuando la proporción de la fuerza en el ápside superior a la fuerza en el ápside inferior resulte más alejada de la razón del inverso del cuadrado de las distancias: es evidente que los ápsides en sus sicigias progresarán más rápidamente —gracias a la fuerza sustractiva KL o NM – LM— mientras en sus cuadraturas regresarán más lentamente gracias a la fuerza aditiva LM. Al ser tan largo el período de tiempo en el cual ocurren tanto la velocidad del progreso como el retardo del regreso, dicha desigualdad se torna máxima a la larga.

COROLARIO 9. Si un cuerpo gira en una elipse en torno a un centro desde el cual es atraído por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde dicho centro; y después, al caer desde el ápside superior o auge hacia el ápside inferior, dicha fuerza, por la presencia continua de otra fuerza nueva, aumentase hasta ser mayor que la razón del cuadrado de la distancia disminuida; es evidente que el cuerpo, empujado siempre hacia el centro por la presencia continua de la nueva fuerza, tenderá más hacia dicho centro que si solamente se viese afectado por la fuerza creciente según el cuadrado de la distancia disminuida; y, por lo tanto, describirá una órbita interior a la órbita elíptica, a la vez que el ápside inferior se acercará más al centro que antes. Pues la órbita, con la presencia de esta nueva fuerza, se tornará más excéntrica. Pero si la fuerza, al retornar el cuerpo desde el ápside inferior hasta el superior, decreciese en las mismas proporciones en que antes crecía, el cuerpo retornará a su distancia anterior, y por consiguiente, si la fuerza decrece en una razón mayor, el cuerpo atraído ahora en menor grado ascenderá hasta una distancia mayor, con lo cual se aumentará más aún la excentricidad de la órbita. Por lo cual, si la razón del incremento o decremento de la fuerza centrípeta aumenta en cada revolución, la excentricidad será siempre creciente; y, por el contrario, será decreciente si dicha razón disminuye. Ahora bien, en el sistema de cuerpos T, P, S, cuando los ápsides de la órbita PAB están en las cuadraturas, dicha razón de incrementos y decrementos es mínima, y máxima cuando los ápsides están en las sicigias. Cuando los ápsides se hallan en las cuadraturas, la razón es menor junto a las cuadraturas y mayor junto a las sicigias que el cuadrado de la razón de las distancias; y de dicha razón mayor surge el movimiento directo del auge, como ya se ha dicho. Pero si se considera globalmente la razón de aumento y disminución en el recorrido entre ápsides, ésta resulta menor que el cuadrado de la razón de las distancias. La fuerza en el ápside inferior es a la fuerza en el ápside superior en razón menor que la razón entre los cuadrados de la distancia entre el ápside superior y el foco de la elipse y la distancia entre el ápside inferior y el mismo foco; y al contrario, cuando los ápsides se hallan en las sicigias la fuerza en el ápside inferior está en razón mayor, con respecto a la fuerza en el ápside superior, que la razón de los cuadrados de las distancias. Puesto que en las cuadraturas las fuerzas LM sumadas a las fuerzas del cuerpo T componen fuerzas en menor razón, y las fuerzas KL restadas en las sicigias de las del cuerpo T dejan fuerzas que están en razón mayor. Por lo tanto, la razón global de incremento y decremento en el recorrido entre ápsides es mínima en las cuadraturas y máxima en las sicigias: por lo mismo, en el recorrido de los ápsides desde las cuadraturas hasta las sicigias aumenta continuamente, y aumenta de paso la excentricidad de la elipse; mientras que en el recorrido desde las sicigias hasta las cuadraturas disminuye continuamente a la vez que decrece la excentricidad.

COROLARIO 10. Para poder calcular los errores de latitud, supongamos que permanece inmóvil el plano de la órbita EST; y supuesta la causa de los errores ya explicada,



es evidente que de las dos fuerzas NM y ML que son la causa total antedicha, la fuerza ML actuando siempre según el plano PAB de la órbita jamás perturba los movimientos en latitud; y que la fuerza NM, cuando los nodos están en las sicigias, al actuar también según el mismo plano de la órbita, tampoco perturba estos movimientos; pero cuando están en las cuadraturas, los perturba máximamente y, al atraer continuamente al cuerpo P del plano de su órbita, disminuye la inclinación del plano durante el tránsito del cuerpo de las cuadraturas a las sicigias y la aumenta cuando pasa de las sicigias a las cuadraturas. De donde viene a ocurrir que cuando el cuerpo se halla en las sicigias la inclinación resulte mínima entre todas, mientras que vuelve a alcanzar la magnitud anterior aproximadamente cuando el cuerpo llega al nodo siguiente. Pero si los nodos se sitúan en los octantes tras las cuadraturas, esto es, entre C y A, D y B, de lo dicho se entiende que al pasar el cuerpo P desde cualquier nodo hasta el grado nonagésimo siguiente la inclinación del plano disminuye continuamente; y a partir de aquí durante los siguientes cuarenta y cinco grados hasta llegar a la siguiente cuadratura, la inclinación aumenta, para disminuir de nuevo mientras transita por los siguientes cuarenta y cinco grados hasta el nodo siguiente. Y así la inclinación disminuye más que aumenta, por lo cual es siempre menor en el nodo siguiente que en el anterior. Y por un razonamiento semejante, la inclinación aumenta más que disminuye cuando los nodos están en los otros octantes, entre A y D, B y C. Y por ello la inclinación es máxima cuando los nodos están en las sicigias. Al ir pasando los nodos de las sicigias a las cuadraturas la inclinación va disminuyendo con cada aproximación del cuerpo a los nodos; y llega a ser mínima cuando los nodos están en las cuadraturas y el cuerpo en las sicigias; después crece de nuevo al mismo paso que antes decreció; y al acercarse los nodos a las sicigias siguientes alcanza la anterior magnitud.

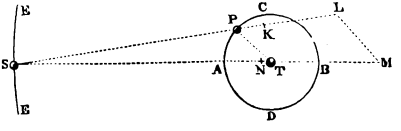
COROLARIO 11. Puesto que el cuerpo P es atraído continuamente del plano de su órbita cuando los nodos se hallan en las cuadraturas, y ello en dirección a S durante su tránsito del nodo C hasta el D pasando por la conjunción A; y en dirección contraria durante su tránsito del nodo D al C pasando por la oposición B: es evidente que en su movimiento desde el nodo C el cuerpo se separa continuamente del primitivo plano de su órbita CD hasta su llegada al nodo siguiente; y por esto, al distanciarse mucho en este nodo del plano primitivo CD, pasa por el plano de la órbita EST no por el otro nodo D correspondiente a dicho plano, sino por un punto situado hacia el lado de S, punto que se convierte, por tanto, en el nuevo lugar del nodo en retroceso. Y por un razonamiento similar, los nodos continúan retrocediendo en cada tránsito del cuerpo de este nodo al siguiente. Por consiguiente, los nodos situados en las cuadraturas retroceden continuamente; en las sicigias, donde los movimientos no se perturban en absoluto en el sentido de la latitud, están en reposo; en los puntos intermedios, al participar de ambas condiciones, retroceden más lentamente: y, por lo tanto, al ser siempre o retrógrados o estacionarios, resultarán adelantados con cada revolución.

COROLARIO 12. Todos los errores descritos en estos corolarios son algo mayores en las conjunciones de los cuerpos P, S que en sus oposiciones; y esto por ser mayores las fuerzas generadoras NM y ML.

COROLARIO 13. Pese a que las razones dadas en estos corolarios no dependan de la magnitud del cuerpo S, todo lo que antecede se cumple cuando se atribuye al cuerpo S una magnitud tan grande como para que el sistema de los cuerpos T y P gire en torno a él. Y al aumentar el tamaño del cuerpo S y con ello su fuerza centrípeta de la que surgen los errores del cuerpo P, resultarán mayores, a distancias iguales, los susodichos errores en este caso que en el otro, cuando el cuerpo S gira en torno al sistema de cuerpos P y T.

COROLARIO 14. Pero como las fuerzas NM y ML, cuando el cuerpo S se halla a gran distancia, son aproximadamente como la fuerza SK y la razón PT a ST conjuntamente, esto es, si se diesen tanto la distancia PT como la fuerza absoluta de S, como el inverso de ST^3; y son también las dichas fuerzas NM y ML las causas de todos los errores y efectos vistos en los anteriores corolarios: es evidente que todos los efectos mencionados, permaneciendo el sistema de cuerpos P y T, y cambiando solamente la distancia ST y la fuerza absoluta del cuerpo S, estarán muy aproximadamente en razón compuesta de la razón directa de la fuerza absoluta del cuerpo S y de la razón inversa de la distancia ST al cubo. De donde se sigue que si el sistema de cuerpos T y P gira en torno al cuerpo lejano S, las fuerzas NM y ML, así como sus efectos, serán (por los corolarios 2 y 6 de la proposición IV) inversamente como el cuadrado del tiempo periódico. Y además, si la magnitud del cuerpo S es proporcional a su fuerza absoluta, las fuerzas NM y ML y sus efectos serán en razón directa del cubo del diámetro aparente del cuerpo lejano S visto desde T, y viceversa. Ya que estas razones son las mismas que la anterior razón compuesta.

COROLARIO 15. Y aunque si las órbitas ESE y PAB, conservando sus formas, proporciones e inclinación mutua, alterasen su magnitud y si las fuerzas de los cuerpos S y T permaneciesen constantes o cambiasen en una razón dada, estas fuerzas (esto es, la fuerza del cuerpo T que hace al cuerpo P desviarse de su curso recto para seguir la órbita PAB, y la fuerza del cuerpo S que obliga al cuerpo P a desviarse de dicha órbita) siempre actuarán del mismo modo y en la misma proporción, necesariamente todos los efectos serán semejantes y proporcionales, como también serán proporcionales los tiempos de los efectos; esto es, todos los errores lineales serán como los diámetros de las órbitas, mientras los errores angulares serán como antes, y los tiempos de errores lineales semejantes, o de errores angulares iguales, serán como los tiempos periódicos de las órbitas.



COROLARIO 16. De donde si están dadas las formas de las órbitas y sus inclinaciones mutuas, y se alteran de cualquier modo las magnitudes, fuerzas y distancias de los cuerpos, de los errores dados y de los tiempos de los errores en un caso se pueden inferir los errores y los tiempos de los errores de otro caso con gran aproximación; pero más brevemente aún con el método siguiente. Las fuerzas NM y ML, permaneciendo constante el resto, son como el radio TP; y sus efectos periódicos (por el corolario 2 del lema X) como las fuerzas y el cuadrado del tiempo periódico del cuerpo P conjuntamente. Éstos son los errores lineales del cuerpo P; y de aquí que los errores angulares vistos desde el centro T (esto es, tanto el movimiento del auge y de los nodos como todos los errores aparentes en longitud y en latitud) son para cada revolución del cuer-

po P aproximadamente como el cuadrado del tiempo de la revolución. Al componer estas razones con las razones del corolario 14 resulta que en todo sistema de cuerpos T, P, S, en donde P gira en torno a T muy cercano a él, y T gira en torno a S muy distante, los errores angulares del cuerpo P visto desde T serán, en cada revolución del cuerpo P, directamente como el cuadrado del tiempo periódico del cuerpo P, e inversamente como el cuadrado del tiempo periódico del cuerpo T. Y, por tanto, el movimiento medio del auge estará en una razón dada con el movimiento medio de los nodos; y ambos movimientos serán directamente como el tiempo periódico de P, e inversamente como el cuadrado del tiempo periódico de T. Aumentando o disminuyendo la excentricidad e inclinación de la órbita PAB no se alteran los movimientos del auge y de los nodos de manera sensible, salvo que aquéllos sean demasiado grandes;

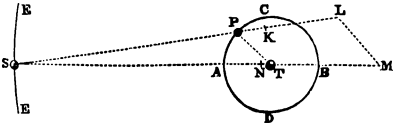
COROLARIO 17. Dado que la línea LM resulta unas veces mayor y otras menor que el radio PT, represéntese el valor medio de la fuerza LM por dicho radio PT, y este valor será a la fuerza media SK o SN (que puede representarse también por ST) como la longitud PT a la longitud ST. Pero la fuerza media SN o ST, mediante la cual el cuerpo T es retenido en su órbita en torno a S, es a la fuerza, mediante la cual el cuerpo P es retenido en su órbita en torno a T, en razón compuesta de la razón del radio ST al radio PT y de la razón cuadrada del tiempo periódico del cuerpo P en torno a T al tiempo periódico del cuerpo T en torno a S. Y por lo mismo la fuerza media LM es a la fuerza que retiene al cuerpo P en su órbita en torno a T (o también por la que el susodicho cuerpo P podría girar en el mismo tiempo periódico en torno al punto móvil T a la distancia PT) en dicha razón cuadrada de los tiempos periódicos. Por tanto, dados los tiempos periódicos y la distancia PT, está dada la fuerza media LM; y dada ésta, también está dada muy aproximadamente la MN, por la analogía de las líneas PT, MN.

COROLARIO 18. Supongamos que muchos cuerpos fluidos se mueven en torno al mismo T a distancias iguales y bajo las mismas leyes con las que el cuerpo P gira en torno al cuerpo T; y que al llegar a ser contiguos acaban formando un anillo fluido, redondo y concéntrico con el cuerpo T; y cada parte del anillo, realizando todos sus movimientos según la ley del cuerpo P, se acercará más al cuerpo T, y se moverá más rápidamente en las conjunciones y oposiciones de la misma y del cuerpo S, que en las cuadraturas. Los nodos de dicho anillo, o sea, sus intersecciones con el plano de la órbita del cuerpo S o T, estarán en reposo en las sicigias; pero fuera de las sicigias se moverán hacia atrás, y en las cuadraturas muy rápidamente, en otros puntos más lentamente. La inclinación del anillo también variará y su eje oscilará en cada revolución, y al completarse ésta retornará a su estado anterior, salvo en la medida en que sea desplazada circularmente por la precesión de los nodos.

COROLARIO 19. Imaginemos ahora que la esfera del cuerpo T, constituida de materia no fluida, se expande y se extiende hasta alcanzar dicho anillo, y que hay agua en un foso excavado a lo largo de toda su circunferencia mientras gira uniformemente sobre su eje con el mismo movimiento periódico. Al ser este líquido acelerado y retardado alternativamente (como en el corolario anterior) será más veloz en las sicigias y más lento en las cuadraturas que la superficie de la esfera, y así experimentará flujo y reflujo dentro del foso como el mar. Si se suprimiese la atracción del cuerpo S, el agua no adquiriría ningún movimiento de flujo o reflujo al girar en torno al centro en reposo de la esfera. La razón es la misma para una esfera que se desplaza uniformemente en línea recta mientras gira en torno a su centro (por el corolario V de las leyes) y para una esfera uniformemente desviada de su curso rectilíneo (por el corolario VI de las mismas

leyes). Pero si se acerca el cuerpo S, por su desigual atracción, el agua será perturbada inmediatamente. Y será efectivamente mayor la atracción del agua más cercana y menor la de la más lejana. Pues la fuerza LM atraerá el agua en las cuadraturas hacia abajo, y la hará descender hasta las sicigias; y la fuerza KL la atraerá hacia arriba en las sicigias, detendrá su descenso y la hará ascender hasta las cuadraturas, salvo en la medida en que el flujo y reflujo del agua es obligado por el foso, y resulta algo retardado por el rozamiento.

COROLARIO 20. Si ahora el anillo se torna rígido y el globo disminuye, cesará el movimiento de flujo y reflujo; pero permanecerá el movimiento oscilatorio de la inclinación, así como la precesión de los nodos. Supóngase que el globo tiene el mismo eje que el anillo y que completa sus revoluciones en el mismo tiempo, que toca por dentro al anillo con su superficie y esté adherido a él; al compartir el movimiento del anillo, el conjunto de los dos oscilará, y los nodos retrocederán. Pues el globo, como diremos ahora, es indiferente para recibir todas las impresiones. El ángulo máximo de inclinación para el anillo que rodea al globo ocurre cuando los nodos se hallan en las sicigias. Al pasar los nodos desde aquí hacia las cuadraturas intenta reducir su inclinación y con este intento comunica un movimiento al globo entero. El globo retiene este movimiento impreso hasta que el anillo con un intento contrario suprime este movimiento e imprime otro en sentido contrario: de este modo, el movimiento máximo de inclinación decreciente ocurre cuando los nodos se hallan en las cuadraturas, y el ángulo mínimo de inclinación en los octantes posteriores a las cuadraturas; y de nuevo el máximo movimiento de reclinación en las sicigias y el ángulo máximo en los octantes siguientes. Igual es el caso para el globo despojado de anillo cuando en las regiones ecuatoriales es algo más alto o conste de materia algo más densa que en los polos. Pues este exceso de materia en la parte ecuatorial hace las veces de anillo. Y aunque se suponga que, al aumentar la fuerza centrípeta de este globo en cualquier forma, todas sus partes tenderían hacia abajo, como las partes en gravitación de la Tierra, apenas cambiarían por ello los fenómenos de este corolario y del precedente, salvo en lo que variasen los lugares de máximas y mínimas alturas del agua. Pues el agua en su órbita ya no se sostiene y permanece por su fuerza centrífuga, sino por el foso donde fluye. Y además la fuerza LM atrae el agua hacia abajo en máximo grado en las cuadraturas, y la fuerza KL o NM – LM la atrae en el mayor grado hacia arriba en las sicigias. Y las dos fuerzas conjuntas dejan de atraer el agua hacia abajo y empiezan a atraerla hacia arriba en los octantes anteriores a las sicigias; y dejan de atraer el agua hacia arriba y empiezan a atraerla hacia abajo en los octantes posteriores a las sicigias. De aquí que la máxima altura del agua pueda ocurrir en los octantes posteriores a las sicigias, y la mínima aproximadamente en los octantes siguientes a las cuadraturas, salvo en la medida en la que el movimiento ascendente o descendente impreso por dichas fuerzas pueda continuar un poco por causa de la fuerza ínsita del agua, o detenerse un poco más pronto por causa de los obstáculos en el foso.



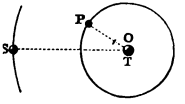
COROLARIO 21. Por la misma razón es por la que el exceso de materia del globo en el ecuador hace que los nodos sean retrógrados, y también que el aumento de dicho exceso aumente tal regreso, y que por su disminución disminuya y que con la supresión

desaparezca. Si se suprimiese la materia redundante, esto es, si el globo en el ecuador fuese menos abultado o menos denso que en los polos, se originaría un movimiento de los nodos hacia adelante.

COROLARIO 22. Y de aquí, a su vez, que del movimiento de los nodos se desprenda la constitución del globo. Ya que si el globo conserva los mismos polos de modo constante y el movimiento de los nodos es retrógrado, en el ecuador hay un exceso de materia; pero si se mueven hacia adelante entonces hay falta de ella. Supóngase que un globo uniforme y perfectamente redondo se halle primero en reposo en un espacio libre; después es empujado por un impulso cualquiera ejercido oblicuamente sobre su superficie y adquiere así un movimiento en parte circular y en parte rectilíneo. Puesto que semejante globo es completamente indiferente respecto a todos los ejes que pasan por su centro, ni es más propenso hacia un eje, o hacia una posición del eje, que hacia otra; es evidente que jamás cambiará ni de eje ni de posición del eje por su propia fuerza. Sea empujado ahora con un nuevo impulso oblicuamente ejercido sobre la misma parte de la superficie en que se ejerció antes; y como el antes o el después en nada cambia el efecto de un impulso, es evidente que estos dos impulsos ejercidos sucesivamente producen el mismo movimiento que si se hubiesen ejercido a la vez, esto es, el mismo que tendría el globo si hubiese sido empujado por una sola fuerza compuesta de las dos (por el corolario II de las leyes), esto es, un movimiento simple en torno a un eje de inclinación dada. E igual es el caso si el segundo impulso se diese en cualquier lugar del ecuador del primero, lo mismo que ocurriría si el primer impulso se aplicase sobre un lugar cualquiera del ecuador del movimiento generado por el segundo impulso sin el concurso del primero; y, por tanto, el de ambos impulsos ejercidos sobre cualesquiera lugares: dichos impulsos generarán el mismo movimiento circular que si se efectuasen a la vez y cada vez en el lugar de la intersección de los ecuadores de los movimientos generados por cada uno de ellos. Por tanto, un globo homogéneo y perfecto no retiene muchos movimientos diferenciados, sino que compone todos los movimientos impresos y los reduce a uno, y en tanto depende de él, gira siempre con un movimiento simple y uniforme en torno a un único eje dado y de inclinación invariable. Y ni siquiera la fuerza centrípeta podrá cambiar la inclinación del eje o la velocidad de rotación. Pues si suponemos el globo dividido en dos hemisferios por un plano que pase por su centro y por el centro al que se dirige la fuerza, dicha fuerza urgirá siempre por igual a ambos hemisferios y, por tanto, el globo no se inclinará hacia ningún lado en cuanto a su movimiento de rotación. Pero añádase en cualquier lugar entre el polo y el ecuador nueva materia acumulada en forma de monte, y ésta, con el intento continuo de alejarse de su centro de movimiento, perturbará el movimiento del globo y hará que sus polos vaguen por su superficie, describiendo círculos en torno de sí mismos y de sus puntos opuestos continuamente. Y tamaña desviación no se corregirá hasta que dicho monte no se sitúe, bien en cualquiera de los polos, en cuyo caso (por el corolario 21) los nodos ecuatoriales se adelantarán; bien en el ecuador, y por esta causa (por el corolario 20) retrocederán; o bien, finalmente, añadiendo materia nueva al otro lado del eje que venga a equilibrar el movimiento del monte, y de este modo los nodos se adelantarán o retrocederán según se hallen el monte y esta nueva materia más cerca del polo o del ecuador.

PROPOSICIÓN LXVII. TEOREMA XXVII

Supuestas las mismas leyes de las atracciones, digo que el cuerpo exterior S, con radios trazados al centro común de gravedad O de los cuerpos interiores P, T, describe en torno a dicho centro áreas más proporcionales a los tiempos y una órbita más cercana a la forma de una elipse con foco en dicho centro, que la que describiría en torno al cuerpo mayor y más interior T con radios trazados a él.

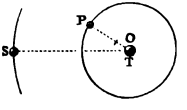


Puesto que las atracciones del cuerpo S hacia T y P componen su atracción absoluta, que se dirige más hacia O, centro común de gravedad de T y P, que hacia el cuerpo mayor T, y es más proporcional al inverso del cuadrado de la distancia SO que al del cuadrado de la distancia ST; como fácilmente verá quien piense en ello.

PROPOSICIÓN LXVIII. TEOREMA XXVIII

Supuestas las mismas leyes de las atracciones, digo que el cuerpo exterior S, con radios trazados al centro común de gravedad O de los cuerpos interiores P y T, describe áreas más proporcionales a los tiempos en torno a dicho centro y una órbita más semejante a la forma de una elipse con foco en dicho centro, si el cuerpo mayor y más interior fuese perturbado por tales atracciones igual que los demás, que si éste o bien reposa sin atracción alguna, o bien es atraído mucho más o mucho menos o perturbado mucho más o mucho menos.

Se demuestra casi del mismo modo que la proposición LXVI, pero con un argumento más prolijo, del cual prescindo por eso. Bastará considerarlo como sigue. De la última proposición se sigue que el centro hacia el que se ve urgido el cuerpo S por las fuerzas conjuntas está próximo al centro común de gravedad de los otros dos. Si aquel centro coincide con este centro común y el centro común de gravedad de los tres estuviese en reposo, el cuerpo S por una parte, y el centro común de los otros dos por otra, describirán elipses exactas en torno al centro común en reposo de los tres. Esto se sigue del corolario 2 de la proposición LVIII, al compararlo con lo demostrado en las proposiciones LXIV y LXV. Este movimiento elíptico es un tanto perturbado por la distancia entre el centro de los dos cuerpos y el centro hacia el cual es atraído el tercer cuerpo S. Añádase además un movimiento al centro común de los tres, y aumentará la perturbación. Por lo tanto, la perturbación será mínima cuando el centro común de los tres está en reposo; esto es, cuando el cuerpo mayor y más interior T es atraído con la misma ley de los otros: y se hace mayor cada vez cuando el centro común de los tres, al disminuir el movimiento del cuerpo T, empieza a moverse y se va agitando más y más.



COROLARIO. Y de aquí que, si varios cuerpos pequeños giran en torno a uno mayor, se pueda inferir que las órbitas descritas se aproximarán más a elipses, y la descripción de las áreas será más uniforme si todos los cuerpos se atraen y perturban mutuamente

con fuerzas aceleratrices directamente proporcionales a sus fuerzas absolutas e inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias, y el foco de cada órbita se halla en el centro común de gravedad de todos los cuerpos interiores (a saber, si el foco de la órbita primera y más interior se halla en el centro de gravedad del cuerpo mayor y más interior; el foco de la segunda en el centro común de gravedad de los dos cuerpos más interiores; el de la tercera en el centro común de gravedad de los tres interiores, y así sucesivamente) que si el cuerpo interior estuviese en reposo y se convirtiera en el foco común de todas las órbitas.

PROPOSICIÓN LXIX. TEOREMA XXIX

En un sistema de varios cuerpos A, B, C, D, etc., si un cuerpo A atrae a todos los otros B, C, D, etc., con fuerzas aceleratrices que son inversamente como los cuadrados de las distancias al cuerpo atrayente; y otro cuerpo B atrae también a los otros cuerpos A, C, D, etc., con fuerzas que son inversamente como el cuadrado de las distancias al cuerpo atrayente: las fuerzas absolutas de los cuerpos atrayentes A, B, serán entre sí como los propios cuerpos A, B, a quienes corresponden dichas fuerzas.

Pues las atracciones aceleratrices de todos los cuerpos B, C, D, etc., hacia A son iguales entre sí a distancias iguales, por hipótesis; y de igual modo las atracciones aceleratrices de todos los cuerpos hacia B son iguales a distancias iguales. Pero la fuerza atractiva absoluta del cuerpo A es a la fuerza atractiva absoluta del cuerpo B como la atracción aceleratriz de todos los cuerpos hacia A es a la atracción aceleratriz de todos los cuerpos hacia B, a distancias iguales; y así es la atracción aceleratriz del cuerpo B hacia A a la atracción aceleratriz del cuerpo A hacia B. Pero la atracción aceleratriz del cuerpo B hacia A es a la atracción aceleratriz del cuerpo A hacia B, como la masa del cuerpo A a la masa del cuerpo B; puesto que las fuerzas motrices, que (por las definiciones segunda, séptima y octava) son como las fuerzas aceleratrices y los cuerpos atraídos conjuntamente, son en este caso (por la ley tercera del movimiento) iguales entre sí. Por lo tanto, la fuerza atractiva absoluta del cuerpo A es a la fuerza atractiva absoluta del cuerpo B como la masa del cuerpo A es a la masa del cuerpo B. Q. E. D.

COROLARIO 1. Por tanto, si cada cuerpo del sistema, A, B, C, D, etc., considerado individualmente, atrae a todos los otros con fuerzas aceleratrices que son inversamente como los cuadrados de las distancias al atrayente, las fuerzas absolutas de todos estos cuerpos serán unas a otras como los propios cuerpos.

COROLARIO 2. Por la misma razón, si cada cuerpo del sistema, A, B, C, D, etc., considerado individualmente atrae a todos los otros con fuerzas aceleratrices que están en razón directa o inversa de alguna potencia de las distancias al atrayente, o que vienen definidas por las distancias desde cada cuerpo atrayente según alguna ley común, está claro que las fuerzas absolutas de dichos cuerpos son como los cuerpos.

COROLARIO 3. En un sistema de cuerpos cuyas fuerzas decrecen en razón del cuadrado de las distancias, si los cuerpos menores giran en torno al mayor en elipses que tienen el foco común en el centro del cuerpo mayor y se aproximan lo más posible a dicha figura, a la vez que con radios trazados a dicho cuerpo mayor describen áreas lo más proporcionales posible a los tiempos: las fuerzas absolutas de dichos

cuerpos serán entre sí en razón exacta o muy aproximada de los cuerpos, y viceversa. Es evidente por el corolario de la proposición XLVIII junto con el corolario 1 de esta proposición.

ESCOLIO

Estas proposiciones nos conducen a la analogía entre fuerzas centrípetas y cuerpos centrales, hacia los cuales suelen dirigirse dichas fuerzas; pues parece razonable que las fuerzas que se dirigen hacia los cuerpos dependan de la naturaleza y magnitud de dichos cuerpos, como ocurre con los imanes. Y cuantas veces ocurren estos casos se tendrán que calcular las atracciones de los cuerpos atribuyendo a cada una de sus partículas las fuerzas adecuadas y obteniendo la suma de fuerzas. Tomo aquí la palabra atracción de modo genérico para cualquier conato de los cuerpos de acercarse mutuamente, tanto si tal conato acontece por la acción de los cuerpos, que se buscan unos a otros o se agitan mutuamente mediante emisión de espíritus, como si surge de la acción del éter o del aire o de cualquier otro medio corpóreo o incorpóreo que empuje de alguna forma a los cuerpos inmersos en él unos hacia otros. Y en el mismo sentido genérico utilizo el término impulso, ocupándome en este tratado no de las especies de fuerzas y cualidades físicas, sino de las cantidades y proporciones matemáticas, como expliqué en las definiciones. En matemáticas se han de investigar las magnitudes de las fuerzas y las razones que se siguen en cualesquiera condiciones supuestas: después, al descender a la física, hay que comparar estas razones con los fenómenos; para que aparezca cuáles condiciones de esas fuerzas corresponden a cada clase de cuerpos atractivos. Y sólo después será posible discutir con más seguridad sobre las clases de fuerzas, de las causas y razones físicas. Veamos, pues, con qué fuerzas deberán interaccionar entre sí los cuerpos esféricos constituidos de partículas atractivas de la manera ya dicha y qué movimientos van a seguirse de ello.

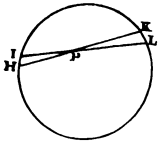
SECCIÓN XII

DE LAS FUERZAS ATRACTIVAS DE CUERPOS ESFÉRICOS

PROPOSICIÓN LXX. TEOREMA XXX

Si hacia cada punto de una superficie esférica se dirigiesen fuerzas centrípetas iguales y decrecientes en razón del cuadrado de la distancia desde dichos puntos: digo que un corpúsculo situado en el interior de dicha superficie no es atraído hacia ningún lado por tales fuerzas.

Sea HIKL la superficie esférica y P el corpúsculo ubicado en el interior. Trácense por P hasta esa superficie las dos líneas HK, IL, que intercepten arcos HI, KL, muy pequeños; y, por la semejanza de los triángulos HPI, LPK (por el corolario 3 del lema VII), dichos arcos serán proporcionales a las distancias HP, LP; y las partículas ubicadas en

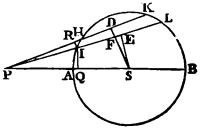


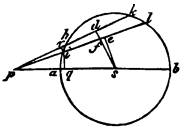
HI, KL, de la superficie esférica delimitada por rectas que pasen por P en cualquier dirección se hallarán bajo la susodicha razón del cuadrado. Luego las fuerzas de dichas partículas ejercidas hacia el cuerpo P son iguales entre sí. Puesto que son directamente como las partículas, e inversamente como el cuadrado de las distancias. Y esas dos razones componen una razón de igualdad. Pero las atracciones iguales hechas en sentido contrario se destruyen mutuamente. Por la misma razón todas las atracciones de toda la superficie esférica son destruidas por atracciones contrarias. Por consiguiente, el cuerpo P no será impelido hacia parte alguna por dichas atracciones. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXXI. TEOREMA XXXI

Con los mismos supuestos, digo que un corpúsculo situado fuera de una superficie esférica es atraído hacia el centro de la esfera con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la esfera.

Sean AHKB, *ahkb*, dos superficies esféricas iguales descritas con centros en S, *s*, y diámetros AB, *ab*, y sean P, *p*, corpúsculos situados en el exterior sobre la prolongación de dichos diámetros. Desde los corpúsculos trácense las líneas PHK, PIL y *phk*, *pil*, seccionando de los círculos máximos AHB, *ahb*, los arcos iguales HK, *hk*, e IL, *il*: desciendan sobre ellas las perpendiculares SD, *sd*; SE, *se*; IR, *ir*; tales que SD, *sd*, corten a PL, *pl*, en F y *f*; caigan también sobre los diámetros las perpendiculares IQ, *iq*. Desvanézcanse los ángulos DPE, *dpe*; y por ser iguales las líneas DS y *ds*, ES y *es*, pueden considerarse iguales las líneas PE, PF, y *pe*, *pf*, así como los pequeños segmentos DF, *df*; puesto que su razón última es de igualdad al desvanecerse a la vez los ángulos DPE, *dpe*. Una vez hecho esto, PI será a PF como RI a DF, y *pf* a *pi* como *df* o DF a *ri*; y por tanto PI × *pf* a PF × *pi* como RI a *ri*, esto es (por el corolario 3 del lema VII) como el arco IH al arco *ih*. De nuevo PI a PS como IQ a SE, y *ps* a *pi* como *se* o SE a *iq*; y, por tanto, PI × *ps* a PS × *pi* como IQ a *iq*. Y el producto de las razones PI² × *pf* × *ps* es a *pi*² × PF × PS, como IH × IQ a *ih* × *iq*; esto es, como la superficie circular que describiría el arco IH al girar el semicírculo AKB sobre el diámetro AB es a la superficie circular que describiría el arco *ih* al girar el semicírculo *akb* sobre el diámetro *ab*. Y las fuerzas con las cuales estas superficies atraen según líneas tendentes hacia ellas a los corpúsculos P y *p* son (por hipótesis) directamente como dichas superficies e inversamente como el cuadrado de las distancias entre los cuerpos y las superficies, esto es, como *pf* × *ps* a PF × PS. Y estas fuerzas son a sus partes oblicuas que (una vez descompuestas las fuerzas según el corolario II de las leyes) tienden al centro según las líneas PS, *ps*, como PI a PQ, y *pi* a *pq*; esto es (por la se-





mejanza de los triángulos PIQ y PSF, *piq* y *psf*), como PS a PF y *ps* a *pf*. De donde resulta que la atracción del corpúsculo P hacia S es a la atracción del corpúsculo *p* hacia *s* como $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ a $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, esto es, como ps^2 a PS^2. Y por igual razón las fuerzas con las cuales las superficies descritas por la revolución de los arcos KL y *kl* atraen a los corpúsculos serán como ps^2 a PS^2, hallándose siempre en esta proporción las fuerzas de todas las superficies esféricas en que puedan dividirse ambas superficies esféricas, siempre que se tomen *sd* igual a SD y *se* igual a SE. Y, por composición, las fuerzas de todas las superficies esféricas ejercidas sobre los corpúsculos se hallarán en la misma proporción. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXXII. TEOREMA XXXII

Si hacia cada punto de una esfera tienden fuerzas centrípetas iguales y decrecientes como el cuadrado de las distancias desde dichos puntos; y si está dada tanto la densidad como la razón del diámetro de la esfera a la distancia desde su centro hasta el corpúsculo: digo que la fuerza con la cual el corpúsculo es atraído será proporcional al semidiámetro de la esfera.

Pues supongamos que dos corpúsculos son atraídos cada uno de ellos por dos esferas, uno por una y otro por otra, y que sus distancias a los centros de las esferas son respectivamente proporcionales a los diámetros de las esferas, a la vez que las esferas se hallan compuestas de partículas semejantes y semejantemente dispuestas respecto a los corpúsculos. En tal caso, las atracciones de un corpúsculo respecto a cada partícula de una esfera serán a las atracciones del otro corpúsculo respecto a cada partícula de la otra esfera como la razón compuesta de la razón directa de las partículas y de la razón inversa del cuadrado de las distancias. Pero las partículas son como las esferas, esto es, como el cubo de los diámetros, y las distancias son como los diámetros; y la primera razón directamente junto con el cuadrado de la segunda inversamente es la razón de diámetro a diámetro. Q. E. D.

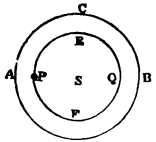
COROLARIO 1. De aquí que si giran unos corpúsculos en círculos en torno a esferas que constan de materia igualmente atractiva, y las distancias a los centros de esas esferas son proporcionales a los diámetros de las mismas, los tiempos periódicos serán iguales.

COROLARIO 2. Y viceversa, si los tiempos periódicos son iguales, las distancias serán proporcionales a los diámetros. Estos dos constan por el corolario 3 de la proposición IV.

COROLARIO 3. Si hacia cada punto de dos sólidos cualesquiera semejantes e igualmente densos tienden fuerzas centrípetas iguales y decrecientes según el cuadrado de las distancias a dichos puntos, las fuerzas, por las cuales los corpúsculos son atraídos hacia tales sólidos desde posiciones semejantes respecto a ellos, serán entre sí como los diámetros de los sólidos.

PROPOSICIÓN LXXIII. TEOREMA XXXIII

Si hacia cada punto de una esfera dada tienden fuerzas centrípetas iguales y decrecientes según el cuadrado de la distancia a dichos puntos, digo que un corpúsculo situado dentro de la esfera es atraído con una fuerza proporcional a su distancia al centro.



En la esfera ABCD, trazada con centro en S, póngase el corpúsculo P; y con centro en el mismo S y distancia SP supóngase trazada la esfera PEQF. Es evidente (por la proposición LXX) que las superficies esféricas concéntricas de que se compone la diferencia entre esferas AEBF en nada actúa sobre el cuerpo P, al destruirse sus atracciones por las contrarias. Sólo queda la atracción de la esfera interior PEQF. Y (por la proposición LXXII) ésta es como la distancia PS. Q.E.D.

ESCOLIO

Las superficies de que se componen los cuerpos no son aquí puramente matemáticas, sino orbes tan tenues que su espesor es casi nulo; o sea, orbes evanescentes de los cuales consta la esfera al final cuando el número de dichos orbes aumenta y su espesor disminuye hasta el infinito. Igualmente hay que entender los puntos, de los que se dice que constituyen las líneas, las superficies y los sólidos, como partículas iguales de magnitud despreciable.

PROPOSICIÓN LXXIV. TEOREMA XXXIV

Con los mismos supuestos, digo que un corpúsculo situado fuera de una esfera es atraído con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la misma.

Pues divídase la esfera en innumerables superficies esféricas concéntricas, y las atracciones sobre el corpúsculo resultantes de cada una de las superficies serán inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia del corpúsculo al centro (por la proposición LXXI). Y al componer resultará la suma de las atracciones, esto es, la atracción del corpúsculo hacia toda la esfera, en la misma razón. Q.E.D.

COROLARIO 1. De aquí que a iguales distancias de los centros de esferas homogéneas las atracciones son como las esferas. Pues (por la proposición LXXII) si las distancias son proporcionales a los diámetros de las esferas, las fuerzas serán como los diámetros. Disminúyase en esa razón la distancia mayor; y al ser ahora iguales las distancias, la atracción aumentará como el cuadrado de dicha razón; y, por lo tanto, será a la otra atracción como el cubo de dicha razón, esto es, como la razón de las esferas.

COROLARIO 2. A distancias cualesquiera las atracciones son como las esferas divididas por el cuadrado de las distancias.

COROLARIO 3. Si un corpúsculo se halla fuera de una esfera homogénea, es atraído con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de

aquélla y la esfera está constituida de partículas atractivas; la fuerza de cualquier partícula decrecerá como el cuadrado de la distancia desde la partícula.

PROPOSICIÓN LXXV. TEOREMA XXXV

Si hacia cada punto de una esfera dada tienden fuerzas centrípetas iguales y decrecientes según el cuadrado de las distancias a cada punto; digo que otra esfera cualquiera semejante será atraída por ella con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de las distancias entre los centros.

Pues la atracción de cada partícula es inversamente como el cuadrado de su distancia al centro de la esfera atrayente (por la proposición LXXIV) y, por tanto, resulta ser la misma que si toda la fuerza atractiva procediese de un único corpúsculo situado en el centro de la tal esfera. Pero dicha atracción es tanta cuanta, a su vez, sería la atracción del mismo corpúsculo si fuese atraído por cada partícula de la esfera atraída con una fuerza igual a aquélla con la que él mismo atrae. Pero dicha atracción del corpúsculo (por la proposición LXXIV) sería inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la esfera; y, por lo tanto, la atracción de una esfera igual a ella se halla también en la misma razón. Q.E.D.

COROLARIO 1. Las atracciones de esferas hacia otras esferas homogéneas son como las esferas atrayentes divididas por el cuadrado de las distancias entre sus centros y los de las atraídas.

COROLARIO 2. Lo mismo ocurre cuando la esfera atraída también atrae. Puesto que cada punto de ésta atrae a cada punto de la otra con la misma fuerza con que a su vez son atraídos; por lo tanto, dado que en toda atracción (por la ley III) son urgidos tanto el punto atrayente como el atraído, se igualarán las fuerzas de atracción mutua, manteniéndose las proporciones.

COROLARIO 3. Todo lo anteriormente demostrado sobre el movimiento de los cuerpos en torno al foco de las secciones cónicas vale cuando la esfera atrayente se sitúa en el foco y los cuerpos se mueven fuera de la misma.

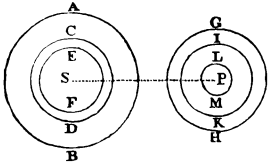
COROLARIO 4. Y las cosas que se demostraron sobre el movimiento de los cuerpos en torno al centro de las secciones cónicas valen cuando el movimiento ocurra dentro de la esfera.

PROPOSICIÓN LXXVI. TEOREMA XXXVI

Si las esferas fueren desiguales de forma continua desde el centro hasta la circunferencia (en cuanto a densidad de materia y fuerza atractiva), mientras son iguales en todo lo demás, en todo su perímetro y para cada distancia dada al centro; y la fuerza atractiva de cada punto decrece según el cuadrado de la distancia del cuerpo atraído: digo que la fuerza total con la cual una esfera de este tipo atrae a otra será inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre centros.

Sean varias esferas concéntricas semejantes AB, CD, EF, etc., que al añadir las interiores a las exteriores compongan una materia más densa hacia el centro y al suprimirlas

la dejen más tenue; éstas (por la proposición LXXV) atraerán a cualesquiera otras esferas concéntricas semejantes, GH, IK, LM, etc., cada una a cada una, con fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia SP. Y por suma o resta, el total de todas esas fuerzas o el exceso de unas sobre otras, esto es, la fuerza con la cual toda la esfera AB, compuesta de todas las concéntricas o de todas las diferencias de las concéntricas, atrae a toda la esfera GH, compuesta de las concéntricas o de las diferencias de las concéntricas, estará en la misma razón. Auméntese hasta el infinito el número de esferas concéntricas de modo que la densidad de la materia a la vez que la fuerza atractiva crezca o decrezca según alguna ley desde la periferia hacia el centro; y añadiendo materia no atractiva complétese donde sea preciso la falta de densidad hasta que las esferas adquieran la forma deseada; y la fuerza con la cual una atraerá a la otra también ahora estará, por el argumento anterior, en esa misma razón inversa del cuadrado. Q.E.D.



COROLARIO 1. De aquí que si muchas esferas de éstas, mutuamente semejantes en todo, se atraen entre sí, a distancias iguales cualesquiera entre centros, sus atracciones aceleratrices una a una serán como las esferas atrayentes.

COROLARIO 2. Y a distancias desiguales cualesquiera serán como las esferas atrayentes divididas por los cuadrados de las distancias entre centros.

COROLARIO 3. Y las atracciones motrices o los pesos de una esfera hacia otra serán, a distancias iguales de los centros, como las esferas atrayentes y las atraídas conjuntamente, esto es, como el contenido de las esferas resultante de su multiplicación.

COROLARIO 4. Y a distancias desiguales, directamente como dichos contenidos e inversamente como los cuadrados de las distancias entre centros.

COROLARIO 5. Lo mismo vale cuando la atracción procede de la fuerza atractiva de ambas esferas atrayéndose mutuamente una a otra. Pues la atracción se duplica con ambas fuerzas, guardando la proporción.

COROLARIO 6. Si esferas de esta clase giran en torno a otras en reposo, una en torno a cada una, y las distancias entre los centros de las que giran y los de las que están en reposo fuesen proporcionales a los diámetros de las que están en reposo, los tiempos periódicos serán iguales.

COROLARIO 7. Y viceversa, si los tiempos periódicos son iguales, las distancias serán proporcionales a los diámetros.

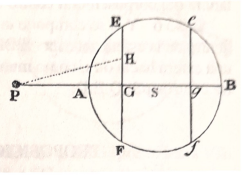
COROLARIO 8. A esto mismo se atienen todas las cosas demostradas más arriba sobre el movimiento de cuerpos en torno a focos de secciones cónicas, cuando en el foco se sitúa la esfera atractiva de cualquiera forma o condición de las descritas.

COROLARIO 9. Y de igual modo cuando los cuerpos que giran son también esferas atractivas de cualquier condición ya descrita.

PROPOSICIÓN LXXVII. TEOREMA XXXVII

Si hacia cada uno de los puntos de esferas tienden fuerzas centrípetas proporcionales a las distancias de los puntos a los cuerpos atraídos: digo que la fuerza compuesta

con la cual se atraen mutuamente dos esferas es como la distancia entre los centros de las esferas.

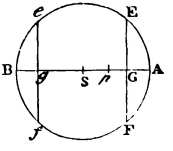


Caso 1. Sea la esfera AEBF, S su centro, P un corpúsculo atraído, PASB el eje de la esfera que pasa por el centro del corpúsculo, EF, *ef*, dos planos perpendiculares al eje y que cortan la esfera y equidistantes a un lado y otro del centro de la esfera; G, *g*, las intersecciones de los planos y el eje y H un punto cualquiera en el plano EF. La fuerza centrípeta del punto H sobre el corpúsculo P ejercida según la línea PH es como la distancia PH; y (por el corolario II de las leyes) según la línea PG, o sea, hacia el centro S, es como la longitud PG. Por lo tanto, la fuerza de todos los puntos del plano EF, esto es, la fuerza de todo el plano, con la cual el corpúsculo P es atraído hacia el centro S es como la distancia PG multiplicada por el número de puntos, esto es, como el sólido contenido bajo el plano EF y la distancia PG. E igualmente la fuerza del plano *ef*, por la cual el corpúsculo P es atraído hacia el centro S, es como dicho plano multiplicado por su distancia P*g*, o como el plano EF igual al anterior multiplicado por esa distancia P*g*; y la suma de las fuerzas de ambos planos es como el plano EF multiplicado por la suma de las distancias PG + P*g*, esto es, como dicho plano multiplicado por el doble de la distancia PS del centro hasta el corpúsculo, o como el doble del plano EF multiplicado por la distancia PS, o como la suma de los planos iguales EF + *ef* multiplicada por esa misma distancia. Y por un argumento similar, las fuerzas de todos los planos en toda la esfera, equidistantes del centro de la misma, son como la suma de los planos multiplicada por la distancia PS, esto es, como toda la esfera y la distancia PS conjuntamente. Q.E.D.

Caso 2. El corpúsculo P atraiga ahora a la esfera AEBF. Por el mismo argumento se probará que la fuerza por la que dicha esfera es atraída será como la distancia PS. Q.E.D.

Caso 3. Sea ahora otra esfera compuesta de innumerables corpúsculos P; y puesto que la fuerza por la que es atraído cada corpúsculo es como la distancia del corpúsculo al centro de la primera esfera y la esfera conjuntamente, y, por lo tanto, es la misma que si toda ella procediera de un corpúsculo único situado en el centro de la esfera; la fuerza total con la cual todos los corpúsculos son atraídos hacia la segunda esfera, esto es, con la cual es atraída toda la dicha esfera, será la misma que si dicha esfera fuera atraída por una fuerza procedente de un único corpúsculo en el centro de la primera esfera y, por tanto, proporcional a la distancia entre los centros de las esferas. Q.E.D.

Caso 4. Si las esferas se atraen mutuamente se duplicarán las fuerzas manteniéndose la proporción. Q.E.D.



Caso 5. Sitúese ahora el corpúsculo *p* dentro de la esfera AEBF; y puesto que la fuerza del plano *ef* sobre el corpúsculo es como el sólido contenido bajo dicho plano y la distancia *pg*, y la fuerza contraria del plano EF es como el sólido contenido bajo dicho plano y la distancia *p*G, la fuerza compuesta de ambas será como la diferencia de los sólidos, esto es, como la suma de los planos iguales multiplicada por la semidiferencia de las distancias, esto es, como dicha suma multiplicada por la distancia *p*S, distancia del corpúsculo al centro de la esfera. Y por un argumento similar, la atracción de

todos los planos EF, *ef*, de toda la esfera, esto es, la atracción de toda la esfera es conjuntamente como la suma de todos los planos, o sea, la esfera toda, y como *p*S, distancia del corpúsculo al centro de la esfera. Q.E.D.

CASO 6. Y si se compone una nueva esfera con innumerables corpúsculos *p* situada dentro de la esfera anterior AEBF, se probará como antes que la atracción, tanto simple de una esfera hacia otra, como mutua entre ambas una hacia otra, será como la distancia entre centros *p*S. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXXVIII. TEOREMA XXXVIII

Si al pasar del centro hacia la circunferencia las esferas son constantemente desiguales y heterogéneas, pero en cada círculo a distancias dadas del centro son continuamente iguales; y la fuerza atractiva de cada punto fuese como la distancia del cuerpo atraído: digo que la fuerza total con la cual dos esferas de este tipo se atraerán mutuamente será proporcional a la distancia entre los centros de las esferas.

Esto se demuestra a partir de la proposición precedente, del mismo modo que la proposición LXXVI se ha demostrado a partir de la proposición LXXV.

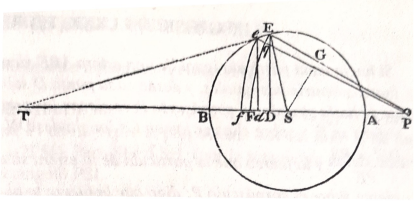
COROLARIO. Lo que se ha demostrado más arriba en las proposiciones X y LXIV sobre el movimiento de los cuerpos en torno a los centros de secciones cónicas tiene valor cuando todas las atracciones surgen de fuerzas de cuerpos esféricos del tipo recién descrito, y los cuerpos atraídos son esferas también del mismo tipo.

ESCOLIO

Acabo de exponer los dos casos más notables de atracciones; a saber, cuando las fuerzas centrípetas decrecen en razón del cuadrado de las distancias, o cuando crecen según la razón simple de las distancias, haciendo en ambos casos que los cuerpos giren en secciones cónicas, y componiendo con dicha ley las fuerzas centrípetas de los cuerpos esféricos al separarse del centro haciéndolas crecer o decrecer según el caso. Lo cual es digno de tenerse en cuenta. Resultaría demasiado prolijo contemplar uno a uno los demás casos que ofrecen soluciones menos elegantes. Prefiero incluirlos y determinarlos a la vez a todos juntos con el método general siguiente.

LEMA XXIX

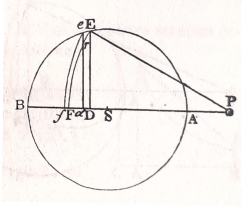
Si en torno a un centro S se describe un círculo cualquiera AEB y se trazan con centro en P dos círculos EF, ef, que cortan al primero en E, e, y a la línea PS en F, f; y sobre PS descienden las perpendiculares ED, ed: digo que, si se supone que disminuyen infinitamente las distancias de los arcos EF, ef, la razón última de la línea evanescente Dd a la línea evanescente Ff será la misma que la de la línea PE a la línea PS.



Pues si la línea P*e* corta al arco EF en *q*; y la recta E*e*, que coincide con el arco evanescente E*e*, prolongada, corta a la recta PS en T; y desde S se traza sobre PE la normal SG: por la semejanza de los triángulos DTE, *d*T*e*, DES; D*d* será a E*e* como DT a TE, o como DE a ES; y por la semejanza de los triángulos E*eq*, ESG (por el lema VIII y el corolario 3 del lema VII), E*e* será a *eq* o F*f* como ES a SG; y, por consiguiente, D*d* es a F*f* como DE a SG; esto es (por la semejanza de los triángulos PDE, PGS), como PE a PS. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXXIX. TEOREMA XXXIX

Si una superficie EFfe llega a ser evanescente al disminuir continuamente hasta el infinito su anchura y con su giro en torno al eje PS describe un sólido esférico cóncavo-convexo hacia cada una de cuyas partículas iguales tienden. fuerzas centrípetas iguales, digo que la fuerza con la cual dicho sólido atrae a un corpúsculo situado en P está en razón compuesta de la razón del sólido DE' 3 Ff y la razón de la fuerza con la cual la partícula dada en el lugar Ff atraería al mismo corpúsculo.

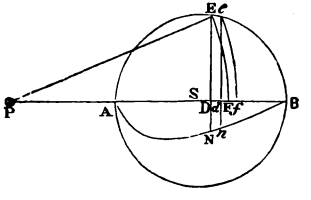


Pues si consideramos primero la fuerza de la superficie esférica FE generada por el giro del arco FE y cortada en un punto cualquiera *r* por la línea *de*; la parte anular de la superficie, generada por el giro del arco *r*E, será como el segmento D*d*, manteniéndose el radio PE de la esfera (como demostró Arquímedes en el libro *De Sphera et Cylindro*). Y la fuerza de tal superficie, ejercida según las líneas PE o P*r* colocadas en la superficie cónica en cualquier punto, será como dicha superficie cónica anular; esto es, como el segmento D*d* o, lo que es lo mismo, como el rectángulo comprendido por el radio de la esfera PE y el segmento D*d*: pero si se ejerce según la línea PS tendente hacia el centro S será menor en la razón de PD a PE, y por tanto como PD × D*d*. Supóngase ahora que la línea DF se divide en innumerables partículas iguales, cada una de las cuales se denomina D*d*; entonces la superficie FE quedará dividida en otros tantos anillos iguales, cuyas fuerzas serán como la suma de todos los PD × D*d*, esto es, como $\frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2$ y, por lo tanto, como DE^2. Ahora multiplíquese la superficie FE por la altura F*f* y resultará la fuerza del sólido EF*f* e ejercida sobre el corpúsculo P como $DE^2 \times Ff$, esto cuando se dé la fuerza que una partícula dada F*f* ejerce sobre el corpúsculo P a la distancia PF. Pero si no se da dicha fuerza, la fuerza del sólido EF*fe* será como el sólido $DE^2 \times Ff$ y la fuerza no dada conjuntamente. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXXX. TEOREMA XL

Si hacia cada partícula igual de una esfera ABE, descrita con centro en S, tienden fuerzas centrípetas iguales, y desde cada punto D sobre el eje de la esfera AB, en el que se halla situado un corpúsculo P, se elevan las perpendiculares DE que tocan a la esfera en E, y sobre ellas se toman las longitudes DN, que son conjuntamente como $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$ *y la fuerza que la partícula de la esfera situada en el eje a la distancia PE ejerce sobre el corpúsculo P: digo que la fuerza total con la cual el corpúsculo P es atraído hacia la esfera es como el área ANB comprendida bajo el eje AB de la esfera y la línea curva ANB, de la cual el punto N es siempre tangente.*

Pues, manteniendo las construcciones del lema y del teorema anteriores, imagínese al eje de la esfera AB dividido en innumerables partículas iguales D*d*, y a toda la esfera dividida en otras tantas láminas esféricas cóncavo-convexas EF*Fe*; y elévese la perpendicular *dn*. Por el teorema anterior, la fuerza con la cual la lámina EF*fe* atrae al corpúsculo P es como $DE^2 \times Ff$ y la fuerza de una sola partícula ejercida a la distancia PE o PF conjuntamente. Pero (por el lema anterior) D*d* es a F*f* como PE a PS, y por tanto F*f* es igual a $\frac{PS \times Dd}{PE}$, y $DE^2 \times Ff$ es igual a $Dd \times \frac{DE^2 \times PS}{PE}$, y por tanto la fuerza de la lámina EF*fe* es como $Dd \times \frac{DE^2 \times PS}{PE}$ y la fuerza de la partícula ejercida a la distancia PF conjuntamente, esto es (por hipótesis), como DN × D*d*, o el área evanescente DN*nd*. Por tanto, las fuerzas de todas las láminas ejercidas sobre el cuerpo P son como todas las áreas DN*nd*, esto es, la fuerza total de la esfera como toda el área ANB. Q.E.D.



COROLARIO 1. De aquí que si la fuerza centrípeta tendente hacia cada partícula permanece siempre la misma a todas las distancias y DN es como $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$, la fuerza total con la que el corpúsculo es atraído por la esfera será como el área ANB.

COROLARIO 2. Si la fuerza centrípeta de las partículas es inversamente como la distancia del corpúsculo atraído por ellas y DN es como $\frac{DE^2 \times PS}{PE^2}$, la fuerza con la cual el corpúsculo P es atraído por toda la esfera será como el área ANB.

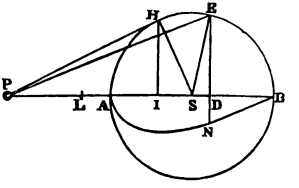
COROLARIO 3. Si la fuerza centrípeta de las partículas es inversamente como el cubo de la distancia del corpúsculo atraído por ellas y DN es como $\frac{DE^2 \times PS}{PE^4}$, la fuerza con la cual el corpúsculo es atraído por toda la esfera será como ANB.

COROLARIO 4. Y, en general, si se supone que la fuerza centrípeta tendente hacia cada partícula de la esfera es inversamente como la cantidad V y DN como $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, la fuerza con la que el corpúsculo es atraído por toda la esfera será como el área ANB.

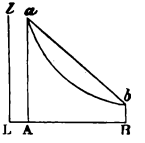
PROPOSICIÓN LXXXI. PROBLEMA XLI

Suponiendo lo anterior, mídase el área ANB.

Desde el punto P trácese la recta PH tangente a la esfera en H, y sobre el eje PAB descienda la normal HI y biséquese PI en L; y (por la proposición XII del libro II de los [*Elementos*]) $PE^2 = PS^2 + SE^2 + 2PSD$. Pero SE^2 o SH^2 (por la semejanza de los triángulos SPH, SHI) es igual al rectángulo PSI. Por tanto, PE^2 es igual al contenido bajo PS y PS + SI + 2SD, esto es, bajo PS y 2LS + 2SD, esto es, bajo PS y 2LD. Además, DE^2 es igual a $SE^2 - SD^2$, o sea, $SE^2 - LS^2 + 2(SLD - LD)^2$, esto es, $2(SLD - LD)^2 - ALB$. Pues $LS^2 - SE^2$ o $LS^2 - SA^2$ (por la proposición VI del libro II de los [*Elementos*]) es igual al rectángulo ALB. Si por DE^2 se escribe $2SLD - LD^2 - ALB$; y la cantidad $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$,

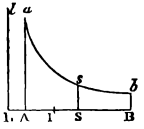


que según el corolario 4 de la proposición anterior es como la longitud de la ordenada aplicada en DN, quedará descompuesta en tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LD^2 \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: donde si en lugar de V escribimos la razón inversa de la fuerza centrípeta, y en lugar de PE la media proporcional entre PS y 2LD, dichas tres partes resultan ordenadas de las curvas correspondientes, cuyas áreas se obtienen por métodos ya comunes. Q.E.F.



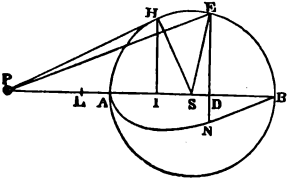
EJEMPLO 1. Si la fuerza centrípeta tendente hacia cada partícula de la esfera fuese inversamente como la distancia; escríbase por V la distancia PE y en lugar de PE^2 escríbase 2PS × LD, y DN será como $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$. Supóngase a DN igual a su doble $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$; y transportando a lo largo de la longitud AB la parte dada de la ordenada 2SL describirá el área rectangular 2SL × AB; mientras la parte indefinida LD, transportada normalmente por la misma longitud, con un movimiento continuo tal que al moverse crezca o decrezca para permanecer siempre igual a la longitud LD, describirá el área $\frac{LB^2 - LA^2}{2}$, esto es, el área SL × AB; la cual restada del área anterior2SL × AB deja el área SL × AB. Y la tercera parte $\frac{ALB}{LD}$, transportada también con un movimiento local normal sobre la misma longitud, describirá un área hiperbólica; la cual, restada del área SL × AB dejará el área buscada ANB. De donde surge la construcción siguiente del problema. Elévense por los puntos L, A, B, las perpendiculares LI, A*a*, B*b*, haciendo que A*a* sea igual a LB y Bb igual a LA. Siendo

asíntotas LI, LB, trácese por los puntos *a*, *b*, la hipérbola *ab*. Y trazada la cuerda ba cerrará el área *aba* igual al área buscada ANB.



EJEMPLO 2. Si la fuerza centrípeta tendente hacia cada partícula de la esfera fuere inversamente como el cubo de la distancia, o (lo que es igual) como dicho cubo dividido por un plano dado; escríbase $\frac{PE^3}{2AS^2}$ en lugar de V, y también 2PS × LD en lugar de PE^2, y DN será como $\frac{SL \times AS^2}{PS \times LD} - \frac{AS^2}{2PS} - \frac{ALB \times AS^2}{2PS \times LD^2}$, esto es (por la proporcionalidad continua de PS, AS, SI) como $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LD^2}$. Si se llevan estas tres partes sobre la longitud AB, la primera de ellas $\frac{LSI}{LD}$ generará un área hiperbólica; la segunda $\frac{1}{2}SI$ el área $\frac{1}{2}AB \times SI$; la tercera $\frac{ALB \times SI}{2LD^2}$ el área $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, esto es, $\frac{1}{2}AB \times SI$. Réstese de la primera la suma de la segunda y la tercera y quedará el área buscada ANB. De donde la construcción del problema resulta como sigue. Por los puntos L, A, S, B, elévense las perpendiculares L*l*, A*a*, S*s*, B*b*, de las cuales S*s* sea igual a SI y por el punto *s* con las asíntotas LI, LB, trácese la hipérbola *asb* que encuentre a las perpendiculares A*a* y B*b* en *a* y *b*; y restando el rectángulo 2ASI del área hiperbólica A*asb*B quedará el área buscada ANB.

EJEMPLO 3. Si la fuerza centrípeta tendente hacia cada partícula de la esfera decrece como la cuarta potencia de la distancia de las partículas, escríbase $\frac{PE^2}{2AS^2}$ en lugar de V, después $\sqrt{2(PS \times LD)}$ en lugar de PE, y DN vendrá a ser como $\frac{SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD^3}} - \frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SI^2 \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD^5}}$; y al llevar estas tres partes sobre la longitud AB producen otras tantas áreas, a saber: $\frac{2SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}}$ por $\left(\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}\right)$; $\frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}}$ por $(\sqrt{LB} - \sqrt{LA})$; y $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ por $\left(\frac{1}{\sqrt{LA^3}} - \frac{1}{\sqrt{LB^3}}\right)$. Y tras la



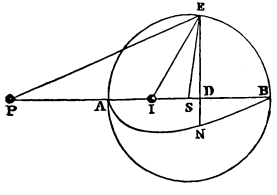
reducción debida dan $\frac{2SI^2 \times SL}{LI}$, SI^2, y $SI^2 + \frac{2SI^3}{3LI}$. De éstas, a su vez, después de restar las últimas de la primera, resulta $\frac{4SI^3}{3LI}$. Por tanto, la fuerza total con la cual el corpúsculo P es atraído hacia el centro de la esfera es como $\frac{SI^3}{PI}$, esto es, como el inverso de $PS^3 \times PI$. Q.E.I.

Con el mismo método podemos determinar la atracción de un corpúsculo ubicado dentro de la esfera, pero es más directo por el teorema siguiente.

PROPOSICIÓN LXXXII. TEOREMA XLI

En una esfera descrita con centro en S y radio SA, si se toman SI, SA, SP, continuamente proporcionales: digo que la atracción de un corpúsculo dentro de la esfera en un lugar cualquiera I es a la atracción del mismo fuera de la esfera en el lugar P en razón compuesta de la raíz cuadrada de la razón de las distancias al centro IS, PS, y de la raíz cuadrada de la razón de las fuerzas centrípetas tendentes al centro en dichos lugares P, I.

Puesto que si las fuerzas centrípetas de las partículas de la esfera fuesen inversamente como la distancia al corpúsculo atraído por ellas, la fuerza, con la cual el corpúsculo situado en I es atraído por toda la esfera, será a la fuerza con la cual es atraído en P, en razón compuesta de la raíz cuadrada de la razón de las distancias SI a SP, y de la raíz cuadrada de la razón de la fuerza. centrípeta en el lugar I de una partícula que la produce desde el centro, respecto a la fuerza centrípeta en P generada también por la misma partícula desde el centro, esto es, inversamente como la raíz cuadrada de las distancias respectivas SI, SP. Estas dos razones de ralees cuadradas componen razón de igualdad, y por tanto, las atracciones en I y P producidas por toda la esfera son iguales. Con un cálculo similar se encontrará que, si las fuerzas de las partículas de la esfera son inversamente como el cuadrado de la razón de las distancias, la atracción en I es a la atracción en P como la distancia SP al semidiámetro SA de la esfera; si dichas fuerzas son inversamente como la razón cúbica de las distancias, las atracciones en I y P serán entre sí como SP^2 a SA^2; si fuesen como la cuarta potencia, como SP^3 a SA^3. Por tanto, como la atracción en P, en este último caso, resulta ser inversamente como $PS^3 \times PI$, la atracción en I será inversamente como $SA^3 \times PI$, esto es (por estar dado SA^3), inversamente como PI. Y así sucesivamente hasta el infinito. El teorema, pues, se demuestra así:

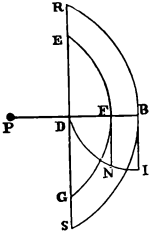


Manteniendo las construcciones anteriores, y existiendo un corpúsculo en un lugar cualquiera P, la ordenada DN resultó ser como $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$. Luego si se traza IE, orde-

nada para otro lugar I del corpúsculo, «mutatis mutandis», resultará ser como $\frac{DE^2 \times IS}{IE \times V}$. Supóngase que las fuerzas centrípetas procedentes de un punto E cualquiera de la esfera son entre sí a, las distancias IE y PE como PE^n a IE^n (donde *n* representa la potencia de PE y de IE) y dichas ordenadas resultarán como $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times PE}$ y $\frac{DE^2 \times IS}{IE^n \times IE^n}$ cuya razón mutua es como $PS \times IE \times IE^n$ a $IS \times PE \times PE^n$. Por ser SI, SE, SP, continuamente proporcionales, los triángulos SPE, SEI, son semejantes, y por ello IE es a PE como IS a SE o SA; en lugar de la razón IE a PE escríbase la razón IS a SA; y la razón de las ordenadas resultará ser $PS \times IE^n$ a $SA \times PE^n$. Pero la razón de PS a la raíz cuadrada de SA es la razón de las distancias PS, SI; y la razón de IE^n a la raíz cuadrada de PE^n (por ser IE a PE como IS a SA) es la razón de las fuerzas para las distancias PS, IS. Luego las ordenadas, y las áreas que describen las ordenadas, y las atracciones proporcionales a éstas, están en razón compuesta de las raíces cuadradas de aquellas razones. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXXXIII. PROBLEMA XLII

Hallar la fuerza con la cual un corpúsculo situado en el centro de una esfera es atraído hacia cualquier segmento de la misma.

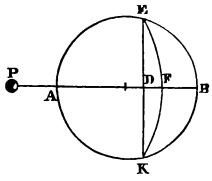


Sea P un cuerpo en el centro de la esfera y RBSD el sector de la misma contenido entre el plano RDS y la superficie esférica RBS. Con la superficie esférica EFG descrita con centro en P córtese DB en F, y distínganse las dos partes del sector BREFGS y FEDG. Sea dicha superficie no algo puramente matemático, sino físico, que tiene una profundidad mínima. Llámese a esta profundidad O, y esta superficie será (por las demostraciones de Arquímedes) como $PF \times DF \times O$. Supongamos además que las fuerzas atractivas de las partículas de la esfera son inversamente como la potencia de las distancias de índice *n*; y la fuerza con la cual la superficie EFG atrae al cuerpo P será (por la proposición LXXIX) como $\frac{DE^2 \times O}{PF^n}$, esto es, como $\frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2 \times O}{PF^n}$. Sea la perpendicular FN multiplicada por O proporcional a esta cantidad; y el área curvilínea BDI, descrita por la ordenada FN al ser aplicada sobre la longitud DB con un movimiento continuo, será como la fuerza total con la cual el segmento completo RBSD atrae al cuerpo P. Q.E.I.

PROPOSICIÓN LXXXIV. PROBLEMA XLIII

Hallar la fuerza con la cual un corpúsculo situado sobre el eje de cualquier segmento de una esfera y fuera del centro de la misma es atraído por dicho segmento.

Atraiga el segmento EBK al corpúsculo P situado sobre su eje ADB. Con centro en P y distancia PE descríbase la superficie esférica EFK mediante la cual se segregan las dos partes del segmento EBKFE y EFKDE. Hállese la fuerza de la parte primera por la proposición LXXXI y la fuerza de la segunda por la proposición LXXXIII; y la suma de las fuerzas será la fuerza del segmento completo EDKDE. Q.E.I.



ESCOLIO

Explicadas las atracciones de los cuerpos esféricos, es ya hora de pasar a las leyes de las atracciones de otros cuerpos que constan también de partículas atractivas; pero tratarlas minuciosamente es menos necesario para mi propósito. Será suficiente, por su escaso uso en temas filosóficos, añadir algunas proposiciones más generales sobre las fuerzas de tales cuerpos y de los movimientos resultantes.

SECCIÓN XIII

SOBRE LAS FUERZAS ATRACTIVAS DE CUERPOS NO ESFÉRICOS

PROPOSICIÓN LXXXV. TEOREMA XLII

Si la atracción padecida por un cuerpo es mucho mayor cuando está contiguo al atrayente que cuando están separados aunque sea por un intervalo mínimo; las fuerzas de las partículas del cuerpo atrayente decrecen al separarse del cuerpo atraído en razón mayor que el cuadrado de las distancias de las partículas.

Pues si las fuerzas decrecen en razón del cuadrado de las distancias de las partículas, la atracción hacia un cuerpo esférico, dado que (por la proposición LXXIV) es inversamente como el cuadrado de la distancia al cuerpo atraído desde el centro de la esfera, no aumentará sensiblemente por el contacto; y todavía aumentará menos por el contacto si la atracción decrece en una proporción menor al retroceder el cuerpo atraído. La proposición resulta, pues, evidente tratándose de esferas atractivas. Y lo mismo ocurre con orbes esféricos cóncavos que atraen a cuerpos externos. Y todavía es más claro para orbes que atraen a cuerpos ubicados en su interior, dado que las atracciones difun-

didas por las cavidades de los orbes en todas direcciones son (por la proposición LXX) destruidas por las atracciones contrarias, y por ello son nulas hasta en el mismo contacto. Pero si de estas esferas y orbes esféricos se suprimen partes cualesquiera distantes del lugar de contacto y se añaden partes nuevas en otros lugares, pueden cambiarse a voluntad las figuras de los cuerpos atractivos, sin que las partes suprimidas o añadidas, al estar alejadas del lugar de contacto, aumenten notablemente el exceso de atracción que procede del contacto. Por tanto, la proposición se mantiene para cuerpos de cualesquiera figuras. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXXXVI. TEOREMA XLIII

Si las fuerzas de las partículas de que consta un cuerpo atractivo decrecen, al alejarse el cuerpo atraído, en razón cúbica o mayor de la distancia de las partículas, la atracción en el lugar de contacto será mucho mayor que cuando los cuerpos atrayente y atraído se hallan separados por un intervalo aunque sea mínimo.

Pues que la atracción aumenta hasta el infinito cuando el corpúsculo atraído se aproxima a una esfera atractiva de este tipo consta por la solución al problema XLI, mostrada en los ejemplos segundo y tercero. Lo mismo se infiere fácilmente a partir de dichos ejemplos comparados con el teorema XLI para el caso de las atracciones de cuerpos hacia orbes cóncavo-convexos, tanto si los cuerpos atraídos se sitúan fuera como dentro de dichas cavidades. Y añadiendo o quitando a estas esferas y orbes por doquier menos en el lugar de contacto cuanta materia atractiva se precise hasta que adquieran la figura requerida, la proposición se mantendrá para todos los cuerpos. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXXXVII. TEOREMA XLIV

Si dos cuerpos entre sí semejantes que constan de materia igualmente atractiva atraen cada uno a un corpúsculo que le es proporcional y está ubicado respecto a ellos de modo semejante, las atracciones aceleratrices de los corpúsculos hacia los cuerpos enteros serán como las atracciones aceleratrices de los corpúsculos hacia partículas de aquellos cuerpos proporcionales a los todos y ubicados semejantemente en los todos.

Pues si los cuerpos se dividen en partículas que sean proporcionales a los todos y ubicadas semejantemente en los todos, la atracción hacia una partícula cualquiera de un cuerpo será a la atracción hacia la correspondiente partícula del otro cuerpo como las atracciones hacia cada partícula del primer cuerpo son a las atracciones hacia cada partícula correspondiente del otro; y componiendo, también es así la atracción hacia todo el primer cuerpo respecto a la atracción hacia todo el segundo. Q.E.D.

COROLARIO 1. Luego si las fuerzas atractivas de las partículas, al aumentar las distancias de los corpúsculos atraídos, decreciesen en razón de alguna potencia de las distancias, las atracciones aceleratrices hacia los cuerpos enteros serán directamente como los cuerpos e inversamente como las dichas potencias de las distancias. Y si las fuerzas de las partículas decrecen en razón del cuadrado de las distancias respecto a los cor-

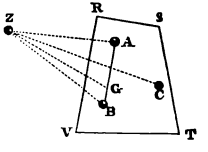
púsculos atraídos, y los cuerpos son como A^3 y B^3 y por ello tanto los lados cúbicos de los cuerpos como las distancias de los corpúsculos atraídos hasta los cuerpos son como A y B, las atracciones aceleratrices hacia los cuerpos serán como $\frac{A^3}{A^2}$ y $\frac{B^3}{B^2}$, esto es, como los lados cúbicos aquellos A y B de los cuerpos. Si las fuerzas de las partículas decrecen en razón cúbica de las distancias a los corpúsculos atraídos, las atracciones aceleratrices hacia los cuerpos completos serán como $\frac{A^3}{A^3}$ y $\frac{B^3}{B^3}$, esto es, iguales. Si las fuerzas decrecen en razón de la cuarta potencia, las atracciones hacia los cuerpos serán como $\frac{A^3}{A^4}$ y $\frac{B^3}{B^4}$, esto es, inversamente como los lados cúbicos A y B. Y así para los demás.

COROLARIO 2. De donde, a la inversa, de las fuerzas con las cuales cuerpos semejantes atraen a corpúsculos ubicados semejantemente respecto a ellos, se puede inferir la razón del decremento de las fuerzas atractivas de las partículas al alejarse el corpúsculo atraído, siempre que dicho decremento se halle en alguna razón directa o inversa respecto a las distancias.

PROPOSICIÓN LXXXVIII. TEOREMA XLV

Si las fuerzas atractivas de partículas iguales de un cuerpo cualquiera fuesen como las distancias de los lugares ta las partículas, la fuerza del cuerpo entero tenderá hacia su centro de gravedad; y será la misma que la de un globo que constase de materia semejante e igual, y que tuviese su centro en el centro de gravedad.

Las partículas A, B, del cuerpo RSTV atraen a un corpúsculo cualquiera Z con fuerzas que, si las partículas son iguales entre sí, son como las distancias AZ, BZ; y si son desiguales, serán como dichas partículas y sus distancias AZ, BZ, conjuntamente, o también (por así decirlo) como dichas partículas multiplicadas respectivamente por sus distancias AZ, BZ. Expresemos estas fuerzas mediante dichos productos, A × AZ y B × BZ. Únase AB y córtesela en G de tal modo que AG sea a BG como la partícula B es a la partícula A; y G será el centro común de gravedad de las partículas A y B. La fuerza A × AZ (por el corolario II de las leyes) se descompondrá en las fuerzas A × GZ y A × AG, mientras la fuerza B × BZ se descompondrá en B × GZ y B × BG. Pero las fuerzas A × AG y B × BG, al ser proporcionales A respecto a B y BG respecto a AG, son iguales; y como tienen direcciones contrarias se anulan mutuamente. Quedan las fuerzas A × GZ y B × GZ. Estas tienden desde Z hacia el centro G y componen la fuerza (A + B) × GZ; esto es, la misma fuerza que si las partículas atractivas A, B, estuviesen ubicadas en su centro común de gravedad G, formando allí un globo.



Por el mismo argumento, si se añade una tercera partícula C, y se compone su fuerza con la fuerza (A + B) × GZ tendente hacia el centro G; la fuerza resultante de ello

tenderá al centro común de gravedad de dicho globo en G y de la partícula C; esto es, hacia el común centro de gravedad de las tres partículas A, B, C; y será la misma que si el globo y la partícula C se hallasen en dicho centro común, formando allí un globo mayor. Y así se puede seguir hasta el infinito. Por lo mismo, la fuerza total de todas las partículas de un cuerpo cualquiera RSTV es la misma que si dicho cuerpo, manteniendo el centro de gravedad, tomase la forma de un globo. Q.E.D.

COROLARIO. De aquí que el movimiento del cuerpo atraído Z será el mismo que si el cuerpo atrayente RSTV fuese esférico; y, por tanto, lo mismo si el cuerpo atrayente reposa como si se mueve uniformemente en línea recta, el cuerpo atraído se moverá en una elipse que tiene su centro en el centro de gravedad del cuerpo atrayente.

PROPOSICIÓN LXXXIX. TEOREMA XLVI

Si se tienen varios cuerpos que constan de partículas iguales, cuyas fuerzas son como las distancias de los lugares hasta cada uno: la fuerza compuesta de todas las fuerzas con la cual es atraído un corpúsculo cualquiera tenderá al centro común de gravedad de los atrayentes; y será la misma que si dichos cuerpos atrayentes, manteniendo el mismo centro común de gravedad, se reuniesen y formasen un globo.

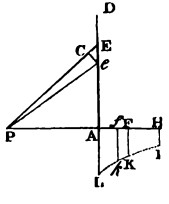
Se demuestra de igual modo que la proposición anterior.

COROLARIO. Por tanto, el movimiento del cuerpo atraído será el mismo que si los cuerpos atrayentes, manteniendo el centro común de gravedad, se reuniesen y formasen un globo. Y por lo mismo, si el centro común de gravedad de los cuerpos atrayentes reposa o progresa uniformemente en línea recta, el cuerpo atraído se moverá en una elipse cuyo centro está en el centro común de gravedad de los cuerpos atrayentes.

PROPOSICIÓN XC. PROBLEMA XLIV

Si hacia cada punto de un círculo cualquiera tienden fuerzas centrípetas iguales, crecientes o decrecientes según alguna razón de las distancias, hállese la fuerza con la que es atraído un corpúsculo situado en un punto cualquiera de una recta levantada perpendicularmente desde, el plano del círculo y en su punto central.

Imagínese un círculo descrito con centro en A y un radio cualquiera AD en un plano al que es perpendicular la recta AP; y hay que hallar la fuerza con la cual es atraído hacia



él un corpúsculo cualquiera P. Desde un punto cualquiera del círculo, tal como E, trácese hasta el corpúsculo la recta PE. Sobre la recta PA tómese PF igual a PE y elévese la normal FK, que sea como la fuerza con la que el punto E atrae al corpúsculo P y sea IKL una línea curva a la que el punto K es continuamente tangente. Y toque ésta al plano del círculo en L. Sobre PA tómese PH igual a PD, y elévese la perpendicular HI que se encuentra con la curva antedicha en I; y la atracción del corpúsculo P hacia el círculo será como el área AHIL multiplicada por la altura AP. Q.E.I.

Efectivamente, tómese sobre AE el segmento mínimo E*e*. Únase P*e*, y sobre PE, PA, tómense PC, P*f*, iguales a Pe. Y puesto que la fuerza con la cual un punto cualquiera E del anillo descrito con centro en A y radio AE sobre el plano antedicho atrae hacia sí al cuerpo P supongamos que es como FK, y por tanto la fuerza con la que el dicho punto atrae al cuerpo P hacia A es como $\frac{AP \times FK}{PE}$, y la fuerza con la cual el anillo completo atrae al cuerpo P hacia A es como el anillo y $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjuntamente; pero dicho anillo es como el rectángulo comprendido bajo el radio AE y la anchura E*e*, y este rectángulo (por la proporcionalidad de PE y AE, E*e* y CE) es igual al rectángulo PE × CE o PE × F*f*; la fuerza con la cual este anillo atraerá al cuerpo P hacia A será como PE × F*f* y AP × FK conjuntamente, esto es, como el contenido bajo F*f* × FK × AP, o también como el área FK*kf* multiplicada por AP. Y, por tanto, la suma de las fuerzas con las cuales todos los anillos sobre el círculo que se describe con centro en A y radio AD, atraen al cuerpo P hacia A es como toda el área AHIKL multiplicada por AP. Q.E.D.

COROLARIO 1. De aquí que si las fuerzas de los puntos decrecen en razón del cuadrado de las distancias, esto es, si FK se hace como $\frac{1}{PF^2}$, y por lo mismo el área AHIKL como $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; la atracción del corpúsculo P hacia el círculo será como $1 - \frac{1}{PH}$, esto es, como $\frac{AH}{PH}$.

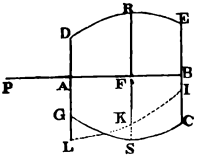
COROLARIO 2. Y, en general, si las fuerzas de los puntos a las distancias D fuesen inversamente como una potencia cualquiera D^n de las distancias; esto es, si FK fuese como $\frac{1}{D^n}$ y, por tanto, el área AHIKL como $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$, la atracción del corpúsculo hacia el círculo será como $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$.

COROLARIO 3. Y si el diámetro del círculo se aumentase hasta el infinito y el número *n* es mayor que la unidad, la atracción del, corpúsculo P hacia el plano entero infinito será inversamente como PA^{n-2}, ya que el otro término $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ se desvanece.

PROPOSICIÓN XCI. PROBLEMA XLV

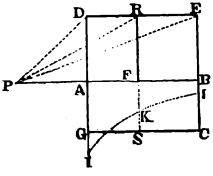
Hallar la atracción de un corpúsculo situado en el eje de un sólido redondo, hacia cada uno de cuyos puntos tienden fuerzas centrípetas iguales y decrecientes según una razón cualquiera de las distancias.

El corpúsculo P sea atraído hacia el sólido DECG y esté situado sobre su eje AB. Córtese el sólido con un círculo cualquiera RFS perpendicular a dicho eje, y en su semi



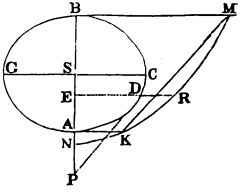
diámetro FS, sobre un plano cualquiera PALKB que pasa por el eje, tómese (por la proposición XC) la longitud FK proporcional a la fuerza con la que el corpúsculo P es atraído hacia dicho círculo. Sea el punto K tangente a la línea curva LKI que se encuentra con los planos más exteriores de los círculos AL y BI en L e I; y la atracción del corpúsculo P hacia el sólido será como el área LABI. Q.E.I.

COROLARIO 1. De donde, si el sólido es un cilindro descrito por el paralelogramo ADEB al girar sobre su eje AB, y las fuerzas centrípetas tendentes hacia cada uno de sus puntos fuesen inversamente como los cuadrados de las distancias hasta los puntos; la atracción del corpúsculo P hacia dicho cilindro será como AB – PE + PD. Ya que la ordenada FK (por el corolario 1 de la proposición. XC)



será como $1 - \frac{PF}{PR}$. El miembro 1 de esta cantidad multiplicado por la longitud AB describe el área 1 × AB: y el otro miembro $\frac{PF}{PR}$ multiplicado por la longitud PB describe el área 1 × (PE – AD) (fácil de mostrar a partir de la cuadratura de la curva LKI); y de modo similar, aquel mismo miembro multiplicado por la longitud PA describe el área 1 × (PD – AD) y multiplicado por AB, que es la diferencia entre PB, PA, describe la diferencia de las áreas 1 × (PE – PD). Réstese del primer valor 1 × AB el del último 1 × (PE – PD) y el resto será el área LABI igual a 1 × (AB – PE + PD). Luego la fuerza proporcional a esta área es como AB – PE + PD.

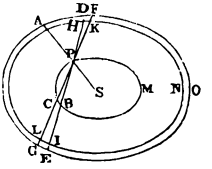
COROLARIO 2. De aquí también se obtiene la fuerza con la cual el esferoide AGBC atrae a un corpúsculo cualquiera P situado externamente en su eje AB. Sea NKRM la sección cónica cuya ordenada ER, perpendicular a PE, sea siempre igual a la longitud PD que se traza hasta el punto D en el cual la susodicha ordenada corta al esferoide. Desde los vértices del esferoide A, B, elévense, perpendiculares al eje AB, las líneas AK, BM, respectivamente iguales a AP, BP, que, por tanto, encontrarán a la sección cónica en K y M; y únanse KM, separando el segmento KMRK.



Sea S el centro del esferoide y SC el semidiámetro máximo; y la fuerza con la cual el esferoide atrae al cuerpo P será a la fuerza con la cual atrae al mismo cuerpo una esfera descrita con diámetro AB como $\frac{AS \times CS^2 - PS \times KMRK}{PS^2 + CS^2 - AS^3}$ a $\frac{AS^3}{3PS^2}$. Y con la misma base de cálculo es posible hallar las fuerzas de los segmentos del esferoide.

COROLARIO 3. Y si el corpúsculo se colocase sobre el eje dentro del esferoide, la atracción será como su distancia al centro. Cosa que se infiere fácilmente con el argumento siguiente, tanto si la partícula se halla en el eje como en otro diámetro dado

cualquiera. Sea AGOF el esferoide atrayente, S su centro y P el cuerpo atraído. Trácese por dicho cuerpo P tanto el semidiámetro SPA como las dos rectas cualesquiera DE, FG, que cortan al esferoide a uno y otro lado en D y E, y F y G; y sean PCM, HLN, las superficies de dos esferoides interiores, semejantes y concéntricas de la exterior, de las cuales la primera pasa por el cuerpo P y corta a las rectas DE y FG en B y C y la segunda corta a las mismas rectas en H, I y K, L. Tengan todos los esferoides el eje común y serán las partes de las rectas interceptadas a uno y otro lado iguales entre sí, DP y BE, FP y CG, DH e IE, FK y LG: por cuanto que las rectas DE, PB y HI son bisecadas en el mismo punto, al igual que las rectas FG, PC y KL. Supóngase ahora que DPF, EPG, designan conos opuestos, descritos por los ángulos verticales infinitamente pequeños DPF, EPG, y que las líneas DH, El, son también infinitamente pequeñas; y las partículas de los conos DHKF y GLIE, separadas por las superficies de los esferoides, serán entre sí, debido a la igualdad de las líneas DH, El, como los cuadrados de sus distancias al cuerpo P, y por ello atraerán igualmente a dicho corpúsculo. Y por la misma razón, si los espacios DPF, EGCB, se dividen en partículas mediante las superficies de innumerables esferoides semejantes, concéntricos y con eje común, todas ellas a ambos lados atraerán igualmente al cuerpo P en sentidos contrarios. Por tanto, las fuerzas del cono DPF y las del segmento cónico EGCB son iguales, y por ser contrarias se destruyen mutuamente. Y lo mismo ocurre con las fuerzas de toda materia exterior al esferoide más interior PCBM. En consecuencia, el cuerpo P es atraído únicamente por el esferoide interior PCBM, y por ello (por el corolario 3 de la proposición LXXII) su atracción es a la fuerza con la que el cuerpo A es atraído por el esferoide total AGOD, como la distancia PS a la distancia AS. Q.E.D.



PROPOSICIÓN XCII. PROBLEMA XLVI

Dado un cuerpo atrayente, hallar la razón del decrecimiento de las fuerzas centrípetas tendentes hacia cada uno de sus puntos.

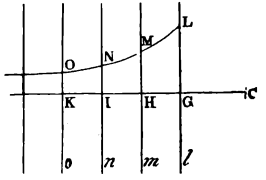
Del cuerpo dado hay que obtener una esfera o un cilindro u otra figura regular cualquiera cuya ley de atracción concuerde con alguna razón de decrecimiento calculable (por las proposiciones LXXX, LXXXI y XCI). Después, mediante experimentos hay que hallar la fuerza de atracción a distintas distancias, y descubierta así la ley de la atracción hacia el todo, permitirá hallar la razón del decrecimiento de las fuerzas de cada parte, que era preciso hallar.

PROPOSICIÓN XCIII. TEOREMA XLVII

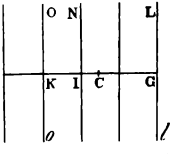
Si un sólido, plano por un lado e infinito por todos los demás, constase de partículas iguales e igualmente atrayentes, cuyas fuerzas al alejarse del sólido decrecen en razón de una potencia de las distancias mayor que el cuadrado de las mismas, y un

corpúsculo situado a una u otra parte del plano es atraído por la fuerza del sólido entero; digo que la tal fuerza atractiva del sólido, al alejarse de su superficie plana, decrece en razón de una potencia cuya base es la distancia del corpúsculo al plano y su índice es 3 unidades menos que el índice de la potencia de las distancias.

CASO 1. Sea LG*l* el plano en que termina el sólido. Extiéndase éste hacia el lado del plano que mira hacia I, y descompóngase en innumerables planos *m*HM, *n*IN, *o*KO, etc., paralelos a GL. Y colóquese primero el cuerpo atraído C fuera del plano. Trácese CGHI perpendicular a esos innumerables planos, y decrezcan las fuerzas atractivas de los puntos del sólido en razón de una potencia de las distancias, cuyo índice *n* no sea menor que 3. Entonces (por el corolario 3 de la proposición XC) la fuerza con la que cualquier plano *m*HM atrae al punto C es inversamente como CH^{n-2}. Sobre el plano *m*HM tómese la longitud HM, inversamente proporcional a CH^{n-2}, y dicha fuerza será como HM. E igualmente para cada plano IGL, *n*IN, *o*KO, etc., tómense longitudes GL, IN, KO, etc., inversamente proporcionales a CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, etc.; y las fuerzas de tales planos serán como las longitudes tomadas, y por lo mismo la suma de las fuerzas como la suma de las longitudes, esto es, la fuerza del sólido entero como el área GLOK prolongada infinitamente hacia OK. Pero dicha área (por el conocido método de las cuadraturas) es inversamente como CG^{n-3} y, por tanto, la fuerza del cuerpo entero es inversamente como CG^{n-3}. Q.E.D.



CASO 2. Ahora colóquese el corpúsculo C al otro lado del plano *l*GL dentro del sólido, y tómese la distancia CK igual a la distancia CG. Y la parte del sólido *l*GL*o*KO, delimitada por los planos paralelos *l*GL, *o*KO, no atraerá hacia ninguna parte al corpúsculo C, al estar situado en el medio, por cuanto que las acciones contrarias de los puntos opuestos se anulan en razón de su igualdad. Por lo cual el corpúsculo C será atraído por la sola fuerza del sólido que se halla más allá del plano OK. Pero esta fuerza (por el caso 1) es inversamente como CK^{n-3}, esto es (por ser iguales CG y CK), inversamente como CG^{n-3}. Q.E.D.



COROLARIO 1. De aquí que si el sólido LGIN estuviese delimitado a cada lado por dos planos paralelos infinitos LG, IN, su fuerza atractiva resulta de restar de la fuerza atractiva de todo el sólido infinito LGKO la fuerza atractiva de la parte posterior NIKO prolongada infinitamente hacia KO.

COROLARIO 2. Si se despreciase la parte posterior de este sólido infinito, porque, al compararla con la atracción de la parte anterior, su atracción es insignificante, la atracción de dicha parte anterior decrecerá, al aumentar las distancias, en una razón muy próxima de la potencia CG^{n-3}.

COROLARIO 3. Y de aquí que, si un cuerpo finito y plano por un lado atrae a un corpúsculo desde la región media de dicho plano y la distancia entre el corpúsculo y el pla-

no fuese muy pequeña comparada con las dimensiones del cuerpo atrayente, y éste constase de partículas homogéneas cuyas fuerzas atractivas decrecen en razón de alguna potencia de las distancias mayor que la cuarta; la fuerza atractiva del cuerpo entero decrecerá muy aproximadamente en razón de una potencia cuya base es aquella distancia muy pequeña y el índice 3 unidades menor que el índice de la potencia anterior. La afirmación no vale para un cuerpo compuesto de partículas cuyas fuerzas atractivas decrezcan en razón del cubo de las distancias; por cuanto que, en tal caso, la atracción de la parte posterior del cuerpo infinito del corolario segundo es siempre infinitamente mayor que la atracción de la parte anterior.

ESCOLIO

Si un cuerpo cualquiera es atraído perpendicularmente hacia un plano dado y, a partir de una ley de atracción dada, se pide el movimiento del cuerpo, el problema se resuelve buscando (por la proposición XXXIX) el movimiento del cuerpo descendiendo en línea recta hacia ese plano, y (por el corolario II de las [*Leyes*]) componiendo dicho movimiento con un movimiento uniforme, realizado según líneas paralelas a dicho plano. Y viceversa, si se busca la ley de atracción hacia un plano según líneas paralelas y con la condición de que el cuerpo atraído se mueva en una línea curva cualquiera dada, el problema se resuelve operando al modo del problema tercero.

Pero las operaciones pueden reducirse descomponiendo las ordenadas en series convergentes. Así, si a una base A se aplica con un ángulo dado la longitud ordenada B, que sea como una potencia cualquiera de la base $A^{\frac{m}{n}}$; y se busca la fuerza con la cual un cuerpo, tanto si es atraído como repelido respecto a la base según la posición de la ordenada, puede moverse en una línea curva a la que siempre toca la ordenada con su extremo superior: supongo que la base aumenta en una parte mínima O, y descompongo la ordenada $(A + O)^{\frac{m}{n}}$ en la serie infinita:

$$A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} OA^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm - nm}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}, \text{ etc.},$$

y supongo que la fuerza es proporcional al término en que O tiene dos dimensiones, esto es, al término $\frac{mm - nm}{2nn} OOA \frac{m - 2n}{n}$. La fuerza buscada es, pues, como $\frac{mm - nm}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$ o, lo que es lo mismo, como $\frac{mm - mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Y si la ordenada es tangente a una parábola, siendo $m = 2$ y $n = 1$ la fuerza será como $2B^{\circ}$ ya dado, y por tanto resultará dada. Por tanto, con una fuerza dada el cuerpo se moverá en una parábola como demostró Galileo. Y si la ordenada es tangente a una hipérbola, siendo $m = 0 - 1$ y $n = 1$, la fuerza será como $2A^{-3}$ o como $2B^{3}$; y, por tanto, con una fuerza que sea como el cubo de la ordenada el cuerpo se moverá en una hipérbola. Pero una vez dadas éstas, paso a otras proposiciones sobre el movimiento que aún no he tocado.

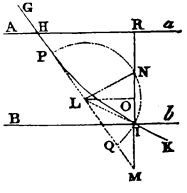
SECCIÓN XIV

SOBRE EL MOVIMIENTO DE CUERPOS MÍNIMOS QUE SON SOMETIDOS A FUERZAS CENTRÍPETAS TENDENTES HACIA CADA PARTE DE OTRO CUERPO MUY GRANDE

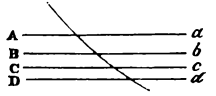
PROPOSICIÓN XCIV. TEOREMA XLVIII

Si dos medios semejantes se hallasen separados entre sí por un espacio delimitado a ambos lados por planos paralelos y un cuerpo al pasar por este espacio es atraído o impelido perpendicularmente hacia uno u otro medio sin ser ni agitado ni impedido por ninguna otra fuerza, y la atracción fuese la misma en todas partes a distancias iguales de uno y otro plano tomadas hacia la misma parte del mismo: digo que el seno de incidencia en uno u otro plano estará respecto al seno de emergencia del otro plano en una razón dada.

CASO 1. Sean A*a* y B*b* dos planos paralelos. Incida el cuerpo sobre el primer plano A*a* según la línea GH, y en todo su recorrido a través del espacio intermedio sea atraído o impelido hacia el medio de incidencia, y sea obligado por esa acción a describir la línea curva HI, y emerja según la línea IK. Elévese IM, perpendicular al plano de emergencia B*b*, y que se encuentre tanto con la prolongación de la línea de incidencia en M como con el plano de incidencia A*a* en R; a su vez la línea de emergencia prolongada encuentre a HM en L. Con centro en L y radio LI trácese un círculo secante de HM en P y en Q, así como de la prolongación de MI en N; y en primer lugar, si la atracción o el impulso se supone uniforme, la curva HI (por las demostraciones de Galileo) será una parábola que tiene la propiedad de que el rectángulo comprendido bajo un «latus rectum» dado y la línea IM es igual a HM^2; pero la línea HM será bisecada en L. De donde si se traza sobre MI la perpendicular LO, resultarán iguales MO y OR; y añadiéndoles las iguales ON, OI, los totales MN, IR, resultarán iguales. Por tanto, al estar dado IR, también está dado MN; y el rectángulo NMI es al rectángulo comprendido bajo el «latus rectum» y IM, esto es, a HM^2, en una razón dada. Pero el rectángulo NMI es igual al rectángulo PMQ, esto es, a la diferencia de los cuadrados ML^2 y PL^2 o LI^2, y HM^2 guarda una razón dada con su cuarta parte ML^2: luego está dada la razón de $ML^2 - LI^2$ respecto a ML^2, y convirtiendo, la razón de LI^2 a ML^2 y la de la raíz cuadrada de LI a ML. Pero en todo triángulo LMI los senos de los ángulos son proporcionales a los lados opuestos. Luego se da la razón del seno del ángulo de incidencia LMR al seno del ángulo de emergencia LIR. Q.E.D.



CASO 2. Pase ahora el cuerpo sucesivamente a través de varios espacios delimitados por planos paralelos A*ab*B, B*bc*C, etc., y sea afectado por una fuerza que es uniforme en cada uno de ellos por separado, pero distinta en cada uno; y por lo que acabamos de demostrar, el seno de incidencia sobre el primer plano A*a* será al seno de

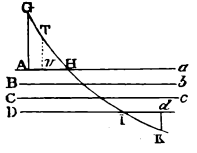


emergencia del segundo plano B*b* en una razón dada; y este seno, que es seno de incidencia en el plano segundo B*b*, será al seno de emergencia del plano tercero C*c* en una razón dada; y este seno al seno de emergencia del cuarto plano D*d* en una razón dada; y así indefinidamente: y, por tanto, el seno de incidencia sobre el primer plano está en una razón dada respecto al seno de emergencia del último plano. Disminúyanse ahora los intervalos entre los planos y auméntese su número hasta el infinito, para que la acción de atracción o impulso que obedezca a cualquier ley asignada se haga continua; y la razón del seno de incidencia sobre el primer plano respecto al seno de emergencia del último plano, al estar siempre dada, también ahora estará dada. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XCV. TEOREMA XLIX

Con los mismos supuestos digo que la velocidad del cuerpo antes de su incidencia es a su velocidad después de la emergencia como el seno de emergencia al seno de incidencia.

Tómense AH, I*d*, iguales y elévense las perpendiculares AG, *d*K, que corten a las líneas de incidencia y emergencia GH, IK en G y K. Sobre GH tómese TH igual a IK, y sobre el plano A*a* caiga la perpendicular T*v*. Y (por el corolario II de las [*Leyes*]) descompóngase el movimiento del cuerpo en dos, uno perpendicular a los planos A*a*, B*b*, C*c*, etc., y el otro paralelo a ellos. La fuerza de atracción o de impulso actuando según las líneas perpendiculares en nada cambia al movimiento según las paralelas, y, por tanto, con ese movimiento el cuerpo recorre en tiempos iguales los intervalos iguales según las paralelas que están entre la línea AG y el punto H, y entre el punto I y la línea *d*K; esto es, en tiempos iguales describe las líneas GH, IK. Por tanto, la velocidad antes de la incidencia es a la velocidad después de la emergencia como GH a IK o TH, esto es, como AH o I*d* a *v*H, esto es (respecto al radio TH OIK), como el seno de emergencia al seno de incidencia. Q.E.D.



PROPOSICIÓN XCVI. TEOREMA L

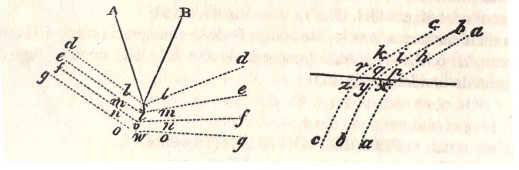
Supuesto lo anterior y que el movimiento antes de la incidencia es más veloz que después: digo que el cuerpo, inclinando la línea de incidencia, acabará por ser reflejado, y el ángulo de reflexión será igual al de incidencia.

Pues imagínese el cuerpo describiendo arcos parabólicos al pasar entre los planos paralelos *Aa*, *Bb*, *Cc*, etc., como antes; y sean tales arcos HP, PQ, QR, etc. Y la oblicuidad de la línea de incidencia GH sea tal respecto al primer plano A*a* que haga que el seno de incidencia sea al radio del círculo del que es seno en la misma razón en que se halla el propio seno de incidencia respecto al seno de emergencia del plano D*d* en el espacio

D*de*E: al ser ahora el seno de emergencia igual al radio, el ángulo de emergencia será recto y, por tanto, la línea de emergencia coincidirá con el plano D*d*. Alcance el cuerpo a este plano en el punto R; y puesto que la línea de emergencia coincide con dicho plano, es evidente que el cuerpo no puede pasar más allá hacia el plano E*e*. Pero tampoco puede proseguir por la línea de emergencia R*d*, ya que es atraído o impelido continuamente hacia el medio de incidencia. Regresará, por tanto, entre los planos C*c*, D*d*, describiendo el arco de parábola QR*q*, cuyo vértice principal (como demostró Galileo) está en R; cortará al plano C*c* con el mismo ángulo en *q* que antes en Q; después, continuando por los arcos parabólicos *qp*, *ph*, etc., semejantes e iguales a los primeros QP, PH, cortará a los demás planos con los mismos ángulos en p, *h*, etc., que antes en P, H, etc., y por fin emergerá en *h* con la misma oblicuidad con que incidió en H. Imagínese ahora que los intervalos de los planos A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, etc., se reducen y su número aumenta infinitamente, de modo que la atracción o impulso aplicados según una ley cualquiera determinada resulten continuos; y al permanecer siempre iguales el ángulo de emergencia y el ángulo de incidencia, también aquí lo seguirán siendo. Q.E.D.

ESCOLIO

Las reflexiones y refracciones de la luz no difieren mucho de estas atracciones, al efectuarse aquéllas según una razón dada de las secantes, como descubrió Snell, y, por consiguiente, según una razón dada de los senos, como explicó Descartes. Pues consta por los fenómenos de los satélites de Júpiter, confirmados por observaciones de diferentes astrónomos, que la luz se propaga sucesivamente y viene del Sol a la Tierra en un espacio de siete u ocho minutos. Y los rayos existentes en el aire (como recientemente descubrió Grimaldi al introducir luz en un cuarto oscuro a través de un orificio, y yo mismo he experimentado) al pasar junto a ángulos de cuerpos opacos o transparentes (tales como los bor-



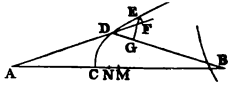
des rectangulares de los círculos de monedas de oro, plata o bronce, y de los filos de cuchillos o de láminas de piedra o de vidrios rotos) se curvan hacia los cuerpos, como si fueran atraídos por ellos; y de esos rayos, los que pasan más cerca de los cuerpos, al pasar se curvan más, como si fueran más atraídos, como yo mismo he observado con todo cuidado. Y los que pasan a distancias mayores se curvan menos; y a distancias aún mayores, se curvan un tanto hacia el lado contrario, y forman tres haces de colores. En la figura sea s el corte de un cuchillo o cuña cualquiera A*s*B; y *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld*, son rayos curvados hacia el cuchillo con arcos *owo*, *nun*, *mtm*, *lsl*, y esto más o menos según su distancia al cuchillo. Pero como dicha curvatura de los rayos ocurra en el aire fuera del cuchillo, de-

berán también los rayos incidentes en el cuchillo curvarse en el aire antes de alcanzar el cuchillo. Y lo mismo ocurre para los que inciden en un cristal. Por tanto, la refracción no ocurre en el punto de incidencia, sino paulatinamente por incurvación continua de los rayos, parte de la cual ocurre en el aire antes de alcanzar el cristal y parte en el cristal (si no me equivoco) después de haber penetrado en él: como aparece diseñado en los rayos *ckzc*, *biyb*, *ahxa*, incidiendo sobre *r*, *q*, *p*, etc., curvados entre *k* y z, *i* e y, *h* y *x*. Por consiguiente, dada la analogía existente entre la propagación de los rayos de luz y el movimiento de los cuerpos, parece oportuno añadir las proposiciones siguientes para usos ópticos, sin discutir cosa alguna sobre la naturaleza de los rayos (si son cuerpos o no) determinando tan sólo las trayectorias de cuerpos muy semejantes a las trayectorias de los rayos.

PROPOSICIÓN XCVII. PROBLEMA XLVII

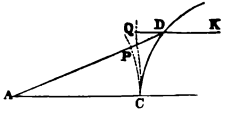
Supuesto que el seno de incidencia sobre una superficie cualquiera esté respecto al seno de emergencia en una razón dada, y que la incurvación de la trayectoria de los cuerpos junto a dicha superficie ocurra en un espacio muy breve, que puede considerarse un punto; determinar la superficie que haga converger a todos los corpúsculos procedentes de un lugar dado sobre otro lugar dado.

Sea A el lugar desde el cual los corpúsculos divergen; B el lugar sobre el cual deben converger; CDE la línea curva que, al girar sobre el eje AB, describa la superficie buscada; D, E, dos puntos cualesquiera de esa curva; y EF, EG, perpendiculares que descienden sobre las trayectorias del cuerpo AD, DB. Aproxímese el punto D al punto E; y la razón última de la línea DF, con la que se incrementa AD, a la línea DG, con la que DB disminuye, será la misma que la del seno de incidencia al seno de emergencia. Luego está dada la razón del incremento de la línea AD a la disminución de la línea DB; y, por tanto, si sobre el eje AB se toma un punto cualquiera C, por el cual deba pasar la curva CDE, y se toma para AC el incremento CM, que esté respecto al decremento CN de la línea BC en la razón dada, y con centros en A, B, e intervalos AM, BN, se trazan dos círculos mutuamente secantes en D; dicho punto D será tangente a la curva buscada CDE y manteniéndose tangente a ella continuamente la determinará. Q.E.I.



COROLARIO 1. Haciendo que los puntos A o B ya se alejen al infinito, ya se acerquen hacia el punto C, se tendrán todas las figuras que Descartes expuso en la *Óptica* y en la *Geometría* sobre las refracciones. Me ha parecido oportuno explicar en esta proposición, ya que Descartes se lo reservó, la manera de hallarlas.

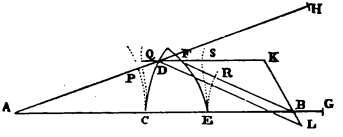
COROLARIO 2. Si un cuerpo incide sobre una superficie cualquiera CD, según la dirección AD, y la superficie obedece a una ley cualquiera, y el cuerpo emerge según otra recta cualquiera DK y por el punto C se imaginan trazadas dos curvas CP, CQ, siempre perpendiculares a AD y a DK: los incrementos de las líneas PD, QD y, por tanto, las propias líneas PD, QD, resultantes de esos incrementos, serán entre sí como los senos de incidencia y emergencia respectivamente, y viceversa.



PROPOSICIÓN XCVIII. PROBLEMA XLVIII

Con los mismos supuestos, y trazando en torno al eje AB, una superficie atractiva CD cualquiera, sea regular o irregular, a cuyo través deben pasar los cuerpos procedentes de un lugar dado A: hallar una segunda superficie atractiva EF que haga converger a dichos cuerpos en otro lugar dado B.

Trazada la línea AB corte a la primera superficie en C y a la segunda en E, y fíjese D en un punto cualquiera. Supuesto que el seno de incidencia sobre la primera superficie respecto al seno de emergencia de la misma, y el seno de emergencia de la segunda al seno de incidencia sobre la misma, sea como una cantidad dada M a otra cantidad dada N: prolónguese entonces tanto AB hasta G de modo que BG sea a CE como M – N a N, como AD hasta H de modo que AH sea igual a AG, así como también DF hasta K, de modo que DK sea a DH como N es a M. Únase KB, y con centro en D y distancia DH descríbase un círculo que encuentre en L a KB prolongada, y trácese BF paralela a DL: y el punto F toca a la línea EF que al girar sobre el eje AB describe la superficie buscada. Q.E.F.



Pues imagínese que las líneas CP y CQ respecto a AD y a DF, y las líneas ER y ES respecto a FB y a FD son siempre perpendiculares, y por ello QS es siempre igual a CE; y (por el corolario 2 de la proposición XCVII) PD será a QD como M a N y, por tanto, como DL a DK o FB a FK; y por partes, como DL – FB o PH – PD – FB a FD o FQ – QD; y componiendo, como PH – FB a FQ, esto es (por ser iguales PH y CG, QS y CE), como CE + BG – FR a CE – FS. Y (por ser proporcionales BG a CE y M – N a N) también ocurre que CE + BG es a CE como M a N; y separando también FR es a FS como M a N; y por ello (por el corolario 2 de la proposición XCVII) la superficie EF obliga al cuerpo incidente sobre ella según la línea DF a proseguir según la línea FR hasta el lugar B. Q.E.D.

ESCOLIO

Con el mismo método podríamos proseguir hasta tres o más superficies. Pero para usos ópticos es la esférica la figura más adecuada. Si los objetivos de los telescopios estuviesen construidos con dos cristales esféricos que encerrasen agua entre ellos, pudiera ser que los errores de refracción que ocurren en los extremos de los cristales, pudieran corregirse con bastante exactitud mediante las refracciones del agua. Semejantes objetivos deben preferirse a los cristales elípticos e hiperbólicos, no sólo por ser más fáciles de construir con precisión, sino también porque refractan más exactamente los haces de rayos situados fuera del eje del cristal. No obstante, la diversa refrangibilidad de los distintos rayos es el verdadero obstáculo con el que tropieza la óptica para perfeccionarse, tanto con formas esféricas como con otras. A no ser que se corrijan los errores que de ahí proceden, el esfuerzo por corregir los demás no tendrá éxito.

LIBRO SEGUNDO
SOBRE EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS

SECCIÓN I

DEL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS A LOS QUE SE RESISTE EN RAZÓN DE LA VELOCIDAD

PROPOSICIÓN I. TEOREMA I

La pérdida de movimiento, debida a la resistencia, de un cuerpo al que se resiste en razón de la velocidad es como el espacio recorrido en el movimiento.

Puesto que como el movimiento perdido en cada partícula igual de tiempo es como la velocidad, esto es, como la partícula de espacio recorrido: componiendo, el movimiento perdido en el tiempo total será como el espacio total recorrido. Q.E.D.

COROLARIO. Por tanto, si un cuerpo desprovisto de toda gravedad se mueve en los espacios libres con la sola fuerza ínsita en él; y se dan tanto el movimiento total inicial como el movimiento restante tras recorrer algún espacio, quedará dado también el espacio total que puede recorrer el cuerpo en un tiempo infinito. Pues tal espacio será al espacio recorrido ya como el movimiento total inicial a la parte perdida de dicho movimiento.

LEMA I

Las cantidades proporcionales a sus diferencias son continuamente proporcionales.

Sea A : A – B, como B : B – C, como C : C – D, etc.; y, al convertir, A será a B como B a C, como C a D, etc. Q.E.D.

PROPOSICIÓN II. TEOREMA II

Si se resiste a un cuerpo en razón de la velocidad y se mueve en un medio homogéneo con su sola fuerza inercial y se toman tiempos iguales, las velocidades en los momentos iniciales de cada tiempo están en progresión geométrica, y los espacios recorridos en cada tiempo son como las velocidades.

CASO 1. Divídase el tiempo en partículas iguales; y si en los comienzos de cada una de esas partículas actúa la resistencia con un único impulso que es como la velocidad: el decremento de la velocidad en cada partícula de tiempo será como la velocidad. Luego las velocidades son proporcionales a sus diferencias, y (por el lema I del libro segundo) por ello continuamente proporcionales. Por consiguiente, si con un número igual de partículas se componen cualesquiera tiempos iguales, las velocidades en los comienzos de esos tiempos serán como los términos de una progresión continua, tomados salteadamente, siempre que en cada salto se omitan igual número de términos intermedios. Pero las razones de tales términos se componen de las razones mutuas mismas de los términos intermedios repetidas igualmente y, por tanto, también dichas razones compuestas son iguales entre sí. Por lo cual, las velocidades proporcionales a dichos términos están en progresión geométrica. Disminúyanse ahora aquellas partículas iguales de tiempo y auméntese su número hasta el infinito de modo que el impulso de la resistencia resulte continuo; y las velocidades al principio de tiempos iguales, siempre continuamente proporcionales, serán también en este caso continuamente proporcionales. Q.E.D.

CASO 2. Y, por partes, las diferencias de velocidades, esto es, las partes de las mismas perdidas en cada tiempo, son como los todos; ya que los espacios recorridos en cada tiempo son como las partes perdidas de las velocidades (por la proposición I del libro segundo) y, por tanto, también como los todos. Q.E.D.

COROLARIO. De aquí que si se traza una hipérbola BG con las asíntotas rectangulares AC, CH y AB, DG son perpendiculares a la asíntota AC, y se representa tanto la velocidad del cuerpo como la resistencia del medio, al comienzo del movimiento, mediante una línea dada AC, y un tiempo transcurrido cualquiera mediante la línea indefinida DC: el tiempo puede representarse por el área ABGD y el espacio recorrido en dicho tiempo por la línea AD. Pues si dicha área se aumenta por el movimiento del punto D uniformemente con el tiempo, la recta DC decrecerá en razón geométrica al modo de la velocidad, mientras las partes de la recta AC, descritas en tiempos iguales decrecerán en la misma razón.

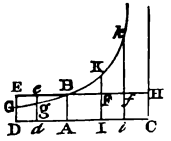
PROPOSICIÓN III. PROBLEMA I

Definir el movimiento de un cuerpo al cual, mientras asciende o desciende en línea recta en un medio homogéneo, se resiste en razón de la velocidad y es urgido por una gravedad uniforme.

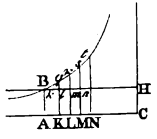
Para el cuerpo ascendente, represéntese la gravedad por un rectángulo cualquiera dado BACH, y la resistencia del medio al comienzo del ascenso por el rectángulo BADE to-

mado al lado contrario de la recta AB. Con las asíntotas rectangulares AC, CH, trácese por el punto B una hipérbola que corte a las perpendiculares DE, *de*, en G, *g*; y el cuerpo al ascender en el tiempo DG*gd* recorrerá el espacio EG*ge*, y en el tiempo DGBA el espacio de todo el ascenso EGB; en el tiempo ABKI el espacio de descenso BFK y en el tiempo IK*ki* el espacio de descenso KF *fk*; y las velocidades del cuerpo (proporcionales a la resistencia del medio) en esos períodos de tiempo serán ABED, AB*ed*, nula, ABFI, AB*fi*, respectivamente; y la velocidad máxima que puede adquirir el cuerpo al descender será BACH.

Pues descompóngase el rectángulo BACH en innumerables rectángulos, A*k*, K*l*, L*m*, M*n*, etc., que sean como los incrementos de las velocidades producidos en los correspondientes tiempos iguales; y entonces, cero, A*k*, A*l*, A*m*, A*n*, etc., serán como las velocidades totales y, por tanto (por hipótesis), como las resistencias del medio al principio de cada tiempo igual. Hágase AC a AK o ABHC a AB*k*K como la fuerza de la gravedad a la resistencia al comienzo del segundo tiempo, y réstese de la fuerza de gravedad las de las resistencias, y ABHC, K*k*HC, L*l*HC, M*m*HC, etc., seguirán siendo como las fuerzas absolutas con las cuales el cuerpo es urgido al comienzo de cada uno de los tiempos, y, por tanto (por la ley II del movimiento), como los incrementos de las velocidades, esto es, como los rectángulos A*k*, K*l*, L*m*, M*n*, etc., y por ello (por el lema I del libro segundo) en progresión geométrica. Por lo cual, si las rectas K*k*, L*l*, M*m*, N*n*, etc., al prolongarse cortan a la hipérbola en *q*, *r*, *s*, *t*, etc., las áreas AB*q*K, K*qr*L, L*rs*M,



M*st*N, etc., serán iguales y, por tanto, análogas a tiempos y fuerzas gravitatorias iguales. Pero el área AB*q*K (por el corolario 3 del lema VII, y el lema VIII del libro primero) es al área B*kq* como K*q* a $\frac{1}{2}$ *kq o* como AC a $\frac{1}{2}$ AK, esto es, como la fuerza de la gravedad a la resistencia en la mitad del tiempo primero. Y por un argumento similar las áreas *q*KL*r*, *r*LM*s*, *s*MN*t*, etc., son a las áreas *qklr*, *rlms*, *smnt*, etc., como las fuerzas de gravedad a las resistencias en la mitad de los tiempos segundo, tercero, cuarto, etc. Por lo tanto, puesto que las áreas iguales BAK*q*, *q*KL*r*, *r*LM*s*, *s*MN*t*, etc., son análogas a las fuerzas de gravedad, las áreas B*kq*, *qklr*, *rims*, *smnt*, etc., serán análogas a las resistencias en la mitad de cada tiempo, esto es (por hipótesis), a las velocidades y, por ello, análogas a los espacios recorridos. Tómense las sumas de las cantidades análogas y las áreas B*kq*, B*lr*, B*ms*, B*nt*, etc., serán análogas a los espacios totales recorridos; lo mismo que las áreas AB*q*K, AB*r*L, AB*s*M, AB*r*N, etc., a los tiempos. Por tanto, un cuerpo mientras desciende describe en un tiempo cualquiera AB*r*L el espacio B*lr*, y en un tiempo L*rt*N un espacio *rlnt*. Q.E.D. Semejante es la demostración para un movimiento ascendente. Q.E.D.



COROLARIO 1. Por tanto, la mayor velocidad que puede adquirir un cuerpo al caer es a la velocidad adquirida en un tiempo dado como la fuerza dada de la gravedad por la que es urgido continuamente es a la fuerza de resistencia que se le opone al final de dicho tiempo.

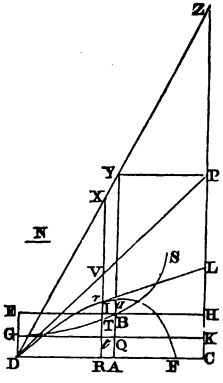
COROLARIO 2. Y si el tiempo aumenta en progresión aritmética, la suma de dicha velocidad máxima y de la velocidad en ascenso, así como su diferencia en descenso, decrece en progresión geométrica.

COROLARIO 3. Y también las diferencias de los espacios recorridos en iguales diferencias de tiempos decrecen en la misma progresión geométrica.

COROLARIO 4. El espacio recorrido por el cuerpo es la diferencia de dos espacios, uno de los cuales es como el tiempo tomado desde el inicio de la caída, y el otro, como la velocidad, los cuales, por cierto, son iguales entre sí al inicio del descenso.

PROPOSICIÓN IV. PROBLEMA II

Supuesto que la fuerza de la gravedad sea uniforme en un medio homogéneo cualquiera y que tienda perpendicularmente hacia el plano horizontal; definir en dicho medio el movimiento de un proyectil que sufre una resistencia proporcional a la velocidad.



Parta un proyectil desde un lugar cualquiera D según una recta cualquiera DP, y represente la longitud DP su velocidad al comienzo del movimiento. Desde el punto P sobre la horizontal DC descienda la perpendicular PC, y córtese DC en A de modo que DA sea a AC como la resistencia del medio originada al comienzo del movimiento hacia arriba es a la fuerza de la gravedad; o (lo que es lo mismo) de modo que el rectángulo comprendido entre DA y DP sea al rectángulo entre AC y CP como la resistencia total al comienzo del movimiento es a la fuerza de la gravedad. Con asíntotas DC, CP; trácese una hipérbola GTBS secante de las perpendiculares DG, AB, en G y B; y complétese el paralelogramo DGKC, cuyo lado GK corte a AB en Q. Tómese una línea N que esté en razón a QB como DC a CP; y desde un punto cualquiera R de la recta DC elévese la perpendicular RT, que encuentre a la hipérbola en T y a las rectas EH, GK, DP, en I, *t* y V; sobre esta perpendicular tómese V*r* igual a $\frac{t\text{GH}}{\text{N}}$ o, lo que es lo mismo, tómese R*r* igual a $\frac{\text{GTIE}}{\text{N}}$; y el proyectil, en el tiempo DRTG alcanzará el punto *r* describiendo la curva D*ra*F, que siempre toca el punto *r*, alcanzando la altura máxima a en la perpendicular AB, y aproximándose después siempre a la asíntota PC. Y su velocidad en un punto cualquiera *r* es como la tangente de la curva *rl*. Q.E.I.

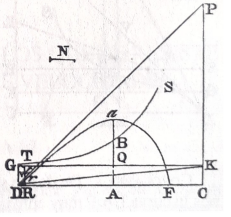
Pues N es a QB como DC a CP o DR a RV, y por tanto RV es igual a $\frac{\text{DR} \times \text{QB}}{\text{N}}$, y R*r* $\left(\text{esto es, RV} - \text{V}r \text{ o } \frac{\text{DR} \times \text{QB} - t\text{GT}}{\text{N}}\right)$ es igual a $\frac{\text{DR} \times \text{AB} - \text{RDGT}}{\text{N}}$. Ahora represéntese el tiempo mediante el área RDGT y (por el corolario II de las [*Leyes*]) descom-

póngase el movimiento del cuerpo en dos, uno de ascenso y otro hacia el lado. Y puesto que la resistencia es como el movimiento, descompóngase ésta también en dos partes contrarias y proporcionales a las dos partes del movimiento: y por ello, la longitud descrita por el movimiento hacia el lado será (por la proposición II de este libro) como el área DR × AB – RDGT, esto es, como la línea R*r*. Pero al comienzo mismo del movimiento el área RDGT es igual al rectángulo DR × AQ, y por tanto dicha línea R*r* $\left(\text{o } \frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}\right)$ es entonces a DR como AB – AQ o QB a N, esto es, como CP a DC; y, por ende, como el movimiento hacia arriba al movimiento hacia el lado al inicio. Puesto que R*r* es siempre como la altura y DR siempre como la longitud, y R*r* a DR al comienzo como la altura a la longitud: se sigue necesariamente que R*r* sea siempre a DR como la altura a la longitud y, por lo tanto, que el cuerpo se mueva en la línea D*ra*F, a la cual toca siempre el punto *r*. Q.E.D.

COROLARIO 1. Por tanto, R*r* es igual a $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$; y por ello, si se prolonga RT hasta X de modo que RX sea igual a $\frac{DR \times AB}{N}$; esto es, si se completa el paralelogramo ACPY, se une DY cortando a CP en Z, y se prolonga RT hasta que toque a DY en X; X*r* será igual a $\frac{RDGT}{N}$, y por lo mismo proporcional al tiempo.

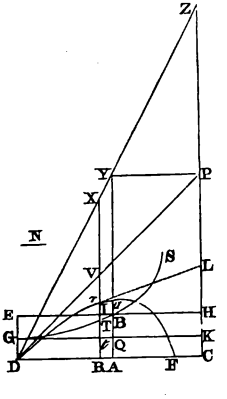
COROLARIO 2. De donde, si se toman innumerables CR o, lo que es lo mismo, innumerables ZX, en progresión geométrica; habrá otras tantas X*r* en progresión aritmética. Y de aquí que la curva D*ra*F se pueda delinear fácilmente por la tabla de logaritmos.

COROLARIO 3. Si se construye una parábola con vértice en D, con diámetro DC prolongado hacia abajo y con un «latus rectum» que sea a 2DP como la resistencia total en el mismo comienzo del movimiento a la fuerza de la gravedad: la velocidad con la que un cuerpo debe partir desde el punto D según la recta DP, para que describa en un medio uniformemente resistente la curva D*ra*F, será la misma que aquella con la que debe partir desde el mismo punto D y según la misma línea DP, para describir la parábola en un espacio sin resistencia. Pues el «latus rectum» de esta parábola en el momento inicial del movimiento es $\frac{DV^2}{Vr}$; y V*r* es $\frac{tGT}{N}$ o también $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Pero si se trazase una recta que fuese tangente a la hipérbola GTS en G, sería paralela a DK y, por tanto, T*t* es $\frac{CK \times DR}{DC}$, y N era $\frac{QB \times DC}{CP}$. Y, por tanto, V*r* es $\frac{DR^2 \times CK \times CP}{2DC^2 \times QB}$, esto es (por ser proporcionales DR y DC, DV y DP), $\frac{DV^2 \times CK \times CP}{2DP^2 \times QB}$, y el «latus rectum»



$\frac{DV^2}{Vr}$ resulta ser $\frac{2DP^2 \times QB}{CK \times CP}$, esto es (por ser proporcionales QB y CK, DA y AC), $\frac{2DP^2 \times DA}{AC \times CP}$ y, por lo tanto, es a 2DP como DP × DA a CP × AC; esto es, como la resistencia a la gravedad. Q.E.D.

COROLARIO 4. De aquí que si se lanza un cuerpo desde un punto D con una velocidad dada, según una recta de posición dada DP, y se da la resistencia del medio al comienzo mismo del movimiento: puede hallarse la curva D*ra*F que describirá dicho cuerpo. Pues, como es sabido, al dar la velocidad se da también el «latus rectum» de la parábola. Y tomando 2DP a dicho «latus rectum» como la fuerza de la gravedad a la de resistencia, DP está dado. Cortando entonces DC en A de modo que CP × AC esté respecto a DP × DA en la susodicha razón de la gravedad a la resistencia, se tendrá dado el punto A. Y con ello está dada la curva D*ra*F.

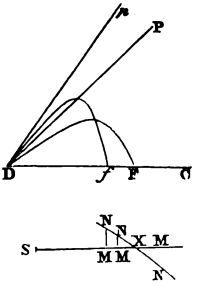


COROLARIO 5. Y, al contrario, si la curva D*ra*F está dada, también estarán dadas la velocidad del cuerpo y la resistencia del medio en cada lugar *r*. Puesto que por estar dada la razón CP × AC a DP × DA, viene dada también tanto la resistencia del medio al comienzo del movimiento como el «latus rectum» de la parábola: y con ello también se da la velocidad al comienzo del movimiento. Y después, a partir de la longitud de la tangente *r*L, viene dada tanto la velocidad proporcional a ella como la resistencia proporcional a la velocidad en un punto cualquiera *r*.

COROLARIO 6. Pero como la longitud 2DP es al «latus rectum» de la parábola como la gravedad a la resistencia en D, y al aumentar la velocidad aumenta en la misma razón la resistencia, mientras el «latus rectum» de la parábola aumenta en el cuadrado de dicha razón: es evidente que la longitud 2DP aumenta en dicha razón simple y, por lo tanto, siempre resulta proporcional a la velocidad, y tampoco aumenta o disminuye al cambiar el ángulo CDP, a no ser que también se cambie la velocidad.

COROLARIO 7. De donde se tiene el método para determinar a partir de los fenómenos la curva D*ra*F muy aproximadamente, y después hallar la resistencia y la velocidad con la que es proyectado el cuerpo. Láncense dos cuerpos semejantes e iguales con la misma velocidad desde el punto D, según los ángulos distintos CDP, CD*p*, y sean conocidos los puntos F, *f*, donde inciden en el plano horizontal DC. Entonces, supuesta una longitud cualquiera para DP o D*p*, imagínese que la resistencia en D sea a la gravedad en una razón cualquiera, y represéntese dicha razón por una longitud cualquiera SM. Después, por cálculo, hállense a partir de la longitud supuesta DP las longitudes DF y D*f*; y de la razón $\frac{Qf}{DF}$ hallada por cálculo réstese la misma razón hallada experimentalmente, y represéntese la diferencia mediante la perpendicular MN. Hágase lo mismo por segunda y tercera vez, imponiendo siempre una nueva razón SM de la resistencia a la grave-

dad, y obteniendo una nueva diferencia MN. Trácense las diferencias positivas hacia un lado de la recta SM y las negativas hacia el otro, y por los puntos N, N, N, trácese la curva regular NNN que corte a la recta SMMM en X, y SX será la verdadera razón de la resistencia a la gravedad que se trataba de hallar. La longitud DF hay que obtenerla por cálculo a partir de esta razón; y una longitud, que sea a la longitud supuesta DP como la longitud DF conocida experimentalmente es a la longitud DF así hallada, será la verdadera longitud DP. Hallada ésta se tiene tanto la curva *DraF* descrita por el cuerpo como la velocidad del cuerpo y la resistencia en cada lugar.



ESCOLIO

Por lo demás, que la resistencia de los cuerpos esté en razón de la velocidad es más una hipótesis matemática que natural. En medios libres de toda rigidez, las resistencias de los cuerpos están en razón cuadrada de la velocidad. Pues con la acción de un cuerpo más veloz se comunica a la misma cantidad de un medio, en menor tiempo, mayor movimiento en razón de la mayor velocidad; y en tiempo igual, al ser mayor la cantidad de medio perturbada, se comunica un movimiento mayor en razón cuadrada; ya que la resistencia (por las leyes II y III) es como el movimiento comunicado. Veamos, pues, qué movimientos se siguen de esta ley de resistencia.

SECCIÓN II

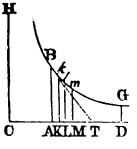
DEL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS A LOS QUE SE RESISTE EN RAZÓN DEL CUADRADO DE LAS VELOCIDADES

PROPOSICIÓN V. TEOREMA III

Si se resiste a un cuerpo en razón del cuadrado de la velocidad, y el mismo se mueve sólo por la fuerza ínsita a través de un medio homogéneo; y los tiempos se toman en progresión geométrica que va desde los términos menores a los mayores: digo que las velocidades al comienzo de cada tiempo son como el inverso de dicha progresión; y que los espacios descritos en cada uno de los tiempos son iguales.

Pues al ser la resistencia del medio proporcional al cuadrado de la velocidad y el decremento de la velocidad proporcional a la resistencia, si se divide el tiempo en innumerables partículas iguales, los cuadrados de las velocidades al comienzo de cada tiempo serán proporcionales a las diferencias de las mismas velocidades. Tómense dichas partículas de tiempo AK, KL, LM, etc., sobre la recta CD, y elévense las perpen-

diculares AB, K*k*, L*l*, M*m*, hasta que encuentren a la hipérbola B*klm*G, descrita con centro en C y las asíntotas rectangulares CD, CH, en los puntos B, *k*, *l*, *m*, etc., y AB será a K*k* como CK a CA, y por partes AB – K*k* a K*k* como K*k* a CA y, en consecuencia, como AB × K*k* a AB × CA. Por lo cual, como están dados AK y AB × CA, AB – K*k* será como AB × K*k*; y por fin, cuando AB y K*k* coinciden, como AB^2. Y por un argumento similar, K*k* – L*l*, L*l* – M*m*, etc., serán como Kk^2 Ll^2, etc. Por tanto, los cuadrados de las líneas AB, K*k*, L*l*, M*m*, etc., son como sus diferencias y, por eso, al ser también los cuadrados de las velocidades como las diferencias de las mismas, la progresión de ambas será semejante. Demostrado esto, también se sigue que las áreas descritas con estas líneas están en progresión igual que los espacios descritos por las velocidades. Luego si la velocidad al inicio del primer tiempo AK se representa por la línea AB, y la velocidad al inicio del segundo KL se representa por la línea K*k*, y la longitud descrita en el primero por el área AK*k*B; todas las velocidades subsiguientes serán representadas por las líneas siguientes L*l*, M*m*, etc., y las longitudes descritas por las áreas K*l*, L*m*, etc. Y componiendo, si el tiempo total se representa por la suma de sus partes AM, la longitud total descrita se representa por la suma de sus partes AM*m*B. Imagínese ahora que el tiempo AM se divide en partes AK, KL, LM, etc., de tal modo que CA, CK, CL, CM, etc., estén en progresión geométrica; aquellas partes también estarán en la misma progresión, lo mismo que las velocidades AB, K*k*, L*l*, M*m*, etc., estarán en dicha progresión inversa, y los espacios descritos A*k*, K*l*, L*m*, etc., serán iguales. Q.E.D.



COROLARIO 1. Por tanto, es evidente que si se representa el tiempo por una parte cualquiera AD de la asíntota, y la velocidad al inicio del tiempo por la ordenada AB, la velocidad al fin del tiempo se representará por la ordenada DG, y el espacio total descrito por el área hiperbólica adyacente ABDG; lo mismo que el espacio que puede recorrer un cuerpo en el tiempo AD con la primera velocidad AB en un medio no resistente, mediante el rectángulo AB × AD.

COROLARIO 2. De donde, el espacio recorrido en un medio resistente viene dado si se lo toma respecto al espacio que puede recorrerse con velocidad uniforme AB en el mismo tiempo y en medio no resistente, en la proporción del área hiperbólica ABGD al rectángulo AB × AD.

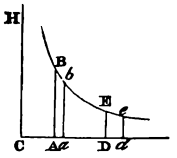
COROLARIO 3. También está dada la resistencia del medio estableciéndola, al comienzo mismo del movimiento, igual a una fuerza centrípeta uniforme, la cual pudiese generar en un cuerpo en descenso a través de un medio no resistente la velocidad AB en el tiempo AC. Pues si se traza BT tangente a la hipérbola en B y encuentra a la asíntota en T, la recta AT será igual a la propia AC, y representará al tiempo, en el cual la resistencia inicial continuada uniformemente anularía a toda la velocidad AB.

COROLARIO 4. Y de aquí que también esté dada la proporción de esta resistencia respecto a la gravedad o a otra cualquiera fuerza centrípeta dada.

COROLARIO 5. Y viceversa, si se da la proporción de la resistencia a una fuerza centrípeta dada; viene dado el tiempo AC en el que la fuerza centrípeta igual a la resistencia puede generar una velocidad AB cualquiera: y de aquí viene dado el punto B por el cual debe pasar la hipérbola con asíntotas CH, CD; al igual que el espacio ABGD que puede recorrer un cuerpo que inicia su movimiento con la susodicha velocidad AB, en un tiempo cualquiera AD y en un medio homogéneo resistente.

PROPOSICIÓN VI. TEOREMA IV

Los cuerpos esféricos homogéneos e iguales a los que se oponen resistencias como el cuadrado de las velocidades y que se mueven por su sola fuerza ínsita describen espacios iguales siempre en tiempos que sean inversamente como las velocidades iniciales, y pierden partes de las velocidades proporcionales a los todos.



Con asíntotas rectangulares CD, CH, trácese una hipérbola cualquiera B*b* E*e* que corte a las perpendiculares AB, *ab*, DE, *de*, en B, *b*, E, *e*, y representen las velocidades iniciales las perpendiculares AB, DE, etc., y los tiempos las líneas A*a*, D*d*. Pero (por hipótesis) DE es a AB como A*a* es a D*d*, y también (por la naturaleza de la hipérbola) como CA a DC; y por composición, como C*a* a C*d*. Luego las áreas AB*ba*, DE*ed*, esto es, los espacios descritos son iguales entre sí, y las velocidades iniciales AB, DE, son proporcionales a las últimas *ab*, *de*, y por ello, por división, también proporcionales a sus partes perdidas AB – *ab*, DE – *de*. Q.E.D.

PROPOSICIÓN VII. TEOREMA V

Los cuerpos esféricos a los que se resiste en razón cuadrada de la velocidad en tiempos que son directamente como los movimientos iniciales e inversamente como las resistencias iniciales, perderán partes de sus movimientos proporcionales a los todos, y describirán espacios proporcionales al producto de esos tiempos por las velocidades iniciales.

Puesto que las partes perdidas de los movimientos son como el producto de la resistencia y los tiempos. Por tanto, al ser dichas partes proporcionales a los todos, el producto de la resistencia y el tiempo deberá ser como el movimiento. Por lo cual, el tiempo será directamente como el movimiento e inversamente como la resistencia. Por lo tanto, tomadas las partículas de tiempo según dicha razón, los cuerpos perderán siempre partículas de movimiento proporcionales a los todos, y por lo mismo, retendrán velocidades siempre proporcionales a sus velocidades iniciales. Y, por la razón de velocidades dada, siempre describirán espacios que son como las velocidades iniciales multiplicadas por los tiempos. Q.E.D.

COROLARIO 1. Por tanto, si a cuerpos igualmente veloces se los resiste en razón del cuadrado de los diámetros: los globos homogéneos que se mueven con cualquier velocidad, al describir espacios proporcionales a sus diámetros, perderán partes del movimiento proporcionales a los todos. Pues el movimiento de un globo cualquiera será como el producto de su velocidad y masa, esto es, como el producto de la velocidad y el cubo del diámetro; la resistencia (por hipótesis) será como el producto del cuadrado del diámetro y el cuadrado de la velocidad; y el tiempo (por esta proposición) estará en razón directa de la primera razón y en razón inversa de la segunda, esto es, directamente del diámetro e inversamente de la velocidad; y por ello el espacio, proporcional al tiempo y a la velocidad, es como el diámetro.

COROLARIO 2. Si a cuerpos igualmente veloces se los resiste en razón de la potencia 3/2 del diámetro: los globos homogéneos que se muevan a cualquier velocidad, al describir espacios en razón de la potencia 3/2 de los diámetros, perderán partes de movimiento proporcionales a los todos.

COROLARIO 3. Y en general, si a cuerpos igualmente veloces se los resiste en razón de una potencia cualquiera del diámetro: los espacios en los cuales los globos homogéneos, al moverse con una velocidad cualquiera, perderán partes de movimiento proporcionales a los todos, serán como los cubos de los diámetros aplicados a dicha potencia. Sean dichos diámetros D y E; y si las resistencias, cuando se suponen las velocidades iguales, son D^n y E^n, los espacios en los cuales los globos, al moverse con cualquier velocidad, perderán partes de movimiento proporcionales a los todos serán como D^{3-n} y E^{3-n}. Y, por lo tanto, los globos homogéneos que describan espacios proporcionales a dichos D^{3-n} y E^{3-n} retendrán velocidades en la misma mutua proporción que al principio.

COROLARIO 4. Pero si los globos no fuesen homogéneos, el espacio descrito por el globo más denso debe aumentarse en razón de la densidad. Pues el movimiento, a igual velocidad, es mayor en razón de la densidad, y el tiempo (por esta proposición) aumenta en razón directa del movimiento, y el espacio recorrido en razón del tiempo.

COROLARIO 5. Y si los globos se mueven en distintos medios, el espacio, si el medio es más resistente, «caeteris paribus», habrá de disminuirse en razón de la resistencia. Pues el tiempo (por esta proposición) disminuirá en razón del aumento de la resistencia, y el espacio en razón del tiempo.

LEMA II

El momento de una generada es igual a los momentos de cada lado generador multiplicados continuamente por los índices de las potencias de dichos lados y sus coeficientes.

Llamo generada a cualquier cantidad que, sin sumar ni restar, se engendra, en aritmética por multiplicación, división y extracción de raíces de lados o términos cualesquiera; en geometría del cálculo de áreas y lados, o de extremos y medios proporcionales. Este tipo de cantidades son productos, cocientes, raíces, rectángulos, cuadrados, cubos, lados cuadrados, lados cúbicos y similares. Considero aquí a dichas cantidades como indeterminadas y variables y como si creciesen y decreciesen con un movimiento o flujo continuo; y a sus incrementos o decrementos momentáneos es a lo que llamo momentos: de modo que los incrementos pueden considerarse como momentos añadidos o positivos y los decrementos como negativos o substraídos. Pero cuídese de no entenderlo como partículas finitas. Las partículas finitas no son momentos, sino las cantidades mismas generadas por los momentos. Han de entenderse como los mismos principios nacientes de las magnitudes finitas. Y ni siquiera se contempla en este lema la magnitud de los momentos, sino la proporción primera entre momentos nacientes. Lo mismo ocurre si en lugar de momentos se trata de las velocidades de los incrementos (que también pueden llamarse movimientos, mutaciones, fluxiones de cantidades) o bien de cualquier cantidad finita proporcional a dichas velocidades. El coeficiente de cualquier lado generador es la cantidad que resulta al aplicar la generada a dicho lado.

Por lo cual el sentido del lema es que si los momentos de unas cantidades A, B, C, etc., que aumentan o disminuyen en flujo continuo, o las velocidades de las mutaciones proporcionales a aquellos se llaman a, b, c, etc., el momento o mutación del rectángulo generado AB sería aB + bA, el. momento del área generada ABC sería a BC + bAC + cAB: y los de las potencias generadas A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2} y $A^{-\frac{1}{2}}$ serán respectivamente: $2a$A, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{2}{3}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, y $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$; y, en general, que el momento de una potencia cualquiera $A^{\frac{n}{m}}$ sería, $\frac{n}{m}aAn^{\frac{n-m}{m}}$. También que el momento de la cantidad generada A^2B será $2a$AB + $b$$A^2$, que el momento de la generada $A^3B^4C^2$ será $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$, y de la generada $\frac{A^3}{B^2}$ o de A^3B^{-2} será $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$, etc. Y el lema se demuestra del siguiente modo:

Caso 1. Un rectángulo cualquiera AB que crece con un movimiento continuo, cuando de sus lados A y B faltaban la mitad de los momentos $\frac{1}{2}a$ y $\frac{1}{2}b$, era $A-\frac{1}{2}a$ por $B-\frac{1}{2}b$, o también $AB-\frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; y en el momento en que ambos lados A y B quedan aumentados con las otras mitades de los momentos resulta $A + \frac{1}{2}a$ por $B + \frac{1}{2}b$, o AB + $\frac{1}{2}a$B + $\frac{1}{2}b$A + $\frac{1}{4}$ab. De este rectángulo réstese el anterior y quedará un exceso de aB + bA. Por tanto, con todos los incrementos a y b de los lados se genera el incremento aB + bA del rectángulo. Q.E.D.

Caso 2. Supóngase que AB es siempre igual a G y el momento del contenido ABC, o sea, de GC (por el caso 1) será gC + cG, esto es (si se sustituyen G y g por AB y aB + bA), aBC + bAC + cAB. Y lo mismo para cualquier contenido bajo cualquier número de lados. Q.E.D.

Caso 3. Supóngase que los lados A, B, C, son siempre iguales entre sí, y el momento del rectángulo AB, esto es, de A^2, que sería aB + bA, vendrá a ser $2a$A; y el de A^3, esto es, el del contenido ABC, que sería aBC + bAC + cAB, $3aA^2$. Y por la misma razón el momento de una potencia cualquiera A^n será naA^{n-1}. Q.E.D.

Caso 4. De donde, como $\frac{1}{A}$ por A sea 1, el momento de $\frac{1}{A}$ multiplicado por A, junto con $\frac{1}{A}$ multiplicado por a, será el momento de 1, es decir, nulo. Por tanto, el momento de $\frac{1}{A}$ o de A^{-1} es $\frac{-a}{A^2}$. Y, en general, puesto que $\frac{1}{A^n}$ por A^n es 1, el momento de $\frac{1}{A^n}$ multiplicado por A^n junto con $\frac{1}{A^n}$ por naA^{n-1} será nulo. Y por lo mismo el momento de $\frac{1}{A^n}$ o de A^n será $-\frac{na}{A^{n+1}}A^{n+1}$. Q.E.D.

Caso 5. Y, puesto que $A^{\frac{1}{2}}$ por $A^{\frac{1}{2}}$ es A, el momento de $A^{\frac{1}{2}}$ multiplicado por $2A^{\frac{1}{2}}$ será a por el caso 3: por lo mismo el momento de $A^{\frac{1}{2}}$ será $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ o $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Y, en general, siendo $A^{\frac{m}{n}}$ igual a B, entonces A^m será igual a B^n y, por tanto, maA^{m-1} igual a nbB^{n-1}, y

maA^{-1} igual a nbB^{-1}, o $nbA^{-\frac{m}{n}}$; y, por ello, $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ es igual a b, es decir, igual al momento de $A^{\frac{m}{n}}$. Q.E.D.

CASO 6. Por tanto, el momento de cualquier cantidad generada A^mB^n es el momento de A^m multiplicado por B^n, junto con el momento de B^n multiplicado por A^m, esto es, $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$; y esto tanto si los índices de las potencias m, n, son números enteros o fraccionarios, positivos o negativos. Y lo mismo ocurre para contenidos bajo muchas potencias. Q.E.D.

COROLARIO 1. De aquí que cuando son cantidades continuamente proporcionales, si se da un término, los momentos de los otros términos serán como los mismos términos multiplicados por el número de intervalos entre ellos y el término dado. Sean A, B, C, D, E, F, continuamente proporcionales; y si se da el término C, los momentos del resto de los términos serán entre sí como – 2A, – B, D, 2E, 3F.

COROLARIO 2. Y si en cuatro proporcionales se dan los dos medios, los momentos de los extremos serán como los propios extremos. Lo mismo hay que entender respecto a los lados de un rectángulo dado cualquiera.

COROLARIO 3. Y si se da la suma o la diferencia de dos cuadrados, los momentos de los lados serán inversamente como los lados.

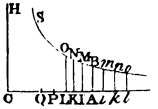
ESCOLIO

En una carta que escribí al señor Collins el 10 de diciembre de 1672 una vez que describí el método de tangentes que sospechaba ser el mismo que el de Sluse, no publicado todavía en aquella fecha, añadí: «Esto es un caso particular o mejor un corolario de un método general que se extiende sin farragosos cálculos, no sólo al trazado de tangentes a cualquier línea curva geométrica o mecánica, o relacionadas de cualquier forma a otras líneas rectas o curvas, sino también a la resolución de otras clases de problemas más abstrusos sobre curvaturas, áreas, longitudes, centros de gravedad de curvas, etc., y tampoco (como el método de máximos y mínimos de Hudden) se limita a las solas ecuaciones que se hallan libres de cantidades irracionales. He combinado dicho método con este otro mediante el cual resuelvo las ecuaciones reduciéndolas a series infinitas». Hasta aquí la carta. Y estas últimas palabras se refieren a un tratado que había escrito sobre estos temas en el año 1671. Mas el fundamento de dicho método general se halla contenido en el lema anterior.

PROPOSICIÓN VIII. TEOREMA VI

Si un cuerpo, en un medio uniforme, bajo la acción uniforme de la gravedad, asciende o desciende en línea recta, y se divide la totalidad del espacio recorrido en partes iguales, y se averiguan las fuerzas absolutas al principio de cada una de las partes (sumando la resistencia del medio a la fuerza de la gravedad cuando el cuerpo asciende y restándola cuando desciende), digo que dichas fuerzas absolutas se hallan en progresión geométrica.

Represéntese la fuerza de la gravedad por una línea dada AC; la resistencia por una línea indefinida AK; la fuerza absoluta en el descenso del cuerpo por la diferencia KC; la



velocidad del cuerpo por la línea AP, que sea media proporcional entre AK y AC y, por tanto, como la raíz cuadrada de la resistencia; el incremento de la resistencia producido en una partícula de tiempo dada por el segmento KL, y el incremento simultáneo de velocidad por el segmento PQ; y con centro en C y con las asíntotas rectangulares CA, CH trácese una hipérbola BNS que corte a las perpendiculares AB, KN, LO, en los puntos B, N, O. Puesto que AK es como AP^2, el momento KL de éste será como el momento 2APQ de aquél, esto es, como AP × KC; pues el incremento PQ de la velocidad (por la ley II del movimiento) es proporcional a la fuerza generatriz KC. Multiplicando la razón de KL por la razón de KN se tendrá el rectángulo KL × KN que será como AP × KC × KN; esto es, por estar dado el rectángulo KC × KN, como AP. Pero la razón última del área hiperbólica KNOL al rectángulo KL × KN cuando coinciden los puntos K y L es la de igualdad. Luego dicha área hiperbólica evanescente es como AP. Por tanto, toda el área hiperbólica ABOL se compone de partículas KNOL siempre proporcionales a la velocidad AP y, en consecuencia, es proporcional al espacio descrito con dicha velocidad. Divídase ahora la susodicha área en partes iguales ABMI, IMNK, KNOL, etc., y las fuerzas absolutas AC, IC, KC, LC, etc., estarán en proporción geométrica. Q.E.D. Y por el mismo argumento, cuando el cuerpo asciende, tomando, hacia el lado contrario del punto A, las áreas iguales AB*mi*, *imnk*, *knol*, etc., se verá que las fuerzas absolutas AC, *i*C, *k*C, IC, etc., son continuamente proporcionales. Y, por lo tanto, si en el ascenso y en el descenso se toman iguales todos los espacios, todas las fuerzas absolutas IC, *k*C, *i*C, AC, IC, KC, LC, etc., serán continuamente proporcionales. Q.E.D.

COROLARIO 1. De aquí que si se representa el espacio recorrido mediante el área hiperbólica $ABNK_{\gamma}$ la fuerza de la gravedad, la velocidad del cuerpo y la resistencia del medio pueden representarse respectivamente por las líneas AC, AP y AK, y viceversa.

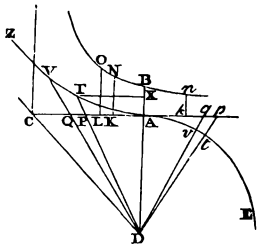
COROLARIO 2. Y la línea AC viene a ser la representación de la velocidad máxima que puede alcanzar un cuerpo en un descenso infinito.

COROLARIO 3. Por tanto, si se conoce la resistencia de un medio a una velocidad dada, se hallará la velocidad máxima tomando a ésta con relación a dicha velocidad dada como la raíz cuadrada de la razón entre la fuerza de la gravedad y la resistencia dada del medio ya conocida.

PROPOSICIÓN IX. TEOREMA VII

Supuesto lo ya demostrado, digo que si las tangentes de los ángulos de un sector circular y de un sector hiperbólico se toman proporcionalmente a las velocidades, siendo el radio de una magnitud determinada, el tiempo total de ascenso hasta el punto más alto será como el sector del círculo, y el tiempo total de descenso desde el punto más alto como el sector de la hipérbola.

Trácese AD perpendicular e igual a la recta AC que representa a la fuerza de la gravedad. Con centro en D y semidiámetro AD, trácese tanto el cuadrante de círculo A*r*E, como la hipérbola rectangular AVZ que tiene como eje AX, el vértice principal en A y la asíntota DC. Únanse D*p*, DP y el sector circular A*r*D será como el tiempo total de



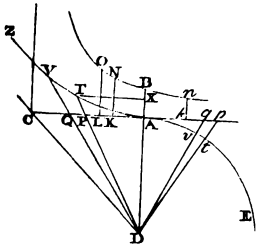
ascenso al punto más alto; y el sector hiperbólico ATD como el tiempo total de descenso desde el punto más alto, mientras las tangentes A*p*, AP de los sectores sean como las velocidades.

Caso 1. Trácese D*vq* de modo que corte los momentos del sector AD*t* y del triángulo AD*p*, o partículas mínimas descritas al mismo tiempo *t*D*v*, y *q*D*p*. Como dichas partículas, por tener el ángulo D común, son como el cuadrado de los lados, la partícula *t*D*v* sera como $\frac{q\mathrm{D}p \times t\mathrm{D}^2}{p\mathrm{D}^2}$, esto es, por estar dada *t*D, como $\frac{q\mathrm{D}p}{p\mathrm{D}^2}$. Pero $p\mathrm{D}^2$ es $\mathrm{AD}^2 + \mathrm{A}p^2$, es decir, $\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AD} \times \mathrm{A}k$, o, $\mathrm{AD} \times \mathrm{C}k$, y $q\mathrm{D}p$ es 1/2 AD × *pq*. Por lo tanto, *t*D*v*, la partícula del sector, es como *pq*/C*k*; esto es, directamente como el decremento mínimo de la velocidad *pq*, e inversamente como la fuerza C*k* que hace disminuir la velocidad; y, por tanto, como la partícula de tiempo correspondiente al decremento de la velocidad. Y, componiendo, la suma de todas las partículas *t*D*v* en el sector AD*t* vendrá a resultar como la suma de las partículas de tiempo correspondientes a cada partícula *pq* perdida de la velocidad decreciente A*p*, hasta que dicha velocidad, disminuyendo hasta anularse, desaparezca; esto es, el sector completo AD*t* es como el tiempo total de ascenso hasta el punto más alto. Q.E.D.

Caso 2. Trácese DQV tal que corte las partículas mínimas TDV y PDQ tanto del sector DAV como del triángulo DAQ; y dichas partículas serán entre sí como DT^2 a DP^2, esto es (si TX y AP son paralelas), como DX^2 a DA^2 o TX^2 a AP^2 y, por partes, como $\mathrm{DX}^2 - \mathrm{TX}^2$ a $\mathrm{DA}^2 - \mathrm{AP}^2$. Pero, por la naturaleza de la hipérbola, $\mathrm{DX}^2 - \mathrm{TX}^2$ es AD^2, y por hipótesis, AP^2 es AD × AK. Luego las partículas son entre sí como AD^2 a $\mathrm{AD}^2 - \mathrm{AD} \times \mathrm{AK}$; esto es, como AD a AD – AK, o también, AC a CK; y por ello la partícula TDV del sector es $\frac{\mathrm{PDQ} \times \mathrm{AC}}{\mathrm{CK}}$; y por estar dadas AC y AD, como PQ/CK, esto es, directamente como el incremento de la velocidad e inversamente como la fuerza que genera el incremento. Y, componiendo, se tendrá la suma de las partículas de tiempo en las cuales se generan todas las partículas PQ de la velocidad AP, que vendrá a ser como la suma de las partículas del sector ATD, esto es, el tiempo total como el sector total. Q.E.D.

Corolario 1. De aquí que, si AB es igual a la cuarta parte de AC, el espacio recorrido por un cuerpo que cae en un tiempo cualquiera será al espacio que puede recorrer dicho cuerpo con la velocidad máxima AC, moviéndose uniformemente durante el mismo tiempo, como el área ABNK, que representa el espacio recorrido en la caída, al área ATD, que representa el tiempo. Pues dado que AC es a AP como AP a AK, LK será (por el corolario 1 del lema II de este libro) a PQ como 2AK a AP, esto es, como 2AP a AC, y por ello LK a $\frac{1}{2}$PQ como AP a $\frac{1}{4}$AC o AB; pero KN es a AC o AD como AB a CK; y, por tanto, «ex aequo», LKNO es a DPQ como AP a CK. Pero DPQ era a DTV como CK a AC. Luego «ex aequo» otra vez, LKNO es a DTV como AP a AC; esto es, como la velocidad del cuerpo que cae a la velocidad máxima que puede adquirir el cuerpo al

caer. Puesto que los momentos LKNO y DTV de las áreas ABNK y ATD son como las velocidades, todas las partes de dichas áreas generadas en los mismos tiempos, serán como los espacios recorridos en los mismos tiempos y, por lo mismo, las áreas totales ABNK y ATD generadas desde el principio serán como los espacios totales recorridos desde el comienzo del descenso. Q.E.D.



COROLARIO 2. Y lo mismo se sigue para el espacio recorrido en el ascenso. A saber, que dicho espacio total es al espacio recorrido con velocidad uniforme AC en el mismo tiempo, como el área AB*nk* al sector AD*t*.

COROLARIO 3. La velocidad del cuerpo que cae en el tiempo ATD es a la velocidad que adquiriría en el mismo tiempo en un espacio sin resistencia, como el triángulo APD al sector hiperbólico ATD. Pues la velocidad en un medio no resistente sería como el tiempo ATD, mientras en un medio resistente es como AP, esto es, como el triángulo APD. Y estas velocidades al comienzo del descenso son iguales entre sí, como lo son las áreas ATD, APD.

COROLARIO 4. Por la misma razón, la velocidad en el ascenso es a la velocidad con la cual un cuerpo en un espacio no resistente perdería todo su movimiento ascendente, como el triángulo A*p*D al sector circular A*t*D, o como la recta A*p* al arco A*t*.

COROLARIO 5. Por lo tanto, el tiempo en el cual un cuerpo, cayendo en un medio resistente, adquiriría la velocidad AP es al tiempo en el cual adquiriría la velocidad máxima AC cayendo en un espacio no resistente, como el sector ADT al triángulo ADC: y el tiempo en el cual perdería ascendiendo en un medio resistente la velocidad A*p* será al tiempo en el cual puede perder la misma velocidad ascendiendo en un espacio no resistente, como el arco A*t* a su tangente A*p*.

COROLARIO 6. De aquí que, dado el tiempo, está dado el espacio recorrido en el ascenso o en el descenso. Pues la velocidad máxima de un cuerpo que desciende hasta el infinito está dada (por los corolarios 2 y 3 del teorema VI del libro segundo) y con ello se da el tiempo en el cual el cuerpo puede alcanzar dicha velocidad cayendo en un espacio no resistente. Y tomando el sector ADT o AD*t* respecto al triángulo ADC en la razón del tiempo dado al tiempo recién hallado, se tendrán tanto la velocidad AP o A*p* como el área ABNK o AB*nk* que es al sector ADT o AD*t* como el espacio buscado al espacio que, en un tiempo dado, y con la velocidad máxima ya antes hallada, podría recorrer uniformemente.

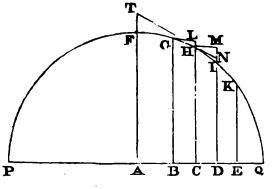
COROLARIO 7. Y en sentido inverso, a partir de los espacios dados de ascenso o descenso AB*nk* o ABNK, se tendrá el tiempo AD*t* o ADT.

PROPOSICIÓN X. PROBLEMA III

Suponiendo que la fuerza uniforme de la gravedad tiende directamente hacia el plano del horizonte, y que la resistencia del medio es como la densidad del mismo y el cuadrado de la velocidad conjuntamente: hallar tanto la densidad del medio en cada

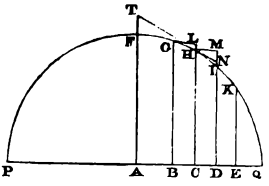
punto capaz de obligar al cuerpo a moverse en una curva dada cualquiera, como la velocidad del cuerpo y la resistencia del medio en cada punto.

Sea PQ un plano perpendicular al plano de la figura; PFHQ una línea curva que corta a dicho plano en los puntos P y Q; G, H, I, K, cuatro lugares del cuerpo que recorre dicha curva desde F hacia Q; y GB, HC, ID, KE, cuatro paralelas ordenadas trazadas desde dichos puntos sobre el plano horizontal y que caen sobre la línea horizontal PQ en los puntos B, C, D, E; y sean iguales las distancias BC, CD, DE, comprendidas entre esas ordenadas. Desde los puntos G y H trácense las rectas GL, HN, tangentes a la curva en G y H, y cortando a las ordenadas CH, DI, prolongadas hacia arriba en L y N, y complétese el paralelogramo HCDM. Y los tiempos en los cuales el cuerpo describe los arcos GH, HI, serán como la raíz cuadrada de las alturas LH, NI que describiría el cuerpo en dichos tiempos, cayendo desde las tangentes; y las velocidades serán como las longitudes recorridas GH, HI, directamente e inversamente como los tiempos. Represéntense los tiempos por T y t y las velocidades por GH/T y HI/t; y el decremento de la velocidad ocurrido en el tiempo t represéntese por $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Este decremento surge de la resistencia que retarda al cuerpo y de la gravedad que lo acelera. La gravedad genera, en un cuerpo que cae y al caer recorre el espacio NI, una velocidad capaz de hacer al cuerpo recorrer un espacio doble de aquel en el mismo tiempo, como demostró Galileo; esto es, 2NI/t; pero en el cuerpo que describe el arco HI solamente aumenta en dicho arco la longitud HI – HN o $\frac{MI \times NI}{HI}$; y, por lo mismo, tan sólo genera la velocidad $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Añádase esta velocidad al decremento antedicho, y se tendrá el decremento de la velocidad debido a la sola resistencia, a saber, $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Y por tanto, puesto que en el mismo tiempo la gravedad genera en un cuerpo que cae la velocidad $\frac{2NI}{t}$, la resistencia será a la gravedad como $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ a $\frac{2NI}{t}$ o como $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ a 2NI.



Y ahora, en lugar de las abscisas CB, CD, CE, escríbase —o, o, $2o$. Por la ordenada CH escríbase P, y por MI una serie cualquiera como $Qo + Roo + So^3$ + etc. Y todos los términos de la serie posteriores al primero, a saber, $Roo + So^3$ + etc., serán NI, y las ordenadas DI, EK y BG serán $P - Qo - Roo - So^3$ – etc., $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3$ – etc., y $P + Qo - Roo + So^3$ – etc., respectivamente. Elevando al cuadrado las diferencias de las ordenadas BG — CH y CH — DI y sumando a los cuadrados resultantes los cuadrados de las propias BC, CD se obtendrán $oo + QQoo - 2QRo^3$ + etc., y $oo + QQoo + 2QRo^3$

+ etc., cuadrados de los arcos GH, HI, cuyas raíces $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, y $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ son los arcos GH y HI. Además, si de la ordenada CH se resta la semisuma de las ordenadas BG y DI, y de la ordenada DI se resta la semisuma de las ordenadas CH y EK quedarán Roo y $Roo + 3So^3$, sagitas de los arcos GI y HK. Pero éstas son proporcionales a los segmentos LH y NI y, por tanto, como el cuadrado de los tiempos infinitamente pequeños T y t; y de aquí que la razón $\frac{t}{T}$ es $\sqrt{\frac{R+3So}{R}}$ o $\frac{R+3/2So}{R}$; mientras que $\frac{t+GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, una vez sustituidos los valores de t/T, GH, HI, MI y NI por los ahora hallados, resulta $\frac{3Soo}{2R} \times \sqrt{1+QQ}$. Y puesto que 2NI es $2Roo$, la resistencia será ahora a la gravedad como $\frac{3Soo}{2R} \times \sqrt{1+QQ}$ a $2Roo$, esto es, como $3S\sqrt{1+QQ}$ a $4RR$.



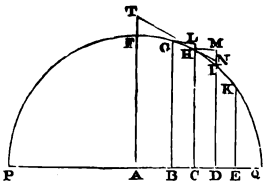
Y la velocidad es aquella con la cual un cuerpo partiendo de un punto cualquiera H según la tangente HN podría moverse descendiendo en el vacío por una parábola de diámetro HC y «latus rectum» $\frac{HN^2}{NI}$ o $\frac{1+QQ}{R}$.

Y la resistencia es como la densidad del medio y el cuadrado de la velocidad conjuntamente, y por tanto la densidad del medio es directamente como la resistencia e inversamente como el cuadrado de la velocidad, esto es, como $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directamente y $\frac{1+QQ}{R}$ inversamente, esto es, como $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. Q.E.I

COROLARIO 1. Si la tangente HN se prolonga a ambos lados de modo que llegue a cortar a una ordenada cualquiera AF en T, $\frac{HN}{AC}$ será igual a $\sqrt{1+QQ}$, y por tanto en lo que antecede se puede escribir en lugar de $\sqrt{1+QQ}$. Por lo cual la resistencia será a la gravedad como $3S \times HT$ a $4RR \times AC$, la velocidad será como $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$ y la densidad del medio como $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

COROLARIO 2. Y por ello, si se definiese la línea curva PFHQ mediante la relación entre la base o abscisa AC y la ordenada CH, como es habitual, y el valor de la ordenada se resuelve en una serie convergente, el problema se resuelve rápidamente mediante los primeros términos de la serie, como en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1. Sea la línea PFHQ un semicírculo descrito sobre el diámetro PQ, y hállese la densidad del medio que obligue a un proyectil a moverse en dicha línea.



Bisecado el diámetro PQ en A, llámese a AQ, *n*; a AC, *a;* a CH, *e;* y a CD, *o*: y DI^2 o $AQ^2 - AD^2$ será igual a: $nn - aa - 2ao - oo$, o también, $ee - 2ao - oo$, y al extraer la raíz según nuestro método, resultará

$$DI = e - \frac{ao}{2e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} - \text{etc.}$$

Aquí sustitúyase $ee + aa$ por nn y resultará

$$DI = e - \frac{ao}{2e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} - \text{etc.}$$

En esta serie distingo entre los términos sucesivos del modo siguiente. Llamo término primero a aquel en el que no se da la cantidad infinitamente pequeña *o*; segundo a aquel en el que dicha cantidad es de una sola dimensión; tercero al que la contiene con dos; cuarto al que la contiene con tres; y así indefinidamente. Y el término primero, que aquí es *e*, denotará siempre la longitud de la ordenada CH incidente en el comienzo de la cantidad indefinida *o*. El término segundo, que aquí es $\frac{ao}{e}$, denotará la diferencia entre CH y DN, esto es, el segmento MN, que queda cortado al completar el paralelogramo HCDM y, por lo tanto, determina siempre la posición de la tangente HN; como en este caso tomando MN a HM como $\frac{ao}{e}$ a *o*, o también *a* a *e*. El tercer término que es aquí $\frac{nnoo}{2e^3}$, denotará el segmento IN que se halla entre la tangente y la curva, y por tanto determina el ángulo de contacto IHN o la curvatura que tiene la línea curva en H. Si dicho segmento IN es de magnitud finita será designada por el término tercero junto con los que le siguen hasta el infinito. Pero si dicho segmento disminuye hasta el infinito, los términos siguientes resultarán infinitamente más pequeños que el tercero y, por tanto, pueden despreciarse. El término cuarto determina la variación de la curvatura, el quinto la variación de la variación, y así sucesivamente. De lo cual, de paso, se desprende la utilidad no desdeñable de estas series en la solución de problemas que dependen de tangentes y de la curvatura de las curvas.

Compárese ahora la serie

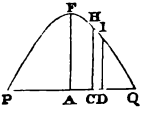
$$e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} - \text{etc.}$$

con la serie $P - Qo - Roo - So^3 - \text{etc.}$, y después en lugar de P, Q, R y S escríbase $e, \frac{a}{e}, \frac{nn}{2e^3}, \frac{ann}{2e^5}$ y en lugar de $\sqrt{1 + QQ}$ escríbase $\sqrt{1 + \frac{aa}{ee}}$ o $\frac{n}{e}$, y la densidad del medio resultará como $\frac{a}{ne}$, esto es (por estar *n* dada), como $\frac{a}{e}$, o como $\frac{AC}{CH}$, es decir, como la longitud de la tangente HT que termina en el semidiámetro AF que se eleva perpendicularmente sobre PQ; mientras la resistencia será a la gravedad como $3a$ a $2n$, esto es, como 3AC al diámetro del círculo PQ; la velocidad en cambio será $\sqrt{CH}$. Por

tanto, si el cuerpo parte del punto F, con la velocidad precisa, según una línea paralela a PQ, y la densidad del medio en cada punto H es como la longitud HT de la tangente, y la resistencia es también en cada punto H respecto a la fuerza de la gravedad como 3AC a PQ, dicho cuerpo describirá el cuadrante FHQ del círculo. Q.E.I.

Pero si dicho cuerpo partiese del punto P según una línea perpendicular a PQ, y comenzase a moverse en el arco del semicírculo PFQ, habría que tomar AC o a hacia el otro lado del centro A y por tanto habría que cambiar su signo y escribir $-a$ en lugar de $+a$. Con ello resultaría la densidad del medio como $-\frac{a}{e}$. Pero la naturaleza no admite una densidad negativa o, lo que es lo mismo, que acelere el movimiento: y, por lo tanto, no puede acontecer naturalmente que un cuerpo ascendiendo desde P describa el cuadrante PF del círculo. Para esto el cuerpo tendría que ser acelerado por un medio impelente, no ser retardado por un medio resistente.

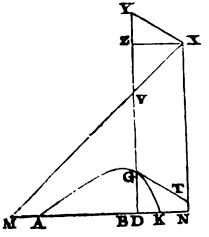
EJEMPLO 2. Sea la línea PFQ una parábola que tiene su eje AF perpendicular a la línea del horizonte PQ, y hállese la densidad del medio que haga que un proyectil se mueva por ella.



De la naturaleza de la parábola se sigue que el rectángulo PDQ es igual al rectángulo comprendido bajo la ordenada DI y una cierta recta dada: esto es, si llamamos a dicha recta b, a PC, a; a PQ, c; a CH, e; y a CD, o; el rectángulo $(a+o)\times(c-a-o)$, o, $ac-aa-2ao+co-oo$ es igual a $b\times$ DI y, por tanto, DI es igual a $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o\frac{oo}{b}$.

Ahora habrá que escribir el segundo término de esta serie $\frac{c-2a}{b}\times o$, por Qo, mientras el tercero $\frac{oo}{b}$, lo será en lugar de Roo. Pero como no hay más términos, el coeficiente S del cuarto desaparecerá, con lo cual la cantidad $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ a la que es proporcional la densidad, se anula. Y, por consiguiente, un proyectil se moverá en una parábola cuando la densidad del medio sea nula, como ya demostró Galileo. Q.E.I.

EJEMPLO 3. Sea la línea AGK una hipérbola que tiene como asíntota a NX perpendicular al plano horizontal AK; y se trata de hallar la densidad del medio que haga a un proyectil moverse en dicha línea.



Sea MX la otra asíntota que corta a la prolongación de la ordenada DG en V; y por la naturaleza de la hipérbola vendrá dado el rectángulo XV × VG. También estará dada la razón de DN a VX, y por tanto está dado también el rectángulo DN × VG. Sea éste bb: y completando el paralelogramo DNXZ, escríbase por BN, a; por BD, o; por NX, c; y la razón dada de VZ a ZX o DN supongamos que es $\frac{m}{b}$. Y entonces DN será igual a $a-o$, VG igual a $\frac{bb}{a-o}$, VZ igual $a\ \frac{m}{n}(a-o)$ y GD o NX − VZ − VG igual a

$$c - \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{a-o}.$$

Resuélvase el término $\frac{bb}{a-o}$ en la serie convergente

$$\frac{bb}{a} + \frac{bb}{aa}o + \frac{bb}{a^3}oo + \frac{bb}{a^4}o^3, \text{ etc.},$$

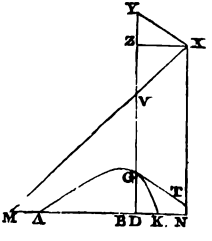
y GD resultará igual a

$$c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o - \frac{bb}{a^3}o^2 - \frac{bb}{a^4}o^3, \textit{ etc.}$$

El segundo término, $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$, de esta serie ha de tomarse por Qo, el tercero con el signo cambiado, $\frac{bb}{a^3}o^2$, por Ro^2, el cuarto también con el signo cambiado, $\frac{bb}{a^4}o^3$, por So^3, y sus coeficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ y $\frac{bb}{a^4}o^3$ deben ponerse en la regla anterior en lugar de Q, R y S. Una vez hecho esto, la densidad del medio resultará como

$$\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1 + \frac{mm}{nn} - \frac{2mbb}{naa} + \frac{b^4}{a^4}}}$$

o como, $\dfrac{1}{\sqrt{aa + \frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}}}$ esto es, si sobre VZ se toma VY igual a VG, como $\frac{1}{XY}$. Porque aa y $\frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$ son los cuadrados de XZ y de ZY. Luego la razón de la resistencia a la gravedad es la de 3XY a 2TG; y la velocidad es aquella con la que un cuerpo recorrería una parábola que tuviese el vértice G, el diámetro DG y el «latus rectum» $\frac{XY^2}{VG}$. Supóngase también que las densidades del medio en cada punto G son inversamente como las distancias XY, y que la resistencia en un punto G es a la gravedad como 3XY a 2YG; y un cuerpo lanzado desde el punto A con la velocidad adecuada describirá la hipérbola dicha AGK. Q.E.I.



EJEMPLO 4. Supóngase indefinidamente que la línea AGK es una hipérbola con centro en X, descrita entre las asíntotas MX, NX, de tal modo que, construido el rectángulo XZDN, cuyo lado ZD corte a la hipérbola en G y a su asíntota en V, y fuese VG inversamente como ZX o DN a una potencia cualquiera DN^n, cuyo índice es el número n; y se busca la densidad del medio con la cual un proyectil recorra dicha curva.

Escríbanse A, O, C, en lugar de BN, BD, NX respectivamente, y sea VZ a XZ o DN

como d a e, y VG igual a $\frac{bb}{DN^n}$; y DN será igual a A – O, VG = $\frac{bb}{(A-O)^n}$, VZ = $\frac{d}{e}$(A – O), y GD o NX – VZ – VG igual a C – $\frac{d}{e}$ A + $\frac{d}{e}$ O – $\frac{bb}{(A-O)^n}$. Resuélvase el término $\frac{bb}{(A-O)^n}$ en la serie infinita

$$\frac{bb}{A^n} + \frac{nbb}{A^{n+1}}O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO, \text{ etc.}$$

y GD será igual a

$$C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^n} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O$$
$$- \frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO2 - \frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO3$$

etc. El segundo término, $\frac{d}{e}$ O – $\frac{nbb}{A^{n+1}}$ O, de esta serie habrá de tomarse por Qo. mientras el tercero, $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$, lo será por R$o^2$, el cuarto, $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$, por S$o^3$. Y de aquí que la densidad del medio, $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, en un punto G cualquiera resulte

$$\frac{n+2}{3\sqrt{A^2 + \frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$$

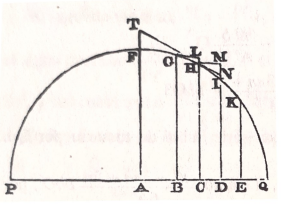
y, por lo tanto, si sobre VZ se toma VY, igual a $n \times$ VG, dicha densidad es inversamente como XY. Porque A^2 y $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ son los cuadrados de las propias XZ y ZY. Y la resistencia en el mismo punto G se hace respecto a la gravedad como 3S $\times$ $\frac{XY}{VG}$ a 4RR, es decir, como XY a $\frac{2nn+2n}{n+2}$ VG. Y la velocidad es allí la misma que aquella con la cual el cuerpo lanzado se movería en una parábola con vértice en G, diámetro GD y «latus rectum» $\frac{1+QQ}{R}$ o $\frac{2XY^2}{(nn+n)\times VG}$. Q.E.I.

ESCOLIO

Por la misma razón por la que en el corolario primero resulta la densidad del medio como $\frac{S+AC}{R \times HT^n}$, si la resistencia se supone como una potencia cualquiera V^n de la velocidad V, la densidad del medio resultará como $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \left(\frac{AC}{HT}\right)^{n-1}$. Y, por lo tanto, si la

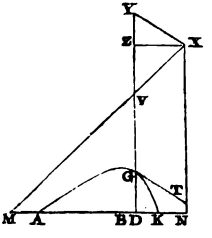
curva puede ser establecida de modo que responda a la razón de $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ a $\left(\frac{HT}{AC}\right)^{n-1}$, o $\frac{S^2}{A^{4-n}}$ a $(1 + QQ)^{n-1}$, el cuerpo se moverá en dicha curva en un medio uniforme con resistencia que sea como la potencia V^n de la velocidad. Pero volvamos a curvas más sencillas.

Puesto que el movimiento no ocurre en parábolas salvo en medios no resistentes, mientras que en las hipérbolas descritas aquí ocurre con resistencia continua, es evidente que la línea descrita por un proyectil en un medio uniformemente resistente se acerca más a estas hipérbolas que a una parábola. La línea es ciertamente de naturaleza hiperbólica, pero tal que en el vértice dista más de las asíntotas y en las partes lejanas del vértice se acerca más a las asíntotas de lo que se refleja en las hipérbolas aquí descritas. Sin embargo, la diferencia entre éstas y aquélla no es tan acusada como para impedir el uso adecuado de unas por otra en la práctica. Y quizá sean más útiles éstas que una hipérbola más exacta y a la vez más compleja. Por lo demás pueden utilizarse como sigue.



Complétese el paralelogramo HYGT, y la recta GT tocará a la hipérbola en G, y por tanto la densidad del medio en G es inversamente como la tangente GT, y la velocidad en ese punto como $\sqrt{\frac{GT^2}{GV}}$, la resistencia, en cambio, respecto a la fuerza de la gravedad es como GT a $\frac{2nn + 2n}{n + 2} \times GV$.

Por tanto, si un cuerpo lanzado desde el punto A, según la línea AH describiere la hipérbola AGK, y prolongada AH cortase a la asíntota NX en H, y trazada AI paralela a la anterior cortase a la otra asíntota MX en I; la densidad del medio será en A inversamente como AH, y la velocidad del cuerpo como $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, y la resistencia respecto a la gravedad en ese punto como AH a $\frac{2nn + 2n}{n + 2} \times AI$. De donde se deducen las siguientes reglas.



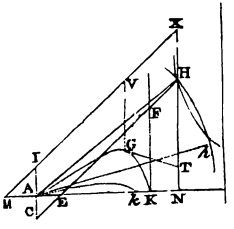
REGLA 1. Si se mantienen tanto la densidad del medio en A como la velocidad con que se lanza el cuerpo, y se cambia el ángulo NAH, se mantendrán las longitudes AH, AI, HX. Y, por tanto, si dichas longitudes fuesen halladas en algún caso, podrá determinarse la hipérbola sin dificultad a partir de un ángulo NAH cualquiera dado.

REGLA 2. Si se mantienen el ángulo NAH y la densidad del medio en A, pero se cambia la velocidad con

que se proyecta al cuerpo, se mantendrá la longitud AH, y variará IA en razón inversa del cuadrado de la velocidad.

REGLA 3. Si se mantienen el ángulo NAH, la velocidad del cuerpo en A y la gravedad aceleratriz, mientras se aumenta la proporción de la resistencia en A respecto a la gravedad motriz según una razón cualquiera, la proporción de AH a AI aumentará en la misma razón, pero se mantendrá el «latus rectum» de la parábola susodicha y la proporcionalidad a él de la longitud $\frac{AH^2}{AI}$; y, por tanto, AH disminuye en esa proporción, mientras AI disminuye como el cuadrado de dicha razón. Pero la proporción de la resistencia al peso aumenta, tanto si a igual tamaño la gravedad específica es menor, como si la densidad del medio es mayor, o si la resistencia, a menor tamaño, disminuye en menor razón que el peso.

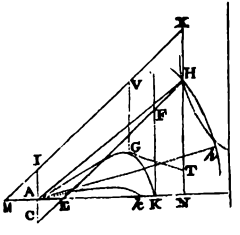
REGLA 4. Puesto que la densidad del medio es mayor cerca del vértice de la hipérbola que en el punto A, para obtener la densidad media debe hallarse la razón de la menor de las tangentes GT a la tangente AH, y aumentar la densidad en A en una razón algo mayor que la de la semisuma de estas tangentes respecto a la menor de las tangentes GT.

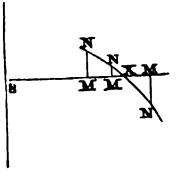


REGLA 5. Si se dan las longitudes AH, AI y hay que trazar la figura AGK; prolónguese HN hasta X, de modo que HX sea a AI como n + 1 a 1, y con centro en X y asíntotas MX, NX trácese la hipérbola por el punto A, de tal suerte que AI sea a cualquiera VG como XV^n a XI^n.

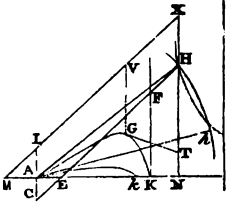
REGLA 6. Cuanto mayor es el número *n*, tanto más exactas son estas hipérbolas al ascender el cuerpo desde A y tanto menos exactas en su descenso hacia K, y viceversa. La hipérbola cónica goza de una razón media y es más simple que las otras. Por lo cual, si la hipérbola es de este tipo y hay que hallar el punto K, en el cual el cuerpo lanzado incide sobre una recta cualquiera AN que pasa por el punto A: la recta AN prolongada corte a las asíntotas MX, NX, en M y N, y tómese NK igual a AM.

REGLA 7. Y de aquí se sigue un método expeditivo para determinar esta hipérbola partiendo de fenómenos. Láncense dos cuerpos semejantes e iguales, con la misma velocidad, con ángulos distintos AHK, *hAk*, que caigan sobre el plano horizontal en K y *k*; y anótese la proporción de AK a A*k*. Sea ésta *d* a *e*. Levantando ahora una perpendi-

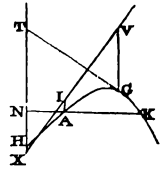




cular AI de una longitud cualquiera, señálese en cualquier forma la longitud AH *o Ah*, y desde esto, mediante la regla 6, obténgase gráficamente la longitud de AK y de A*k*. Si la razón de AK a A*k* es la misma que la de *d* a *e*, la longitud AH se tomó correctamente. Pero si es menor, tómese sobre la recta indefinida SM la longitud SM igual a la longitud asumida AH y elévese la perpendicular MN igual a la diferencia de las razones $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ multiplicada por una recta dada cualquiera. Con método semejante, a partir de la asunción de varias longitudes AH se tendrán varios puntos N, y por todos ellos se hará pasar una curva regular NNXN que corta en X a la recta SMMM. Asúmase por fin AH igual a la abscisa SX; de nuevo determínese desde aquí la longitud AK; y las longitudes, que sean respecto a la asumida longitud AI y a esta última AH como la longitud AK conocida experimentalmente a la longitud AK últimamente hallada, serán las verdaderas longitudes AI y AH que era preciso hallar. Pero una vez dadas éstas, también estará dada la resistencia del medio en el lugar A, toda vez que ésta será a la fuerza de la gravedad como AH a 2AI. Y aumentando la densidad del medio según la regla 4, si la resistencia así hallada aumenta en la misma proporción, será aún más exacta.



REGLA 8. Halladas las longitudes AH, HX; si ahora se busca la posición de la recta AH, según la cual, un proyectil lanzado con aquella velocidad, incidirá sobre un punto cualquiera K, elévense por los puntos A y K las rectas AC, KF perpendiculares al horizonte, de ellas AC en dirección hacia abajo y que sea igual a AI o a $\frac{1}{2}$HX. Con asíntotas AK, KF trácese una hipérbola cuya conjugada pase por el punto C, y con centro en A y distancia AH trácese un círculo que corte a dicha hipérbola en el punto H; y el proyectil lanzado según la recta AH caerá en el punto K. Q.E.I. Porque el punto H, debido a la longitud dada AH, está ubicado en un punto del círculo descrito. Trácese CH de modo que encuentre a AK y KF en E y F respectivamente; y por ser paralelas CH y MX, y por ser iguales AC y AI, AE será igual a AM y, por tanto, también a KN. Pero CE es a AE como FH a KN y, por tanto, CE y FH son iguales. Luego el punto H cae sobre la hipérbola descrita con asíntotas AK, KF, cuya conjugada pasa por el punto C y, por lo tanto, se halla en la intersección de esta hipérbola y el círculo descrito. Q.E.D. Pero hay que observar que esta operación resulta lo mismo, tanto si la recta AKN es paralela al horizonte, como si está inclinada respecto a él en algún ángulo; y que de las dos intersecciones H, *h*, surgen dos ángulos NAH, NA*h*; y que en la práctica mecánica basta con describir un solo círculo y después aplicar una línea indefinida CH sobre el punto C de modo que su sección comprendida entre el círculo y la recta FK sea igual a la parte CE situada entre el punto C y la recta AK.



Lo dicho sobre las hipérbolas se aplica fácilmente a las parábolas. Efectivamente, si XAGK representa una parábola a la cual XV es tangente en el vértice X, y las ordenadas IA, VG fuesen como unas potencias cualesquiera XI^n, XV^n de las abscisas XI, XV; trácense XT, GT, AH, de las cuales XT sea para-

lela a VG, y GT, AH sean tangentes de la parábola en G y A: y un cuerpo lanzado desde un lugar cualquiera A, según la línea AH prolongada, y con' la velocidad adecuada, describirá esta parábola, siempre que la densidad del medio en cada lugar G sea inversamente como la tangente GT. La velocidad en G será aquella con la cual se desplazaría el proyectil en un espacio no resistente en una parábola cónica de vértice G, diámetro prolongado hacia abajo VG, y «latus rectum» $\frac{2GT^2}{(nn+n)\times VG}$. Y la resistencia en G será a la fuerza de la gravedad como GT a $\frac{2nn-2nn}{n-2}$ VG. De donde si NAK representa una línea horizontal y se mantienen tanto la densidad del medio en A como la velocidad con la cual se lanza al cuerpo, mientras varía el ángulo NAH, las longitudes AH, AI, HX, permanecerán, y de aquí se tiene dado el vértice X de la parábola, la posición de la recta XI, y, tomando VG a IA como XV^n a XI^n, se tienen dados los puntos todos G de la parábola por los cuales pasará el proyectil.

SECCIÓN III

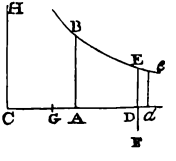
SOBRE EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS A LOS QUE SE RESISTE, PARTE EN RAZÓN DE LAS VELOCIDADES Y PARTE EN RAZÓN DEL CUADRADO DE DICHA RAZÓN

PROPOSICIÓN XI. TEOREMA VIII

Si se resiste a un cuerpo parte en razón de su velocidad y parte en razón del cuadrado de su velocidad, y se mueve en un medio uniforme con su sola fuerza ínsita, mientras los tiempos se toman en progresión aritmética; las cantidades inversamente proporcionales a las velocidades, aumentadas en una cantidad dada, estarán en progresión geométrica.

Con centro en C y asíntotas rectangulares CAD*d* y CH, trácese la hipérbola BE*e*, *y* AB, DE, *de*, sean paralelas a la asíntota CH. Sobre la asíntota CD sean dados los puntos A, G: y si el tiempo se representa por el área hiperbólica uniformemente creciente ABED, digo que la velocidad se puede representar por la longitud DF, cuya inversa GD junto con la línea dada CG compone la longitud CD que crece en progresión geométrica.

Pues sea DE*ed* el área mínima correspondiente a un incremento mínimo de tiempo, y D*d* será inversamente como DE, y por tanto directamente como CD. Pero el decremento $\frac{1}{GD}$ del mismo, que (por el lema II de este libro) es $\frac{Dd}{GD^2}$, será como $\frac{CD}{GD^2}$ o $\frac{CG+GD}{GD^2}$, esto es, como $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GD^2}$.



Por tanto, al crecer uniformemente el tiempo ABED por la adición de las partículas dadas ED*de*, decrece $\frac{1}{GD}$ junto con la velocidad en la misma razón. Pues el decremento de la velocidad es como la resistencia, esto es (por hipótesis), como la suma de dos cantidades, una de las cuales es como la velocidad y la otra como el cuadrado de la velocidad; y el decremento del propio $\frac{1}{GD}$ es como la suma de las cantidades $\frac{1}{GD}$ y $\frac{CG}{GD^2}$, de las cuales la primera es la misma $\frac{1}{GD}$, y la otra, $\frac{CG}{GD^2}$, es como $\frac{1}{GD^2}$: Por tanto, $\frac{1}{GD}$, por tener el mismo decremento, es como la velocidad. Y si la cantidad GD, inversamente proporcional a $\frac{1}{GD}$ es aumentada en una cantidad dada CG; la suma CD, creciendo uniformemente el tiempo ABED, crecerá en progresión geométrica. Q.E.D.

COROLARIO 1. Por lo tanto, si dados los puntos A, G, se representa el tiempo por el área hiperbólica ABED, la velocidad puede representarse por $\frac{1}{GD}$, inverso de GD.

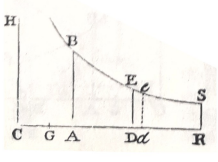
COROLARIO 2. Y tomando GA a GD como el inverso de la velocidad al comienzo al inverso de la velocidad al final de un tiempo cualquiera ABED, se hallará el punto G. Hallado éste, se puede hallar la velocidad para cualquier otro tiempo dado.

PROPOSICIÓN XII. TEOREMA IX

Con los mismos supuestos, digo que si los espacios descritos se toman en progresión aritmética, las velocidades, aumentadas en una cantidad dada cualquiera, estarán en progresión geométrica.

Sobre la asíntota CD sea dado el punto R, y elevada la perpendicular RS que encuentre a la hipérbola en S, represéntese el espacio descrito mediante el área hiperbólica RSED; y la velocidad será entonces como la longitud GD, que con la cantidad dada CG compone la longitud CD decreciente en progresión geométrica, mientras el espacio RSED crece en progresión aritmética.

Puesto que, al estar dado el incremento ED*de* del espacio, el segmento D*d*, que es el decremento de la propia GD, será como el inverso de ED y, por tanto, directamente como CD, esto es, como la suma del mismo GD y de la longitud dada CG. Pero el decremento de la velocidad, en el tiempo inversamente proporcional a ella, en el cual es descrita la partícula dada de espacio D*de*E, es una cantidad que es como la resistencia y el tiempo conjuntamente, esto es, directamente como la suma de dos cantidades, de las cuales la una es como la velocidad, la otra como el cuadrado de la velocidad, e inver-



samente como la velocidad; y, por lo tanto, directamente como la suma de dos cantidades, de las cuales la una está dada y la otra es como la velocidad. Por consiguiente, tanto el decremento de la velocidad como el de la línea GD es como una cantidad dada y una cantidad decreciente conjuntamente, y al ser análogos los decrementos, las cantidades decrecientes siempre serán análogas; a saber, la velocidad y la línea GD. Q.E.D.

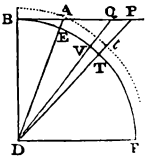
COROLARIO 1. Si la velocidad se representa por la línea GD, el espacio descrito será como el área hiperbólica DESR.

COROLARIO 2. Y si se supone en cualquier parte el punto R, se hallará el punto G tomando GR a GD como es la velocidad inicial a la velocidad tras recorrer un espacio cualquiera RSED. Hallado el punto G, se obtiene el espacio a partir de una velocidad dada, y viceversa.

COROLARIO 3. De donde, puesto que (por la proposición XI) se obtiene la velocidad a partir de un tiempo dado, y por esta proposición se obtiene el espacio a partir de una velocidad dada; de un tiempo dado se obtendrá el espacio, y viceversa.

PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA X

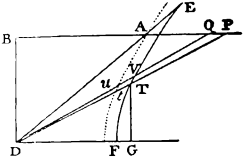
Supuesto que un cuerpo, atraído hacia abajo por una gravedad uniforme, asciende o desciende por una recta, y que sufre una resistencia en parte proporcional a la velocidad y en parte proporcional al cuadrado de la velocidad: digo que si se trazan rectas paralelas a los diámetros de un círculo y de una hipérbola, las cuales pasen por los extremos de los diámetros conjugados, y las velocidades fuesen como ciertos segmentos de las paralelas trazados desde un punto dado; los tiempos serán como los sectores de las áreas separados por rectas trazados desde el centro hasta los extremos de los segmentos, y viceversa.



CASO 1. Supongamos primero que el cuerpo asciende, y con centro en D y un semidiámetro cualquiera DB, trácese el cuadrante del círculo BETF, y por el extremo B del semidiámetro DB trácese la recta indefinida BAP paralela al semidiámetro DF. Sobre ella sea dado el punto A, y tómese el segmento AP proporcional a la velocidad. Y puesto que una parte de la resistencia es como la velocidad y otra parte como el cuadrado de la velocidad, la resistencia total será como $AP^2 + 2BAP$. Únanse DA, DP cortando al círculo en E y T, y represéntese la gravedad por DA^2 de modo que la gravedad sea a la resistencia como DA^2 a $AP^2 + 2BAP$: y el tiempo de todo el ascenso será como el sector EDT del círculo.

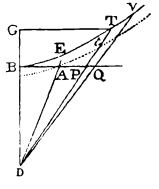
Pues trácese DVQ, separando el momento PQ de la velocidad AP y el momento DTV del sector DET correspondiente a un momento dado de tiempo; y este decremento PQ de la velocidad será como la suma de las fuerzas de la gravedad DA^2 y de la resistencia $AP^2 + 2BAP$, esto es (por la proposición XII del libro II de los *Elementos*), como DP2. Luego el área DPQ, proporcional a PQ, es como DP^2, y el área DTV, que es al área DPQ como DT^2 a DP^2, es como DT^2 ya dada. Por tanto, el área EDT decrece uniformemente, al modo del tiempo futuro, mediante la pérdida de partículas DTV dadas, y, por tanto, es proporcional al tiempo de ascenso total. Q.E.D.

CASO 2. Si la velocidad en el ascenso del cuerpo se representa por la longitud AP como antes, y se supone la resistencia como $AP^2 + 2BAP$, y la gravedad fuese menor que la representable por DA^2, tómese entonces la longitud de BD tal que $AB^2 - BD^2$ sea proporcional a la gravedad, y DF sea perpendicular e igual a DB, trazando por el vértice F la hipérbola FTVE, de cuyo semidiámetro sean conjugadas DB y DF, la cual hipérbola corta a DA en E, y a DP, DQ, en T y V; y el tiempo de todo el ascenso será como el sector TDE de la hipérbola.



Pues el decremento PQ de la velocidad, ocurrido en una partícula dada de tiempo, es como la suma de la resistencia $AP^2 + 2BAP$ y la gravedad $AB^2 - BD^2$, esto es, como $BP^2 - BD^2$. Pero el área DTV es al área DPQ como DT^2 a DP^2; y, por tanto, si sobre DF cae una perpendicular GT, como GT^2 o $GD^2 - DF$ a BD^2, y como GD^2 a BP^2, y por partes, como DF^2 a $BP^2 - BD2$. Por lo cual, dado que el área DPQ es como PQ, esto es, como $BP^2 - BD2$, el área DTV será como la ya dada DF^2. Por consiguiente, el área EDT decrece uniformemente en cada partícula igual de tiempo por sustracción de otras tantas partículas dadas DTV, y por lo mismo es proporcional al tiempo. Q.E.D.

CASO 3. Sea AP la velocidad de descenso de un cuerpo, y $AP^2 + 2BAP$ la resistencia, y $BD^2 - AB^2$ la fuerza de la gravedad, siendo recto el ángulo DBA. Y si con centro en D, vértice principal F, se traza la hipérbola rectangular BETV que corte a las prolongaciones de DA, DP y DQ en E, T y V; el sector DET de esta hipérbola será como el tiempo total de descenso.



Pues el incremento PQ de la velocidad, y el área DPQ proporcional a él, es como el exceso de la gravedad sobre la resistencia, esto es, como $BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2$, o $BD^2 - BP^2$. Y el área DTV es al área DPQ como DT^2 a DP^2 y, por tanto, como GT^2 o $GD^2 - BD2$ a BP^2 y como GD^2 a BD^2, y por partes, como BD^2 a $BD^2 - BP^2$. Por lo tanto, dado que el área DPQ es como $BD^2 - BP^2$, el área DTV será como el ya dado BD^2. Crece, pues, el área EDT uniformemente en cada partícula igual de tiempo según se vaya añadiendo cada partícula dada DTV y, por tanto, es proporcional al tiempo de descenso. Q.E.D.

COROLARIO. Si con centro en D y semidiámetro DA se traza por el vértice A el arco Ar, semejante al arco ET, que subtienda similarmente al ángulo ADT: la velocidad AP será a la velocidad, que podría perder subiendo o adquirir bajando dicho cuerpo en el tiempo EDT en un espacio no resistente, como el área del triángulo DAP al área del sector DAr; y, por tanto, estará dada para un tiempo dado. Pues la velocidad, en un medio no resistente, es proporcional al tiempo y, por ello, a dicho sector; en un medio resistente es como el triángulo; y en ambos, cuando es muy pequeña, se acerca a la razón de igualdad, como ocurre con el sector y el triángulo.

ESCOLIO

El caso podría demostrarse lo mismo en el ascenso de un cuerpo, cuando la fuerza de la gravedad es menor que la que es representable por DA^2 o $AB^2 + BD^2$ y mayor que la

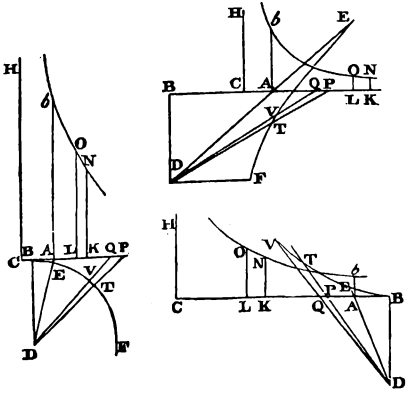
representable por $AB^2 - BD^2$, y debe representarse por AB^2. Pero vayamos a otras cosas.

PROPOSICIÓN XIV. TEOREMA XI

Con los mismos supuestos digo que el espacio descrito en el ascenso o descenso es como la diferencia del área con la que se representa el tiempo, y alguna otra área aumentada o disminuida en progresión aritmética, siempre que las fuerzas compuestas de la resistencia y la gravedad se tomen en progresión geométrica.

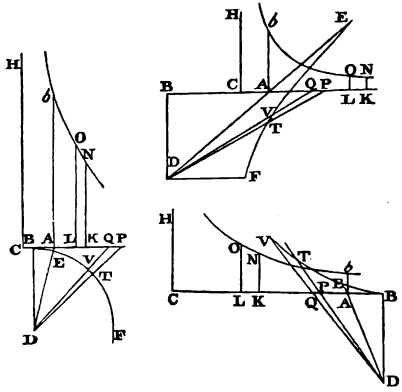
Tómese AC (en las tres figuras nuevas) proporcional a la gravedad, y AK a la resistencia. Pero tómense hacia el mismo lado del punto A si el cuerpo desciende, y de no ser así en lados opuestos. Elévese A*b* de modo que sea a DB como DB^2 a 4BAC: y una vez trazada la hipérbola *b*N respecto a las asíntotas rectangulares CK, CH, y elevada KN perpendicular a CK, el área A*b*NK aumentará o disminuirá en progresión aritmética, siempre que las fuerzas CK se tomen en progresión geométrica. Por tanto, digo que la distancia del cuerpo respecto a su máxima altitud es como el exceso del área A*b*NK sobre el área DET.

Pues, dado que la resistencia es como AK, esto es, como $AP^2 + 2BAP$, supuesta una cantidad dada cualquiera Z, supongamos que AK es igual a $\frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$; y (por el lema II de este libro), el momento KL de AK será igual a $\frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z}$ o a $\frac{2BPQ}{Z}$, y el momento KLON del área *Ab*NK será igual a $\frac{2BPQ \times LOPQ}{Z}$ o a $\frac{BPQAP \times BD^3}{2Z \times CK \times AB}$.



CASO 1. Ahora si el cuerpo está ascendiendo, sea la gravedad como $AB^2 + BD^2$ y siendo BET un círculo (en la primera figura), la línea AC que es proporcional a la gravedad, será $\frac{AB^2 + BD^2}{Z}$, y DP^2 o $AP^2 + 2BAP + AB^2 + BD^2$ será $AK \times Z + AC \times Z$ o también $CK \times Z$; y, por tanto, el área DTV será al área DPQ como DT^2 o DB^2 a $CK \times Z$.

CASO 2. Pero si el cuerpo asciende y la gravedad es como $AB^2 - BD^2$, la línea AC (en la segunda figura) será $\frac{AB^2 + BD^2}{Z}$, y DT^2 será a DP^2 como DF^2 o DB^2 a $BP^2 - BD^2$ o $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, esto es, como a $AK \times Z + AC \times Z$, o $CK \times Z$. Y, por tanto, el área DTV será al área DPQ como DB^2 a $CK \times Z$.



CASO 3. Y, por la misma razón, si el cuerpo desciende, y por tanto la gravedad es como $BD^2 - AB2$, y la línea AC (en la tercera figura) es igual a $\frac{BD^2 + AB^2}{Z}$, el área DTV será al área DPQ como DB^2 a $CK \times Z$, como antes.

Ahora bien, al estar estas áreas siempre en dicha razón, si el área DTV, mediante la cual se representa el momento de tiempo siempre igual a ella, es sustituida por un rectángulo cualquiera determinado, tal como $BD \times m$, el área DPQ, esto es, $\frac{1}{2}BD \times PQ$ será a $BD \times m$ como $CK \times Z$ a BD^2. Y de aquí que $PQ \times BD^3$ sea igual a $2BD \times m \times CK \times Z$, y el momento KLON del área A*b*NK, hallado antes, sea $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Réstese del área DET el momento DTV, o sea, $BD \times m$, y quedara $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$ Luego, la diferencia de los momentos, esto es, el momento de la diferencia de áreas, es igual a

$\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; y por tanto, por estar dado $\frac{BD \times m}{AB}$, como la velocidad AP, esto es, como el momento de espacio descrito por el cuerpo en el ascenso o en el descenso. Y, en consecuencia, la diferencia de áreas y dicho espacio, al crecer o decrecer en momentos proporcionales que comienzan y se desvanecen a la vez, son proporcionales. Q.E.D.

COROLARIO. Si se llama M a la longitud que resulta de dividir el área DET por la línea BD, y se toma otra longitud V que esté en razón de la longitud M como la de la línea DA a la línea DE: el espacio descrito por un cuerpo en todo el ascenso o el descenso en un medio resistente será al espacio descrito por un cuerpo en el mismo tiempo cayendo desde un estado de reposo, como la diferencia de las áreas mencionadas $\frac{BD + V^2}{AB}$; y, por tanto, para un tiempo dado, está dado. Pues el espacio en un medio no resistente es como el cuadrado del tiempo, o como V^2; y, por estar dadas BD y AB, como $\frac{BD + V^2}{AB}$. Esta área es igual al área $\frac{DA^2 + BD \times M^2}{DE^2 \times AB}$, y el momento de M es *m*; y, por tanto, el momento de dicha área es $\frac{DA^2 + BD \times M^2 \times m}{DE^2 \times AB}$. Pero este momento es al momento de las diferencias de las áreas antedichas DET y A*b*NK, o sea, a $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, como $\frac{DA^2 + BD \times M^2}{DE^2}$ a $\frac{1}{2}BD \times AP$, o como $\frac{DA^2}{DE^2} \times DET$ a DAP; por consiguiente, cuando las áreas DET y DAP son mínimas, están en razón de igualdad. Pues el área $\frac{BD \times V^2}{AB}$ y la diferencia de las áreas DET y A*b*NK, cuando todas estas áreas son mínimas, tienen iguales momentos, y por lo mismo, son iguales. De donde las velocidades, y por tanto también los espacios recorridos en ambos medios en el mismo tiempo tienden a ser iguales al principio del descenso o al final del ascenso, y por tanto son entonces entre sí como el área $\frac{BD \times V^2}{AB}$ y la diferencia de las áreas DET y A*b*NK; y además, puesto que el espacio en un medio no resistente es siempre como $\frac{BD \times V^2}{AB}$, mientras el espacio en un medio resistente es siempre como la diferencia de las áreas DET y A*b*NK: es preciso que los espacios en ambos medios, descritos en tiempos iguales cualesquiera, sean $\frac{BD \times V^2}{AB}$ y la diferencia de las áreas DET y A*b*NK. Q.E.D.

ESCOLIO

En los fluidos la resistencia de los cuerpos esféricos procede en parte de la tenacidad, en parte del rozamiento y en parte de la densidad del medio. Y la parte de la resistencia pro-

cedente de la densidad del fluido es como se ha dicho, como el cuadrado de la velocidad; la parte procedente de la tenacidad del fluido es uniforme, o sea, como el momento del tiempo; por lo mismo se podría pasar a considerar el movimiento de los cuerpos a los cuales se resiste en parte con una fuerza uniforme, o sea, en razón de los momentos de tiempo, y parte en razón cuadrada de la velocidad. Pero basta haber abierto la puerta para esta especulación en las proposiciones VIII y IX precedentes y sus corolarios. Efectivamente, en dichas proposiciones se puede sustituir la resistencia uniforme a un cuerpo ascendente debida a la gravedad por la resistencia uniforme procedente de la tenacidad del medio, cuando el cuerpo se mueve por la sola fuerza ínsita; y cuando el cuerpo asciende por una recta habrá que añadir esta resistencia uniforme a la fuerza de gravedad; mientras que habrá que restarla, cuando el cuerpo desciende por una recta. También se podría pasar al movimiento de cuerpos a los que se resiste en parte uniformemente, parte en razón de la velocidad y parte en razón cuadrada de la velocidad. He abierto un camino en las proposiciones precedentes XIII y XIV, en las que también puede sustituirse la resistencia uniforme debida a la tenacidad del medio en lugar de la fuerza de la gravedad, o componerse con ella como antes. Pero paso a otras cosas.

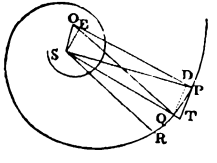
SECCIÓN IV

DEL MOVIMIENTO CIRCULAR DE LOS CUERPOS EN MEDIOS RESISTENTES

LEMA III

Sea PQR una espiral que corte todos los radios SP, SQ, SR, etc., en ángulos iguales. Trácese la línea recta PT tangente a la espiral en un punto cualquiera P y que corte al radio SQ en T y, elevadas las perpendiculares PO, QO a la espiral que concurren en O, únase SO. Digo que si los puntos P y Q se aproximan hasta coincidir, el ángulo PSO resulta recto, y la razón última del rectángulo TQ × 2PS a PQ^2 será la razón de igualdad.

Puesto que al restar de los ángulos rectos OPQ, OQR, los ángulos iguales SPQ, SQR, quedarán los ángulos iguales OPS, OQS. Luego el círculo que pasa por los puntos O, S, P pasará también por el punto Q. Coincidan los puntos P y Q, y este círculo será tangente a la espiral en el lugar de coincidencia de PQ y, por tanto, cortará perpendicularmente a la recta OP. Resultará, pues, OP diámetro de este círculo y el ángulo OSP recto sobre el semicírculo. Q.E.D.

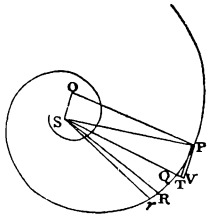


Sobre OP trácense las perpendiculares QD, SE y las últimas razones de las líneas serán como sigue: TQ a PD como TS o PS a PE, o sea, 2PO a 2PS; y también PD a PQ como PQ a 2PO; y permutando, TQ a PQ como PQ a 2PS. De donde resulta que PQ^2 es igual a TQ × 2PS. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XV. TEOREMA XII

Si la densidad de un medio en cada punto es inversamente como la distancia del punto a un centro inmóvil, y la fuerza centrípeta es como el cuadrado de la densidad: digo que un cuerpo puede girar en una espiral que corte en un ángulo dado a todos los radios trazados desde dicho centro.

Dense los supuestos del lema anterior, y prolónguese SQ hasta V, de modo que SV sea igual a SP. En un tiempo cualquiera y en medio resistente, describa el cuerpo el arco mínimo PQ, y en doble tiempo el arco mínimo PR; y los decrementos de estos arcos procedentes de la resistencia, o las diferencias respecto a los arcos que describirían en los mismos tiempos en un medio no resistente, serán entre sí como los cuadrados de los tiempos en que se generan: por tanto, el decremento del arco PQ es la cuarta parte del decremento del arco PR. De donde también, si se toma el área PSQ igual al área QS*r*, el decremento del arco PQ será igual a la mitad del segmento R*r*; y, por tanto, la fuerza de resistencia y la fuerza centrípeta son entre sí como los mismos segmentos $\frac{1}{2}$R*r* y TQ que generan a la vez. Puesto que la fuerza centrípeta, con la que el cuerpo es urgido en P, es inversamente como SP^2, y (por el lema X del libro I) el segmento TQ, generado por dicha fuerza, está en razón compuesta de la razón de dicha fuerza y de la razón del cuadrado del tiempo en que se describe el arco PQ (pues en este caso desprecio la resistencia por ser infinitamente más pequeña que la fuerza centrípeta), TQ × SP^2, esto es (por el lema anterior), $\frac{1}{2}PQ^2 \times SP$, será como el cuadrado del tiempo, y por tanto el tiempo es como $PQ \times \sqrt{SP}$; y la velocidad del cuerpo con la que describe en dicho tiempo el arco PQ como $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ o $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, esto es, como el inverso de la raíz cuadrada de SP. Y por la misma razón, la velocidad con la que se describe el arco QR es como el inverso de la raíz cuadrada del propio SQ. Pero dichos arcos PQ y QR son como las velocidades descriptoras entre ellas, es decir, como la raíz cuadrada de SQ a SP, o sea, como SQ a $\sqrt{SP \times SQ}$, y por ser iguales los ángulos SPQ, SQ*r* y las áreas PSQ, QS*r* también iguales, el arco PQ es al arco Q*r* como SQ a SP. Tómense las diferencias de consecuentes proporcionales y resultará el arco PQ al arco R*r* como SQ a SP − $\sqrt{SP \times SQ}$, es decir, $\frac{1}{2}$VQ. Pues, al coincidir los puntos P y Q, la razón última de SP − $\sqrt{SP \times SQ}$ a $\frac{1}{2}$VQ es la de igualdad. Dado que el decremento del arco PQ originado por la resistencia, o el doble del mismo R*r*, es como la resistencia y el cuadrado del tiempo conjuntamente, la resistencia será como $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$. Pero PQ era a R*r* como SQ a $\frac{1}{2}$VQ, y de aquí que $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$ sea como $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ o como $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SP^2}$. Pues cuando los puntos P y Q coinciden, coin-

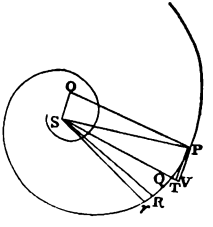


ciden también SP y SQ, y el ángulo PVQ se hace recto; y por ser semejantes los triángulos PVQ, PSO, resulta PQ a $\frac{1}{2}$VQ como OP a $\frac{1}{2}$OS. Luego $\frac{OS}{OP \times SP^2}$ es, entonces, como la resistencia, esto es, como la densidad del medio en P y como el cuadrado de la velocidad conjuntamente. Réstese la razón del cuadrado de la velocidad, o sea, $\frac{1}{SP}$ y quedará la densidad del medio en P como o $\frac{OS}{OP \times SP}$. Dése, pues, una espiral, y por estar dada la razón de OS a OP, la densidad del medio en P será como $\frac{1}{SP}$. Por tanto, en un medio cuya densidad sea inversamente proporcional a la distancia al centro SP, un cuerpo puede girar en dicha espiral. Q.E.D.

COROLARIO 1. En un punto cualquiera P la velocidad será siempre aquella con la que un cuerpo, en un medio no resistente y la misma fuerza centrípeta, giraría en un círculo a la misma distancia SP del centro.

COROLARIO 2. Si la distancia SP está dada, la densidad del medio es como $\frac{OS}{OP}$, pero si no se da dicha distancia es como $\frac{OS}{OP \times SP}$. Y por ello una espiral puede acomodarse a cualquiera densidad de medio.

COROLARIO 3. La fuerza de resistencia en un punto cualquiera P es a la fuerza centrípeta en el mismo punto como $\frac{1}{2}$OS a OP. Pues tales fuerzas son entre sí como $\frac{1}{2}$R*r* y TQ, o como $\frac{\frac{1}{4}VQ \times PQ}{SQ}$ y $\frac{\frac{1}{2}PQ^2}{SP}$, es decir, como $\frac{1}{2}$VQ y PQ o $\frac{1}{2}$OS y OP. Dada, pues, una espiral, está dada la proporción de la resistencia respecto a la fuerza centrípeta; y viceversa, dada dicha proporción, está dada la espiral.

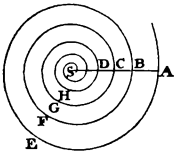


COROLARIO 4. Por consiguiente, el cuerpo no puede girar en esta espiral a no ser que la fuerza de resistencia sea menor que la mitad de la fuerza centrípeta. Sea la resistencia igual a la mitad de la fuerza centrípeta, y la espiral coincidirá con la línea recta PS, y el cuerpo descenderá hacia el centro por dicha recta con una velocidad que será a la velocidad con la que, según hemos probado antes para una parábola (teorema X del libro primero) ocurre el descenso en un medio no resistente, como la raíz cuadrada de la razón de la unidad al número dos. Y los tiempos de descenso serán aquí como el inverso de las velocidades y, por tanto, están dados.

COROLARIO 5. Y puesto que a distancias iguales del centro la velocidad es igual en la espiral PQR y en la recta SP, y la longitud de la espiral a la longitud de la recta se halla en una razón dada, a saber, en la razón de OP a OS, el tiempo de descenso por la espiral será al tiempo de descenso por la recta SP en esa misma razón dada y, por tanto, también dado.

COROLARIO 6. Si con centro en S y con dos distancias dadas cualesquiera se trazan dos círculos, y manteniendo estos círculos se hace cambiar en alguna forma el ángulo que forma la espiral con el radio PS, el número de revoluciones que puede completar un cuerpo en el interior de las circunferencias de dichos círculos caminando en espiral de una circunferencia a otra es como $\frac{PS}{OS}$, o como la tangente del ángulo que forma la espiral con el radio PS, mientras el tiempo de dichas revoluciones será como $\frac{OP}{OS}$, es decir, como la secante del mismo ángulo, o inversamente proporcional a la densidad del medio.

COROLARIO 7. Si un cuerpo, en un medio con densidad inversamente proporcional a la distancia de cada punto al centro, gira por una curva cualquiera AEB en torno a dicho centro, y corta al primer radio AS en B con el mismo ángulo con que lo hiciese antes en A, y esto con una velocidad que sea a la velocidad anterior en A en razón inversa de la raíz cuadrada de las distancias al centro (esto es, como AS a la media proporcional entre AS y BS) dicho cuerpo describirá innumerables revoluciones semejantes BFC, CGD, etc., y con sus intersecciones dividirá el radio AS en partes continuamente proporcionales AS, BS, CS, DS, etc. Mas los tiempos de las revoluciones serán directamente como los perímetros de las órbitas AEB, BFG, CGD, etc. e inversamente como las velocidades en A, B, C; esto es, como $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Y el tiempo total empleado por el cuerpo para llegar al centro será al tiempo de la primera revolución como la suma de todas las continuamente proporcionales hasta el infinito $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ al primer término $AS^{\frac{3}{2}}$; esto es, como dicho primer término $AS^{\frac{3}{2}}$ a la diferencia de los dos primeros $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, o como $\frac{2}{3}$AS a AB, muy aproximadamente. De donde dicho tiempo total puede hallarse sin dificultad.



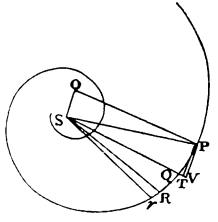
COROLARIO 8. De lo cual puede obtenerse con relativa facilidad el movimiento de cuerpos en medios de densidad uniforme o que se atenga a cualquiera otra ley determinada. Con centro en S, y distancias continuamente proporcionales SA, SB, SC, etc., trácense círculos cualesquiera, y establézcase que los tiempos de revolución entre los perímetros de dos cualesquiera de estos círculos en el medio del que he hablado antes es al tiempo de revolución en el medio propuesto entre los mismos círculos, como la densidad media del medio propuesto entre los dos círculos a la densidad media del medio del que se ha tratado más arriba entre los mismos círculos muy aproximadamente: y asimismo que la secante del ángulo con que la espiral antes determinada corta al radio AS en el medio arriba considerado está en la misma razón respecto a la secante del ángulo con que esta nueva espiral corta al mismo radio en el medio ahora propuesto; y también que los números totales de revoluciones entre dichos dos círculos son muy aproximadamente como las tangentes de sus ángulos. Si esto ocurre continuamente entre cada par de círculos, el movimiento se continuará a través de todos los círculos. Y de este modo no será difícil imaginar cómo y en qué tiempos deberán girar los cuerpos en cualquier medio regular.

COROLARIO 9. Y aunque los movimientos excéntricos ocurran en espirales próximas a la forma oval, no obstante, si imaginamos cada revolución de dichas espirales distante de las siguientes con los mismos intervalos y acercándose al centro en los mismos grados que la espiral anteriormente descrita, comprenderemos también cómo ocurren los movimientos de los cuerpos en semejantes espirales.

PROPOSICIÓN XVI. TEOREMA XIII

Si la densidad de un medio es en cada punto inversamente proporcional a la distancia de esos puntos a un centro inmóvil, y la fuerza centrípeta es inversamente proporcional a una potencia cualquiera de dicha distancia: digo que un cuerpo puede girar en una espiral que corta a todos los radios trazados desde dicho centro con un ángulo dado.

Se demuestra del mismo modo que la proposición anterior. Pues si la fuerza centrípeta es en P inversamente proporcional a cualquiera potencia SP^{n+1} de la distancia SP, cuyo índice es $n + 1$, se deduce, como más arriba, que el tiempo en el cual el cuerpo describe un arco PQ será como $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; y la resistencia en P como $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP^n}$, o también, como $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) \times VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$ y, por tanto, como $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, esto es, por estar dado dado $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) \times OS}{OP}$, inversamente como SP^{n+1} Y por lo mismo, puesto que la velocidad es inversamente como $SPT^{\frac{1}{2}n}$, la densidad en P será inversamente proporcional a SP.



COROLARIO 1. La resistencia es a la fuerza centrípeta como $(1 - \frac{1}{2}n) \times OS$ a OP.

COROLARIO 2. Si la fuerza centrípeta fuese como SP^3, entonces $(1 - \frac{1}{2}n) = 0$ y, por tanto, la resistencia y la densidad del medio serán nulas, como en la proposición IX del libro primero.

COROLARIO 3. Si la fuerza centrípeta es inversamente como una potencia cualquiera del radio SP cuyo índice sea mayor que 3, la resistencia positiva se transforma en negativa.

ESCOLIO

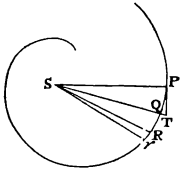
Por lo demás, esta proposición y las anteriores, que se refieren a medios con densidades desiguales, deben entenderse referidas al movimiento de cuerpos tan pequeños que la densidad del medio mayor hacia un lado del cuerpo que hacia el otro, no venga a ser digna de consideración. También supongo que la resistencia, «caeteris paribus», es pro-

porcional a la densidad. Por lo cual, para medios cuya fuerza de resistencia no sea como la densidad, deberá la densidad aumentarse o disminuirse de modo que quede suprimido el exceso de resistencia o suplida su falta.

PROPOSICIÓN XVII. PROBLEMA IV

Hallar tanto la fuerza centrípeta como la resistencia del medio que permitan a un cuerpo, dada la ley de la velocidad, girar en una espiral dada.

Sea dicha espiral PQR. De la velocidad con la cual el cuerpo recorre el arco mínimo PQ se tendrá dado el tiempo, y de la altura TQ, que es como la fuerza centrípeta y el cuadrado del tiempo, se tendrá dada la fuerza. Después, de la diferencia RS*r* de áreas PSQ, QSR, completadas en partículas iguales de tiempo, se obtendrá la retardación del cuerpo, y a partir de ésta se hallarán la resistencia y la densidad del medio.



PROPOSICIÓN XVIII. PROBLEMA V

Dada la ley de la fuerza centrípeta, hallar la densidad del medio en cada punto, con la cual describa un cuerpo una espiral dada.

Hay que hallar la velocidad en cada punto a partir de la fuerza centrípeta, y después, hay que hallar la densidad del medio a partir de la retardación de la velocidad, como en la proposición anterior.

Pero ya he indicado el método para tratar estos problemas en la proposición X de este libro y en el lema II; y no deseo entretener más al lector en estas abstrusas disquisiciones. Ahora habrá que añadir algo sobre las fuerzas de los cuerpos que se desplazan y sobre la densidad y resistencia de los medios en los cuales ocurren los movimientos vistos hasta ahora y otros similares a ellos.

SECCIÓN V

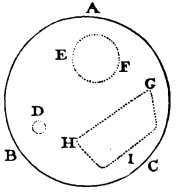
SOBRE LA DENSIDAD Y COMPRESIÓN DE LOS FLUIDOS, Y SOBRE HIDROSTÁTICA

DEFINICIÓN DE FLUIDO

Fluido es todo cuerpo cuyas partes ceden a la aplicación de cualquier fuerza, y, al ceder, se mueven entre sí con facilidad.

PROPOSICIÓN XIX. TEOREMA XIV

Todas las partes de un fluido homogéneo e inmóvil encerrado en un vaso cualquiera inmóvil y comprimido por todos lados (sin tomar en cuenta ni la condensación ni la gravedad ni fuerza centrípeta alguna) soportan igual presión por todas partes y permanecen en sus lugares sin que dicha presión origine movimiento alguno.



Caso 1. Introdúzcase un fluido en el vaso esférico ABC y comprímase uniformemente por todas partes: digo que ninguna parte del mismo se moverá debido a la tal presión. Pues, si una parte D se moviese, sería preciso que todas las partes del mismo situadas a la misma distancia del centro se moviesen a la vez con un movimiento similar, y esto por ser semejante e igual la presión de todas, y se supone excluido todo otro movimiento, salvo el procedente de la presión. Pero no pueden acercarse más hacia el centro, salvo que el fluido sea condensado hacia el centro; contra la hipótesis. Tampoco pueden alejarse de él más, a no ser que el fluido se condense hacia la circunferencia; también contra la hipótesis. Tampoco pueden, manteniendo su distancia al centro, moverse en dirección alguna, porque, por la misma razón, se moverían en dirección contraria; pues la misma parte no puede moverse en direcciones opuestas en el mismo momento. Luego ninguna parte del fluido se moverá de su lugar. Q.E.D.

Caso 2. Ahora digo que todas las partes esféricas de este fluido soportan presiones iguales por todos lados. Pues sea EF una parte esférica del fluido, y si no recibiese igual presión por todas partes, auméntese la presión menor hasta que resulte presionada igual por todas partes; y sus partes, por el caso 1, permanecerán en su lugar. Pero antes de aumentar la presión. también permanecían en su lugar, por el mismo primer caso, y con la presión añadida se moverían de su lugar, por la definición de fluido. Pero estas dos afirmaciones son contradictorias. Luego era falsa la afirmación de que la esfera EF no padecía igual presión por todos lados. Q.E.D.

Caso 3. Además digo que la presión de las diversas partes esféricas es igual. Pues las partes esféricas contiguas se presionan mutuamente e igualmente en los puntos de contacto, por la ley III del movimiento. Pero, por el caso 2, soportan igual fuerza de presión por todos lados. Luego dos partes esféricas no contiguas soportarán la misma fuerza, toda vez que una parte esférica, intermedia puede tocar a ambas. Q.E.D.

Caso 4. Ahora digo que todas las partes de un fluido soportan igual presión en todas las partes. Pues dos partes cualesquiera pueden ser tocadas por partes esféricas en cualquier punto, y ahí dichas partes esféricas presionan por igual, por el caso 3, y a la inversa son presionadas por aquéllas por igual, por la ley III del movimiento. Q.E.D.

Caso 5. Puesto que una parte cualquiera GHI del fluido está encerrada en el resto del fluido como en un recipiente y es presionada por igual por todas partes, mientras las partes del mismo se presionan entre sí por igual y están entre sí en reposo; es evidente que las partes de cualquier GHI de un fluido, al estar igualmente presionadas por todos lados, se presionan entre sí por igual y reposan entre sí. Q.E.D.

Caso 6. Por tanto, si dicho fluido está encerrado en un vaso no rígido, y no fuese presionado por igual por todos lados, cederá ante la presión más fuerte, por la definición de fluidez.

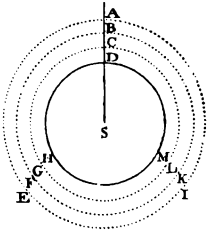
CASO 7. Y por lo mismo, un fluido en un vaso rígido no soportará una presión más fuerte por un lado que por otro, sino que cederá ante ella, y esto instantáneamente, porque el lado rígido del vaso no sigue al líquido que cede. Pero al ceder presionará sobre el lado opuesto, y así la presión tiende a igualarse por doquier. Y puesto que el fluido trata de apartarse instantáneamente de la parte más presionada, mientras es soportado por la resistencia del vaso en el lado contrario, la presión se restablece instantáneamente por todos lados por igual sin movimiento local, con lo que las partes del fluido, por el caso 5, se presionan entre sí por igual y reposan entre sí. Q.E.D.

COROLARIO. De donde, tampoco podrá cambiarse el movimiento de las partes del fluido entre sí, mediante una presión efectuada sobre la superficie externa del fluido, salvo en la medida en que la superficie cambie de forma en algún punto, o en que las partes del fluido oprimiéndose entre ellas más o menos intensamente se deslicen entre ellas con mayor o menor facilidad.

PROPOSICIÓN XX. TEOREMA XV

Si cada parte de un fluido esférico, homogéneo a distancias iguales del centro, que descansa sobre un fondo esférico concéntrico, gravita hacia el centro del todo, el fondo soportará el peso de un cilindro cuya base fuese igual a la superficie del fondo y cuya altura fuese igual a la altura del fluido sobrepuesto.

Sea DHM la superficie del fondo, y AEI la superficie superior del fluido. Divídase el fluido en esferas concéntricas de igual grosor, mediante innumerables superficies esféricas BFK, CGL; imagínese que la fuerza de la gravedad actúe únicamente sobre la superficie exterior dé cada esfera y que las acciones son iguales sobre cada parte igual de todas las superficies. Entonces, la superficie más externa AE sufre la sola presión de su fuerza de gravedad, que presiona no sólo sobre las partes todas de la superficie superior, sino que también (por la proposición XIX) presiona igualmente en razón de su extensión sobre la superficie segunda BFK. Esta segunda superficie BFK sufre la presión de su propia fuerza de gravedad, además de la presión añadida de la primera, lo que duplica la presión. La tercera superficie CGL padece una presión triple, esto es, la de su propia fuerza de gravedad junto con la presión de la anterior que padece en función de su propia extensión. Y de igual modo, la superficie cuarta padece una presión cuádruple, la quinta quíntuple, y así sucesivamente. Por consiguiente, la presión que padece cada superficie, no es como el volumen de fluido que reposa encima de ella, sino como el número de esferas que hay hasta la superficie superior del fluido; y es igual a la gravedad del orbe inferior multiplicada por el número de orbes: esto es, a la gravedad de un sólido que tiene razón última de igualdad con el cilindro susodicho (siempre que aumente el número de orbes y disminuya su grosor infinitamente, de manera que la acción de la gravedad desde la superficie inferior hasta la superior se haga continua). Luego la superficie inferior soporta el peso del cilindro definido arriba.



Q.E.D. Y, por la misma razón, será evidente la proposición cuando la gravedad decrece en una razón cualquiera dada desde el centro, lo mismo que cuando el fluido es más raro arriba y más denso abajo. Q.E.D.

COROLARIO 1. Por tanto, el fondo no soporta todo el peso del fluido que hay encima, sino sólo aquella parte del peso que se describe en la proposición; el peso restante es soportado por la forma abovedada del fluido.

COROLARIO 2. A distancias iguales del centro la cantidad de presión es siempre la misma, tanto si la presión sobre la superficie es paralela al horizonte como si es perpendicular u oblicua; tanto si el fluido, rebosando por encima de la superficie presionada, asciende perpendicularmente en línea recta como si serpea oblicuamente por sinuosas cavidades y canales, sean regulares o irregulares, anchos o angostos. Se infiere que la presión en nada cambia por estas circunstancias al aplicar la demostración de este teorema a cada uno de los casos de fluidos.

COROLARIO 3. Por la misma demostración se infiere también (por la proposición XIX) que las partes de un fluido pesado no adquieren, por la presión del peso que soportan, ningún movimiento entre ellas; si se excluye el movimiento debido a la condensación.

COROLARIO 4. Y, por lo tanto, si otro cuerpo de la misma gravedad específica, que no admita condensación, se sumergiese en este fluido, tampoco adquirirá movimiento alguno por causa del peso que incide sobre él: no descenderá, no ascenderá ni se verá obligado a cambiar su forma. Si es esférico permanecerá esférico, pese a la presión; si es cuadrado permanecerá cuadrado: y esto tanto si es blando como si es muy fluido, tanto si flota libremente en el fluido como si reposa en el fondo. Pues toda parte perteneciente al fluido posee la misma razón que el cuerpo sumergido, y la razón de todos los cuerpos sumergidos, que tengan la misma figura y gravedad específica siendo de la misma magnitud, es la misma también. Si un cuerpo sumergido, conservando su peso, se licuase y tomase la forma del fluido, tal cuerpo, si antes ascendía o descendía o tomaba una forma nueva debido a la presión, también ahora ascenderá o descenderá o habrá de tomar una forma nueva: y esto precisamente porque permanecen su gravedad y las demás causas de los movimientos. Pero (por el caso 5 de la proposición XIX) ahora reposaría y conservaría su figura. Luego también antes.

COROLARIO 5. Por consiguiente, el cuerpo específicamente más grave que el fluido contiguo a él se hundirá y el específicamente más leve ascenderá, y se seguirá el movimiento y cambio de figura que puedan deberse al exceso o defecto de gravedad susodichos. Pues tales exceso o defecto son la razón del impulso que urge al cuerpo, que de otro modo está en equilibrio con las partes del fluido; y puede compararse con el exceso o defecto de peso en uno de los dos platillos de la balanza.

COROLARIO 6. Por tanto, hay una doble gravedad en los cuerpos ubicados en un fluido; una verdadera y absoluta, otra aparente, común y relativa. Gravedad absoluta es la fuerza total con la que el cuerpo tiende hacia abajo; relativa y común es el exceso de gravedad con el cual el cuerpo tiende hacia abajo más que el fluido que lo rodea. Con el primer tipo de gravedad las partes de los fluidos y de todos los cuerpos gravitan hacia los lugares que ocupan; y por ello componen, con sus pesos juntos, el peso del todo. Pues el todo completo es grave, como se puede ver en los vasos llenos de líquido; y el peso del todo es igual a los pesos de todas las partes y, por tanto, se compone de ellas. Con el otro tipo de gravedad los cuerpos no gravitan hacia sus lugares, esto es, al concurrir no se sobrecargan, sino que impidiendo los mutuos intentos de descenso reposan en sus lugares. Las cosas que están en el aire y no sobrecargan comúnmente no se juz-

gan pesadas. Las que sobrecargan sí lo son, en la medida en que no son sostenidas por el peso del aire. Para el común de la gente los pesos no son sino los excesos de peso verdadero por encima del peso del aire. De aquí que vulgarmente se llamen leves a las cosas que son menos graves y, al ceder ante la sobrecarga del aire, se elevan hacia arriba. Son relativamente leves, pero no absolutamente, toda vez que en el vacío descienden. Así como en el agua los cuerpos, que por su mayor o menor gravedad descienden o ascienden, son relativa y aparentemente graves o leves, y su gravedad o levedad relativa y aparente es el exceso o defecto con el que su verdadera gravedad o supera a la gravedad del agua o es superada por ella. Pero las cosas que no descienden sobrecargando ni ascienden cediendo a una sobrecarga, pese a que con sus pesos verdaderos aumenten el peso del todo, no gravitan en el agua relativamente y para el sentir común. Pues la demostración de estos casos es similar.

COROLARIO 7. Lo demostrado para la gravedad, tiene valor para otras fuerzas centrípetas cualesquiera.

COROLARIO 8. Por consiguiente, si el medio, en el cual se mueve un cuerpo cualquiera, estuviese sometido a la acción de su propia gravedad o de otra fuerza centrípeta cualquiera, y el cuerpo padece esta misma acción más fuertemente, la diferencia de fuerzas es aquella fuerza motriz que hemos considerado en las proposiciones anteriores como fuerza centrípeta. Si, en cambio, el cuerpo sufre esa acción más levemente, la diferencia de fuerzas debe considerarse como fuerza centrífuga.

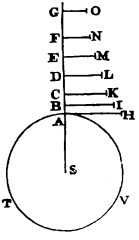
COROLARIO 9. Pero como los fluidos, al presionar sobre los cuerpos inmersos en ellos, no cambian sus figuras externas, también se sigue (por el corolario de la proposición XIX) que no cambiarán la ubicación de las partes internas entre sí: y, por ende, si se sumergen animales, y toda sensación procede del movimiento de las partes, ni sufrirán daño los cuerpos sumergidos ni tendrán excitación sensorial alguna, salvo en la medida en que estos cuerpos pudieran ser objeto de condensación por compresión. Y lo mismo ocurre con cualquier sistema de cuerpos contenido en un fluido que lo comprima. Todas las partes del sistema sufrirán los mismos movimientos que si se hallasen en el vacío y retuviesen únicamente su gravedad, salvo en la medida en que el fluido o bien resista algo a sus movimientos, o bien las obligue con su compresión a aglutinarse.

PROPOSICIÓN XXI. TEOREMA XVI

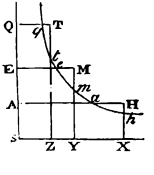
Sea la densidad de un fluido cualquiera proporcional a la compresión y sean sus partes atraídas hacia abajo por una fuerza centrípeta inversamente proporcional a las distancias de esas partes al centro: y digo que, si tales distancias se toman continuamente proporcionales, las densidades del fluido a esas mismas distancias también serán continuamente proporcionales.

Represente ATV el fondo esférico sobre el que descansa el fluido, S el centro, SA, SB, SD, SE, SF, etc., distancias continuamente proporcionales. Elévense las perpendiculares AH, BI, CK, DL, EM, FN, etc., que sean como las densidades del medio en los lugares A, B, C, D, E, F; y las gravedades específicas en esos puntos serán como $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, etc., o, lo que es lo mismo, como $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, etc. Imaginemos,

en primer lugar, que estas gravedades son uniformemente continuas de A a B, de B a C, de C a D, etc., ocurriendo los decrementos por grados en los puntos B, C, D, etc. Multiplicadas estas gravedades por las alturas AB, BC, CD, etc., se obtendrán las presiones AH, BI, CK, etc., con las cuales está urgido el fondo ATV (según el teorema XV). Por tanto, la partícula A soporta todas las presiones AH, BI, CK, DL, y así sucesivamente hasta el infinito; y la partícula B soportará todas menos la primera AH; la partícula C soportará a todas menos las dos primeras AH, BI; y así sucesivamente: y en consecuencia, la densidad AH de la partícula primera A es a la densidad BI de la segunda partícula B como la suma de todos los AH + BI + CK + DL, hasta el infinito, a la suma de todos los BI + CK + DL, etc. Y la densidad BI de la segunda partícula B es a la densidad CK de la tercera C como la suma de BI + CK + DL, etc., a la suma de CK + DL, etc. Por tanto, dichas sumas son proporcionales a sus diferencias AH, BI, CK, etc., y por ello continuamente proporcionales (por el lema 1 de este libro) y, por tanto, las diferencias AH, BI, CK, etc., proporcionales a las sumas, son también continuamente proporcionales. Por lo cual, al ser las densidades en los puntos A, B, C, etc., como AH, BI, CK, etc., éstas serán también continuamente proporcionales. Procédase por tramos, y por corresponder a las distancias SA, SC, SE, continuamente proporcionales, serán también las densidades AH, CK, EM, continuamente proporcionales. Y por la misma razón, para distancias cualesquiera SA, SD, SG, continuamente proporcionales, las densidades AH, DL, GO, serán continuamente proporcionales. Júntense ahora los puntos A, B, C, D, E, etc., de modo que la progresión de las gravedades específicas desde el fondo A hasta la cima del fluido resulte continua, y para distancias cualesquiera SA, SD, SG, continuamente proporcionales, las densidades AH, DL, GO, al ser siempre continuamente proporcionales, permanecerán también ahora continuamente proporcionales. Q.E.D.



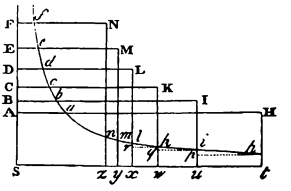
COROLARIO. De aquí que si se tiene dada la densidad en dos puntos, como A y E, puede inferirse la densidad del fluido en otro punto cualquiera Q. Trácese, con centro en S y asíntotas rectas SQ, SX, una hipérbola que corte a las perpendiculares AH, EM, QT, en *a*, *e*, *q*, *lo* mismo que a las perpendiculares HX, MY, TZ, trazadas sobre la asíntota SX, en *h*, *m*, *t*. Sea el área Y*mt*Z respecto al área dada Y*mh*X como el área dada E*eq*Q al área dada E*ea*A; y la línea Z*t* prolongada cortará a la línea QT proporcional a la densidad. Pues si las líneas SA SE, SQ, son continuamente proporcionales, las áreas E*eq*Q, E*ea*A serán iguales y, por tanto, las áreas proporcionales a ellas, Y*mt*Z, X*hin*Y, serán iguales también, y las líneas SX, SY, SZ, esto es, AH, EM, QT, necesariamente serán continuamente proporcionales. Y si las líneas SA, SE, SQ, adquieren otro orden cualquiera en la serie de proporciones continuas, las líneas AH, EM, QT, por la proporcionalidad de las áreas hiperbólicas, adquirirán el mismo orden en otra serie de proporcionalidades continuas.



PROPOSICIÓN XXII. TEOREMA XVII

Sea la densidad de un fluido cualquiera proporcional a la compresión y sus partes sean atraídas hacia abajo por una gravedad inversamente proporcional a los cuadrados de sus distancias al centro: digo que si las distancias se toman en proporción armóncia, las densidades del fluido a esas distancias estarán en progresión geométrica.

Sea S el centro y SA, SB, SC, SD, SE las distancias en progresión geométrica. Elévense las perpendiculares AH, BI, CK, etc., que sean como las densidades de los fluidos en los puntos A, B, C, D, E, etc., y sus gravedades específicas en esos puntos serán como $\frac{AH}{AS^2}$, $\frac{BI}{SB^2}$, $\frac{CK}{SC^2}$, etc. Supongamos que estas gravedades son uniformemente continuas, la primera desde A hasta B, la segunda desde B hasta C, la tercera desde C hasta D, etc. Y éstas multiplicadas por las alturas AB, BC, CD, DE, etc., o, lo que es lo mismo, por las distancias SA, SB, SC, etc., proporcionales a dichas alturas, darán las representaciones de las presiones $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, etc. Por lo cual, ya que las densidades



son como las sumas de estas presiones, las diferencias de las densidades AH – BI, BI – CK, etc., serán como las diferencias de las sumas $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, etc. Con centro en S y asintotas SA, S*x*, trácese una hipérbola que corte a las perpendiculares AH, BI, CK, etc., en *a*, *b*, c, etc., así como a H*t*, I*u*, K*w*, perpendiculares trazadas sobre la asíntota S*x*, en *h*, *i*, *k*; y las diferencias de densidades *tu*, *uw*, etc., serán como $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, etc. Y los rectángulos $tu \times th$, $uw \times ui$, etc., o *tp*, *uq*, etc., serán como $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, etc., esto es, como A*a*, B*b*, etc. Pues, por la naturaleza de la hipérbola, SA es a AH *o* S*t* como *th* a A*a* y, por tanto, $\frac{AH \times th}{SA}$ es igual a A*a*. Y por igual razonamiento $\frac{BI \times ui}{SB}$ es igual a B*b*, etc. Pero A*a*, B*b*, C*c*, etc., son continuamente proporcionales y, por tanto, proporcionales a sus diferencias A*a* – B*b*, B*b* – C*c*, etc.; y por ello, los rectángulos *tp*, *uq*, etc., son proporcionales a las susodichas diferencias; al igual que las sumas de los rectángulos $tp + uq$ o $tp + uq + wr$ lo son a las sumas de las diferencias A*a* – C*c* o A*a* – D*d*. Si se suponen muchos términos de éstos, la suma de todas las diferencias, pongamos A*a* – F*f*, será proporcional a la suma de todos los rectángulos, pongamos *zthn*. Auméntese el número de términos y disminúyanse las distancias de los

puntos A, B, C, etc., hasta el infinito, y dichos rectángulos resultarán iguales al área hiperbólica *zthn* y, por tanto, la diferencia Aa – Ff es proporcional a esta área. Ahora tómense unas distancias cualesquiera, como SA, SD, SF en progresión armónica, y las diferencias A*a* – D*d*, D*d* – F*f* serán iguales; y por ello, las áreas *thlx*, *xlnz*, proporcionales a dichas diferencias, serán iguales entre sí, y las densidades *St*, *Sx*, *Sz*, esto es, AH, DL, FN, continuamente proporcionales. Q.E.D.

COROLARIO. De aquí que, si se dan dos densidades cualesquiera, AH y BI, de un fluido, estará dada el área *thiu*, correspondiente a su diferencia *tu*; y de ahí se hallará la densidad FN para cualquier altura SF, tomando el área *thnz* respecto al área susodicha dada *thiu* como es la diferencia de A*a* – F*f a la* diferencia de A*a* – B*b*.

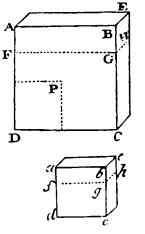
ESCOLIO

Por un razonamiento similar se puede probar que, si la gravedad de las partículas de un fluido disminuye en razón cúbica de las distancias al centro mientras los inversos del cuadrado de las distancias SA, SB, SC, etc. $\left(\text{o sea, } \frac{SA^3}{SA^2}, \frac{SA^3}{SB^2}, \frac{SA^3}{SC^2}\right)$ se toman en progresión aritmética, las densidades AH, BI, CK, etc., estarán en progresión geométrica. Y si la gravedad disminuye en razón de la cuarta potencia de las distancias y los inversos de los cubos de las distancias $\left(\text{como } \frac{SA^4}{SA^3}, \frac{SA^4}{SB^3}, \frac{SA^4}{SC^3}, \text{etc.}\right)$ se toman en progresión aritmética, las densidades AH, BI, CK, etc., estarán en progresión geométrica. Y así hasta el infinito. Y también, si la gravedad de las partículas de un fluido es la misma a todas las distancias, y las distancias están en progresión aritmética, las densidades estarán en progresión geométrica, como descubrió el eminente Edmund Halley. Si la gravedad es como la distancia y los cuadrados de las distancias se hallan en progresión aritmética, las densidades estarán en progresión geométrica. Y así hasta el infinito. Esto ocurre así cuando la densidad del fluido condensado por compresión es como la fuerza de compresión, o, lo que es igual, cuando el espacio ocupado por el fluido es inversamente como dicha fuerza. Se pueden imaginar otras leyes de condensación, tales como que el cubo de la fuerza de condensación es como la cuarta potencia de la densidad, o que el cubo de la fuerza es igual que la cuarta potencia de la densidad. En tal caso, si la gravedad es inversamente como el cuadrado de la distancia al centro, la densidad será inversamente como el cubo de la distancia. Imagínese que el cubo de la fuerza de compresión sea como la quinta potencia de la densidad, y si la gravedad es inversamente como el cuadrado de las distancias, la densidad será inversamente proporcional a la potencia $\frac{3}{2}$ de la distancia. Supongamos que la fuerza de compresión sea como el cuadrado de la densidad, y la gravedad inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, la densidad será entonces inversamente proporcional a la distancia. Sería demasiado prolijo repasar todos los casos. Pero consta experimentalmente que la densidad del aire es como la fuerza de compresión exacta o al menos muy aproximadamente: y, por tanto, la densidad del aire en la atmósfera de la tierra es como el peso de todo el aire que sobrecarga, esto es, como la altura del mercurio en el barómetro.

PROPOSICIÓN XXIII. TEOREMA XVIII

Si la densidad de un fluido compuesto de partículas que huyen unas de otras es como la compresión, las fuerzas centrífugas de las partículas son inversamente proporcionales a las distancias de sus centros. Y viceversa, las partículas que se rehúyen con fuerzas inversamente proporcionales a las distancias de sus centros componen un fluido elástico cuya densidad es proporcional a la compresión.

Supongamos que el fluido está contenido en un espacio cúbico ACE, y de éste, por compresión, se reduce a otro espacio cúbico menor *ace*; y las distancias entre las partículas que tienen ubicación semejante entre sí en uno y otro espacio, serán como los lados AB, *ab* de los cubos; y las densidades de uno y otro medio serán inversamente proporcionales a los espacios que los contienen, AB^3 y ab^3. Sobre el lado plano ABCD del cubo mayor tómese el cuadrado DP, igual al lado plano del cubo menor *db*; y por hipótesis, la presión con la cual actúa el cuadrado DP sobre el fluido contenido será a la presión con la que el susodicho cuadrado *db* actúa sobre el fluido contenido como las densidades de los medios entre sí, esto es, como ab^3 a AB^3. Pero la presión con la cual el cuadrado DB actúa sobre el fluido contenido es a la presión con la cual el cuadrado DP actúa sobre el mismo contenido como el cuadrado DB al cuadrado DP, esto es, como AB^2 a ab^2. Por consiguiente, la presión con la cual el cuadrado DB actúa sobre el fluido es a la presión con la cual actúa sobre el fluido el cuadrado *db* como *ab* a AB. Trazando por el interior de los cubos los planos FGH, *fgh*, quede el fluido separado en dos partes, y éstas se oprimirán entre sí con las mismas fuerzas con las cuales son presionadas por los planos AC, *ac*, esto es, en la proporción de *ab* a AB: y por ello, las fuerzas centrífugas que responden a estas presiones están en la misma proporción, puesto que el número de partículas es el mismo y la disposición semejante en ambos cubos, las fuerzas con las cuales todas las partículas actúan sobre todas según los planos FGH, *fgh*, son como las fuerzas que cada una ejerce sobre cada una. Luego las fuerzas que cada una ejerce sobre cada una según el plano FGH en el cubo mayor son a las fuerzas que cada una ejerce sobre cada una según el plano *fgh* en el cubo menor como *ab* a AB, esto es, inversamente proporcionales a las distancias mutuas de las partículas. Q.E.D.



Y viceversa, si las fuerzas de cada partícula son inversamente proporcionales a la distancia, es decir, inversamente proporcionales a los lados AB, *ab*, de los cubos; las sumas de las fuerzas estarán en la misma proporción, y las presiones de los lados DB, *db*, serán como las sumas de las fuerzas; y la presión del cuadrado DP será a la presión del lado DB como ab^2 a AB^2. Y, por consiguiente, la presión del cuadrado DP será a la presión del lado *db* como ab^3 a AB^3, es decir, la fuerza de compresión a la fuerza de compresión como la densidad a la densidad. Q.E.D.

ESCOLIO

Y por un razonamiento semejante, si las fuerzas centrífugas de las partículas son inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias entre centros, los cubos de las fuerzas de compresión serán como la cuarta potencia de las densidades. Si las fuerzas centrífugas son inversamente proporcionales a la tercera o cuarta potencia de las distancias, los cubos de las fuerzas de compresión serán como la quinta o sexta potencia de las densidades. Y de modo general, si D representa la distancia, E la densidad del fluido comprimido y las fuerzas centrífugas son inversamente proporcionales a una potencia cualquiera de la distancia D cuyo índice sea n; las fuerzas de compresión serán como las raíces cúbicas de la potencia de E^{n+2}, cuyo índice sea $n + 2$, y viceversa. Pero esto ha de entenderse respecto a fuerzas centrífugas de partículas que limitan con partículas próximas o que no se expanden mucho más allá. Tenemos un ejemplo en los cuerpos magnéticos. El poder de atracción de los cuales termina casi en los cuerpos contiguos de su propio género. La fuerza magnética disminuye por la interposición de una lámina de hierro, y casi termina en la lámina. Pues los cuerpos ulteriores son atraídos más por la lámina que por el imán. Del mismo modo, si unas partículas repelen a otras partículas de su especie que están próximas, mientras que no ejercen fuerza alguna sobre otras partículas más lejanas, es de partículas de este género de las que se componen los fluidos sobre los que se ha tratado en esta proposición. Porque si la fuerza de una partícula cualquiera se propagase hasta el infinito, se necesitaría una fuerza mayor para alcanzar una condensación igual de una mayor cantidad de fluido. Pero es una cuestión física la de si los fluidos elásticos constan de partículas que se repelen mutuamente. Por nuestra parte hemos demostrado matemáticamente la propiedad de los fluidos compuestos de tales partículas, para dar a los filósofos un asidero al tratar esta cuestión.

SECCIÓN VI

DEL MOVIMIENTO Y RESISTENCIA DE CUERPOS PENDULARES

PROPOSICIÓN XXIV. TEOREMA XIX

Las cantidades de materia de cuerpos pendulares cuyos centros de oscilación están a igual distancia del centro de suspensión se hallan en razón compuesta de la razón del peso y de la razón del cuadrado de los tiempos de oscilación en el vacío.

Pues la velocidad que sobre una materia dada puede engendrar una fuerza dada en un tiempo dado, es directamente como la fuerza y el tiempo e inversamente como la materia. Cuanto mayores son la fuerza o el tiempo, o menor la materia, tanto mayor será la velocidad generada. Esto es evidente por la segunda ley del movimiento. Ahora bien, si los péndulos son de igual longitud, las fuerzas motrices en puntos equidistantes de la

perpendicular son como los pesos: y por ello, si dos cuerpos oscilando describen arcos iguales y dichos arcos se dividen en partes iguales, por ser los tiempos en que los cuerpos describen cada parte de los arcos correspondientes como los tiempos totales de oscilación, las velocidades en cada parte correspondiente de oscilación serán entre sí como las fuerzas motrices y los tiempos totales de oscilación directamente e inversamente como las cantidades de materia: y, por tanto, las cantidades de materia serán directamente como las fuerzas y los tiempos de oscilación e inversamente como las velocidades. Pero las velocidades son inversamente como los tiempos y, por consiguiente, los tiempos directamente y las velocidades inversamente son como los cuadrados de los tiempos, por lo cual las cantidades de materia son como las fuerzas motrices y los cuadrados de los tiempos, es decir, como los pesos y el cuadrado de los tiempos. Q.E.D.

COROLARIO 1. Por tanto, si los tiempos son iguales, las cantidades de materia en cada cuerpo serán como los pesos.

COROLARIO 2. Si los pesos son iguales, las cantidades de materia serán como los cuadrados de los tiempos.

COROLARIO 3. Si las cantidades de materia son iguales, los pesos serán inversamente proporcionales a los cuadrados de los tiempos.

COROLARIO 4. De donde, al ser, «caeteris paribus», los cuadrados de los tiempos como las longitudes de los péndulos, si son iguales los tiempos y las cantidades de materia, los pesos serán como la longitud de los péndulos.

COROLARIO 5. Y en general, la cantidad de materia pendular es directamente proporcional al peso y al cuadrado del tiempo, e inversamente a la longitud del péndulo.

COROLARIO 6. Pero en medio no resistente la cantidad de materia pendular es directamente como el peso relativo y el cuadrado del tiempo e inversamente como la longitud del péndulo. Pues el peso relativo es la fuerza motriz del cuerpo en un medio grave cualquiera, como he explicado más arriba; y por tanto, cumple el mismo papel en un medio no resistente que el peso absoluto en el vacío.

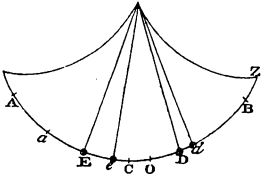
COROLARIO 7. Y de aquí se obtiene la razón tanto para comparar los cuerpos entre sí en cuanto a la cantidad de materia en cada uno, como para comparar los pesos del mismo cuerpo en distintos lugares, para conocer las variaciones de la gravedad. Pero mediante experimentos realizados con la mayor precisión siempre hallé que la cantidad de materia en cada cuerpo es proporcional a su peso.

PROPOSICIÓN XXV. TEOREMA XX

Los cuerpos pendulares a los cuales, en un medio cualquiera, se resiste en razón de los momentos de tiempo y los cuerpos pendulares que se mueven en un medio no resistente de la misma gravedad específica, completan en el mismo tiempo las oscilaciones en una cicloide y describen en tiempos iguales partes proporcionales de arcos.

Sea AB el arco de la cicloide que el cuerpo D describe al oscilar en un tiempo cualquiera y en medio no resistente. Sea bisecado en C de modo que C resulte su punto inferior; y la fuerza aceleratriz que empuja al cuerpo en un punto cualquiera D, o *d*, o E, será como la longitud del arco CD, o *Cd*, o CE. Represéntese esa fuerza por dicho arco, y al ser la resistencia como el momento de tiempo, y por ello estar dada, represéntese

ésta por una parte dada del arco cicloide CO, y tómese el arco O*d* respecto al arco CD en la misma proporción que tiene el arco OB respecto al arco CB: y la fuerza que empuja al cuerpo en *d* en medio resistente, al ser el exceso de la fuerza C*d* sobre la resistencia CO, vendrá representada por el arco O*d*, y por eso será a la fuerza. que empuja al cuerpo D en un medio no resistente en el punto D, como el arco O*d* al arco CD; por tanto, también en el punto B como el arco OB al arco CB. De suerte que si dos cuerpos D, *d*, parten del punto B empujados por estas fuerzas, al ser las fuerzas al comienzo como los arcos CB y OB, las velocidades iniciales y los arcos inicialmente descritos estarán en la misma razón. Sean dichos arcos BD y B*d* y los arcos restantes CD, O*d*, estarán en la misma proporción. Por consiguiente, las fuerzas proporcionales a los propios CD, O*d* seguirán siendo proporcionales en la misma razón que al principio y, por tanto, los cuerpos seguirán describiendo arcos simultáneamente en la misma proporción. Por lo cual, las fuerzas, las velocidades y los restantes arcos CD, O*d*, siempre serán como los arcos totales CB, OB, y por tanto dichos arcos restantes siempre serán descritos simultáneamente. Por lo cual los dos cuerpos D, *d*, llegarán a la vez a los puntos C y O, uno en un medio no resistente, al punto C, mientras el otro, en un medio resistente, al punto O. Mas, como las velocidades en C y O son como los arcos CB, OB, los arcos que describen los cuerpos después, al marchar a la vez, serán arcos que estén en la misma razón. Sean estos CE, O*e*. La fuerza que retarda al cuerpo D en un medio no resistente en el punto E es como CE, *y* la fuerza que retarda al cuerpo *d* en un medio resistente en el punto *e* es como la suma de la fuerza C*e* y de la resistencia CO, es decir, como O*e*; por tanto, las fuerzas que retardan a los cuerpos son como los arcos CB, OB, proporcionales a los arcos CE, O*e*; *y* por lo mismo, las velocidades, retardadas en esa razón dada, se mantienen en esa misma razón dada. Por consiguiente, las velocidades y los arcos descritos con ellas siempre están entre sí en la susodicha razón de los arcos CB y OB; *y* por ello, si se toman los arcos totales AB, *a*B, en la misma razón, los cuerpos D, *d*, describirán esos arcos simultáneamente, y en los puntos A, *a*, perderán a la vez todo su movimiento. Y, por consiguiente, las oscilaciones totales son isócronas y cualesquiera partes de arcos, BD, B*d*, o BE, B*e* descritas a la vez son proporcionales a los arcos totales BA, B*a*. Q.E.D.



COROLARIO. Por lo cual, el movimiento más rápido en un medio resistente no ocurre en el punto más bajo C, sino que se encuentra en el punto O, en el cual es bisecado el arco total descrito *aB*. Y el cuerpo al ir desde allí hasta *a* se va retardando en el mismo grado en que antes se aceleraba al descender desde *B* hasta O.

PROPOSICIÓN XXVI. TEOREMA XXI

Las oscilaciones en una cicloide de los cuerpos pendulares, a los que se resiste en razón de las velocidades, son isócronas.

Pues si dos cuerpos igualmente distantes de sus centros de suspensión describen oscilando arcos desiguales y las velocidades en las partes correspondientes de arcos son en-

tre sí como los arcos totales, las resistencias, proporcionales a las velocidades, serán también entre sí como los propios arcos. Por lo cual, si estas resistencias se suman o restan a las fuerzas motrices originadas por la gravedad que son como los propios arcos, las sumas o las diferencias serán entre sí en la misma razón de los arcos: y como los incrementos o decrementos de las velocidades son como estas sumas o diferencias, las velocidades serán siempre como los arcos totales; por consiguiente, las velocidades, si en una ocasión son como los arcos totales, permanecerán siempre en esa proporción. Pero al principio del movimiento, cuando los cuerpos comienzan a descender y describir dichos arcos, las fuerzas, al ser proporcionales a los arcos, generarán velocidades proporcionales a los arcos. Luego las velocidades siempre serán como los arcos totales a describir y, por consiguiente, dichos arcos serán descritos en el mismo tiempo. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XXVII. TEOREMA XXII

Si se resiste a los cuerpos pendulares en razón del cuadrado de las velocidades, las diferencias entre los tiempos de oscilación en un medio resistente y los tiempos de oscilación en un medio no resistente de la misma gravedad específica serán aproximadamente proporcionales a los arcos descritos al oscilar.

Pues si con péndulos iguales se describen en un medio resistente los arcos desiguales A, B, la resistencia del cuerpo en el arco A será a la resistencia del cuerpo en la parte correspondiente del arco B como el cuadrado de las velocidades, esto es, aproximadamente como AA a BB. Si la resistencia en el arco B fuese a la resistencia en el arco A como AB a AA, los tiempos en los arcos A y B serían iguales, por la proposición anterior. Por consiguiente, la resistencia AA en el arco A, o AB en el arco B, produce el exceso de tiempo en el arco A sobre el tiempo en medio no resistente; y la resistencia BB produce el exceso de tiempo en el arco B sobre el tiempo en medio no resistente. Pero tales excesos son como las fuerzas productoras muy aproximadamente, esto es, como los arcos A y B. Q.E.D.

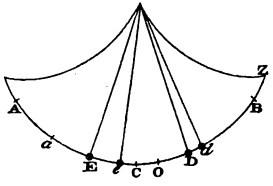
COROLARIO 1. Por ello, a partir de los tiempos de oscilaciones realizadas en arcos desiguales y en medios resistentes se puede conocer el tiempo de oscilación en un medio no resistente de la misma gravedad específica. Pues la diferencia de tiempos será al exceso de tiempo en el arco menor sobre el tiempo en medio no resistente como la diferencia de los arcos al arco menor.

COROLARIO 2. Las oscilaciones más cortas son más isócronas, y las muy cortas se realizan aproximadamente en los mismos tiempos que en un medio no resistente. Pero los tiempos de aquellas que se realizan en arcos más grandes son un poco mayores, debido a que la resistencia al descender el cuerpo, por la que el tiempo se alarga, es mayor con relación a la longitud descrita en el descenso que la resistencia en el ascenso subsiguiente gracias a la cual el tiempo se acorta. Pero los tiempos de oscilación, tanto breves como largas, parecen alargarse un poco por el movimiento del medio. Pues a los cuerpos que se retardan los resiste algo menos en razón de su velocidad, mientras que a los que se aceleran los resiste algo más que a aquellos que se producen uniformemente: y esto por cuanto que el medio, desplazándose con el movimiento recibido de los cuerpos hacia el mismo lado, se agita más en el primer caso y menos en el segundo; y por ello colabora más o menos con los cuerpos en movimiento. De suerte que en el des-

censo resiste más a los péndulos y en el ascenso menos que en razón de su velocidad, con lo que por una y otra causa el tiempo resulta prolongado.

PROPOSICIÓN XXVIII. TEOREMA XXIII

Si a un cuerpo pendular que oscila por una cicloide se le resiste en razón de los momentos de tiempo, su resistencia será a la fuerza de la gravedad como el exceso del arco descrito en el descenso total sobre el arco de ascenso descrito subsiguientemente al doble de la longitud del péndulo.

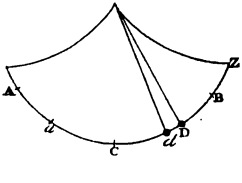


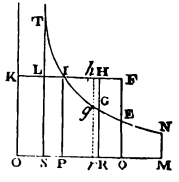
Sea BC el arco descrito en el descenso, Ca el arco descrito en el ascenso, y Aa la diferencia entre los arcos: y manteniendo las cosas construidas y demostradas en la proposición XXV, la fuerza que actúa sobre el cuerpo en oscilación en un punto cualquiera D será a la fuerza de resistencia como el arco CD al arco CO, que es la mitad de la dicha diferencia A*a*. Y por ello, la fuerza que actúa sobre el cuerpo oscilante al principio de la cicloide o en el punto más alto, esto es, la fuerza de la gravedad será a la resistencia como el arco cicloide comprendido entre el punto más alto y el punto más bajo C al arco CO; es decir (si los arcos se duplican), como el arco de toda la cicloide, o el doble de la longitud del péndulo, al arco A*a*. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XXIX. PROBLEMA VI

Supuesto que a un cuerpo oscilante en una cicloide se le resiste en razón del cuadrado de la velocidad, hallar la resistencia en cada punto.

Sea B*a* el arco descrito con la oscilación completa, y sea C el punto más bajo de la cicloide y CZ la mitad del arco cicloide total, igual a la longitud del péndulo; y tratemos de hallar la resistencia del cuerpo en un punto cualquiera D. Córtese la recta infinita OQ en los puntos O, S, P, Q, con la condición de que (si se elevan las perpendiculares



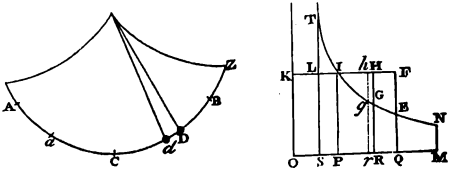


OK, ST, PI, QE, y con centro en O y asíntotas OK, OQ se traza la hipérbola TIGE que corte a las perpendiculares ST, PI, QE, en T, I, E, y por el punto I se traza KF paralela a la asíntota OQ y que corte a la asíntota OK en K y a las perpendiculares ST y QE en L y F) el área hiperbólica PIEQ sea al área hiperbólica PITS como el arco BC descrito en el descenso del cuerpo al arco C*a* descrito en el ascenso, y el área IEF al área ILT como OQ a OS. Después, con la perpendicular MN sepárese el área hiperbólica PINM que sea al área hiperbólica PIEQ como el arco CZ al arco BC descrito en el descenso. Y si con la perpendicular RG se segrega el área hiperbólica PIGR que sea al área PIEQ como un arco cualquiera CD al arco BC descrito en el descenso completo; la resistencia en el punto D será a la fuerza de la gravedad como el área $\frac{OR}{OQ}$ IEF – IGH al área PINM.

Y si las fuerzas procedentes de la gravedad que actúan sobre el cuerpo en los puntos Z, B, D, *a*, son como los arcos CZ, CB, CD, Ca, y dichos arcos son como las áreas PINM, PIEQ, PIGR, PITS; entonces, represéntense tanto los arcos como las fuerzas por estas áreas. Además, sea D*d* un espacio muy pequeño recorrido por el cuerpo en descenso y represéntese por el área mínima RG*gr*, comprendida entre las paralelas RG, *rg*; y prolónguese *rg* hasta *h* de suerte que GH*hg* y RG*gr* sean los decrementos simultáneos de las áreas IGH, PIGR. El incremento GH*hg* – $\frac{Rr}{OQ}$ IEF, o R*r* × HG – $\frac{Rr}{OQ}$ IEF del área $\frac{OR}{OQ}$ IEF – IGH será al decremento RG*gr*, o R*r* × RG del área PIGR como HG – $\frac{IEF}{OQ}$ a RG; y, por tanto, como OR × HG – $\frac{OR}{OQ}$ IEF a OR × GR, o OP × PI, es decir (por ser iguales OR × HG, OR × HR – OR × GR, ORHK – OPIK, PIHR y PIGR + IGH) como PIGR + IGH – $\frac{OR}{OQ}$ IEF a OPIK. Luego, si el área $\frac{OR}{OQ}$ IEF – IGH se llama Y, y el decremento RG*gr* del área PIGR se hallase dado, el incremento del área Y sería como PIGR – Y.

Porque si V designase la fuerza procedente de la gravedad proporcional al arco a describir CD y que actúa sobre el cuerpo en D, y se escribe R para representar la resistencia, V – R será la fuerza total que actúa sobre el cuerpo en D. Y así el incremento de la velocidad es como V – R y la partícula de tiempo en que se produce conjuntamente: pero la propia velocidad es directamente como el incremento contemporáneo de espacio recorrido e inversamente como la misma partícula de tiempo. De donde, al ser, por hipótesis, la resistencia como el cuadrado de la velocidad, el incremento de la resistencia (por el lema II) será como la velocidad y el incremento de la velocidad conjuntamente, es decir, como el momento de espacio y V – R conjuntamente; y, por consiguiente, si se da el momento de espacio, como V – R; de suerte que si por la fuerza V escribimos su representación PIGR, y la resistencia R se representa por otra área cualquiera Z, vendrá a ser como PIGR – Z.

Por tanto, al decrecer continuamente el área PIGR por la sustracción de momentos dados, crecen las áreas, Y, en razón de PIGR – Y, y Z en razón de PIGR – Z. Y, por consiguiente, si las áreas Y y Z comienzan a la vez y son iguales al principio, continurán siendo iguales por la adición de momentos iguales, de igual modo que después desaparecerán a la vez al decrecer por momentos iguales. Y viceversa, si empiezan y se des-



vanecen a la vez, tendrán momentos iguales y serán siempre iguales: y esto además porque, si la resistencia Z aumenta, la velocidad junto con el arco aquel C*a*, que se describe en el ascenso del cuerpo, disminuirán; y al acercarse el punto en que cesan todo movimiento y toda resistencia al punto C, la resistencia se desvanece más rápidamente que el área Y. Lo contrario habrá de ocurrir cuando se disminuye la resistencia.

Ahora bien, el área Z comienza y acaba cuando la resistencia es nula, es decir, al principio del movimiento, cuando el arco CD se iguala al arco CB y la recta RG incide sobre la recta QE, y al final del movimiento, cuando el arco CD se iguala al arco C*a* y RG incide sobre la recta ST. Y el área Y, o sea, $\frac{OR}{OQ}$EIF – IGH, comienza y acaba también cuando es nula, y por ello cuando $\frac{OR}{OQ}$ IEF y IGH son iguales: es decir (por construcción), cuando la recta RG incide sucesivamente sobre las rectas QE y ST. Y por tanto dichas áreas comienzan y se desvanecen a la vez, por lo que siempre son iguales. En consecuencia el área $\frac{OR}{OQ}$IEF – IGH es igual al área Z, por la cual se representa la resistencia, y por ello es al área PINM por la que se representa la gravedad, como la resistencia a la gravedad. Q.E.D.

COROLARIO 1. Por tanto, la resistencia en el punto más bajo C es a la fuerza de la gravedad como el área $\frac{OP}{OQ}$ IEF al área PINM.

COROLARIO 2. En cambio se hace máxima cuando el área PIHR es al área IEF como OR a OQ. Pues en tal caso su momento (a saber, PIGR – Y) resulta nulo.

COROLARIO 3. De aquí se obtiene también la velocidad en cada punto: ya que es como la raíz cuadrada de la resistencia, y al comienzo mismo del movimiento es igual a la velocidad del cuerpo oscilante en la misma cicloide sin resistencia alguna.

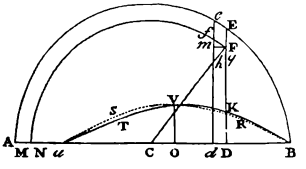
Por otra parte, dada la dificultad del cálculo para hallar la resistencia y la velocidad por medio de esta proposición, parece oportuno añadir la siguiente.

PROPOSICIÓN XXX. TEOREMA XXIV

Si la recta aB fuese igual al arco de la cicloide descrito por un cuerpo oscilante, y por cada uno de sus puntos D se elevan las perpendiculares DK, tales que sean a la longitud del péndulo como la resistencia del cuerpo en los puntos

correspondientes del arco a la fuerza de la gravedad: digo que la diferencia entre el arco descrito en todo el descenso y el arco descrito en todo el ascenso subsiguiente multiplicada por la semisuma de ambos arcos será igual al área Bka ocupada por todas las perpendiculares DK.

Represéntese, pues, el arco de la cicloide descrito en una oscilación completa mediante la susodicha recta *a*B, igual a él, y el arco que se hubiere descrito en el vacío mediante la longitud AB. Al bisecar AB en C, el punto C representará el punto inferior de la cicloide, y CD será como la fuerza procedente de la gravedad que actúa sobre el cuerpo en D según la tangente de la cicloide, y tendrá respecto a la longitud del péndulo la misma razón que tiene la fuerza en D respecto a la fuerza de la gravedad. Represéntese, pues, dicha fuerza por la longitud CD y la fuerza de la gravedad mediante la longitud del péndulo, y si sobre DE se toma DK en la misma razón respecto a la longitud del péndulo que la de la resistencia respecto a la gravedad, DK representará a la resistencia. Con centro en C y distancia CA o CB constrúyase el semicírculo BE*e*A. Y el cuerpo recorra en un tiempo mínimo el espacio D*d*, y elevando las perpendiculares DE, de que toquen a la circunferencia en E y *e*, éstas serán como las velocidades que adquiriría el cuerpo cayendo en el vacío desde el punto B al alcanzar los puntos D y *d*. Esto es evidente (por la proposición LII del libro primero). Represéntense, pues, estas velocidades por las susodichas perpendiculares DE, *de*; y sea DF la velocidad que adquiere en D al caer desde B en un medio resistente. Y si con centro en C y distancia CF se traza el círculo F*f*M que corte a las rectas *de* y AB en *f* y M, será M el punto hasta el que ascendería sin resto de resistencia, y *df* la velocidad que alcanzaría en *d*. De donde también, si F*g* representa el momento de velocidad que pierde el cuerpo D al describir el espacio mínimo D*d* por causa de la resistencia, y si se toma CN igual a C*g*, será N el punto hasta el cual ascienda el cuerpo sin resto de resistencia, y MN será el decremento de ascenso debido a la pérdida antedicha de velocidad. Sobre *df* trácese la perpendicular F*m*, y el decremento F*g* de la velocidad DF debido a la resistencia DK será al incremento *fm* de la misma velocidad debido a la fuerza CD como la fuerza generatriz DK a la fuerza generatriz CD. Pero por ser semejantes los triángulos F*mf*, F*hg*, FDC, resulta que *fm* es a F*m* o D*d* como CD a DF; y, por tanto, F*g* a D*d* como DK a DF. Y además, F*h* a F*g* como DF a CF; y por transposición, F*h* o MN a D*d* como DK a CF o CM; y, por consiguiente, la suma de todos los MN × CM será igual a la suma de todos los D*d* × DK. En el punto móvil M supóngase siempre levantada una ordenada rectangular igual a la indeterminada CM, que moviéndose continuamente es multiplicada por toda la longitud A*a*; y el trapecio resultante de dicho movimiento, o su igual, el rectángulo A*a* × $\frac{1}{2}$*a*B será igual a la suma de todos los D*d* × DK, es decir, al área BKVT*a*. Q.E.D.



COROLARIO. De aquí que, de la ley de la resistencia y de la diferencia A*a* entre los arcos C*a*, CB, se pueda inferir la proporción de la resistencia respecto a la gravedad muy aproximadamente.

Pues si la resistencia DK es uniforme, la figura BKT*a* será un rectángulo comprendido entre B*a* y DK, y DK será igual a $\frac{1}{2}$A*a*. Por lo cual, al ser DK la representación de la resistencia, y la longitud del péndulo la de la gravedad, la resistencia será a la gravedad como $\frac{1}{2}$ A*a* es a la longitud del péndulo; tal y como se ha demostrado en la proposición XXVIII.

Si la resistencia fuese como la velocidad, la figura BKT*a* será muy aproximadamente una elipse. Pues si el cuerpo, en un medio no resistente, describiera con una oscilación completa la longitud BA, la velocidad en un punto cualquiera D sería como la ordenada DE aplicada al diámetro AB del círculo descrito. Por consiguiente, dado que B*a* en un medio resistente y BA en un medio no resistente son descritas casi en los mismos tiempos, por eso mismo las velocidades en cada punto de B*a* son muy aproximadamente a las velocidades en los puntos correspondientes de la longitud BA como B*a* a BA; la velocidad en el punto D en un medio resistente será como la ordenada aplicada al diámetro B*a* del círculo o elipse descritos con él; y por ello la figura BKVT*a* será aproximadamente una elipse. Al suponer la resistencia proporcional a la gravedad, OV será la representación de la resistencia en el punto medio O; y la elipse BRVS*a*, descrita con centro en O y semiejes OB, OV, será aproximadamente igual a la figura BKVT*a*, o a su igual rectangular A*a* × BO. Por tanto, A*a* × BO es a OV × BO como el área de dicha elipse a OV × BA; es decir, A*a* es a OV como el área del semicírculo al cuadrado del radio, o también, como 11 a 17 aproximadamente: y, por consiguiente, $\frac{7}{11}$ A*a* es a la longitud del péndulo como la resistencia en O del cuerpo oscilante a su gravedad.

Pero si la resistencia DK fuese como el cuadrado de la velocidad, la figura BKVT*a* sería casi una. parábola de vértice en V y eje OV, y, por tanto, igual al rectángulo comprendido entre $\frac{2}{3}$B*a* y OV muy aproximadamente. Por consiguiente, el rectángulo $\frac{1}{2}$B*a* × A*a* es igual al comprendido entre $\frac{2}{3}$B*a* y OV, y por ello, OV es igual a $\frac{1}{4}$VA*a*: por lo cual la resistencia en O de un cuerpo oscilante es a su gravedad como $\frac{1}{4}$A*a* a la longitud del péndulo.

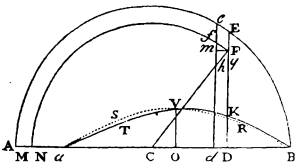
Y considero que estas conclusiones son más que suficientemente exactas en la práctica. Porque, al coincidir la elipse o la parábola BRVS*a* con la figura BKVT*a* en el punto medio V, si esta figura excede hacia una parte BRV o hacia otra VS*a* a la otra figura, será más pequeña que ella hacia la otra parte, y de ese modo se igualará muy aproximadamente con ella.

PROPOSICIÓN XXXI. TEOREMA XXV

Si la resistencia de un cuerpo oscilante en cada parte proporcional de los arcos descritos es aumentada o disminuida en una razón dada, la diferencia entre el arco descrito en el descenso y el descrito en el subsiguiente ascenso aumentará o disminuirá en la misma razón.

Pues dicha diferencia procede de la retardación del péndulo debida a la resistencia del medio, y es, por tanto, como la retardación total y como la resistencia retardante, proporcional a aquélla. En la proposición anterior el rectángulo comprendido bajo la recta $\frac{1}{2}$*a*B y la diferencia A*a* de los dichos arcos CB, C*a* era igual al área BKT*a*. Y dicha área, si se mantiene la longitud *a*B, aumenta o disminuye en razón de las ordenadas

aplicadas DK; es decir, en razón de la resistencia y, por ello, es como la longitud aB y la resistencia conjuntamente. Y por lo mismo, el rectángulo comprendido entre Aa y $\frac{1}{2}a$B es como aB y la resistencia conjuntamente y, por lo tanto, Aa es como la resistencia. Q.E.D.



COROLARIO 1. De donde, si la resistencia es como la velocidad, la diferencia de arcos en el mismo medio será como el arco total descrito, y viceversa.

COROLARIO 2. Si la resistencia fuese como el cuadrado de la velocidad, dicha diferencia sería como el cuadrado del arco total, y viceversa.

COROLARIO 3. Y en general, si la resistencia es como el cubo u otra potencia cualquiera de la velocidad, la diferencia será como esa potencia del arco total, y viceversa.

COROLARIO 4. Y si la resistencia es en parte proporcional a la velocidad y en parte proporcional al cuadrado de la velocidad, la diferencia será en parte como el arco total y en parte como el cuadrado del mismo: y viceversa. La misma será la ley y la razón de la resistencia respecto a la velocidad que la ley y razón de la dicha diferencia con respecto a la longitud del arco.

COROLARIO 5. Y, por consiguiente, si para un péndulo que describe sucesivamente arcos desiguales es posible hallar la razón del incremento o decremento de esta diferencia con respecto a la longitud del arco descrito, se tendrá también la razón del incremento o decremento de la resistencia respecto a una velocidad mayor o menor.

ESCOLIO GENERAL

De estas proposiciones, a través de oscilaciones de péndulos en medios cualesquiera, se puede hallar la resistencia de los medios. Por mi parte he investigado la resistencia del aire con los experimentos siguientes. Suspendí con un hilo delgado de un clavo bien firme a una bola de madera de $57\frac{7}{22}$ onzas romanas de peso y de un diámetro de $6\frac{7}{8}$ pulgadas de Londres y de modo que entre el clavo y el centro de oscilación de la bola la distancia fuese de $10\frac{1}{2}$ pies. Sobre el hilo señalé un punto a diez pies y una pulgada del centro de suspensión, y a la altura de dicho punto situé una regla dividida en pulgadas que permitiesen anotar las longitudes de los arcos descritos por el péndulo. Después conté las oscilaciones en las que la bola perdía la octava parte de su movimiento. Si el péndulo se apartaba de la perpendicular hasta una distancia de dos pulgadas y desde allí se soltaba, de modo que en su descenso total recorriese un arco de dos pulgadas y con toda la primera oscilación un arco de casi cuatro pulgadas, aquél, al cabo de 164 oscilaciones, había perdido la octava parte de su movimiento, de suerte que en el último ascenso recorría un arco de una pulgada y tres cuartos. Si en el primer descenso describió un arco de cuatro pulgadas, perdió la octava parte de su movimiento en 121 oscilaciones, de suerte que en la última ascensión describió un arco de $3\frac{1}{2}$ pulgadas. Si en el primer descenso describió un arco de ocho pulgadas, o dieciséis, o treinta y dos, o sesenta y cuatro, perdió la octava parte de su movimiento con 69 oscilaciones, o $35\frac{1}{2}$, o $18\frac{1}{2}$, o $9\frac{2}{3}$, respectivamente. Por lo tanto, la diferencia entre los arcos descritos con el primer

descenso y el último ascenso era en el caso primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, pulgadas, respectivamente. Divídanse estas diferencias por el número de oscilaciones en cada caso y, para una oscilación media en la que se describió un arco de $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60 y 120 pulgadas, la diferencia de los arcos descritos en el descenso y el subsiguiente ascenso será de $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{57}$, $\frac{24}{29}$ partes de pulgada, respectivamente. Ahora bien, estas diferencias, en las oscilaciones mayores, son aproximadamente como los cuadrados de los arcos descritos, mientras que en las menores, son un poco mayores que en dicha proporción; y por tanto (por el corolario 2 de la proposición XXXI de este libro), la resistencia de la bola, cuando se mueve con mayor celeridad, es aproximadamente como el cuadrado de la velocidad; y cuando se mueve más lentamente es algo mayor que en dicha proporción.

Ahora llamemos V a la velocidad máxima en una oscilación cualquiera, y sean A, B, C unas cantidades dadas, y supongamos que la diferencia de los arcos sea $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. Puesto que las velocidades máximas son en la cicloide como las mitades de los arcos descritos en la oscilación, mientras en el círculo son como las cuerdas de los dichos semiarcos y, por tanto, a iguales arcos sean mayores en la cicloide que en el círculo y ello en razón de los semiarcos a sus cuerdas; mientras por otra parte, los tiempos en el círculo son mayores que en la cicloide y ello en razón inversa de la velocidad, es evidente que las diferencias de los arcos (que son como la resistencia y el cuadrado del tiempo conjuntamente) han de ser las mismas aproximadamente en una y otra curva: pues deberán las susodichas diferencias aumentar en la cicloide, a la vez que la resistencia, casi como la razón cuadrada del arco a la cuerda, por estar aumentada la velocidad en dicha razón simple; y disminuir, junto con el cuadrado del tiempo, en la misma razón cuadrada. Para trasladar esto a la cicloide, se han de tomar las mismas diferencias de arcos que fueron observadas en el círculo, y las velocidades máximas análogas a los arcos medios o enteros, es decir, análogos a los números $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16. Entonces, para los casos segundo, cuarto y sexto, escribamos en lugar de V los números 1, 4 y 16; y la diferencia de arcos resultará $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$, para el segundo caso; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, para el cuarto caso; y $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$, para el sexto caso. Una vez que estas ecuaciones han sido resueltas por la debida reducción, resultará A = 0,0000916, B = 0,001.0847, y C = 0,0029558. Por tanto, la diferencia de los arcos es como $0,0000916V + 0,0010847V^{\frac{3}{2}} + 0,0029558V^2$; y por consiguiente, dado que (por el corolario de la proposición XXX aplicado a este caso) la resistencia del globo en la mitad del arco de oscilación, cuando la velocidad es V, es a su peso como $\frac{7}{11}$ AV + $\frac{7}{10}$ $BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ es a la longitud del péndulo, si se escriben en lugar de A, B, y C los números hallados, la resistencia del globo será a su peso como $0,0000583V + 0,0007593V^{\frac{3}{2}} + 0,0022169V^2$ a la longitud del péndulo entre el centro de suspensión y la regla, es decir, a 121 pulgadas. Y puesto que V en el segundo caso representa a 1, en el cuarto a 4 y en el sexto a 16, la resistencia será al peso del globo en el segundo caso como 0,0030345 a 121, en el cuarto como 0,041748 a 121 y en el sexto como 0,61705 a 121.

El arco descrito por el punto marcado en el hilo era en el caso sexto de $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$,

o $119\frac{5}{29}$ pulgadas. Y puesto que el radio es de 121 pulgadas la longitud del péndulo entre el punto de suspensión y el centro de la bola era de 126 pulgadas, el arco descrito por el centro del globo era de $124\frac{3}{31}$ pulgadas. Dado que la velocidad máxima del cuerpo oscilante, por la resistencia del aire, no coincide con el punto inferior del arco descrito, sino que ocurre casi en el punto medio del arco total, ésta será casi la misma que si el globo en todo su descenso en un medio no resistente describiese la mitad de dicho arco, mitad equivalente a $62\frac{3}{62}$ pulgadas, y esto en una cicloide, a la que antes hemos reducido el movimiento del péndulo: y por consiguiente, dicha velocidad será igual a la velocidad que adquiriría el globo cayendo perpendicularmente y describiendo en su caída una altura igual al seno verso de aquel arco. Pero en la cicloide dicho seno verso es a este arco de $62\frac{3}{62}$ como el propio arco a 252, doble de la longitud del péndulo y, por tanto, igual a 15,278 pulgadas. Por lo cual, la velocidad es la misma que la que adquiriría el cuerpo cayendo y describiendo en su caída un espacio de 15,278 pulgadas. Luego a semejante velocidad el cuerpo sufre una resistencia que es a su peso como 0,61705 a 121, o (si se tiene en cuenta solamente aquella parte de resistencia que es como el cuadrado de la velocidad) como 0,56752 a 121.

Por medio de experimentos hidrostáticos hallé que el peso de esta bola de madera era al peso de un globo de agua de la misma magnitud como 55 a 97: y, por tanto, al estar 121 respecto a 213,4 en la misma proporción, la resistencia del globo de agua que se desplaza con la velocidad antedicha será a su peso como 0,56752 a 213,4, es decir, como 1 a $376\frac{1}{50}$. Y, por tanto, dado que el peso del globo de agua generaría toda esa velocidad en el globo que cae en el mismo tiempo en el cual dicho globo con velocidad uniformemente continua describiría un espacio de 30,556 pulgadas, es evidente que la fuerza de resistencia uniformemente continua durante ese mismo tiempo podría quitar una velocidad menor en razón de 1 a $376\frac{1}{50}$, es decir, $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ parte de la velocidad total. Y, por consiguiente, en el tiempo en que el globo describiría, con dicha velocidad uniformemente continua, la longitud de su semidiámetro, o sea, $3\frac{7}{16}$ pulgadas, en ese tiempo perdería $\frac{1}{3342}$ parte de su movimiento.

También contaba las oscilaciones en las que el péndulo perdía la cuarta parte de su movimiento. En la tabla siguiente los números superiores significan la longitud del arco descrito en el primer descenso, expresada en pulgadas y partes de pulgada; los números intermedios significan la longitud del arco descrito en el último ascenso; en último lugar aparecen los números de las oscilaciones. He reseñado el experimento por resultar más exacto que el que sólo cuenta la pérdida de la octava parte de movimiento. Trate de calcularlo el que quiera.

Primer descenso	2	4	8	16	32	64
Último ascenso	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Número de oscilaciones	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Suspendí después del mismo hilo una bola de plomo de dos pulgadas de diámetro y de $26\frac{1}{4}$ onzas romanas de peso, de suerte que entre el centro del globo y el punto de sus-

pensión hubiese una distancia de $10\frac{1}{2}$ pies, y conté las oscilaciones en que se perdía una parte dada del movimiento. La primera tabla de las siguientes muestra el número de oscilaciones en que se perdió la octava parte del movimiento total; la segunda muestra el número de oscilaciones en que se perdió la cuarta parte del mismo.

Primer descenso	1	2	4	8	16	32	64
Último ascenso	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Número de oscilaciones	226	228	193	140	$90\frac{1}{4}$	53	30
Primer descenso	1	2	4	8	16	32	64
Último ascenso	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Número de oscilaciones	510	518	420	318	204	121	70

Seleccionando en la tabla primera las observaciones tercera, quinta y séptima y expresando las velocidades máximas en estas observaciones por los números 1, 4, 16, respectivamente, y en general por V como antes, resultará $\frac{2}{121} = A + B + C$ para la tercera; $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, para la quinta; y $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$, para la séptima. Una vez resueltas estas ecuaciones dan, A = 0,001414, B = 0,000297, y C = 0,000879. Y de ello se desprende que la resistencia del globo moviéndose con la velocidad V estará respecto a su peso de $26\frac{1}{4}$ onzas en la misma razón que la que hay entre $0{,}0009V + 0{,}000208\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659V^2$ y la longitud de 121 pulgadas del péndulo. Y si consideramos solamente aquella parte de resistencia que es como el cuadrado de la velocidad, ésta será al peso del globo como $0{,}000659V^2$ a 121 pulgadas. Pero esta parte de resistencia era en el experimento primero respecto al peso de la bola de madera de $57\frac{7}{22}$ onzas como $0{,}002217V^2$ a 121: de aquí que la resistencia del globo de madera a la resistencia del globo de plomo (siendo iguales sus velocidades) sea como $57\frac{7}{22}$ multiplicado por 0,002217 a $26\frac{1}{4}$ multiplicado por 0,000659, es decir, como $7\frac{1}{3}$ a 1. Los diámetros de los dos globos eran de $6\frac{7}{8}$ y 2 pulgadas, y los cuadrados de éstos son entre sí como $47\frac{1}{4}$ y 4, o $11\frac{13}{16}$ y 1 muy aproximadamente. Luego la resistencia de los globos a igual velocidad estaba en menor proporción que la razón del cuadrado de los diámetros. Pero no hemos considerado aún la resistencia del hilo, que ciertamente era grande, y que debe restarse de la resistencia hallada para los péndulos. No pude definirla con precisión, pero encontré que era, no obstante, mayor que la tercera parte de la resistencia total del péndulo menor; y de ello inferí que las resistencias de los globos, descontada la resistencia del hilo, están aproximadamente como el cuadrado de los diámetros. Pues, la razón $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ a $1 - \frac{1}{3}$, o $10\frac{1}{2}$ a 1 no dista mucho de la razón cuadrada de los diámetros $11\frac{13}{16}$ a 1.

Puesto que la resistencia del hilo en globos mayores es de menor importancia, traté también de probar con un globo de $18\frac{1}{4}$ pulgadas de diámetro. La longitud del péndulo entre el punto de suspensión y el centro de oscilación era de $122\frac{1}{2}$ pulgadas, y entre el

punto de suspensión y el nudo del hilo de $109\frac{1}{2}$ pulgadas. El arco descrito por el nudo en el primer descenso del péndulo fue de 32 pulgadas. El arco descrito por el mismo nudo en el último ascenso, después de cinco oscilaciones, fue de 28 pulgadas. La suma de arcos, o el arco total descrito en una oscilación media fue de 60 pulgadas. La diferencia de arcos de 4 pulgadas. Su décima parte o la diferencia entre el descenso y el ascenso en una oscilación media fue de $\frac{2}{5}$ de pulgada. Y como el radio $109\frac{1}{2}$ es al radio $122\frac{1}{2}$ así también el arco total de 60 pulgadas descrito por el nudo en una oscilación media es al arco total de $67\frac{1}{8}$ descrito por el centro del globo en una oscilación media; y así también la diferencia de $\frac{2}{5}$ es a la nueva diferencia de 0,4475. Si se aumentase la longitud del péndulo, manteniendo la longitud del arco descrito, en la razón de 126 a $122\frac{1}{2}$, el tiempo de oscilación aumentaría y la velocidad del péndulo disminuiría como la raíz cuadrada de aquella razón, pero, en cambio, se conservaría la diferencia de 0,4475 entre los arcos descritos en el descenso y consiguiente ascenso. Pero si el arco descrito aumentase en razón de $124\frac{3}{31}$ a $67\frac{1}{8}$, la diferencia de 0,4475 aumentaría como el cuadrado de dicha razón y vendría a ser de 1,5295. Esto sería así bajo la hipótesis de que la resistencia del péndulo fuese como el cuadrado de la velocidad. Luego si el péndulo describiese un arco total de $124\frac{3}{31}$ pulgadas y su longitud entre el punto de suspensión y el centro de oscilación fuese de 126 pulgadas, la diferencia de arcos descritos en el descenso y consiguiente ascenso sería de 1,5295 pulgadas. Y esta diferencia multiplicada por el peso del globo-péndulo, que era de 208 onzas, da un producto de 318,136. Ahora bien, cuando el péndulo primero, hecho de una bola de madera, describía con su centro de oscilación, que distaba del punto de suspensión 126 pulgadas, un arco total de $124\frac{3}{31}$ pulgadas, la diferencia de arcos descritos en el descenso y el ascenso fue de $\frac{126}{121} \times \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ que multiplicada por el peso del globo, 121 9_3 que era de $57\frac{7}{22}$ onzas da un producto de 49,396. Multipliqué estas diferencias por los pesos de los globos para hallar sus resistencias. Pues, las diferencias proceden de las resistencias y son directamente como las resistencias e inversamente como los pesos. Las resistencias son, por tanto, como los números 318,136 y 49,396. Pero la parte de resistencia del globo menor, que es como el cuadrado de la velocidad, resultaba ser con respecto a la resistencia total como 0,56752 a 0,61675, es decir, como 45,453 a 49,396; mientras que la parte de resistencia correspondiente del globo mayor venía a ser casi igual a la resistencia total del mismo y, por tanto, dichas partes son como 318,136 y 45,453 muy aproximadamente, es decir, como 7 y 1. Pero los diámetros de los globos son $18\frac{1}{4}$ y $6\frac{7}{8}$; y sus cuadrados $351\frac{9}{16}$ y $47\frac{17}{64}$ son como 7,438 y 1, es decir, aproximadamente como las resistencias 7 y 1 de los globos. La diferencia de razones no es mayor que la que pudo provenir de la resistencia del hilo. Por consiguiente, aquellas partes de las resistencias que, a globos iguales, son como los cuadrados de las velocidades, son también, a velocidades iguales, como los cuadrados de los diámetros de los globos.

Por lo demás, el mayor de los globos que utilicé en estos experimentos no era perfectamente esférico y por ello en el cálculo aquí presentado prescindí de minucias en razón de la brevedad, sin poner mayor empeño en la exactitud en un experimento que no era bastante exacto. Y por eso quisiera, al depender de esto la demostración del vacío, que se realizaran estos experimentos con globos más numerosos, más grandes y más exactos. Si se toman los globos en progresión geométrica, cuyos diámetros sean,

pongamos de 4, 8, 16, 32, pulgadas, se inferirá de la progresión de los experimentos qué es lo que debería acontecer con globos aún mayores.

Ahora bien, para comparar las resistencias de distintos fluidos entre sí, hice lo siguiente. Preparé una caja de madera de cuatro pies de larga y de un pie de ancha y otro de alta. Desprovista de tapa la llené de agua de la fuente, e hice que unos péndulos sumergidos en ella se moviesen oscilando. Un globo de plomo de $166\frac{1}{6}$ onzas de peso y de $3\frac{5}{8}$ pulgadas de diámetro se movía como se expone en la tabla siguiente, siendo además la longitud del péndulo desde el punto de suspensión hasta un punto señalado en el hilo de 126 pulgadas, hasta el centro de oscilación de $134\frac{3}{8}$ pulgadas.

Arco del primer descenso descrito por el punto señalado en el hilo, en pulgadas	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arco del último ascenso, en pulgadas	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$
Diferencia de arcos proporcional al movimiento perdido, en pulgadas	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$
Número de oscilaciones en el agua			$\frac{39}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Número de oscilaciones en el aire	$85\frac{1}{2}$		287	535					

En el experimento de la cuarta columna se perdieron iguales movimientos con 535 oscilaciones en el aire y con $1\frac{1}{5}$ en el agua. Ciertamente las oscilaciones en el aire eran algo más veloces que en el agua. Pero si las oscilaciones en el agua se acelerasen de modo que los movimientos de los péndulos fuesen igualmente veloces en ambos medios, se mantendría el mismo número de oscilaciones de $1\frac{1}{5}$ en el agua, en las cuales se perdería el mismo movimiento que antes, por el hecho de haber aumentado la resistencia y a la vez haber disminuido el cuadrado del tiempo según el cuadrado de esa misma razón. Luego con iguales velocidades de los péndulos se han perdido iguales movimientos con 535 oscilaciones en el aire y con $1\frac{1}{5}$ en el agua; por tanto, la resistencia del péndulo en el agua es a su resistencia en el aire como 535 a $1\frac{1}{5}$. Ésta es la proporción de las resistencias en el caso de la columna cuarta.

Ahora llamemos $AV + CV^2$ a la diferencia de arcos descritos en el descenso y subsiguiente ascenso por el globo moviéndose con la máxima velocidad; y puesto que la velocidad máxima en el caso de la columna cuarta es a la velocidad máxima en el caso de la columna primera como 1 a 8, y la susodicha diferencia de arcos en el caso de la columna cuarta es a la diferencia de arcos en el caso de la columna primera como $\frac{2}{535}$ a $\frac{16}{85\frac{1}{4}}$, o como $85\frac{1}{2}$ a 4280, escribamos en estos casos 1 y 8 por las velocidades, y $85\frac{1}{2}$ y 4280 por las diferencias de arcos, y resultará $A + C = 85\frac{1}{2}$, y $8A + 64C = 4280$, o $A + 8C = 535$; y resolviendo las ecuaciones resultará de aquí que $7C = 449\frac{1}{2}$, y $C = 64\frac{1}{14}$, y $A = 21\frac{2}{7}$; y por tanto, la resistencia, al ser como $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}V^2$, será como $13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2$. Por lo cual, en el caso de la cuarta columna, donde la velocidad era 1, la resistencia

total es a la parte de ella misma que es proporcional al cuadrado de la velocidad como $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}$, o $61\frac{12}{17}$ a $48\frac{9}{56}$; y por esto, la resistencia del péndulo en el agua es a la susodicha parte de resistencia en el aire que es proporcional al cuadrado de la velocidad y que solamente entra en consideración en los movimientos más veloces, como $61\frac{12}{17}$ a $48\frac{9}{56}$ y 535 a $1\frac{1}{5}$ conjuntamente, es decir, como 571 a 1. Si se hubiese sumergido el hilo entero del péndulo que oscilaba en el agua, su resistencia aún habría sido mayor; hasta el punto que aquella resistencia del péndulo oscilante en el agua que es proporcional al cuadrado de la velocidad y que solamente merece consideración en los cuerpos más veloces, será a la resistencia del péndulo mismo completo, moviéndose con la misma velocidad en el aire, aproximadamente como 850 a 1, es decir, aproximadamente como la densidad del agua a la densidad del aire.

En este cálculo también se debería considerar aquella parte de resistencia del péndulo en el agua que fuese como el cuadrado de la velocidad, pero (aunque parezca extraño) la resistencia en el agua aumentaba más que en razón del cuadrado de la velocidad. Buscando la causa de ello, vine a dar en que la caja era demasiado pequeña para el tamaño del globo del péndulo e impedía demasiado el movimiento del agua en retroceso por su estrechez. Pues si se sumergía un globo pendular de una pulgada de diámetro, la resistencia aumentaba aproximadamente como el cuadrado de la velocidad. Ensayaba esto construyendo un péndulo de dos globos, de los cuales el menor y más bajo oscilase en el agua, mientras el mayor y más alto estaba sujeto por el hilo encima de ella, y oscilando en el aire ayudaba al movimiento del péndulo y lo hacía más rápido. Y los experimentos realizados de este modo tuvieron los resultados recogidos en la tabla siguiente.

Arco descrito en el primer descenso	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arco descrito en el último ascenso	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Diferencia de arcos proporcional al movimiento perdido	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Número de oscilaciones	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

También hice, comparando entre sí las resistencias de los medios, que péndulos de hierro oscilasen en mercurio. La longitud del hilo de hierro era de casi tres pies y el diámetro del globo pendular de casi un tercio de pulgada. Otro globo de plomo estaba sujeto al hilo inmediatamente encima del mercurio para que el movimiento del péndulo continuase durante más tiempo. Entonces llenaba un recipiente, de casi tres libras de capacidad de mercurio, alternativamente con mercurio y agua común, para hallar así la proporción de resistencias al péndulo oscilante sucesivamente en uno y otro fluido: y la resistencia en el mercurio resultó ser a la del agua aproximadamente como 13 o 14 a 1, es decir, como la densidad del mercurio a la del agua. Cuando ponía un globo pendular algo mayor, como de un tercio o de dos tercios de pulgada de diámetro, la resistencia del mercurio venía a ser a la del agua casi como la de 12 o 10 a 1. Pero es más fiable el experimento anterior, ya que en este último el vaso era demasiado pequeño para el tamaño del globo sumergido. Al aumentar el globo se debería ampliar también el vaso. Había pensado en repetir experimentos de este tipo utilizando recipientes mayores y

con líquidos de metales fundidos o bien con otros tanto calientes como fríos: pero no hay tiempo de hacer todos los experimentos, y por los ya descritos consta suficientemente que la resistencia de los cuerpos velozmente movidos es proporcional aproximadamente a la densidad de los fluidos en que se mueven. No digo exactamente. Pues los fluidos más tenaces, a igual densidad, sin duda resisten más que los más líquidos, como el aceite frío más que el caliente, el caliente más que el agua de lluvia, el agua más que el espíritu de vino. Pero en los líquidos que suelen ser bastante fluidos, como en el aire, en agua dulce o salada, en espíritus de vino, trementina, y sales, en aceite caliente y limpio por destilación de residuos, en aceite de vitriolo y en mercurio, en metales fundidos y otros por el estilo que son tan fluidos que permiten, al ser agitados en los vasos, conservar durante largo tiempo el movimiento, y cuando se derraman se producen gotas fácilmente, no me cabe duda de que la regla dada resulte bastante exacta: sobre todo si los experimentos se hicieren con cuerpos pendulares mayores y movidos más velozmente.

Y por fin, dada la opinión de algunos, según la cual existe un cierto medio etéreo y muy sutil que impregna los poros e intersticios de todos los cuerpos y además debe dar origen a alguna resistencia debida al tal medio fluyente por los poros de los cuerpos, con el fin de averiguar si la resistencia que experimentamos en los cuerpos en movimiento se halla toda en la superficie externa de los mismos o también las partes internas en sus propias superficies la experimentan de modo perceptible, diseñé el siguiente experimento. Con un hilo de once pies de largo suspendí de un gancho de acero, con un anillo de acero también, una caja redonda de abeto para construir un péndulo de dicha longitud. El gancho superior estaba muy afilado por su cara cóncava, para que el anillo con su arco superior fijado al filo se moviese con toda libertad. El hilo estaba atado al arco inferior. Una vez hecho el péndulo de esta manera, lo separé de la perpendicular hasta una distancia de casi seis pies, y esto según un plano perpendicular al filo del gancho, para que el anillo, al oscilar el péndulo, no resbalase sobre el filo del gancho hacia un lado o hacia otro. Pues el punto de suspensión en que el anillo toca al gancho, debe permanecer inmóvil, Señalé exactamente el lugar hasta el cual separé al péndulo, y después de soltarlo, señalé los tres puntos hasta los que regresó al final de las oscilaciones primera, segunda y tercera. Repetí esto muchas veces para determinar lo más exactamente posible dichos puntos. Después llené la caja de plomo y de los metales más pesados que tenía a mano. Pero antes pesé la caja vacía, lo mismo que el hilo que la rodeaba y la mitad del resto del hilo que se extendía entre el gancho y la caja suspendida. Pues el hilo tendido actúa siempre con la mitad de su peso sobre el péndulo separado de la perpendicular. A este peso añadí el peso del aire contenido en la caja. El peso total vino a ser aproximadamente como una setenta y octava parte del peso de la caja llena de metales. Entonces, como la caja llena de metales estiraba el hilo con su peso, aumentando la longitud del péndulo, reduje el hilo para que, al oscilar, tuviese la misma longitud que antes. Después, separando el péndulo hasta el primer punto señalado y dejándolo caer, conté las oscilaciones, unas setenta y siete, hasta que la caja regresó al punto señalado en segundo lugar, y otras tantas hasta que llegó a la tercera señal, y de nuevo otras tantas hasta que llegó a la cuarta. De donde, concluyo que la resistencia total de la caja llena no guarda mayor proporción respecto a la caja vacía que 78 a 77. Pues si las resistencias de ambas fuesen iguales, la caja llena, debido a que su fuerza ínsita es setenta y ocho veces mayor que la fuerza ínsita de la caja vacía, debería conservar su movimiento de oscilación durante tanto más tiempo y, por tanto, retornar hasta los pun-

tos señalados tras 78 oscilaciones completas. Pero regresó a ellos tras 77 oscilaciones completas.

Represente A la resistencia de la caja en su superficie externa y B la resistencia de la caja vacía en sus partes interiores; y si la resistencia de los cuerpos igualmente veloces en sus partes internas es como la materia o el número de partículas que resisten, 78B será la resistencia de la caja llena en sus partes internas y, por tanto, la resistencia total A + B de la caja vacía será a la resistencia total A + 78B de la caja llena como 77 a 78, y parcialmente, A + B a 77B, como 77 a 1, y por ello, A + B a B como 77 × 77 a 1, y parcialmente, A a B como 5928 a 1. Por consiguiente, la resistencia de la caja vacía en sus partes internas es más de cinco mil veces menor que su resistencia en la superficie externa. Argumentamos así bajo la hipótesis de que la mayor resistencia de la caja llena no obedece a otra causa oculta sino sólo a la acción sobre el metal incluido de algún fluido sutil.

He expuesto este experimento de memoria. Pues he perdido los papeles en que lo había anotado. Por ello he tenido que omitir algunas fracciones numéricas que escapan a mi memoria.

Pero ahora no hay tiempo de intentarlo otra vez. La primera vez, por utilizar un gancho no seguro, la caja llena se retardaba más rápidamente. Al buscar la causa, hallé que el gancho, débil, cedía al peso de la caja y cediendo a sus oscilaciones se doblaba hacia todas partes. Preparé entonces un gancho firme que garantizase la inmovilidad del punto de suspensión, y después todo ocurrió como arriba queda descrito.

SECCIÓN VII

SOBRE EL MOVIMIENTO DE FLUIDOS Y LA RESISTENCIA DE PROYECTILES

PROPOSICIÓN XXXII. TEOREMA XXVI

Si dos sistemas semejantes de cuerpos constan de igual número de partículas y las partículas correspondientes son semejantes y proporcionales una a una en cada sistema y están situadas de manera semejante entre sí y además tienen entre sí una razón dada de densidad, y además empiezan a moverse de manera semejante entre sí en tiempos proporcionales (las de un sistema entre sí y las del otro entre ellas) y las que pertenecen a un sistema no se tocan entre ellas más que en el momento de reflexión, ni se atraen ni repelen más que con las fuerzas aceleratrices que sean inversamente proporcionales al diámetro de las partículas correspondientes y directamente al cuadrado de las velocidades: digo que las partículas de los sistemas continuarán moviéndose de manera semejante entre ellas y con tiempos proporcionales.

Digo que cuerpos iguales en sitios semejantes se mueven de modo semejante entre ellos en tiempos proporcionales, si sus situaciones mutuas al final de dichos movimientos son siempre semejantes: tal y como si se comparasen las partículas de un sis-

tema con las partículas correspondientes de otro. De donde los tiempos, en los cuales se describen por las partículas correspondientes partes semejantes y proporcionales de figuras semejantes, serán proporcionales también. Por consiguiente, si se diesen dos sistemas de esta clase, las partículas correspondientes, debido a la semejanza de los movimientos iniciales, continuarán moviéndose con movimientos semejantes hasta que choquen entre sí. Pues si no actúa sobre ellas fuerza alguna, proseguirán uniformemente en línea recta, por la ley I del movimiento. Si se perturban mutuamente con alguna fuerza, y ésta es inversamente como el diámetro de las partículas correspondientes y directamente cómo el cuadrado de las velocidades, puesto que las situaciones de las partículas son semejantes y las fuerzas proporcionales, las fuerzas totales que actúan sobre las partículas correspondientes, que resultan compuestas de las fuerzas singulares en acción (por el corolario II de las leyes) tendrán las mismas direcciones, como si se dirigiesen a centros similarmente situados entre las partículas; y dichas fuerzas totales serán entre sí, como las fuerzas componentes singulares, es decir, inversamente como los diámetros de las partículas correspondientes y directamente como los cuadrados de las velocidades: por lo cual, harán que las partículas correspondientes continúen describiendo figuras semejantes. Esto será así (por los corolarios 1 y 8 de la proposición IV del libro primero) si los centros susodichos están en reposo. Pero si están en movimiento, gracias a la semejanza de las traslaciones, sus situaciones permanecen semejantes entre las partículas de los sistemas, y producirán cambios semejantes en las figuras que describen las partículas. Por tanto, los movimientos de partículas correspondientes y semejantes serán semejantes hasta sus primeros choques y, por ser semejantes los choques, y semejantes las reflexiones, también después serán (por lo ya mostrado) semejantes los movimientos entre sí hasta que de nuevo choquen entre ellas, y así sucesivamente hasta el infinito. Q.E.D.

COROLARIO 1. De aquí que si dos cuerpos cualesquiera, semejantes entre sí y semejantemente situados respecto a las partículas correspondientes de los sistemas, empiezan a moverse entre éstas de modo semejante y en tiempos proporcionales y sus magnitudes y densidades son mutuamente como las magnitudes y densidades de las partículas correspondientes, continuarán moviéndose semejantemente en tiempos proporcionales. Pues la razón de las partes mayores de uno y otro sistema es la misma que la de las partículas de los mismos.

COROLARIO 2. Y si todas las partes semejantes y semejantemente dispuestas de los sistemas reposan entre ellas, y dos de ellas, mayores que las otras, y mutuamente correspondientes entre sí en uno y otro sistema, empiezan a moverse según líneas semejantemente situadas y con movimientos semejantes en cualquiera dirección, producirán en las otras partes de los sistemas movimientos semejantes, movimientos que continuarán de modo semejante entre las partes en tiempos proporcionales; y describirán, por ello, espacios proporcionales a sus diámetros.

PROPOSICIÓN XXXIII. TEOREMA XXVII

Con los mismos supuestos, digo que las partes mayores de los sistemas padecen una resistencia que está en razón compuesta del cuadrado de sus velocidades, del cuadrado de sus diámetros y de la razón simple de la densidad de las partes de los sistemas.

Pues la resistencia procede en parte de las fuerzas centrípetas o centrífugas, con las cuales las partículas de los sistemas se agitan mutuamente, parte de las colisiones y reflexiones de las partículas y las partes mayores. Las resistencias del primer género son entre sí como las fuerzas totales motrices que las producen, es decir, como las fuerzas totales aceleratrices y las cantidades de materia en las partes correspondientes; es decir (por hipótesis), directamente como el cuadrado de las velocidades e inversamente como las distancias de las partículas correspondientes y directamente como las cantidades de materia en las partículas correspondientes; y por lo mismo, como las distancias de las partículas de un sistema son a las distancias correspondientes de las partículas del otro como el diámetro de la partícula o de una parte en el primer sistema al diámetro de la partícula o parte correspondiente en el otro, y la cantidad de materia es como las densidades de las partes y el cubo de los diámetros, las resistencias son entre sí como los cuadrados de las velocidades y los cuadrados de los diámetros y las densidades de las partes de los sistemas. Q.E.D. Las resistencias de la segunda especie son como el número de reflexiones correspondientes y sus fuerzas conjuntamente. Pero el número de reflexiones son entre sí directamente como las velocidades de las partes correspondientes, e inversamente como los espacios entre las reflexiones de las mismas. Y las fuerzas de las reflexiones son como las velocidades, las magnitudes y las densidades de las partes correspondientes conjuntamente, es decir, como las velocidades, los cubos de los diámetros y las densidades de las partes. Y reunidas todas estas razones, las resistencias de las partes correspondientes son entre sí como los cuadrados de las velocidades y los cuadrados de los diámetros y las densidades de las partes conjuntamente. Q.E.D.

COROLARIO 1. Por consiguiente, si tales sistemas fuesen dos fluidos elásticos, como el aire, y sus partes están en reposo entre ellas, y dos cuerpos semejantes y proporcionales en volumen y densidad a las partes de los fluidos y, además, situados semejantemente entre esas partes, fuesen lanzados en cualquier dirección según líneas semejantemente dispuestas, mientras las fuerzas aceleratrices con las cuales se agitan mutuamente las partículas de los fluidos son inversamente como los diámetros de los cuerpos lanzados y directamente como los cuadrados de las velocidades, dichos cuerpos en tiempos proporcionales excitarán movimientos semejantes en los fluidos y describirán espacios semejantes y proporcionales a sus diámetros.

COROLARIO 2. Por lo cual, en dicho fluido un proyectil veloz sufre una resistencia que es aproximadamente como el cuadrado de su velocidad. Pues si las fuerzas que agitan entre sí a las partículas distantes se aumentasen como el cuadrado de la velocidad, la resistencia estaría en dicha razón cuadrada exactamente; y por tanto, en un medio cuyas partes distantes entre sí no se agitan con fuerza alguna, la resistencia es exactamente como el cuadrado de la velocidad. Sean, pues, A, B, C, tres medios que constan de partes semejantes e iguales y dispuestas regularmente según distancias iguales. Las partes de los medios A y B repélanse entre sí con fuerzas que sean también entre sí como T y V, mientras que las partes del medio C carecen por completo de estas fuerzas. Y si cuatro cuerpos iguales D, E, F, G se movieran en estos medios, los dos primeros D y E en los dos medios primeros A y B, y los otros dos F y G en el tercer medio C, y la velocidad del cuerpo D es a la velocidad del cuerpo E, y la velocidad del cuerpo F a la del cuerpo G como la raíz cuadrada de las fuerzas T a las fuerzas V, la resistencia del cuerpo D será a la resistencia del cuerpo E, y la resistencia del cuerpo F a la del cuerpo G, como el cuadrado de las velocidades; y por tanto, la resistencia del cuerpo D será a la

resistencia del cuerpo F como la resistencia del cuerpo E a la del cuerpo G. Tengan los cuerpos D y F las mismas velocidades, así como los cuerpos E y G; y aumentando las velocidades de los cuerpos D y F en una razón cualquiera, y disminuyendo las fuerzas de las partículas del medio B según el cuadrado de la misma razón, el medio B se aproximará cuanto se quiera a la forma y condición del medio C, y por lo mismo, las resistencias de los cuerpos iguales y a iguales velocidades E y G en tales medios se aproximarán constantemente a la igualdad, de suerte que su diferencia resulte al final menor que una dada cualquiera. Por tanto, cuando las resistencias de los cuerpos D y F sean entre sí como las resistencias de los cuerpos E y G, también éstas se aproximan a la razón de igualdad. Pues las resistencias de los cuerpos D y F, cuando se mueven muy velozmente, son aproximadamente iguales: y por ello, cuando la resistencia del cuerpo F sea como el cuadrado de la velocidad, la resistencia del cuerpo D estará aproximadamente en esa razón.

COROLARIO 3. La resistencia de un cuerpo moviéndose muy velozmente en un fluido elástico es casi la misma que si las partes del fluido careciesen de sus fuerzas centrífugas y no se repeliesen entre sí; ello siempre que la fuerza elástica del fluido proceda de las fuerzas centrífugas de las partículas y la velocidad sea tan grande que las fuerzas no tengan tiempo suficiente para actuar.

COROLARIO 4. Puesto que las resistencias de cuerpos semejantes y con velocidades iguales, en medios cuyas partes distantes no se repelen entre sí, son como los cuadrados de los diámetros; las resistencias de cuerpos a iguales velocidades y con movimiento muy veloz en un fluido elástico son también muy aproximadamente como los cuadrados de los diámetros.

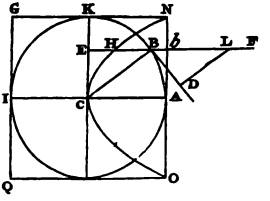
COROLARIO 5. Y puesto que cuerpos semejantes, iguales y con velocidades iguales, en medios de la misma densidad y cuyas partículas no se repelen unas a otras, tanto si dichas partículas son muchas y pequeñas como si son pocas y grandes, tropezarán con igual cantidad de materia en tiempos iguales, y trasmitirán a ésta igual cantidad de movimiento, y a su vez (por la ley III del movimiento) padecerán de ella la misma cantidad de reacción, es decir, serán resistidos por igual: también es evidente que en fluidos elásticos de igual densidad, cuando se mueven a grandísima velocidad, sus resistencias serán aproximadamente las mismas; tanto si dichos fluidos están formados de partículas más gruesas como si lo están de las más sutiles imaginables. La resistencia de los proyectiles con movimientos muy rápidos no disminuye mucho por la sutileza del medio.

COROLARIO 6. Todas estas cosas son así en fluidos cuya fuerza elástica tiene origen en las fuerzas centrífugas de las partículas. Pero si dicha fuerza obedeciese a otra causa, como la expansión de partículas al modo de la lana o las ramas de los árboles, o a otra causa cualquiera, por la cual los movimientos de las partículas entre sí resulten menos libres, la resistencia, por la menor fluidez del medio, sería mayor que en los corolarios anteriores.

PROPOSICIÓN XXXIV. TEOREMA XXVIII

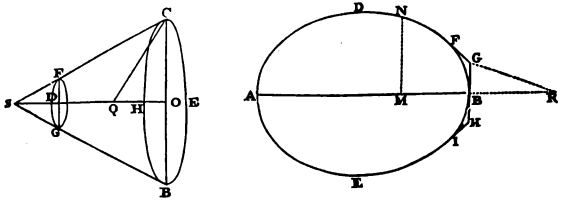
Si un globo y un cilindro de diámetros iguales se mueven con iguales velocidades en la dirección del eje del cilindro, en un medio raro y que consta de partículas iguales y libremente dispuestas a distancias mutuas iguales entre ellas la resistencia del globo será la mitad de la resistencia del cilindro.

Puesto que la acción del medio sobre un cuerpo es idéntica (por el corolario V de las leyes) tanto en el caso de que el cuerpo se mueva en un medio en reposo como si las partículas del medio chocan a la misma velocidad contra el cuerpo en reposo, consideremos al cuerpo en, reposo y veamos con qué fuerza es urgido por el medio en movimiento. Sea, pues, ABKI un cuerpo esférico descrito con centro en C y semidiámetro CA, e incidan sobre dicho cuerpo esférico las partículas del medio con una velocidad dada y según rectas paralelas a AC; y sea FB una recta de éstas. Tómese sobre ella LB, igual al semidiámetro CB, y trácese BD tangente a la esfera en B. Sobre KC y BD caigan las perpendiculares BE, LD, y la fuerza con la cual una partícula del medio, incidiendo oblicuamente según la recta FB, golpeará al globo en B, será a la fuerza con la que la misma partícula golpearía perpendicularmente en *b* al cilindro ONGQ descrito con eje ACI en torno al globo, como LD a LB, o BE a BC. Efectivamente, la eficacia de esta fuerza para mover el globo según la dirección FB o AC de su incidencia es a su eficacia para moverlo según la dirección de su propia determinación, es decir, según la dirección de la recta BC con la que actúa directamente sobre el globo como BE a BC. Y, por ambas razones conjuntas, la eficacia de una partícula incidente oblicuamente según la recta FB sobre un globo para moverlo en la dirección de su incidencia es a la eficacia de la misma partícula incidente perpendicularmente según la misma recta sobre un cilindro para moverlo en la misma dirección, como BE^2 a BC^2. Por lo tanto, si sobre *b*E, que es perpendicular a la base circular NAO del cilindro e igual al radio AC se toma *b*H igual a $\frac{BE^2}{CB}$, resultará que bH es a *b*E como el efecto de la partícula sobre el globo al efecto de la partícula sobre el cilindro. Y por lo mismo, el sólido que comprende a todas las líneas *b*H será al sólido que comprende a todas las líneas *b*E, como el efecto de todas las partículas sobre el globo al efecto de todas las partículas sobre el cilindro. Pero el primer sólido es un paraboloide descrito con vértice en C, eje CA y «latus rectum» CA; mientras el segundo es un cilindro circunscrito al paraboloide: y es sabido que un paraboloide es la mitad del cilindro circunscrito. Luego la fuerza total del medio sobre el globo es la mitad de la fuerza total del medio sobre el cilindro. Y por ello, si las partículas del medio reposasen y el globo y el cilindro se moviesen con velocidades iguales, la resistencia del globo sería la mitad que la resistencia del cilindro. Q.E.D.



ESCOLIO

Con el mismo método pueden compararse entre sí otras figuras en lo relativo a la resistencia y encontrar aquellas que sean más adecuadas para mantener sus movimientos en medios resistentes. Así, si hubiese que construir, con la base circular CEBH, que tiene su centro en O y radio OC, y con la altura OD, un tronco de cono CBGF que fuese el de menor resistencia de todos los troncos de cono construidos con la misma base y altura al desplazarse según la dirección de su eje hacia D, biséquese la altura OD en Q y prolónguese OQ hasta S de modo que QS sea igual a QC, y S será el vértice del cono cuyo tronco se busca.



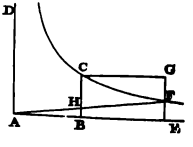
Y, de paso, puesto que el ángulo CSB siempre es agudo, se infiere que si el sólido ADBE fuese generado por circunvolución de la figura elíptica u oval ADBE en torno a su eje AB, mientras la figura generatriz es tocada por tres rectas FG, GH, HI, en los puntos F, B e I, bajo la condición de que GH sea perpendicular al eje en el punto de contacto B, y FG, HI y la propia GH encierren ángulos FGB, BHI de 135 grados, el sólido generado por la circunvolución de la figura ADFGHIE sobre su mismo eje AB sufrirá menor resistencia que el sólido anterior; siempre que ambos se muevan en la dirección de su eje AB y vaya por delante el extremo B de ambos. Proposición ésta que no creo haya de ser inútil para la construcción de naves.

Pero si la figura DNFG fuese una curva tal que si de su punto N cualquiera se hace descender NM perpendicular al eje AB, y desde un punto dado G se traza la recta GR que sea paralela a la tangente de la figura en N, y corte a la prolongación del eje en R, MN vendría a ser a GR como GR^3 a $4BR \times GB^2$; el sólido, descrito por la revolución de esta figura sobre su eje AB, moviéndose en el susodicho medio raro desde A hacia B, sufre menor resistencia que cualquier otro sólido circular descrito con las mismas longitud y anchura.

PROPOSICIÓN XXXV. PROBLEMA VII

Si un medio raro está constituido de partículas mínimas en reposo y colocadas libremente a iguales distancias entre ellas, hallar la resistencia de un globo que se desplaza uniformemente en dicho medio.

Caso 1. Imagínese que un cilindro descrito con el mismo diámetro y la misma altura se desplaza a la misma velocidad según la línea de su eje en el mismo medio. Y supongamos que las partículas del medio sobre las que inciden el globo o el cilindro retrocedan con la máxima fuerza de reflexión, puesto que la resistencia del globo (por la última proposición) es la mitad de la resistencia del cilindro y el globo es al cilindro como dos a tres y el cilindro al chocar perpendicularmente con las partículas y reflejándolas así de modo máximo, les comunica el doble de su propia velocidad, el cilindro, en el tiempo en que recorre desplazándose uniformemente la longitud de su semieje, comunicará a las partículas un movimiento que será al movimiento total del cilindro como la densidad del medio a la densidad del cilindro; y el globo, en el tiempo en que recorre toda la longitud de su diáme-



tro desplazándose uniformemente, comunicará el mismo movimiento a las partículas; y en el tiempo en que recorre los dos tercios de su diámetro, comunicará a las partículas un movimiento que será al movimiento total del globo como la densidad del medio a la densidad del globo. Y, por tanto, el globo sufre una resistencia que será a la fuerza con la cual puede suprimirse o generarse todo su movimiento en el tiempo en que puede recorrer, desplazándose uniformemente, las dos terceras partes de su diámetro, como la densidad del medio a la densidad del globo.

CASO 2. Supongamos que las partículas del medio incidentes sobre el globo o sobre el cilindro no son reflejadas; entonces el cilindro, al incidir perpendicularmente sobre las partículas, les comunicará simplemente su propia velocidad, y por ello sufre una resistencia que será la mitad de la del caso anterior, y la resistencia del globo también será la mitad que la anterior.

CASO 3. Supongamos que las partículas del medio se reflejen del globo con una fuerza que no es la máxima ni tampoco nula, sino una fuerza media; en tal caso la resistencia del globo estará en la misma razón media entre la resistencia del primer caso y la del segundo. Q.E.I.

COROLARIO 1. De aquí que si la dureza del globo y de las partículas es infinita y, por tanto, están desprovistos de toda fuerza elástica y, por tanto, también carecen de toda fuerza de reflexión, la resistencia del globo será a la fuerza con la cual puede suprimirse o generarse todo su movimiento en el tiempo en que recorre cuatro terceras partes de su diámetro, como la densidad del medio a la densidad del globo.

COROLARIO 2. La resistencia del globo, «caeteris paribus», es como el cuadrado de la velocidad.

COROLARIO 3. La resistencia del globo, «caeteris paribus», es como el cuadrado del diámetro.

COROLARIO 4. La resistencia del globo, «caeteris paribus», es como la densidad del medio.

COROLARIO 5. La resistencia del globo está en razón compuesta del cuadrado de la velocidad, del cuadrado del diámetro y de la densidad del medio.

COROLARIO 6. Y el movimiento del globo con su resistencia puede representarse como sigue: sea AB el tiempo en el cual el globo puede perder todo su movimiento a causa de su resistencia uniformemente continua. Sobre AB elévense las perpendiculares AD, BC. Y sea BC dicho movimiento total, mientras por el punto C y con asíntotas AD, AB se traza la hipérbola CF. Prolónguese AB hasta un punto cualquiera E. Elévese la perpendicular EF que toque a la hipérbola en F. Complétese el paralelogramo CBEG, y trácese AF que corte a BC en H. Y si el globo en un tiempo cualquiera BE, con su movimiento inicial BC continuado uniformemente, recorre en un medio no resistente el espacio representado por el área del paralelogramo CBEG, el mismo globo en un medio resistente describirá el espacio CBEF representado por el área de la hipérbola, y su movimiento al final de aquel tiempo vendrá representado por la ordenada de la hipérbola EF, una vez perdida su parte FG de movimiento. Y su resistencia, al final del mismo tiempo, vendrá representada por la longitud BH, una vez perdida la parte CH de resistencia. Todo esto es evidente por los corolarios 1 y 3 de la proposición V del libro segundo.

COROLARIO 7. De aquí que si un globo, debido a su resistencia uniformemente continua R, perdiese todo su movimiento M en el tiempo T, el mismo globo en el tiempo *t* en un medio resistente debido a una resistencia decreciente en razón del cuadrado

de la velocidad, perderá de su movimiento M la parte $\frac{tM}{T+t}$ reteniendo la parte $\frac{TM}{T+t}$; y describirá un espacio que será al espacio descrito con el movimiento uniforme M en el tiempo t como el logaritmo del número $\frac{T+t}{T}$ multiplicado por el número 2,302585092994 es al número $\frac{t}{T}$ dado que el área hiperbólica BCFE es al rectángulo BCGE en esta misma proporción.

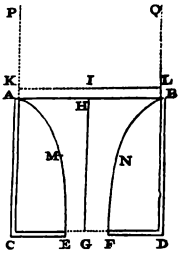
ESCOLIO

En esta proposición he expuesto la resistencia y retardación de proyectiles esféricos en medios no continuos, y he mostrado que esta resistencia es a la fuerza con la cual podría suprimirse o generarse todo el movimiento del globo en el tiempo en que el globo describiría con velocidad uniformemente continua las dos terceras partes de su diámetro, como la densidad del medio a la densidad del globo, con tal de que tanto el globo como las partículas del medio sean sumamente elásticas y gocen de la máxima fuerza de reflexión: y también que esta fuerza es el doble menor cuando el globo y las partículas del medio son infinitamente duras y prácticamente carentes de fuerza de reflexión. Pero en medios continuos como es el agua, el aceite caliente, el mercurio, en los cuales el globo no incide inmediatamente sobre todas las partículas del fluido generadoras de resistencia, sino que más bien presiona solamente sobre las partículas más próximas y éstas presionan a las siguientes y éstas a las siguientes, la resistencia es todavía otra mitad menor. Efectivamente, en esta clase de medios muy fluidos el globo padece una resistencia que es a la fuerza con la cual se podría suprimir o generar todo su movimiento en el tiempo en el cual, con el susodicho movimiento continuo uniforme, recorrería ocho terceras partes de su diámetro, como la densidad del medio a la densidad del globo. Es lo que trataremos de mostrar en lo que sigue.

PROPOSICIÓN XXXVI. PROBLEMA VIII

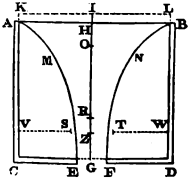
Definir el movimiento del agua que fluye por un orificio hecho en el fondo de un vaso cilíndrico.

Sea ACDB un vaso cilíndrico, AB su orificio superior, CD el fondo paralelo al horizonte, EF un orificio circular en mitad del fondo, G el centro del orificio y GH el eje del cilindro perpendicular al horizonte. Y supongamos que un cilindro de hielo APQB de la misma anchura que la cavidad del vaso y con el mismo eje desciende con movimiento uniforme y continuo y que sus partes en cuanto tocan la superficie AB se licuan y convertidas en agua discurren en el vaso por su gravedad y forman al caer una catarata o columna de agua ABNFEM y atravesando el orificio EF lo llenan completamente. La velocidad uniforme del hielo que cae y la del agua contigua en el círculo AB sea la misma que la que tendría el agua cayendo y describiendo en su caída la altura IH; y estén IH y HG sobre la misma línea, y por el punto I trácese la recta KL paralela al horizonte y que toca a los lados del hielo en K y L. Y la velocidad del agua que cae por el orificio EF será aquella que adquiriría el agua cayendo desde I y describiendo en su caída



la altura IG. Y, por consiguiente, por los teoremas de Galileo, IG será a IH como el cuadrado de la velocidad del agua que cae por el orificio a la velocidad del agua en el círculo AB, es decir, como el cuadrado del círculo AB al círculo EF; pues estos círculos son inversamente como las velocidades de las aguas que llenándolos completamente pasan a su través en el mismo tiempo y en igual cantidad. Se trata aquí de la velocidad del agua hacia el plano horizontal. Y los movimientos paralelos al horizonte con los cuales se aproximan mutuamente las partes del agua que cae, al no proceder de la gravedad, no cambiarán el movimiento perpendicular al horizonte surgido de la gravedad, y no se consideran, por tanto, aquí. Ciertamente suponemos que las partes de agua cohesionan entre sí un tanto y que, mientras caen, por esa cohesión, se aproximan unas a otras mediante movimientos horizontales de modo que constituyan una sola catarata y no se dividan en muchas. Pero el movimiento paralelo al horizonte, proveniente de la susodicha cohesión, no lo consideramos aquí.

Caso 1. Ahora supongamos que toda la cavidad del vaso alrededor del agua que cae ABNFEM está llena de hielo, de modo que el agua caiga a través del hielo como si fuera a través de un embudo. Si el agua ni siquiera tocase al hielo, o lo que es lo mismo, si lo toca pero, por lo sumamente pulido de la superficie del hielo, resbala libremente y sin resistencia alguna, caerá por el orificio EF con la misma velocidad que antes, y todo el peso de la columna de agua ABNFEM presionará para generar su caída como antes, mientras el fondo del vaso soportará el peso del hielo que rodea a la columna.



Ahora licúese el hielo del vaso, y el flujo del agua, en cuanto a la velocidad, permanecerá como antes. No será menor, porque el hielo hecho agua tratará de salir: tampoco mayor, porque el hielo hecho agua no puede descender si no es impidiendo el descenso de otra agua igual a su propio descenso. La misma fuerza debe generar la misma velocidad del agua que fluye.

Pero el orificio del fondo del vaso, debido a los movimientos oblicuos de las partículas del agua que fluye, debe ser algo mayor que antes. Pues las partículas de agua ya no pasan todas por el orificio discurriendo perpendicularmente, sino que, concurriendo por doquier desde los costados del vaso y convergiendo sobre el orificio, lo atraviesan con movimientos oblicuos, y curvando su trayectoria hacia abajo confluyen en la vena de agua que cae, que es algo más delgada bajo el orificio que en el orificio mismo, siendo su diámetro, respecto al diámetro del orificio como 5 a 6, o como $5\frac{1}{2}$ a $6\frac{1}{2}$ aproximadamente, si he medido bien los diámetros. Preparé una lámina plana y muy delgada perforada en el centro, siendo el orificio circular de un diámetro de cinco octavos de pulgada. Para que la vena de agua fluyente no se acelerase al caer y al acelerarse se hiciese más estrecha, coloqué esta lámina, no en el fondo sino en un costado del vaso, de tal modo que la susodicha vena brotase según una línea paralela al horizonte. Después, una vez lleno el vaso de agua, abrí el orificio para que saliese el agua; y el diámetro de la vena, a una distancia de casi media pulgada del orificio, medido con la máxima exactitud, vino a ser de $\frac{21}{40}$ partes de pulgada. Por tanto, el diámetro

del orificio circular era al diámetro de la vena de agua aproximadamente como 25 a 21. Por consiguiente, el agua, al atravesar el orificio, converge desde todas partes, y después de salir del vaso, se hace más estrecha con la convergencia, y por el estrechamiento se hace más rápida, hasta alcanzar una distancia de media pulgada del orificio, y a esa distancia se torna más acelerada y estrecha que en el orificio mismo en la razón de 25×25 a 21×21 o de 17 a 12 aproximadamente, es decir, aproximadamente como la raíz cuadrada de dos a la unidad. Pero consta experimentalmente que la cantidad de agua que fluye en un tiempo dado por el orificio circular efectuado en el fondo del vaso es aquella que con la velocidad antedicha debería fluir en el mismo tiempo, no por aquel orificio, sino por el orificio circular cuyo diámetro es al diámetro de aquel orificio como 21 a 25. Y, por tanto, la susodicha agua que cae tiene una velocidad hacia abajo en el mismo orificio que es la misma que adquiriría un grave cayendo y describiendo en su caída la semialtura del agua contenida en el vaso muy aproximadamente. Pero después de salir del vaso se acelera convergiendo hasta que llega a una distancia del orificio casi igual al diámetro del orificio, y adquiere una velocidad mayor casi en la proporción de la raíz cuadrada de dos a uno; velocidad que, ciertamente, casi adquiriría un grave cayendo y recorriendo en su caída la altura total del agua contenida en el vaso.

En lo sucesivo, por tanto, designemos al diámetro de la vena mediante aquel orificio menor, al cual hemos llamado EF. Y supóngase que se traza un plano VW encima y paralelo al del orificio EF y a una distancia igual al diámetro del orificio, dotado también de un orificio ST mayor que el primero, y así caiga por él una vena de agua que llene completamente el orificio inferior EF y que además tenga un diámetro de una proporción respecto al del orificio inferior como 25 a 21 aproximadamente. De este modo la vena de agua pasará perpendicularmente por el orificio inferior, y la cantidad de agua fluyente, según el tamaño de este orificio, será aproximadamente aquella que exige la solución del problema. En cambio, el espacio comprendido entre los dos planos y la vena de agua que cae puede considerarse como fondo del vaso. Pero para que la solución del problema sea más simple y más matemática es más conveniente considerar solamente al plano inferior como fondo del vaso y suponer que el agua, que caía por el hielo o por el embudo y salía del vaso por el orificio EF practicado en el plano inferior, conserva continuamente su movimiento, mientras el hielo está en reposo. Por tanto, sea en lo sucesivo ST el diámetro del orificio descrito con centro en Z a cuyo través fluye del vaso la catarata cuando el agua toda del vaso es fluida. Y sea EF el diámetro del orificio que el chorro, al pasar, llena completamente, tanto si el agua sale del vaso a través del orificio superior ST, como si cae a través del hielo a modo de embudo. Y sea el diámetro del orificio superior ST al del inferior EF aproximadamente como 25 a 21, y la distancia perpendicular entre los planos de los orificios sea igual al diámetro del orificio menor EF. En tal caso, la velocidad del agua que sale del vaso por el orificio ST será en el mismo orificio hacia abajo la misma que la que adquiriría un cuerpo cayendo desde la mitad de la altura IZ: mientras que la velocidad de la catarata que cae de ambos será en el orificio EF la que adquiriría un cuerpo que cayese de la altura total IG.

Caso 2. Si el orificio EF no estuviese en el centro del fondo del vaso, sino que el fondo estuviese perforado en otro lugar, el agua saldrá con la misma velocidad que antes, siempre que el orificio sea del mismo tamaño. Pues un grave desciende ciertamente en un tiempo mayor hasta la misma profundidad siguiendo una línea oblicua que siguiendo la perpendicular, pero al bajar adquiere la misma velocidad en uno y otro caso, como demostró Galileo.

CASO 3. La misma es la velocidad del agua que fluye por un orificio abierto en un costado del vaso. Pues si el orificio fuese pequeño, de modo que la distancia entre las superficies AB y KL sea imperceptible para los sentidos y la vena de agua que sale horizontalmente venga a tener una forma parabólica, del «latus rectum» de esta parábola se infiere que la velocidad del agua que discurre será aquella que adquiriría un cuerpo al caer desde la altura HG o IG del agua retenida en el vaso. Efectivamente, hecho el experimento, hallé que si la altura del agua retenida en el vaso era de 20 pulgadas sobre el orificio y la altura del orificio sobre el plano horizontal era también de 20 pulgadas, la vena de agua que fluía caía sobre dicho plano a la distancia de casi 37 pulgadas de la perpendicular trazada desde el orificio sobre el plano horizontal. Pues, sin resistencia, la vena debería haber caído sobre el plano a una distancia de 40 pulgadas, siendo el «latus rectum» de la vena parabólica de 80 pulgadas.

CASO 4. E incluso si el agua fluyente se orienta hacia arriba saldrá con la misma velocidad. Pues la pequeña vena de agua fluyente asciende con un movimiento perpendicular hasta la altura GH o GI del agua retenida en el vaso, salvo en la medida en que su ascenso es un tanto impedido por la resistencia del aire; y por tanto, sale con la velocidad que adquiriría cayendo desde dicha altura. Cada partícula del agua retenida sufre igual presión por todas partes (por la proposición XIX del libro segundo) y al ceder a la presión, se desplaza hacia todas partes con igual impulso, tanto si cae por el orificio en el fondo del vaso, como si fluye horizontalmente a través de un orificio lateral, o si penetra en un canal y después asciende por un pequeño orificio abierto en la parte superior del canal. Que la velocidad con que fluye el agua es la que se ha establecido en esta proposición no sólo se infiere racionalmente, sino que también se evidencia mediante los bien conocidos experimentos que acabamos de describir.

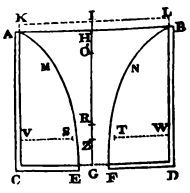
CASO 5. La velocidad del flujo de agua es la misma tanto si la forma del orificio es circular como si es cuadrada, triangular u otra cualquiera igual a la circular. Porque la velocidad del agua fluyente no depende de la figura del orificio, sino que surge de su altura por debajo del plano KL.

CASO 6. Si la parte inferior del vaso ABDC se sumerge en agua estancada y la altura del agua estancada sobre el fondo del vaso fuera GR, la velocidad con la que el agua que está en el vaso saldría por el orificio EF hacia el agua estancada sería la misma que la que adquiriría el agua cayendo desde la altura IR y recorriéndola en su caída. Pues el peso de toda el agua del vaso que está por debajo de la superficie del agua estancada será sostenido en equilibrio por el peso del agua estancada, y por ello en nada acelerará el movimiento del agua que desciende en el vaso. También puede mostrarse este caso mediante experimentos, midiendo el tiempo en que el agua fluye.

COROLARIO 1. Por ello, si la altura CA del agua se prolonga hasta K, de modo que AK sea a CK como el cuadrado de la razón del área de un orificio abierto en cualquier parte del fondo al área del círculo AB; la velocidad del agua fluyente será igual a la velocidad que adquiriría el agua cayendo y recorriendo en su caída la altura KC.

COROLARIO 2. Y la fuerza con la cual se puede generar el movimiento total del agua fluyente es igual al peso de la columna cilíndrica de agua cuya base es el orificio EF y cuya altura es 2GI o 2CK. Pues el agua que sale, en el tiempo en que iguala a dicha columna, adquiriría cayendo por su propio peso desde la altura GI la velocidad con que sale.

COROLARIO 3. El peso de toda el agua contenida en el vaso ABDC es a la parte del peso que presiona para que salga el agua como la suma de los círculos AB y EF al doble del círculo EF. Pues sea 10 la media proporcional entre IH e IG; y el agua que sale



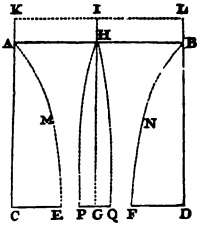
por el orificio EF en el tiempo en que una gota cayendo desde I puede recorrer la altura IG, es igual a un cilindro cuya base es el círculo EF y cuya altura es 2IG, es decir, a un cilindro cuya base es el círculo AB y cuya altura es 2IO, pues el círculo EF es al círculo AB como la raíz cuadrada de la altura IH a la de la altura IG, es decir, en razón simple de la media proporcional IO a la altura IG; y en el tiempo en que la gota cayendo desde I describiría la altura IH, el agua que sale será igual a un cilindro cuya base es el círculo AB y cuya altura es 2IH; y en el tiempo en que la gota cayendo desde I por H hasta G describe la diferencia de alturas HG, el agua que sale, es decir, toda el agua contenida en el sólido ABNFEM, será igual a la diferencia de los cilindros, es decir, al cilindro cuya base es AB y cuya altura es 2HO. Y, por consiguiente, toda el agua contenida en el vaso ABDC es al agua toda que cae contenida en el sólido ABNFEM como HG a 2HO, es decir, como HO + OG a 2HO, o IH + IO a 2IH. Pero el peso de toda el agua contenida en el sólido ABNFEM presiona para que salga el agua; y, por tanto, el peso de toda el agua contenida en el vaso es a la parte de peso que presiona para que salga el agua como IH + IO a 2H y, por tanto, como la suma de los círculos EF y AB al doble del círculo EF.

COROLARIO 4. Y por ello el peso de toda el agua contenida en el vaso ABDC es a aquella parte del peso que soporta el fondo del vaso, como la suma de los círculos AB y EF a la diferencia de los propios círculos.

COROLARIO 5. Y la parte de peso soportada por el fondo del vaso es a la parte de peso que presiona sobre la salida del agua, como la diferencia de los círculos AB y EF al doble del círculo menor, o como el área del fondo al doble del orificio.

COROLARIO 6. Mas la parte de peso que presiona solamente sobre el fondo es al peso de toda el agua que descansa perpendicularmente sobre el fondo como el círculo AB a la suma de los círculos AB y EF, o como el círculo AB al exceso del duplo del círculo AB sobre el fondo. Pues la parte de peso, que presiona sola sobre el suelo, es al peso de toda el agua del vaso, como la diferencia de los círculos AB y EF a la suma de esos círculos, por el corolario 4; y el peso de toda el agua contenida en el vaso es al peso de toda el agua que descansa perpendicularmente sobre el fondo como el círculo AB a la diferencia de los círculos AB y EF. Y, por tanto, permutando adecuadamente, la parte de peso que sólo urge sobre el fondo, es al peso de toda el agua que descansa sobre el fondo perpendicularmente, como el círculo AB a la suma de los círculos AB y EF o exceso del duplo del círculo AB sobre el fondo.

COROLARIO 7. Si en el centro del orificio EF se coloca el pequeño círculo PQ, descrito en torno al centro G y paralelo al horizonte, el peso del agua sostenida por dicho pequeño círculo es mayor que el peso de la tercera parte del cilindro de agua cuya base fuese el pequeño círculo y la altura GH. Pues, sea ABNFEM la catarata o columna de agua que cae con eje GH como más arriba, e imagínese que toda el agua contenida en el vaso se congelase, tanto en torno de la catarata como sobre el pequeño círculo, por no ser necesaria su fluidez para un descenso inmediato y rápido del agua. Y sea PHQ la columna de agua congelada sobre el pequeño círculo, con vértice en H y altura GH. Imagínese que semejante catarata cae con todo su peso, y no se apoya sobre PHQ ni presiona en absoluto, sino que libremente y sin fricción se va deslizando, salvo acaso en el vértice mismo del hielo donde la catarata al comenzar a caer puede ser cóncava.



Y puesto que el agua congelada AMEC, ANFD que rodea a la catarata es convexa en su superficie interior AME, BNF hacia la catarata que cae, también la columna PHQ será convexa hacia la catarata y, por tanto, mayor que el cono cuya base es el pequeño círculo PQ y la altura GH, es decir, mayor que la tercera parte del cilindro descrito con tales base y altura. Sostiene, pues, dicho pequeño círculo el peso de esta columna, es decir, un peso que es mayor que el peso del cono o mayor que la tercera parte de aquel cilindro.

COROLARIO 8. El peso de agua que el círculo muy pequeño PQ soporta parece ser menor que el peso de las dos terceras partes del cilindro de agua cuya base es dicho círculo y la altura HG. Pues, supuesto lo que hemos dicho antes, imagínese que se describe un semiesferoide cuya base es el susodicho pequeño círculo y cuyo semieje o altura es HG. Esta figura será igual a dos terceras partes de aquel cilindro y comprenderá a la columna de agua congelada PHQ cuyo peso sostiene el pequeño círculo. Pues como el movimiento del agua sea directo en gran medida, la superficie externa de la dicha columna concurrirá con la base PQ en ángulo un tanto agudo, toda vez que el agua se acelera continuamente al caer y, debido a esa aceleración se va haciendo más estrecha. Por tanto, puesto que el ángulo es menor que un recto, las partes inferiores de la columna estarán dentro del semiesferoide. Y en sus partes superiores también será aguda o puntiaguda, pues de lo contrario el movimiento horizontal del agua habría de ser infinitamente más veloz en el vértice que su movimiento hacia el plano horizontal. Y cuanto menor sea el círculo PQ, más agudo será el vértice de la columna, y si el círculo disminuye hasta el infinito, el ángulo PHQ disminuirá hasta el infinito, por lo cual la columna estará dentro del semiesferoide. Por consiguiente, la columna es menor que el semiesferoide, o que las dos terceras partes del cilindro cuya base es el pequeño círculo y cuya altura es GH. Así, el pequeño círculo soporta una fuerza de agua igual al peso de la columna, mientras el peso del agua que la rodea presiona para que el agua salga por el orificio.

COROLARIO 9. El peso de agua que soporta el pequeño círculo PQ muy reducido es aproximadamente igual al peso de un cilindro de agua cuya base fuese dicho pequeño círculo y su altura $\frac{1}{2}$GH. Pues este peso es una media aritmética de los pesos del cono y el semiesferoide mencionado más arriba. Pero si el pequeño círculo no fuese muy reducido, sino más bien aumentase hasta igualar al orificio EF, soportaría el peso de toda el agua que reposa perpendicularmente sobre él, es decir, el peso del cilindro de agua cuya base es el pequeño círculo y cuya altura es GH.

COROLARIO 10. Y (hasta donde me es posible precisarlo) el peso que soporta este pequeño círculo es siempre al peso de un cilindro de agua cuya base sea el pequeño círculo y su altura $\frac{1}{2}$GH como EF^2 es a $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, o como el círculo EF al exceso de dicho círculo sobre la mitad del pequeño círculo, muy aproximadamente.

LEMA IV

Si un cilindro se desplaza uniformemente en la dirección de su longitud, la resistencia que sufre no cambia en absoluto aumentando o disminuyendo la longitud

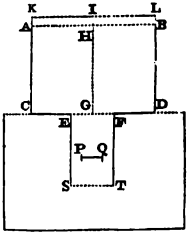
y, por tanto, es igual a la resistencia que sufriría un círculo descrito con el mismo diámetro y que se desplaza se a la misma velocidad según una línea recta perpendicular a su plano.

Pues los lados no se oponen en absoluto al movimiento y un cilindro se transforma en un círculo cuando su longitud disminuye hasta el infinito.

PROPOSICIÓN XXXVII. TEOREMA XXIX

Si un cilindro se desplaza uniformemente según la dirección de su longitud en un fluido comprimido, ilimitado y no elástico, la resistencia debida a la magnitud de su sección transversal es a la fuerza con la cual se generaría o anularía todo su movimiento en el tiempo en que recorre el cuádruplo de su longitud como la densidad del medio a la densidad del cilindro muy aproximadamente.

Pues sea ABDC un vaso que toca con su fondo CD la superficie del agua estancada; hágase que el agua salga de dicho vaso hacia el agua estancada por el canal cilíndrico EFTS, perpendicular al horizonte, sitúese el pequeño círculo PQ paralelo al horizonte en una posición cualquiera en medio del canal y prolónguese CA hasta K de modo que AK sea a CK como el cuadrado del exceso del orificio del canal EF sobre el pequeño círculo PQ al círculo AB. Y es evidente (por el caso 5, el caso 6 y el corolario 1 de la proposición XXXVI) que la velocidad del agua que pasa por el anillo comprendido entre el pequeño círculo y los costados del recipiente será aquella que adquiriría el agua cayendo y describiendo en su caída la altura KC o IG.



Y (por el corolario 10 de la proposición XXXVI) si la anchura del vaso es infinita, de modo que la breve línea HI desaparece y las alturas IG, HG se hacen iguales, la fuerza del agua que cae sobre el pequeño círculo será al peso del cilindro cuya base es el mismo pequeño círculo y cuya altura es $\frac{1}{2}$IG como EF^2 es a $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ muy aproximadamente. Pues la fuerza del agua que fluye con movimiento uniforme por todo el canal será siempre igual sobre el pequeño círculo en cualquier parte del canal en que se halle colocado.

Ciérrense ahora los orificios EF, ST del canal, hágase ascender al pequeño círculo en el fluido comprimido por doquier y obligue con su ascenso al agua de arriba a descender por el espacio anular comprendido entre el pequeño círculo y los costados del canal: y la velocidad de ascenso del pequeño círculo será a la velocidad de descenso del agua como la diferencia entre los círculos EF y PQ al círculo PQ, y la velocidad de ascenso del pequeño círculo a la suma de las velocidades, es decir, a la velocidad relativa de descenso del agua con la cual discurre al lado del pequeño círculo ascendente, como la diferencia de los círculos EF y PQ al círculo EF, o sea, como $EF^2 - PQ^2$ a EF^2. Sea dicha velocidad relativa igual a la velocidad con la cual se vio más arriba que el agua pasaba por el mismo espacio anular mientras el pequeño círculo permanecía inmóvil, es decir, a la velocidad que adquiriría el agua cayendo y describiendo en su caída la altu-

ra IG: en tal caso, la fuerza del agua sobre el pequeño círculo ascendente será la misma que antes (por el corolario V de estas leyes), es decir, la resistencia del pequeño círculo ascendente será al peso del cilindro de agua cuya base sea el pequeño círculo y su altura $\frac{1}{2}$IG como EF^2 a $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ muy aproximadamente. Pero la velocidad del pequeño círculo será a la velocidad que adquiriría el agua cayendo y describiendo con su caída la altura IG, como $EF^2 - PQ^2$ a EF^2.

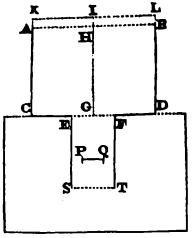
Auméntese la anchura del canal hasta el infinito, y las susodichas razones entre $EF^2 - PQ^2$ y EF^2 y entre EF^2 y $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ llegarán en último término a ser razones de igualdad. Y, por consiguiente, la velocidad del pequeño círculo será ahora aquella que adquiriría el agua cayendo y describiendo con su caída la altura IG, mientras su resistencia vendrá a ser igual al peso del cilindro cuya base sea el pequeño círculo y su altura la mitad de la altura IG, desde la cual deberá caer el cilindro para adquirir la velocidad con que asciende el pequeño círculo; y a esta velocidad, en el tiempo de su caída, describirá el cuádruplo de su longitud. En cambio, la resistencia del cilindro, desplazándose a esta velocidad en la dirección de su longitud, es la misma que la resistencia del pequeño círculo (por el lema IV) y en consecuencia, es igual a la fuerza con la cual se generaría su movimiento mientras describe el cuádruplo de su longitud muy aproximadamente.

Si la longitud del cilindro se aumentase o disminuyese, su movimiento al igual que el tiempo en que describe el cuádruplo de su longitud, aumentarán o disminuirán en la misma proporción; y por tanto, la fuerza con la cual se generaría o suprimiría el movimiento aumentado o disminuido, en tiempo correlativamente aumentado o disminuido, no sufrirá cambio alguno; y por ende, también ahora es igual a la resistencia del cilindro, pues también esta permanece sin cambios según el lema IV.

Si la densidad del cilindro aumenta o disminuye, su movimiento, al igual que la fuerza con la cual en el mismo tiempo se generaría o suprimiría el movimiento, aumentará o disminuirá en la misma proporción. Por consiguiente, la resistencia de todo el cilindro será a la fuerza con la cual se generaría o se suprimiría todo su movimiento en el tiempo que tarda en recorrer el cuádruplo de su longitud, como la densidad del medio a la densidad del cilindro muy aproximadamente. Q.E.D.

Pero un fluido ha de ser comprimido para que sea continuo, y debe ser continuo y no elástico para que toda la presión debida a su compresión pueda propagarse instantáneamente y no cambie la resistencia actuando para ello de modo igual sobre todas las partes del cuerpo movido. La presión debida al movimiento del cuerpo se consume en generar el movimiento de las partes del fluido y crea la resistencia. Pero la presión que surge de la compresión del fluido, aunque sea fuerte, si se propaga instantáneamente, no genera movimiento alguno en las partes de un fluido continuo, no provoca cambio alguno de movimiento; y por ello ni aumenta ni disminuye la resistencia. Ciertamente, la acción del fluido debida a su compresión no puede ser en las partes posteriores más fuerte que en las anteriores de un cuerpo movido, y por ello la resistencia descrita en esta proposición no puede disminuirse: y no será más fuerte en las partes anteriores que en las posteriores, siempre que la propagación de la misma sea infinitamente más rápida que el movimiento del cuerpo presionado. Pero será infinitamente más rápida y se propagará instantáneamente siempre que el fluido sea continuo y no elástico.

COROLARIO 1. Las resistencias que sufren cilindros que se desplazan en la dirección de sus longitudes uniformemente y en medios infinitos están en razón compuesta del cuadrado de las velocidades, del cuadrado de los diámetros y de la densidad del medio.

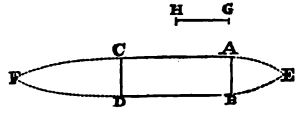


COROLARIO 2. Si la anchura del canal no se aumenta hasta el infinito, sino que el cilindro avanza según la dirección de su longitud en el medio contenido en reposo, coincidiendo además el eje del cilindro con el eje del canal, su resistencia vendrá a ser, respecto a la fuerza con la cual se generaría o suprimiría todo su movimiento, en el tiempo en que describe el cuádruplo de su longitud, como la razón compuesta de la razón EF^2 a $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, del cuadrado de la razón EF^2 a $EF^2 - PQ^2$ y de la razón de la densidad del medio a la densidad del cilindro.

COROLARIO 3. Con los mismos supuestos y también que la longitud L sea al cuádruplo de la longitud del cilindro en la razón compuesta de la razón de $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ a EF^2 y del cuadrado de la razón de $EF^2 - PQ^2$ a EF^2, la resistencia del cilindro será a la fuerza con la que se generaría o suprimiría todo su movimiento en el tiempo en que describe la longitud L, como la densidad del medio a la densidad del cilindro.

ESCOLIO

En esta proposición hemos investigado la resistencia que procede solamente de la magnitud de la sección transversal del cilindro, prescindiendo de la parte de resistencia que puede surgir de la oblicuidad de los movimientos. Ya que, al igual que en el caso 1 de la proposición XXXVI, la oblicuidad de los movimientos, con los cuales las partes del agua en el vaso convergían de todos lados sobre el orificio EF, impedía la salida del agua por el orificio, del mismo modo en esta proposición, la oblicuidad de los movimientos con los cuales las partes del agua presionadas por el extremo anterior del cilindro ceden a la presión y divergen en todas direcciones, retardan sus traslaciones por los alrededores de dicho extremo anterior hacia las partes posteriores del cilindro y hace que el fluido se remueva hasta distancias mayores y aumente la resistencia, y esto casi en la misma razón en la que disminuye la salida de agua del vaso, es decir, casi como el cuadrado de la razón de 25 a 21. Y al igual que en el caso primero de la susodicha proposición hacíamos que las partes de agua pasasen a caño lleno y perpendicularmente por el orificio EF, suponiendo que toda el agua del vaso en torno a la catarata estaba congelada, y cuyo movimiento oblicuo e inútil permanecía inmóvil, del mismo modo en esta proposición, para eliminar la oblicuidad de los movimientos, y para que las partes del agua, cediendo con un movimiento directo y breve, faciliten al máximo el tránsito del cilindro y únicamente permanezca la resistencia debida a la magnitud de la sección transversal, resistencia que sólo puede disminuir disminuyendo el diámetro del cilindro, habremos de suponer que las partes del fluido cuyos movimientos oblicuos e inútiles crean resistencia, están en reposo entre sí en ambos extremos del cilindro, cohesionadas entre sí y unidas al cilindro. Sea ABCD un rectángulo y sean AE y BE dos arcos parabólicos descritos con eje AB y con un «latus rectum» tal que sea al espacio HG, que habría de ser descrito por el cilindro en su caída para ad-



quirir la velocidad con que se mueve, como HG a $\frac{1}{2}$AB. Y sean también CF y DF otros dos arcos parabólicos descritos con eje CD y con «latus rectum» cuatro veces mayor que el anterior; y por revolución de la figura en torno al eje EF se generará un sólido cuya parte intermedia ABDC será el cilindro del que tratamos, y las partes extremas ABE y CDF contienen las partes del fluido en reposo entre sí, y condensadas en dos cuerpos rígidos adheridos al cilindro por ambas partes como si fueran cabeza y cola. En tal caso, la resistencia de este sólido EACFDB, desplazándose según la longitud de su eje FE en dirección a E, será aproximadamente la misma que la que hemos determinado en esta proposición, es decir, aquella que estaría respecto a la fuerza con la cual se generaría o suprimiría todo el movimiento del cilindro en el tiempo en que con dicho movimiento uniformemente continuo recorrería la longitud 4AC, como la densidad del fluido a la densidad del cilindro, muy aproximadamente. Y por el corolario 7 de la proposición XXXVI, esta resistencia no puede ser menor respecto a dicha fuerza que la razón de 2 a 3.

LEMA V

Si una esfera, un cilindro y un esferoide de igual anchura se colocan sucesivamente en medio del canal cilíndrico de tal modo que el eje de los mismos coincida con el eje del canal, dichos cuerpos impedirán por igual el flujo del agua a través del canal.

Pues los espacios entre el canal y el cilindro, la esfera y el esferoide, a través de los cuales pasa el agua, son iguales: y el agua pasa igual por espacios iguales.

Esto es así bajo la hipótesis de que se congele toda el agua que está sobre el cilindro, sobre la esfera o sobre el esferoide y cuya fluidez no es necesaria para que el agua pase con toda rapidez, como ya expuse en el corolario 7 de la proposición XXXVI.

LEMA VI

Con los mismos supuestos, los susodichos cuerpos son igualmente urgidos por el agua que fluye por el canal.

Se sigue del lema V y de la tercera ley. Pues el agua y los cuerpos actúan entre sí mutua e igualmente.

LEMA VII

Si el agua del canal está en reposo y los susodichos cuerpos se desplazan por el canal a velocidades iguales y en direcciones opuestas, sus resistencias serán iguales entre sí.

Se sigue del lema anterior, pues los movimientos relativos siguen siendo iguales entre sí.

ESCOLIO

El mismo es el caso para los cuerpos todos convexos y redondos cuyos ejes coinciden con el eje del canal. Alguna diferencia podría surgir de la fricción mayor o menor, pero en estos lemas suponemos que los cuerpos son sumamente pulidos y que la tenacidad del medio y la fricción son nulas y también que las partes del fluido, que con sus movimientos oblicuos y superfluos pudieran perturbar, impedir y retardar el flujo del agua por el canal, reposan entre ellas como constreñidas por la congelación y pegadas a las partes anteriores y posteriores de los cuerpos, tal y como he expuesto en el escolio de la proposición anterior. Pues en lo que sigue se trata de la resistencia mínima que pueden tener los cuerpos redondos descritos con una sección transversal máxima dada.

Los cuerpos flotantes en fluidos, cuando se desplazan en línea recta, hacen que el fluido ascienda por la parte delantera y descienda por la parte posterior, sobre todo si las figuras son obtusas; y por ello padecen una resistencia algo mayor que si la cabeza y la cola fuesen agudas. Y los cuerpos que se mueven en fluidos elásticos, si son obtusos por delante y por detrás, condensan el fluido un poco más por delante y lo relajan algo más por la parte de atrás; y por ello sufren una resistencia algo mayor que si fuesen agudos por la cabeza y por la cola. Pero nosotros en estos lemas no tratamos de fluidos elásticos, sino de los no elásticos, tampoco de los cuerpos que flotan en los fluidos, sino de los hundidos en los mismos. Y cuando se conoce la resistencia de los cuerpos en fluidos no elásticos, hay que aumentar esta resistencia un poco, tanto para los fluidos elásticos, como el aire, como para las superficies de fluidos estancados, como los mares y los lagos.

PROPOSICIÓN XXXVIII. TEOREMA XXX

La resistencia de un globo, que se desplaza uniformemente en un fluido comprimido, infinito y no elástico, es a la fuerza, que generaría o suprimiría todo su movimiento en el mismo tiempo en que recorre ocho terceras partes de su diámetro, como la densidad del fluido a la densidad del globo muy aproximadamente.

Pues el globo es al cilindro circunscrito como dos a tres; y, por tanto, aquella fuerza que suprimiese todo el movimiento del cilindro en el tiempo en que éste recorre una longitud de cuatro diámetros suprimirá todo el movimiento del globo en el tiempo en que éste recorra dos terceras partes de dicha longitud, es decir, ocho terceras partes del propio diámetro. Pero la resistencia del cilindro es a esta fuerza muy aproximadamente como la densidad del fluido a la densidad del cilindro o del globo por la proposición XXXVII, y la resistencia del globo es igual a la resistencia del cilindro, por los lemas V, VI y VIII. Q.E.D.

COROLARIO 1. Las resistencias de los globos, en medios comprimidos infinitos, están en razón compuesta del cuadrado de la velocidad, del cuadrado del diámetro y de la densidad de los medios.

COROLARIO 2. La máxima velocidad con la cual un globo puede descender por su peso relativo en un fluido resistente es aquella que puede adquirir el mismo globo, con el mismo peso, cayendo sin resistencia y describiendo en su caída un espacio que sea a las cuatro terceras partes de su diámetro como la densidad del globo a la densidad del

fluido. Pues el globo en el tiempo de su caída, con la velocidad adquirida al caer, describirá un espacio que resultará ser a ocho tercios de su diámetro como la densidad del globo a la densidad del fluido; y la fuerza del peso generadora de este movimiento será a la fuerza que generaría este mismo movimiento en el tiempo en que el globo recorrería las ocho terceras partes de su diámetro a la misma velocidad como la densidad del fluido a la densidad del globo: y, por consiguiente, por esta proposición, la fuerza del peso será igual a la fuerza de resistencia, y por ello no puede acelerar al globo.

COROLARIO 3. Dadas la densidad del globo y su velocidad al principio del movimiento, así como la densidad del fluido comprimido en reposo en que el globo se mueve, están dados en todo momento tanto la velocidad del globo como su resistencia, al igual que el espacio descrito por él, por el corolario 7 de la proposición XXXV.

COROLARIO 4. Un globo moviéndose en un fluido comprimido en reposo y de su misma densidad, perderá la mitad de su movimiento antes de que haya recorrido una longitud de dos diámetros propios, por el mismo corolario 7.

PROPOSICIÓN XXXIX. TEOREMA XXXI

La resistencia de un globo que se desplaza por un fluido encerrado en un canal cilíndrico y uniformemente comprimido es a la fuerza con la cual se generaría o suprimiría todo su movimiento en el tiempo en que recorrería ocho terceras partes de su diámetro como la razón compuesta de la razón del orificio del canal al exceso de este orificio sobre la mitad del círculo máximo del globo, del cuadrado de la razón del orificio del canal al exceso de este orificio sobre el círculo máximo del globo y de la razón de la densidad del fluido a la densidad del globo, muy aproximadamente.

Es evidente por el corolario 2 de la proposición XXXVII, mientras que la demostración sigue los pasos de la demostración de la proposición anterior.

ESCOLIO

En las dos últimas proposiciones (lo mismo que en el lema V) he supuesto que toda el agua que precede al globo y cuya fluidez aumenta la resistencia del globo se halla congelada. Pero si toda dicha agua está líquida, aumentará la resistencia un tanto. Aunque dicho aumento en estas proposiciones será pequeño y puede despreciarse, dado que la superficie convexa del globo produce casi todo el efecto del hielo.

PROPOSICIÓN XL. PROBLEMA IX

Hallar a partir de los fenómenos la resistencia de un globo que se desplaza en un medio comprimido muy fluido.

Sea A el peso del globo en el vacío, B su peso en un medio resistente, D el diámetro del globo, F el espacio que sea a $\frac{4}{3}$D como la densidad del globo a la densidad del medio,

es decir, como A a A – B, G el tiempo en el cual el globo cayendo sin resistencia con el peso B describe el espacio F, y H la velocidad que adquiere el globo con esta su caída. Y H será la velocidad máxima con que el globo, con su peso B, puede descender en un medio resistente, por el corolario 2 de la proposición XXXVIII, y la resistencia que sufre el globo, descendiendo con dicha velocidad, será igual a su peso B, mientras que la resistencia que sufre a otra velocidad cualquiera será al peso B como la razón cuadrada de esta velocidad a la susodicha velocidad máxima H, por el corolario 1 de la proposición XXXVIII.

Ésta es la resistencia que se debe a la inercia de la materia del fluido. Pero la que se debe a la elasticidad, tenacidad y fricción de sus partes se hallará como sigue.

Déjese caer el globo de modo que descienda en el fluido por su peso B; y sea P el tiempo de caída y sea medido en segundos si el tiempo G está dado en segundos. Hállese el número absoluto N correspondiente al logaritmo 0,4342944819 $\frac{2P}{G}$, y sea L el logaritmo del número $\frac{N+1}{N}$; y la velocidad adquirida al caer será $\frac{N-1}{N+1}$H, y la altura descrita será $\frac{2PF}{G}$ – 1,3862943611F + 4,605170186LF. Si el fluido es suficientemente profundo, se puede despreciar el término 4,605170186LF, y la altura descrita será muy aproximadamente la de $\frac{2PF}{G}$ – 1,3862943611F. Todo esto se sigue de la proposición novena del libro segundo y de sus corolarios en la hipótesis de que el globo no sufra otra resistencia que la debida a la inercia de la materia. Pero si sufriese otra resistencia además de ésta, el descenso será más lento, y de la retardación se inferirá la cantidad de esa resistencia.

Para conocer más fácilmente la velocidad y el descenso de un cuerpo que cae en un fluido, he compuesto la siguiente tabla (p. 887), cuya primera columna expresa los tiempos de caída, la segunda las velocidades adquiridas en la caída, siendo la velocidad máxima 100000000, la tercera representa los espacios descritos al caer en dichos tiempos, siendo 2F el espacio descrito por el cuerpo en el tiempo G y con la velocidad máxima, y la cuarta representa los espacios descritos en los mismos tiempos con la velocidad 2P máxima. Los números de la cuarta columna son $\frac{2P}{G}$, y sustrayendo el número 1,3862944 – 4,6051702L, se hallarán los números de la tercera columna, números éstos que hay que multiplicar por el espacio F para hallar los espacios descritos al caer. A estas anteriores se ha añadido una quinta columna que contiene los espacios descritos por el cuerpo en estos mismos tiempos cayendo en el vacío con la fuerza de su peso de comparación B.

ESCOLIO

Con objeto de investigar mediante experimentos las resistencias de los fluidos me procuré un vaso de madera cuadrado y con longitud y latitud interiores de nueve pulgadas de pie londinense y con una profundidad de nueve pies y medio, y lo llené de agua de lluvia; y con globos hechos de cera conteniendo plomo, anoté los tiempos de descenso

Tiempos P	*Velocidades de caída en el fluido*	*Espacios descritos cayendo en el fluido*	*Espacios descritos con movimiento máximo*	*Espacios descritos cayendo en el vacío*
0,001G	999999$\frac{29}{30}$	0,000001F	0,002F	0,000001F
0,01G	999967	0,0001F	0,02F	0,0001F
0,1G	9966799	0,0099834F	0,2F	0,01F
0,2G	19737532	0,0397361F	0,4F	0,04F
0,3G	29131261	0,0886815F	0,6F	0,09F
0,4G	37994896	0,1559070F	0,8F	0,16F
0,5G	46211716	0,2402290F	1,0F	0,25F
0,6G	53704957	0,3402706F	1,2F	0,36F
0,7G	60436778	0,4545405F	1,4F	0,49F
0,8G	66403677	0,5815071F	1,6F	0,64F
0,9G	71629787	0,7196609F	1,8F	0,81F
1G	76159416	0,8675617F	2F	1F
2G	96402758	2,6500055F	4F	4F
3G	99505475	4,6186570F	6F	9F
4G	99932930	6,6143765F	8F	16F
5G	99990920	8,6137964F	10F	25F
6G	99998771	10,6137179E	12F	36F
7G	99999834	12,6137073F	14F	49F
8G	99999980	14,6137059F	16F	64F
9G	99999997	16,6137057F	18F	81F
10G	99999999$\frac{3}{5}$	18,6137056F	20F	100F

de los globos, siendo la altura del descenso de 112 pulgadas. El pie cúbico sólido londinense contiene 76 libras romanas de agua de lluvia, y la pulgada sólida cúbica de este pie contiene$\frac{19}{36}$ onzas de esa libra, o también 253$\frac{1}{3}$ granos; y un globo de agua de una pulgada de diámetro 132,645 granos en el aire, o también 132,8 granos en el vacío; y otro globo cualquiera será como el exceso de su peso en el vacío sobre su peso en el agua.

EXPERIMENTO 1. Un globo, cuyo peso era de 156$\frac{1}{4}$ granos en el aire y de 77 granos en el agua describió la altura completa de 112 pulgadas en un tiempo de cuatro segundos. Y repetido el experimento, el globo de nuevo cayó en el mismo tiempo de cuatro segundos.

El peso del globo en el vacío es de 156$\frac{13}{38}$ granos, y el exceso de este peso sobre el peso del globo en el agua es de 79$\frac{13}{18}$ granos. De ello se sigue que el diámetro del globo es de 0,84224 partes de pulgada. Pero la densidad del agua a la densidad del globo es como dicho exceso al peso del globo en el vacío, igual que las ocho terceras partes del diámetro del globo (es decir, 2,24597 pulgadas) al espacio 2F, que será, por tanto, de 4,4256 pulgadas. El globo en un segundo, con todo su peso de 156$\frac{13}{38}$ granos cayendo en el vacío, describe 193$\frac{1}{3}$ pulgadas; y en el tiempo G, que es a un segundo como la raíz cuadrada del espacio F, es decir, como 2,2128 pulgadas a 95,219 pulgadas, describirá 2,2128 pulgadas, y adquirirá la velocidad máxima H con la que puede descender en el agua. Por tanto, el tiempo G es de 0,15244 segundos. Y en este tiempo G, con la su-

sodicha velocidad máxima H, el globo describirá el espacio 2F de 4,4256 pulgadas; y, por tanto, en un tiempo de 4 segundos describirá un espacio de 116,1245 pulgadas. Réstese el espacio de 1,3862944E o de 3,0676 pulgadas, y quedará un espacio de 113,0569 pulgadas, que describirá el globo cayendo en agua en un vaso muy ancho y en un tiempo de 4 segundos. Este espacio, por la estrechez del vaso de madera antedicho, debe disminuirse en una razón que está compuesta de la razón de la raíz cuadrada del orificio del vaso al exceso de este orificio sobre el semicírculo máximo del globo y de la razón simple del mismo orificio a su exceso sobre el círculo máximo del globo, o sea, en la razón de 1 a 0,9914. Hecho esto, se tendrá un espacio de 112,08 pulgadas, que según la teoría debería haber descrito el globo cayendo en el agua en dicho vaso de madera en un tiempo de 4 segundos, muy aproximadamente. Y según el experimento describió 112 pulgadas.

EXPERIMENTO 2. Tres globos iguales, cuyos pesos eran de $76\frac{1}{3}$ granos cada uno en el aire, y de $5\frac{1}{16}$ granos en el agua, se dejaron caer sucesivamente; y cada uno cayó en el agua en el tiempo de 15 segundos, describiendo en su caída la altura de 112 pulgadas.

Haciendo un cálculo, resulta un peso del globo en el vacío de $76\frac{5}{12}$ granos, el exceso de este peso sobre el peso en el agua de $71\frac{17}{48}$ granos, el diámetro del globo de 0,81296 pulgadas, las ocho terceras partes de este diámetro 2,16789 pulgadas, el espacio 2F de 2,3217 pulgadas, el espacio que describirá el globo cayendo con un peso de $5\frac{1}{16}$ granos sin resistencia en el tiempo de un segundo será de 12,808 pulgadas, y el tiempo G será 0",301056. Por tanto, el globo, con la máxima velocidad que puede recibir de la fuerza de un peso de $5\frac{1}{16}$ granos y con la cual descendería, recorrerá un espacio de 2,3217 pulgadas en el tiempo de 0",301056, y en un tiempo de 15", recorrerá un espacio de 115,678 pulgadas. Réstese el espacio 1,3862944F, o sea, 1,609 pulgadas y quedará un espacio de 114,069 pulgadas, que debería recorrer el globo en el mismo tiempo al caer en un vaso muy ancho. Por la estrechez de nuestro vaso debe restarse un espacio de aproximadamente 0,895 pulgadas. Y entonces quedará un espacio de 113,174 pulgadas, que es lo que, según la teoría, debió recorrer cayendo en este vaso en un tiempo de 15 segundos. Pero describió según el experimento 112 pulgadas. La diferencia es inapreciable.

EXPERIMENTO 3. Tres globos iguales, cuyos pesos eran de 121 granos cada uno en el aire, y de 1 grano en el agua, se dejaron caer sucesivamente; y caían en el agua en tiempos de 46, 47 y 50 segundos, describiendo la altura de 112 pulgadas.

Según la teoría, estos globos debieron caer en un tiempo de 40 segundos aproximadamente. Creo que no es determinable por qué cayeron más lentamente, si fue debido a la menor proporción de resistencia que se sigue de la fuerza de inercia en los movimientos lentos respecto a la resistencia que surge de otras causas, o si más bien ha de atribuirse a algunas burbujas adheridas al globo, o a la rarefacción de la cera por el calor tanto del ambiente como de la mano que dejaba caer el globo, o quizá también a errores insensibles al pesar los globos en agua. Por todo ello, el peso del globo en agua debe ser de varios granos para que el experimento sea cierto y digno de confianza.

EXPERIMENTO 4. Inicié los experimentos descritos hasta aquí, con el fin de investigar las resistencias de los fluidos, antes de elaborar la teoría expuesta en las proposiciones recién expuestas. Después, para examinar la teoría recién hallada, me procuré un vaso de madera de una anchura interna de $8\frac{3}{4}$ pulgadas y de una profundidad de $15\frac{1}{2}$ pies. A continuación construí cuatro globos de cera con plomo incluido, cada uno

de un peso de $139\frac{1}{4}$ granos en el aire, y de $7\frac{1}{8}$ granos en el agua. Y los deje caer de modo que pudiera medir los tiempos de caída en el agua mediante un péndulo oscilante ajustado a oscilaciones de medios segundos. Los globos, mientras los pesaba y después caían, estaban fríos y permanecían fríos durante algún tiempo; porque el calor enrarece un tanto la cera y por esa rarefacción el peso del globo en el agua disminuye, y la cera enrarecida no se reduce instantáneamente por el frío a la densidad anterior. Antes de dejarlos caer los sumergía completamente en el agua, para que su descenso inicial no se viese acelerado por el peso de alguna parte situada fuera del agua. Y cuando estaban completamente sumergidos y en reposo eran soltados con todo cuidado para que no recibiesen impulso alguno procedente de la mano que los soltaba. Cayeron, pues, sucesivamente en los tiempos de $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 y 51 oscilaciones, describiendo una altura de 15 pies y 2 pulgadas. Pero el ambiente estaba un poco más frío que cuando se pesaban los globos, de modo que repetí el experimento otro día, y los globos cayeron en tiempos de 49, $49\frac{1}{2}$, 50 y 53 oscilaciones, y un tercero en tiempos de $49\frac{1}{2}$, 50, 51 y 53 oscilaciones. Y repetido varias veces el experimento, los globos cayeron en la mayor parte de las veces en tiempos de $49\frac{1}{2}$ y 50 oscilaciones. Cuando cayeron más lentamente sospecho que fueron retardados por los choques con los costados del vaso.

Haciendo ahora el cálculo según la teoría, resulta un peso del globo en el vacío de $139\frac{2}{5}$ granos. El exceso de este peso sobre el peso del globo en el agua de $132\frac{11}{40}$ granos. El diámetro del globo de 0,99868 pulgadas. Las ocho terceras partes del diámetro 2,66315 pulgadas. El espacio 2F de 2,8066 pulgadas. El espacio que describe el globo cayendo sin resistencia con el peso de $7\frac{1}{8}$ granos en el tiempo de un segundo de 9,88164 pulgadas. Y el tiempo G de 0",376843. Por lo tanto, el globo, con la velocidad máxima con que puede descender en el agua con la fuerza del peso de $7\frac{1}{8}$ granos en el tiempo de 0",376843 describe un espacio de 2,8066 pulgadas, y en el tiempo de 1" un espacio de 7,44766 pulgadas, y en el tiempo de 25", o de 50 oscilaciones, un espacio de 186,1915 pulgadas. Réstese el espacio 1,386294F, ρ 1,9454 pulgadas, y quedará un espacio de 184,2461 pulgadas, que describirá el globo en el mismo tiempo en un vaso muy ancho. Por la estrechez de nuestro vaso disminúyase este espacio en una razón que esté compuesta de la raíz cuadrada de la razón del orificio del vaso al exceso de este orificio sobre el semicírculo máximo del globo, y de la razón simple del mismo orificio a su exceso sobre el círculo máximo del globo; y se tendrá un espacio de 181,86 pulgadas, que debió describir el globo aproximadamente, según la teoría, en el tiempo de las 50 oscilaciones. Y describió, según el experimento, 182 pulgadas en el tiempo de 493 o de 50 oscilaciones.

EXPERIMENTO 5. Cuatro globos de $154\frac{3}{8}$ granos de peso en el aire y de $21\frac{1}{2}$ granos en el agua, soltados muchas veces, caían en tiempos de $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ y 30 oscilaciones, y algunas veces de 31, 32 y 33, describiendo una altura de 15 pies y 2 pulgadas.

Según la teoría debieron caer en un tiempo de 29 oscilaciones muy aproximadamente.

EXPERIMENTO 6. Cinco globos de $212\frac{3}{8}$ granos de peso en el aire y de $79\frac{1}{2}$ en el agua, soltados muchas veces, caían en tiempos de 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 y 18 oscilaciones, describiendo una altura de 15 pies y 2 pulgadas.

Según la teoría debieron caer en un tiempo muy aproximado al de 15 oscilaciones.

EXPERIMENTO 7. Cuatro globos de $293\frac{1}{8}$ granos de peso en el aire y de $35\frac{7}{8}$ granos en el agua, soltados muchas veces, caían en tiempos de $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 y 33 oscilaciones describiendo una altura de 15 pies y $1\frac{1}{2}$ pulgadas.

Según la teoría debieron caer en un tiempo muy aproximado al de 28 oscilaciones.

Indagando la causa de que globos del mismo peso y magnitud cayeran unos más lentos y otros más rápidos, di con la siguiente; los globos, tan pronto como se soltaban y empezaban a caer, oscilaban en torno a sus centros, cayendo por delante el lado que por casualidad fuese más pesado, generando un movimiento de oscilación. Pero el globo por sus oscilaciones comunica al agua un movimiento mayor que si descendiese sin oscilar; y al comunicarlo pierde una parte de su propio movimiento con el cual debía descender: y según la mayor o menor oscilación, se retarda más o menos. Pero además, el globo siempre se desvía del lado que desciende por oscilación, y desviándose se aproxima a los costados del vaso y, a veces, choca con ellos. Y esta oscilación es más fuerte en los globos más graves, y en los más grandes agita más el agua. Por lo cual, para que la oscilación de los globos fuese menor, construí nuevos globos de cera y plomo, incrustando el plomo en un costado del globo cerca de su superficie; y solté el globo de tal forma que el lado más grave en la medida de lo posible, estuviese debajo desde el principio del descenso. Así, las oscilaciones resultantes son mucho menores que antes, y los globos cayeron en tiempos mucho menos desiguales, como en los experimentos siguientes.

EXPERIMENTO 8. Cuatro globos de 139 granos de peso en el aire y 67 en el agua, soltados muchas veces, cayeron en tiempos de no más de 52 oscilaciones y no menos de 50, y la mayor parte de las veces en tiempos de casi 51, describiendo una altura de 182 pulgadas.

Según la teoría debieron caer en un tiempo de casi 52 oscilaciones.

EXPERIMENTO 9. Cuatro globos de $273\frac{1}{4}$ granos en el aire y de $140\frac{3}{4}$ en el agua, soltados muchas veces, cayeron en tiempos no menores de 12 oscilaciones y no mayores de 13, describiendo una altura de 182 pulgadas.

Según la teoría estos globos debieron caer en un tiempo muy aproximado a $11\frac{1}{3}$ oscilaciones.

EXPERIMENTO 10. Cuatro globos de un peso de 384 granos en el aire y $119\frac{1}{2}$ en el agua, soltados muchas veces, caían en tiempos de $17\frac{1}{7}$, 18, $18\frac{1}{2}$ y 19 oscilaciones, describiendo una altura de $181\frac{1}{2}$ pulgadas. Y cuando cayeron en un tiempo de 19 oscilaciones, pude oír algunas veces su golpear sobre los costados del vaso antes de que llegasen al fondo.

Pero, según la teoría, debieron caer en un tiempo de $15\frac{5}{9}$ oscilaciones muy aproximadamente.

EXPERIMENTO 11. Tres globos iguales de un peso de 48 granos en el aire y $3\frac{29}{32}$ en el agua, soltados muchas veces, cayeron en tiempos de $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 y 46 oscilaciones, y la mayor parte de las veces 44 y 45 oscilaciones, describiendo una altura de $182\frac{1}{2}$ pulgadas aproximadamente.

Según la teoría debieron caer en un tiempo de $46\frac{5}{9}$ oscilaciones muy aproximadamente.

EXPERIMENTO 12. Tres globos iguales de un peso de 141 granos en el aire y de $4\frac{3}{8}$ en el agua, soltados algunas veces, cayeron en tiempos de 61, 62, 63, 64 y 65 oscilaciones, describiendo una altura de 182 pulgadas.

Y según la teoría debieron caer en un tiempo de $64\frac{1}{2}$ oscilaciones muy aproximadamente.

Con estos experimentos se pone en evidencia que cuando los globos cayeron más lentamente, como en los Experimentos segundo, cuarto, quinto, octavo, undécimo y

duodécimo, la teoría representa correctamente los tiempos de caída; pero cuando los globos cayeron más velozmente, como en los experimentos sexto, noveno y décimo, se da una resistencia algo mayor que en razón del cuadrado de la velocidad. Pues los globos, mientras caen, oscilan un tanto; y esta oscilación en los globos más ligeros y que caen más lentamente cesa muy pronto, por ser los movimientos más débiles; pero en los más graves y mayores dura más tiempo por ser los movimientos más fuertes, y solamente tras muchas oscilaciones puede ser detenido por el agua que los rodea. Además, cuanto más veloces son los globos tanto menos son presionados en su parte posterior por el fluido; y si la velocidad se aumentase continuamente, al final acabarían por dejar a sus espaldas un espacio vacío, salvo que la compresión del fluido se aumentase a la vez. Pues la compresión del fluido (por las proposiciones XXXII y XXXIII) debe aumentarse en razón del cuadrado de la velocidad para que la resistencia siga en la misma razón cuadrada. Al no ocurrir esto, los globos más veloces son presionados por detrás un poco menos, y por la falta de esta presión, su resistencia se torna un poco mayor que en razón del cuadrado de la velocidad.

Por consiguiente, la teoría se ajusta a los fenómenos de caídas de cuerpos en el agua, y sólo falta examinar los fenómenos de las caídas en el aire.

EXPERIMENTO 13. En la ciudad de Londres en el mes de junio del año 1710 desde la cúpula de la iglesia de San Pablo se soltaron dos globos a la vez, uno lleno de mercurio y el otro lleno de aire; y al caer describían una altura de 220 pies londinenses. Una tabla de madera estaba suspendida por uno de sus extremos por unas bisagras de hierro y por el otro se apoyaba en un soporte de madera; y los dos globos colocados encima de la tabla se dejaban caer a la vez, tirando del soporte de madera mediante un cable de hierro lanzado hasta el suelo, de suerte que la tabla sostenida solamente por las bisagras de hierro girase sobre ellas, y en el mismo instante un péndulo que oscilaba al segundo con un tirón sobre el susodicho cable de hierro la hacía caer y empezaba a oscilar. Los diámetros y los pesos de los globos y los tiempos de caída se exponen en la tabla siguiente.

Por lo demás, los tiempos observados deben corregirse. Pues los globos de mercurio (por la teoría de Galileo) describirán en cuatro segundos 257 pies londinenses, y 220 pies en sólo 3" 42"'. Efectivamente, la tabla de madera, al quitar el soporte, giraba más lentamente que lo que se requería y con la lentitud de su giro impedía la caída de los globos en el inicio de la misma. Pues los globos reposaban casi en el centro de la tabla y hasta estaban un

Globos llenos de mercurio			*Globos llenos de aire*		
Pesos	*Diámetros*	*Tiempos de caída*	*Pesos*	*Diámetros*	*Tiempos de caída*
granos	*pulgadas*	*segundos*	*granos*	*pulgadas*	*segundos*
908	0,8	4	510	5,1	$8\frac{1}{2}$
983	0,8	4 –	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4 +	515	5,0	$8\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	$8\frac{1}{2}$
784	0,75	4 +	641	5,2	8

poco más cerca del eje de la misma que del soporte. Y por eso los tiempos de caída se alargaron casi 18 minutos terceros, y ahora hay que corregir restando dichos minutos terceros, sobre todo en los globos mayores que por causa de su mayor diámetro reposaban un poco más sobre la tabla giratoria. Una vez hecho esto, los tiempos en que cayeron los seis globos mayores resultan ser 8" 12"', 7" 42"', 7" 42"', 7" 57"', 8" 12"' y 7" 42"'.

Por tanto, el quinto de los globos llenos de aire, construido con un diámetro de cinco pulgadas y un peso de 483 granos, cayó en un tiempo de 8" 12"', describiendo una altura de 220 pies. El peso del agua igual a este globo es de 16600 granos; y el peso del aire igual al dicho globo es de $\frac{16600}{860}$ granos o también de $19\frac{3}{6}$ granos y, por tanto, el peso del globo en el vacío es de $502\frac{3}{10}$ granos, y este peso es al peso del aire igual al globo como $502\frac{3}{10}$, $19\frac{3}{10}$ y como 2F a las ocho terceras partes del diámetro del globo, es decir, a $13\frac{1}{3}$ pulgadas. De donde 2F resulta ser de 28 pies y 11 pulgadas. El globo cayendo en el vacío con todo su peso de $502\frac{3}{10}$ granos en el tiempo de un segundo describirá $193\frac{1}{3}$ pulgadas, como antes, y con el peso de 483 granos describirá 185,905 pulgadas, y con el mismo peso de 483 granos también describirá en el vacío el espacio F, o 14 pies y $5\frac{1}{2}$ pulgadas en el tiempo de 57"' 58"", y adquiere la máxima velocidad con que puede descender en el aire. Con esta velocidad el globo, en el tiempo de 8" 12"', describirá un espacio de 245 pies y $55\frac{1}{3}$ pulgadas. Réstese 1,3863F, o 20 pies y $\frac{1}{2}$ pulgada, y quedarán 225 pies y 5 pulgadas. Por lo tanto, el globo, en un tiempo de 8" 12"' debió describir en su caída, según la teoría, el susodicho espacio. Y describió, según el experimento, un espacio de 220 pies. La diferencia es inapreciable.

Aplicando cálculos análogos a los otros globos llenos de aire, construí la tabla siguiente.

Pesos de los globos	*Diámetros*	*Tiempo de caída desde 220 pies*		*Espacios a describir según teoría*		*Excesos sobre cálculo*	
granos	*pulgadas*	*segundos*	*terceros*	*pies*	*pulgadas*	*pies*	*pulgadas*
510	5,1	8	12	226	11	6	11
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	10
515	5	7	57	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

EXPERIMENTO 14. En el año 1719, en el mes de julio, el señor Desaguliers de nuevo inició experimentos de éstos construyendo esferas con vejigas de puercos mediante una esfera cóncava de madera en la que se introducían humedecidas y luego tenían que llenar inflándolas con aire; una vez secas y extraídas se las dejó caer del punto más alto de la linterna de la cúpula del susodicho templo, o sea de una altura de 272 pies, y a la vez

se soltaba un globo de plomo de casi dos libras romanas. Mientras tanto, algunas personas situadas en lo más alto del templo, donde los globos eran soltados, anotaban los tiempos totales de caída, a la vez que otras personas en el suelo anotaban la diferencia de tiempos entre la caída del globo de plomo y la caída de la vejiga. Los tiempos se medían mediante péndulos que oscilaban en medios segundos. De los que estaban en el suelo, uno tenía un reloj con muelle que vibraba cuatro veces por segundo; otro tenía otra máquina de péndulo hecha con precisión que también vibraba cuatro veces por segundo. Y una máquina similar tenía uno de los que estaban en lo alto del templo. Y estas máquinas estaban hechas de modo que sus movimientos se iniciaban o se paraban a voluntad. Pues bien, el globo de plomo caía en un tiempo de cuatro segundos y cuarto aproximadamente. Añadiendo este tiempo a la diferencia antedicha de tiempos, se obtenía el tiempo total de caída de la vejiga. Los tiempos en los cuales cayeron las cinco vejigas la primera vez después de la caída del globo de plomo eran, $14\frac{3}{4}$ segundos, $12\frac{3}{4}$ segundos, $14\frac{5}{8}$ segundos, $17\frac{3}{4}$ segundos y $16\frac{7}{8}$ segundos, mientras que en la segunda vez fueron de 14 segundos, $14\frac{1}{4}$ segundos, 14 segundos, 19 segundos y $16\frac{3}{4}$ segundos. Añádase el tiempo de cuatro segundos y cuarto en el cual cayó el globo de plomo y los tiempos totales en los cuales las cinco vejigas vinieron a caer fueron, en la primera vez 19, 17, $18\frac{7}{8}$, 22 y $21\frac{1}{8}$ segundos respectivamente, y en la segunda vez $18\frac{3}{4}$, $18\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{4}$, $23\frac{1}{4}$ y 21 segundos. Los tiempos observados en lo alto del templo eran la primera vez de $19\frac{3}{4}$, $17\frac{1}{4}$, $18\frac{3}{4}$, $22\frac{1}{8}$ y $21\frac{5}{8}$ segundos, mientras que la segunda vez eran de 19, $18\frac{5}{8}$, $18\frac{3}{8}$, 24 y $21\frac{1}{4}$ segundos. Por lo demás, las vejigas no caían siempre en línea recta, sino que algunas veces revoloteaban y oscilaban de aquí para allá mientras caían. Y con estos movimientos los tiempos de caída se alargaron y aumentaron, a veces, en medio segundo y, a veces, en un segundo completo. Caían más directamente las vejigas segunda y cuarta la primera vez; y la primera y la tercera la segunda vez. La vejiga quinta era rugosa y por causa de las rugosidades se retardaba un tanto. Obtenía los diámetros de las vejigas de sus circunferencias medidas con un hilo muy fino que daba dos vueltas. Y comparé la teoría con los experimentos en la tabla siguiente, suponiendo que la densidad del aire es a la del agua de lluvia como 1 a 860 y calculando los espacios que los globos debían recorrer en su caída según la teoría.

Peso de las vejigas	*Diámetro de las vejigas*	*Tiempo de caída desde 272 pies*	*Espacios a recorrer según teoría*		*Diferencias entre teoría y experimentos*	
granos	*pulgadas*	*segundos*	*pies*	*pulgadas*	*pies*	*pulgadas*
128	5,28	19	271	11	− 0	1
156	5,19	17	272	$0\frac{1}{2}$	+ 0	$0\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,3	$18\frac{1}{2}$	272	7	+ 0	7
$97\frac{1}{2}$	5,26	22	277	4	+ 5	4
$99\frac{1}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282	0	+10	0

Por tanto, la resistencia de los globos en movimiento, tanto en el aire como en el agua, es adecuada y correctamente representada por nuestra teoría y es proporcional a la densidad de los fluidos a iguales velocidades y magnitudes de los globos.

En el escolio subsiguiente a la sección VI hemos mostrado mediante los experimentos con péndulos que las resistencias de globos iguales e igualmente veloces en el aire, en el agua y en el mercurio son como las densidades de los fluidos. Aquí mostramos lo mismo de modo más preciso mediante experimentos con cuerpos que caen en el aire y en el agua. Pues los péndulos en cada oscilación suscitan un movimiento en el fluido siempre contrario al movimiento de regreso del péndulo, y con la resistencia debida a este movimiento así como con la resistencia del hilo del que se suspendía el péndulo, la resistencia total del mismo venía a ser mayor que la resultante de los experimentos de cuerpos cayendo. Pues por los experimentos de péndulos expuestos en dicho Escolio, un globo de la misma densidad que el agua, describiendo en el aire la longitud de su movimiento, sólo tendría que perder de su movimiento $\frac{1}{3342}$ parte. Pero según la teoría expuesta en esta sección VII confirmada con los experimentos de cuerpos que caen, el mismo globo describiendo la misma longitud sólo debería perder de su movimiento $\frac{1}{4586}$ parte, en el supuesto de que la densidad del agua fuese a la densidad del aire como 860 a 1. Por consiguiente, las resistencias resultaron mayores por los experimentos de los péndulos (por las causas ya dichas) que por los experimentos de los globos que caen, y esto casi en una razón de 4 a 3. Sin embargo, puesto que las resistencias de los péndulos oscilantes en aire, agua o mercurio se ven incrementadas igualmente por iguales causas, la proporción de las resistencias en tales medios se podrá representar con bastante exactitud tanto mediante experimentos con péndulos como con experimentos con cuerpos que caen. Y de ahí se puede concluir que la resistencia de los cuerpos en cualesquiera fluidos, incluso en los más fluidos, siendo iguales las demás circunstancias, son como las densidades de los fluidos.

Una vez establecido esto, se puede ahora tratar de qué parte de su movimiento perderá aproximadamente un globo en un tiempo dado, si se proyecta a través de un fluido cualquiera. Sea D el diámetro del globo, V su velocidad al inicio del movimiento, y T el tiempo en el cual el globo, con la velocidad V, describirá en el vacío un espacio que sea al espacio $\frac{8}{3}$D como la densidad del globo a la densidad del fluido: y el globo proyectado en dicho fluido, en otro tiempo cualquiera t, perderá la parte $\frac{tV}{T+t}$, manteniendo la parte $\frac{TV}{T+t}$ y describirá un espacio que será al descrito en el mismo tiempo con velocidad uniforme en el vacío como el logaritmo del número $\frac{T+tV}{T}$, multiplicado por el número 2,302585093, es al número $\frac{t}{T}$ por el corolario 7 de la proposición XXXV. En los movimientos lentos la resistencia puede ser algo menor, por cuanto la figura del globo resulte algo más apta para el movimiento que la de un cilindro descrito con el mismo diámetro. En movimientos veloces, la resistencia puede ser algo mayor, toda vez que la elasticidad y la compresión del fluido no aumentan en razón del cuadrado de la velocidad. Pero no me detengo en estos detalles.

Y aunque el aire, el agua, el mercurio y otros fluidos semejantes, por división hasta el infinito de sus partes, se hiciesen más sutiles y viniesen a ser medios infinitamente fluidos, no por eso resistirían menos a los globos proyectados. Pues la resistencia de que se trata en las proposiciones anteriores procede de la inercia de la materia; y la inercia de la materia es esencial a los cuerpos y proporcional siempre a la cantidad de materia. Ciertamente se puede disminuir la resistencia que procede de la tenacidad y fricción de las partes mediante la división de las partes de un fluido: pero la cantidad de materia no disminuye por la división de sus partes; y manteniéndose la cantidad de materia, se mantiene su fuerza de inercia a la cual es siempre proporcional la resistencia de la que aquí se trata. Para que dicha resistencia disminuya debe disminuir la cantidad de materia en los espacios a cuyo través se mueven los cuerpos. Y por eso los espacios celestes, por los que los globos de los planetas y los cometas se mueven siempre libremente en todas direcciones y sin ninguna disminución sensible de movimiento, carecen de todo fluido corpóreo, salvo acaso algunos vapores sumamente tenues y los rayos de luz.

También los proyectiles al desplazarse suscitan movimiento en los fluidos, y este movimiento surge del exceso de presión del fluido en las partes anteriores del proyectil sobre la presión en sus partes posteriores y no puede ser menor en medios infinitamente fluidos que en el aire, en el agua, y en el mercurio según la densidad de la materia de cada uno. Ahora bien, este exceso de presión, en razón de su cantidad, no sólo suscita movimiento en el fluido, sino que también actúa sobre el proyectil retardando su movimiento: y por eso, la resistencia en todo fluido es como el movimiento suscitado en el fluido por el proyectil, y no puede ser menor en el éter más sutil en razón de la densidad del éter, que en el aire, en el agua, o en el mercurio, en razón de las densidades de dichos fluidos.

SECCIÓN VIII

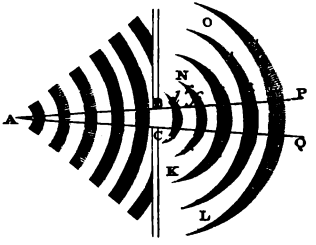
SOBRE EL MOVIMIENTO QUE SE PROPAGA POR LOS FLUIDOS

PROPOSICIÓN XLI. TEOREMA XXXII

La presión no se propaga a través de un fluido según líneas rectas salvo cuando las partículas del fluido están colocadas directamente en tal sentido.

Si las partículas *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, se hallasen colocadas en línea recta, la presión puede, ciertamente, propagarse directamente desde *a* hasta *e*; pero la partícula *e* urgirá a las partículas colocadas oblicuamente *f* y *g* de modo oblicuo, y dichas partículas *f* y *g* no mantendrán la presión recibida, salvo que sean soportadas por las partículas *h* y *k*; pero en tanto en que son sostenidas, presionan sobre las que sostienen; y éstas, a su vez, no soportarán la presión a no ser que sean sostenidas por las siguientes *l* y *m* y las presionen también, y así sucesivamente hasta el infinito; y, una vez que empieza a propagarse oblicuamente, si incidiere en partículas ulteriores que no se hallan colocadas en línea recta, de nuevo divergirá; y esto tantas veces cuantas incidiese sobre partículas no situadas exactamente en línea recta. Q.E.D.

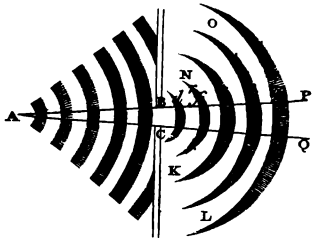
COROLARIO. Si una parte cualquiera de la presión que se propaga desde un punto dado fuese obstruida por un obstáculo, la parte restante que no es interceptada, divergirá por el espacio ulterior al obstáculo. Cosa que puede también demostrarse como sigue. Sea una presión que se propaga desde el punto A hacia cualquier parte y ello, si es posible, según líneas rectas, y con el obstáculo NBCK, perforado en BC, obstrúyase toda ella, salvo la parte coniforme APQ, que pasa por el orificio circular BC. Sepárese en troncos el cono APQ mediante los planos transversales *de*, *fg*, *hi*; en tal caso, mientras el cono ABC, propagando la presión, impulsa al tronco de cono ulterior *degf* sobre la superficie de, y el tronco anterior empuja al tronco siguiente *fghi* sobre la superficie *fg*, y dicho tronco empujará sobre el tercer tronco, y así sucesivamente hasta el infinito; está claro (por la ley III del movimiento) que el primer tronco *defg*, debido a la reacción del tronco segundo *fghi*, sufrirá una presión sobre la superficie *fg* igual a la presión que efectúa sobre el dicho tronco segundo. Luego el tronco *degf* es comprimido por ambos lados entre el cono A*de* y el tronco *fhig* y, por consiguiente (por el corolario 6 de la proposición XIX), no puede conservar su figura a no ser que sea comprimido por todas partes con la misma fuerza. Luego intentará ceder hacia los lados *df*, *eg* con un ímpetu igual a aquel con que es comprimido en las superficies *de*, *fg*; y en esos lugares (al no ser rígido, sino completamente fluido) se saldrá y se expandirá, salvo que el fluido de entorno sea tal que impida este intento. Por lo cual, con este intento de salir, presionará sobre el fluido de entorno tanto sobre los lados *df*, *eg* como sobre el tronco *fghi* con idéntico ímpetu; y por ello la presión no se propagará menos hacia los lados *df*, *eg* por ambos espacios NO, KL que lo que se propague desde la superficie *fg* hacia PQ. Q.E.D.



PROPOSICIÓN XLII. TEOREMA XXXIII

Todo movimiento propagado a través de un fluido diverge de la trayectoria recta en espacios inmóviles.

CASO 1. Propáguese el movimiento desde el punto A a través del orificio BC, y vaya, si es posible, hacia el espacio cónico BCQP según líneas rectas divergentes desde el punto A. Y supongamos en primer lugar que este movimiento fuese de ondas en la superficie de agua estancada. Y sean *de*, *fg*, *hi*, *kl*, etc., las crestas de cada una de las ondas, separadas entre sí por los valles correspondientes. En tal caso, puesto que el agua en las crestas de las ondas está más alta que en las partes en reposo LK, NO del fluido, descenderá desde las crestas *e*, *g*, *i*, *l*, etc., *d*, *f*, *h*, *k*, etc., por un lado, y por otro hacia KL, NO; y también descenderá desde dichos lugares en reposo hacia los valles de las ondas. Con el primero de los descensos las crestas de las ondas, y con el segundo los valles se expanden hacia uno y otro lado y se propagan hacia KL y NO. Y puesto que el movi-



miento de las ondas desde A hacia PQ ocurre mediante el descenso continuo de las crestas hacia los valles siguientes, y por lo mismo, no ocurre con mayor velocidad que la velocidad de descenso; y también el descenso del agua por un lado y por otro hacia KL y NO debe ocurrir con esa misma velocidad; y así la dilatación de las ondas por uno y otro lado hacia KL y NO avanzará con la misma velocidad con que avanza la propia onda desde A hacia PQ en línea recta. Por tanto, todo el espacio de ambos lados hacia KL y NO será ocupado por las ondas dilatadas *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, etc. Q.E.D. Cualquiera puede experimentar en agua estancada que esto es así.

CASO 2. Ahora supongamos que *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn*, representan impulsos propagados desde el punto A a través de un medio elástico sucesivamente. Imaginemos que los impulsos se propagan por medio de sucesivas condensaciones y rarefacciones del medio, como si la parte más densa del impulso ocupase la superficie esférica descrita en torno al centro A, y entre impulsos sucesivos mediasen intervalos iguales. Las líneas *de*, *fg*, *hi*, *kl*, etc., representan las partes más densas de los impulsos, propagadas a través del orificio BC. Y puesto que es allí el medio más denso que en los espacios laterales hacia KL y NO, se dilatará tanto hacia esos espacios KL y NO por ambos lados como hacia los intervalos más enrarecidos de las pulsaciones; de este modo el medio que va resultando cada vez más raro tras los intervalos y más denso tras las pulsaciones, participará de sus movimientos. Y dado que el movimiento progresivo de los impulsos procede de la relajación continua de las partes más densas que anteceden a los valles más enrarecidos; y los impulsos deben relajarse hacia ambos lados de las partes del medio en reposo KL y NO casi con la misma velocidad; y dichos impulsos se dilatarán casi con la misma velocidad por todas partes en los espacios inmóviles KL y NO, con la que se propagan en directo desde el centro A; por tanto, ocuparán todo el espacio KLON. Q.E.D. Esto lo experimentamos en los sonidos, que se oyen tanto con un monte interpuesto como, si entran en una habitación por una ventana y se extienden por todas partes de la habitación, se oyen en todas las esquinas, y no por reflexión en las paredes opuestas, sino propagándose directamente desde la ventana; en tanto que es posible juzgar por los sentidos.

CASO 3. Finalmente, supongamos que un movimiento de cualquier clase se propaga desde A a través del orificio BC: y puesto que esta propagación no ocurre si no es en la medida en que las partes del medio más cercanas al centro A urgen y agitan a las partes siguientes, y las partes que son agitadas son fluidas y, por tanto, retroceden por doquier hacia las regiones en que son menos presionadas: tales partes retrocederán hacia las partes del medio que están todas en reposo, tanto las laterales KL y NO, como las frontales PQ, y de este modo todo el movimiento, tan pronto como haya pasado por el orificio BC, empezará a dilatarse y a propagarse desde allí directamente hacia todas partes, como si fuera desde un principio y centro. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XLIII. TEOREMA XXXIV

Todo cuerpo vibrante en un medio elástico propagará el movimiento de sus pulsaciones en directo hacia todas partes; en cambio, en un medio no elástico, excitará un movimiento circular.

CASO 1. Por cuanto que las partes del cuerpo vibrante que van y vienen alternativamente, con su ida urgirán y empujarán a las partes del medio que están inmediatas a ellas, y al urgirlas las presionarán y las condensarán; y después con su retorno dejarán a las partes presionadas retroceder y expandirse. Por tanto, las partes del medio próximas al cuerpo vibrante irán y regresarán alternativamente, a la par de las partes del dicho cuerpo vibrante: y por la misma razón que las partes de este cuerpo agitaban a estas partes del medio, éstas a su vez perturbadas por vibraciones semejantes agitarán a las partes inmediatas a ellas, y éstas agitadas igualmente agitarán a las siguientes y así, sucesivamente, hasta el infinito. Y al igual que las primeras partes del medio, al ir se condensan y al regresar se relajan, de igual modo las restantes partes se condensan cuando van y se expanden cuando vuelven. Y, por tanto, no todas irán y volverán a la vez (pues así conservarían distancias fijas entre ellas y no podrían enrarecerse y condensarse alternativamente), sino que acercándose entre ellas cuando se condensan y separándose cuando se enrarecen, unas de ellas irán cuando las otras vuelvan: y esto alternativamente hasta el infinito. Pero las partes que van y al ir se condensan, por su movimiento progresivo, con el cual inciden en los obstáculos, son los impulsos; y por ello, los impulsos sucesivos se propagan desde todo cuerpo vibrante en directo; y esto casi con iguales intervalos entre ellos, por ser iguales los intervalos de tiempo en los cuales el cuerpo con sus vibraciones excita cada impulso. Y aunque las partes del cuerpo vibrante vayan y vengan según una dirección cierta y fija, no obstante los impulsos propagados desde allí a través del medio se extenderán hacia los lados por la proposición anterior; y desde dicho cuerpo vibrante como desde un centro común y bajo la forma de superficies casi esféricas y concéntricas se irán propagando en todas direcciones. Cosa de la que tenemos un ejemplo en las ondas, que al ser excitadas por un dedo vibrando, no sólo parten de allí hacia uno y otro lado según la dirección del movimiento del dedo, sino que, en forma de círculos concéntricos, ciñen inmediatamente al dedo y se propagan en todas direcciones. Pues la gravedad de las ondas suple en lugar de la fuerza elástica.

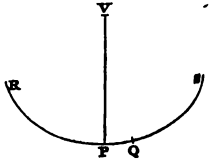
CASO 2. Que el medio no sea elástico: puesto que sus partes presionadas por las partes vibrantes del cuerpo vibrante no pueden condensarse, el movimiento se propagará instantáneamente hacia las partes donde el medio cede con facilidad, es decir, a las partes que el cuerpo vibrante dejase vacías tras él por el otro lado. Es el mismo caso que el del cuerpo proyectado en un medio cualquiera. El medio, al ceder a los proyectiles, no retrocede hasta el infinito; sino que moviéndose en círculo, se dirige hacia los espacios que el cuerpo abandona a sus espaldas. Por tanto, cuantas veces el cuerpo vibrante va hacia un lado cualquiera, el medio cede y se mueve en círculo hacia las partes que abandona el cuerpo; y cuantas veces el cuerpo regresa al lugar inicial, el medio es expulsado de allí para que retorne a su primer lugar. Y aunque el cuerpo vibrante no sea duro, sino flexible en todas direcciones, mientras conserve una magnitud dada, y puesto que tampoco puede urgir con sus vibraciones al medio en un sentido sin que a la vez ceda ante él en otro, resultará que el medio, cediendo por los lugares por donde es presionado, se dirigirá continuamente en círculo hacia las partes que ceden ante él. Q.E.D.

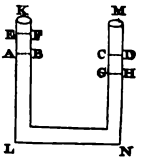
COROLARIO. Desvarían, pues, quienes creen que la agitación de la llama conduce a una propagación de la presión según líneas rectas a través del medio ambiente. Semejante presión se deberá derivar no sólo de la agitación de las partes de la llama, sino también de la dilatación del todo.

PROPOSICIÓN XLIV. TEOREMA XXXV

Si el agua alternativamente asciende y desciende por tubos de brazos elevados KL, MN, y se construyese un péndulo cuya longitud entre el punto de suspensión y el centro de oscilación sea igual a la mitad de la longitud del agua que hay en el tubo: digo que el agua ascenderá y descenderá en los mismos tiempos en los que oscile el péndulo.

Mido la longitud del agua según los ejes del tubo y de los brazos, igualándola a la suma de dichos ejes, y no tengo aquí en cuenta la resistencia del agua debida al rozamiento del tubo. Representen entonces AB y CD la altura media del agua en cada uno de los brazos, y cuando el agua en el brazo KL sube hasta la altura BF, en el brazo MN el agua descenderá hasta la altura GH. Sea P un cuerpo pendular, VP el hilo, V el punto de suspensión, RPQS la cicloide que describa el péndulo, P su punto inferior, PQ un arco igual a la altura AE. La fuerza, con la cual el movimiento del agua se acelera y se retarda alternativamente, es el exceso del peso del agua en uno de los dos brazos sobre el peso en el otro, y por ello, cuando el agua asciende en el brazo KL hasta BF, y en el otro desciende hasta GH, dicha fuerza es el doble del peso del agua EABF y, por tanto, es al peso de toda el agua como AE o PQ a VP o PR. También la fuerza con la que el peso P, en un punto cualquiera Q, es acelerado y retardado en la cicloide (por el corolario de la proposición LI) es a su peso total como su distancia PQ desde el lugar ínfimo P a la longitud de la cicloide PR. Por lo cual, las fuerzas motrices del agua y del péndulo que describen los espacios iguales AE, PQ, son como los pesos a mover; y, por consiguiente, si el agua y el péndulo inicialmente están en reposo, dichas fuerzas los moverán igualmente en tiempos iguales y harán que vayan y vuelvan a la vez con un movimiento recíproco. Q.E.D.





COROLARIO 1. Por consiguiente, todas las subidas y bajadas del agua son isócronas, tanto si el movimiento es más intenso como si es más suave.

COROLARIO 2. Si la longitud total del agua en el tubo es de 64 pies parisinos, el agua descenderá en un segundo de tiempo y ascenderá en otro segundo; y así sucesivamente en veces alternas hasta el infinito. Pues un péndulo de $3\frac{1}{18}$ pies de longitud oscila en el tiempo de un segundo.

COROLARIO 3. Y si la longitud del agua aumentase o disminuyese, aumentará o disminuirá el tiempo de reciprocación en razón de la raíz cuadrada de la longitud.

PROPOSICIÓN XLV. TEOREMA XXXVI

La velocidad de las ondas es como la raíz cuadrada de las anchuras.

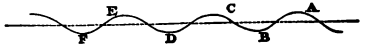
Se sigue de la construcción de la proposición siguiente.

PROPOSICIÓN XLVI. PROBLEMA X

Hallar la velocidad de las ondas.

Constrúyase un péndulo cuya longitud entre el punto de suspensión y el centro de oscilación sea igual a la anchura de las ondas: y en el tiempo en el cual dicho péndulo completa cada una de sus oscilaciones, en ese mismo tiempo las ondas recorrerán casi su anchura al desplazarse.

Denomino anchura de las ondas a la medida transversal comprendida bien entre los puntos más bajos de los valles, o bien entre los puntos más altos de las crestas. Sea ABCDEF la superficie de agua estancada, que asciende y desciende en ondas sucesivas; y sean A, C, E, etc. las cimas de las ondas y B, D, F, etc., los valles intermedios.



Y puesto que el movimiento de las ondas ocurre por el sucesivo ascenso y descenso del agua, del mismo modo sus partes A, C, E, etc., que ahora están en lo más alto después estarán en lo más bajo; y la fuerza motriz por la cual las partes de arriba descienden y las de abajo ascienden, es el peso del agua elevada; dicho ascenso y descenso alternativo será análogo al movimiento recíproco del agua en el tubo y se atendrá a las mismas leyes de tiempo: y por ello (por la proposición XLIV) si las distancias entre los puntos más altos de las ondas A, C, E, y los puntos más bajos B, D, F, son iguales al doble de la longitud del péndulo, las partes más altas A, C, E, vendrán a ser las ínfimas en el tiempo de una oscilación, y de nuevo ascenderán en el tiempo de la oscilación siguiente. Por consiguiente, el tiempo que transcurre mientras pasa cada una de las ondas será el de dos oscilaciones; es decir, la onda describe su anchura en el tiempo en que el susodicho péndulo oscila dos veces; pero en ese tiempo un péndulo cuya longitud sea cuatro veces mayor y, por tanto, sea igual a la anchura de las ondas, oscilará una sola vez. Q.E.I.

COROLARIO 1. Por lo tanto, las ondas que tengan una anchura de $3\frac{1}{18}$ pies parisinos recorrerán al desplazarse la distancia de su anchura en el tiempo de un segundo; y por ello en un tiempo de un minuto recorrerán $183\frac{1}{3}$ pies, y en una hora recorrerán un espacio aproximado de 11.000 pies.

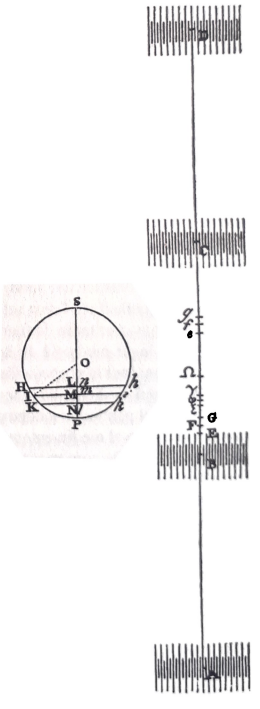
COROLARIO 2. Y la velocidad de ondas mayores o menores aumentará o disminuirá como la raíz cuadrada de su anchura.

Todo lo cual es así bajo la hipótesis de que las partes del agua ascienden y descienden en línea recta; pero es más verosímil que el ascenso y el descenso tengan lugar circularmente y, por tanto, mantengo que el tiempo hallado mediante esta proposición es sólo aproximado.

PROPOSICIÓN XLVII. TEOREMA XXXVII

Al propagarse los impulsos a través de un fluido, cada una de las partículas del fluido que van y vienen con un movimiento recíproco muy breve, se aceleran y se retardan siempre de acuerdo con la ley de oscilación del péndulo.

Representen AB, BC, CD, etc., distancias iguales de impulsos sucesivos; ABC la dirección del movimiento de los impulsos propagados desde A hacia B; E, F, G, representen tres puntos físicos del medio en reposo situados a distancias iguales sobre la recta AC; sean E*e*, F*f*, G*g*, espacios iguales muy breves por los cuales los susodichos puntos van y vienen en cada vibración con un movimiento recíproco; ε, φ, γ, sean unos lugares intermedios entre dichos puntos; y EF, FG unas breves líneas físicas o partes lineales del medio situadas entre dichos puntos y trasladadas sucesivamente a los lugares εφ, φγ y *ef*, *fg*. Trácese la recta PS igual a la recta E*e*. Bisé-quese dicha recta en O y con centro en O e intervalo OP trácese el círculo SI*Pi*. Represéntese con esta circunferencia y sus partes el tiempo total de una vibración y sus partes proporcionales; de suerte que para un tiempo completo cualquiera PH o PH*Sh*, si se traza sobre PS la perpendicular HL o *hl* y se toma E*e* igual a PL o P*l*, el punto físico E se hallará en ε. Un punto cualquiera E, bajo esta condición, que vaya desde E por ε hasta *e* y desde aquí regrese por *e* hasta,E completará cada vibración con los mismos grados de aceleración y retardación que un péndulo oscilante. Hay que probar que cada punto físico del medio deberá agitarse con semejante movimiento. Supongamos, pues, que el medio es excitado con tal movimiento por una causa cualquiera y veamos qué se sigue de ello.



En la circunferencia PH*Sh* tómense los arcos iguales HI, IK, o *hi*, *ik* que estén en la misma razón respecto a la circunferencia entera que la que tienen las rectas iguales EF, FK respecto al intervalo completo BC de los impulsos. Trácense las perpendiculares IM, KN, o *im*, *kn*; y puesto que los puntos E, F, G, son agitados sucesivamente por movimientos semejantes y completan sus vibraciones enteras de ida y vuelta en el tiempo en que el impulso pasa de B a C, si PH o PH*Sh* fuera el tiempo desde el comienzo del movimiento del punto E, entonces PI o PH*Si* será el tiempo desde el comienzo del movimiento del punto F, y PK o PH*Sk* el tiempo desde el comienzo del movimiento del punto G; y por ello Eε, Fφ, Gγ serán respectivamente iguales a PL, PM, PN en la ida de los puntos y en el retorno de los mismos, a P*l*, P*m*, P*n*. Por consiguiente, cuando

los puntos van, $\varepsilon\gamma$ o EG + Gy – Eε será igual a EG – LN, y cuando los puntos retornan, será igual a EG + *ln*. Pero $\varepsilon\gamma$ es la anchura o expansión de la parte EG del medio en el lugar $\varepsilon\gamma$; y, por tanto, la expansión de dicha parte en la ida es a su expansión media como EG – LN a EG; en cambio, en el retorno es como EG + *ln o* EG + LN a EG. Por tanto, al ser LN a KH como IM al radio OP y KH a EG como la circunferencia PHS*h*P a BC, es decir, si V representase el radio de un círculo que tuviese por circunferencia un intervalo igual al del impulso BC, como OP a V; y «ex aequo» LN a EG como IM a V: la expansión de la parte EG o del punto físico F en el lugar $\varepsilon\gamma$ será a la expansión media que dicha parte tiene en su primer lugar EG como V – IM a V a la ida y como *V* + *im* a V a la vuelta. De donde la fuerza elástica del punto F en el lugar $\varepsilon\gamma$ es a su fuerza elástica media en el lugar EG como $\frac{1}{\text{V} - \text{IM}}$ a $\frac{1}{\text{V}}$ en la ida, y como $\frac{1}{\text{V} + im}$ a $\frac{1}{\text{V}}$ en la vuelta. Y por la misma razón las fuerzas elásticas de los puntos físicos E y G en la ida son como $\frac{1}{\text{V} - \text{HL}}$ y $\frac{1}{\text{V} - \text{KN}}$ $\frac{1}{\text{V}}$; y la diferencia de las fuerzas es a la fuerza elástica media del medio como $\frac{\text{HL} - \text{KN}}{\text{VV} - \text{V} \times \text{HL} - \text{V} \times \text{KN} + \text{HL} \times \text{KN}}$ a $\frac{1}{\text{V}}$.

O sea, como $\frac{\text{HL} - \text{KN}}{\text{VV}}$ a $\frac{1}{\text{V}}$, o también como HL – KN a V, siempre que (por los estrechos límites de las vibraciones) supongamos que HL y KN sean un tanto menores que la cantidad V. Por lo cual, como la cantidad V está dada, la diferencia de fuerzas es como HL – KN, esto es (por ser proporcionales HL – KN a HK y OM a OI o OP, y estar dadas HK y OP), como OM; es decir, si se bisecase F*f* en Ω, como $\Omega\varphi$. Y por la misma razón la diferencia de las fuerzas elásticas de los puntos físicos ε y γ en el retorno de la pequeña línea física $\varepsilon\gamma$ es como $\Omega\varphi$. Pero dicha diferencia (es decir, el exceso de fuerza elástica del punto ε sobre la fuerza elástica del punto γ) es la fuerza con la que la pequeña línea física intermedia del medio $\varepsilon\gamma$ se acelera en la ida y se retarda en el regreso; y, por tanto, la fuerza aceleratriz de la pequeña línea física $\varepsilon\gamma$ es como su distancia al lugar medio Ω de la vibración. Por consiguiente, el tiempo se representa correctamente (por la proposición XXXVIII del libro primero) mediante el arco PI; y la parte lineal del medio $\varepsilon\gamma$ se mueve conforme a la ley enunciada antes, es decir, conforme a la ley del péndulo oscilante: e igual razón hay para todas las partes lineales de las que se compone el medio entero. Q.E.D.

Corolario. De aquí se sigue que el número de impulsos propagados es el mismo qué el de vibraciones del cuerpo vibrante, y que no se multiplica con su desplazamiento. Pues la línea pequeña física $\varepsilon\gamma$ tan pronto regresa a su lugar inicial, reposa; y después tampoco se moverá, a no ser que nuevamente sea empujada, o por el ímpetu del cuerpo vibrante, o por el ímpetu de pulsaciones procedentes del cuerpo vibrante. Por tanto, reposará tan pronto cesen los impulsos propagados desde el cuerpo vibrante.

PROPOSICIÓN XLVIII. TEOREMA XXXVIII

Las velocidades de los impulsos propagados en un fluido elástico están en razón compuesta directamente de la raíz cuadrada de la fuerza elástica e inversamente

de la raíz cuadrada de la densidad; siempre que la fuerza elástica se suponga proporcional a la condensación del fluido.

CASO 1. Si los medios son homogéneos y las distancias de los impulsos en estos medios son iguales entre ellas, pero el movimiento es más intenso en un medio, las contracciones y dilataciones de partes análogas serán como sus movimientos. Pero esto no es una proporción exacta. No obstante, salvo que las contracciones y dilataciones sean muy intensas, el error no será apreciable y, por tanto, puede tenerse por físicamente exacta. Pues las fuerzas elásticas motrices son como las contracciones y las dilataciones; y las velocidades generadas a la vez de partes iguales son como las fuerzas. Por consiguiente, las partes iguales y correspondientes de impulsos correspondientes completarán su ida y su vuelta a la vez por espacios proporcionales a las contracciones y dilataciones y con velocidades que son como los espacios: por lo cual, los impulsos que en el tiempo de una ida y una vuelta completan desplazándose su propia longitud y alcanzan continuamente los lugares de los impulsos inmediatamente anteriores, por la igualdad de las distancias, avanzan con velocidad igual en uno y otro medio.

CASO 2. Pero si las distancias o las longitudes de los impulsos son mayores en un medio que en otro, supongamos que las partes correspondientes describen, en su ida y vuelta, espacios siempre proporcionales a las amplitudes de los impulsos cada una de las veces: entonces sus contracciones y dilataciones serán iguales. Y, por tanto, si los medios son homogéneos también las fuerzas motrices elásticas por las que son agitadas con un movimiento recíproco, serán iguales. Pero la materia, que ha de ser movida por estas fuerzas, es como la amplitud de los impulsos, y en la misma razón se halla el espacio a cuyo través deben moverse cada vez en la ida y en la vuelta. Y el tiempo de una ida y vuelta está en razón compuesta de la raíz cuadrada de la materia y de la raíz cuadrada del espacio y, por ende, es como el espacio. Pero los impulsos recorren el espacio de sus amplitudes en los tiempos de una ida y una vuelta, es decir, recorren espacios proporcionales a los tiempos; y por tanto, son igualmente veloces.

CASO 3. Por consiguiente, en medios de iguales densidad y fuerza elástica, todos los impulsos son igualmente veloces. Pero si la densidad del medio o la fuerza elástica aumentasen, toda vez que la fuerza motriz aumentará en razón de la fuerza elástica y la materia a mover en razón de la densidad, el tiempo, en el cual se completen los mismos movimientos que antes, aumentará como la raíz cuadrada de la densidad, y disminuirá como la raíz cuadrada de la fuerza elástica. Y por ello la velocidad de los impulsos estará en razón compuesta de, inversamente, la raíz cuadrada de la densidad del medio y, directamente, de la raíz cuadrada de la fuerza elástica. Q.E.D.

Esta proposición estará aún más clara por la construcción de la siguiente.

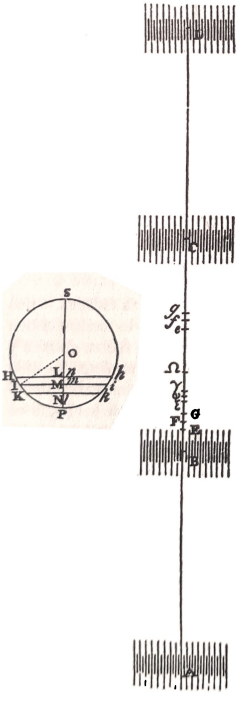
PROPOSICIÓN XLIX. PROBLEMA XI

Dadas la densidad del medio y su fuerza elástica, hallar la velocidad de los impulsos.

Imaginemos que un medio se halla comprimido por un peso superpuesto al modo del de nuestro aire; y sea A la altura de un media homogéneo y cuyo peso sea igual al peso superpuesto y cuya densidad sea igual a la del medio comprimido en el cual se propa-

gan los impulsos. Supongamos que se construye un péndulo cuya longitud entre el punto de suspensión y el centro de oscilación sea A: y en el tiempo en que dicho péndulo completa una oscilación entera compuesta de ida y vuelta, en ese mismo tiempo el impulso, desplazándose, completará un espacio igual a la circunferencia del círculo descrito con radio A.

Pues, manteniendo las construcciones de la proposición XLVII, si una línea física cualquiera EF describiendo en cada vibración el espacio PS es urgida en los extremos P y S de cada ida y vuelta por una fuerza elástica igual a su peso, completará dicha línea cada una de sus vibraciones en el tiempo en que oscilaría en una cicloide cuya perímetro fuese igual a la longitud PS: esto, además, porque fuerzas iguales, en tiempos iguales, empujan a cuerpos iguales a través de espacios iguales. Por lo cual, ya que los tiempos de las oscilaciones son como la raíz cuadrada de la longitud de los péndulos, y la longitud del péndulo es igual a la mitad del arco de la cicloide entera, el tiempo de una vibración será al tiempo de oscilación del péndulo de longitud A como la raíz cuadrada de la longitud $\frac{1}{2}$PS o PO a la longitud A. Pero la fuerza elástica por la que la pequeña línea física EG es urgida cuando está en los puntos extremos P, S, era (en la demostración de la proposición XLVII) a toda su fuerza elástica como HL – KN a V, es decir (por caer ahora el punto K en P), como HK a V: y toda aquella fuerza, o sea, el peso superpuesto con el cual es comprimida la pequeña línea EG, es al peso de la pequeña línea como la altura A del peso superpuesto a la longitud de la pequeña línea EG; y, por tanto, «ex aequo», la fuerza que urge a la pequeña línea EG en los lugares P y S es al peso de dicha línea como HK × A a V × EG, o como PO × A a VV, pues HK era a EG como PO a V. Por tanto, toda vez que los tiempos en los cuales cuerpos iguales son impulsados a través de espacios iguales son inversamente proporcionales a la raíz cuadrada de las fuerzas, el tiempo de una vibración generada por dicha fuerza elástica será al tiempo de vibración generada por la fuerza del peso como la raíz cuadrada de VV a PO × A y, por consiguiente, al tiempo de oscilación de un péndulo de longitud A, como la raíz cuadrada de VV a PO × A y como la raíz cuadrada de PO a A conjuntamente; es decir, como la razón entera de V a A. Pero en el tiempo de una vibración compuesta de ida y vuelta, el impulso desplazándose completa su anchura BC. Luego el tiempo en el cual el impulso recorre el espacio BC es al tiempo de una oscilación compuesta de ida y vuelta como V a A, es decir, como BC a la circunferencia del círculo cuyo radio es A. Pero el tiempo en que el impulso recorre el espacio BC está en la misma razón



con respecto al tiempo en que recorre una longitud igual a dicha circunferencia; y por lo mismo, en el tiempo de dicha oscilación el impulso recorre una longitud igual a dicha circunferencia. Q.E.D.

COROLARIO 1. La velocidad de los impulsos es aquella que adquieren los graves cayendo con movimiento igualmente acelerado y describiendo en su caída la mitad de la altura A. Pues en el tiempo de esta caída, cayendo con la velocidad adquirida, el impulso recorre un espacio que será igual a toda la altura A; y, por lo tanto, en el tiempo de una oscilación compuesta de ida y vuelta recorrerá un espacio igual a la circunferencia del círculo trazado con radio A: porque el tiempo de caída es al tiempo de oscilación como el radio del círculo a su circunferencia.

COROLARIO 2. De donde, al ser dicha altura A directamente como la fuerza elástica del fluido e inversamente como su densidad, la velocidad de los impulsos estará en razón compuesta de la raíz cuadrada de la densidad, inversamente, y de la raíz cuadrada de la fuerza elástica, directamente.

PROPOSICIÓN L. PROBLEMA XII

Hallar, las distancias de los impulsos.

Hállese el número de vibraciones del cuerpo cuya oscilación produce los impulsos en un tiempo dado. Divídase por ese número el espacio que puede recorrer el impulso en ese mismo tiempo y el resultado será la amplitud de un impulso. Q.E.I.

ESCOLIO

Las últimas proposiciones tienen relación con el movimiento de la luz y de los sonidos. Puesto que la luz se propaga en línea recta no puede consistir en mera acción (por las proposiciones XLI y XLII). Y los sonidos, en tanto que se producen por cuerpos vibrantes, no son otra cosa que impulsos de aire propagados, por la proposición XLIII. Se confirma esto por las vibraciones que, si son fuertes y graves, suscitan en los cuerpos inmediatos, como los sonidos de los tambores. Pues las vibraciones rápidas y breves no se excitan con facilidad. Y es bien sabido que cualesquiera sonidos lanzados contra las cuerdas de cuerpos sonoros genera vibraciones. Y también se confirma por la velocidad de los sonidos. Puesto que los pesos específicos del agua de lluvia y del mercurio son entre sí aproximadamente como 1 a $13\frac{2}{3}$, y cuando el mercurio alcanza en el barómetro una altura de 30 pulgadas inglesas, el peso específico del aire y del agua de lluvia se halla en la relación de 1 a 870 aproximadamente, entonces el peso específico del aire y del mercurio será aproximadamente como 1 a 11890. Y, por tanto, cuando la altura del mercurio es de 30 pulgadas, la altura de aire uniforme cuyo peso pudiera oprimir a nuestro aire subyacente sería de 356700 pulgadas, o de 29725 pies ingleses. Y ésta es la altura misma que denominábamos A en la construcción precedente. La circunferencia del círculo descrito con radio de 29725 pies es de 186768 pies. Y puesto que un péndulo de $39\frac{1}{5}$ pulgadas de largo completa como es sabido, su oscilación entera de ida y vuelta en el tiempo de dos segundos, un péndulo de $39\frac{1}{5}$ pulgadas de largo completa, como es

sabido, su completar una oscilación semejante en un tiempo de $1903\frac{1}{4}$ segundos. Por tanto, en ese mismo tiempo el sonido desplazándose completará 186768 pies, y en el tiempo de un segundo 979 pies.

Por lo demás en este cálculo no se ha tomado en cuenta el grosor de las partículas sólidas de aire a cuyo través el sonido se propaga instantáneamente. Como el peso del aire es al peso del agua como 1 a 870, y las sales son casi dos veces más densas que el agua, si suponemos que las partículas de aire son casi de la misma densidad que las partículas de agua o de sal y la rareza del aire obedece a los intervalos de las partículas, entonces el diámetro de las partículas de aire será al intervalo entre los centros de las partículas como 1 a 9 o 10 aproximadamente, y al intervalo entre partículas como 1 a 8 o 9. Por ello, a los 979 pies que el sonido recorrerá en un segundo según el cálculo anterior habrá que añadir $\frac{979}{9}$ pies, o aproximadamente 109 pies, por el grosor de las partículas de aire: y de este modo el sonido, en el tiempo de un segundo, recorrerá aproximadamente 1088 pies.

Añádase a esto que los vapores presentes en el aire, al ser de diferente elasticidad y tono, poco o nada participarán en el movimiento del verdadero aire con el que se propagan los sonidos. Permaneciendo, pues, éstos en reposo, dicho movimiento se propagará por el solo verdadero aire, y esto en razón de la raíz cuadrada de la disminución de materia. De suerte que si la atmósfera constase de diez partes de verdadero aire y una de vapores, el movimiento de los sonidos sería más rápido en razón de la raíz cuadrada de 11 a 10, o casi en la razón entera de 21 a 20, que si se propagase por once partes de aire verdadero: y por ello el movimiento de los sonidos hallado antes ha de aumentarse en esta proporción. Con lo cual el sonido, en el tiempo de un segundo, recorrerá 1142 pies.

Así serán estas cosas en primavera y otoño, cuando al aire templado por el calor se enrarece y su fuerza elástica aumenta un tanto. Pero en invierno, cuando el aire se condensa por el frío y disminuye su fuerza elástica, el movimiento de los sonidos debe ser más lento en razón de la raíz cuadrada de la densidad; y viceversa, en verano debe ser más veloz.

Por otra parte, experimentalmente consta que los sonidos en un segundo recorren más o menos 1142 pies londinenses o 1070 parisinos.

Una vez conocida la velocidad de los sonidos se obtienen también los intervalos de los impulsos. El señor Sauveur halló mediante experimentos hechos por él, que una flauta abierta de más o menos cinco pies parisinos de largo producía un sonido del mismo tono que el sonido de una cuerda que vibra cien veces por segundo. Por tanto, en el espacio de 1070 pies parisinos que recorre un sonido en un segundo hay más o menos cien impulsos; por lo cual una pulsación ocupa un espacio de casi $1039\frac{7}{10}$ pies parisinos, es decir, casi el doble de la longitud de la flauta. Por lo que es verosímil que las amplitudes de los impulsos, en los sonidos de todas las flautas abiertas, sea igual a dos veces la longitud de las flautas.

Y por lo demás, está claro por el corolario de la proposición XLVII de este libro por qué cesan los sonidos cuando cesa el movimiento del cuerpo sonoro, y no se oyen por más tiempo cuando estamos muy lejos de los cuerpos sonoros que cuando estamos muy cerca. Y por qué los sonidos aumentan tanto en los tubos amplificadores está claro por los principios expuestos. Pues todo movimiento recíproco en cada regreso suele aumentar gracias a la causa generadora. Y el movimiento en los tubos que impiden la dilatación de los sonidos se pierde más tarde y se repite con más fuerza y, por tanto, es incrementado por el nuevo movimiento impreso en cada retorno. Y éstos son los principales fenómenos relativos a los sonidos.

SECCIÓN IX

SOBRE EL MOVIMIENTO CIRCULAR DE LOS FLUIDOS

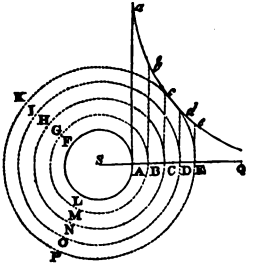
HIPÓTESIS

La resistencia que procede de la falta de lubricidad de las partes de un fluido, en igualdad de condiciones, es proporcional a la velocidad con que las partes del fluido se separan entre sí.

PROPOSICIÓN LI. TEOREMA XXXIX

Si un cilindro sólido infinitamente largo gira con un movimiento uniforme en torno a su eje de posición dada en un fluido uniforme e infinito, y por su solo impulso el fluido es obligado a girar en círculo y cada parte del fluido persevera uniformemente en su movimiento; digo que los tiempos periódicos de las partes del fluido son como sus distancias del eje del cilindro.

Sea AFL un cilindro que gira uniformemente en torno de su eje S y mediante los círculos concéntricos BGM, CHN, DIO, EKP, etc., divídase el fluido en innumerables orbes cilíndricos, concéntricos, sólidos y del mismo grosor. Y puesto que el fluido es homogéneo, las impresiones de unos orbes contiguos en otros (por hipótesis) serán como sus traslaciones respectivas y la superficie sobre la cual recae la impresión. Si una impresión sobre un orbe cualquiera es mayor o menor por la parte cóncava o la parte convexa, prevalecerá la impresión más fuerte, y acelerará o retardará el movimiento del orbe si se dirige hacia el mismo lado o hacia el contrario que el movimiento del mismo orbe. Por tanto, para que cada orbe persevere en su movimiento uniformemente, las impresiones en una y otra parte deben ser iguales entre sí y producirse en direcciones opuestas. Por consiguiente, como las impresiones son como las superficies contiguas y como sus traslaciones respectivas, las traslaciones serán inversamente como las superficies, es decir, inversamente como las distancias de las superficies desde el eje. Pero las diferencias de los movimientos angulares en torno al eje son como dichas traslaciones aplicadas a las distancias, o como las traslaciones directamente y las distancias inversamente; es decir, conjuntas ambas razones, como el inverso del cuadrado de las distancias. Por lo cual, si sobre cada parte de la recta infinita SABCDEQ se eleva una perpendicular A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, etc., inversamente proporcional a los cuadrados de las propias SA, SB, SC, SD, SE, etc., y por los extremos de esas perpendiculares se imagina trazada una línea curva hiperbólica, las sumas de las diferencias, es decir, los movimientos an-



gulares totales serán como las sumas correspondientes de las líneas A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, es decir, si se aumenta el número de orbes y se disminuye su anchura hasta el infinito para que el fluido resulte un medio uniforme, como las áreas hiperbólicas A*a*Q, B*b*Q, C*c*Q, D*d*Q, E*e*Q, etc., análogas a las susodichas sumas. Y los tiempos inversamente proporcionales a los movimientos angulares serán también inversamente proporcionales a estas áreas. Por tanto, el tiempo periódico de una partícula cualquiera D es inversamente proporcional al área D*d*Q, es decir (por las conocidas cuadraturas de curvas), directamente como la distancia SD. Q.E.D.

COROLARIO 1. De aquí que los movimientos angulares de las partículas del fluido sean inversamente como sus distancias al eje del cilindro, y sus velocidades absolutas iguales.

COROLARIO 2. Si un fluido está contenido en un vaso cilíndrico de longitud infinita que contiene en su interior a otro cilindro, y ambos giran en torno al eje común, y los tiempos de revolución son como sus semidiámetros, y cada parte del fluido permanece con su movimiento: los tiempos periódicos de cada parte serán como sus distancias al eje de los cilindros.

COROLARIO 3. Si a un cilindro y a un fluido movidos de este modo se les añade o quita algún movimiento angular común, puesto que con este nuevo movimiento no se altera el rozamiento mutuo de las partes del fluido, los movimientos de las partes entre, ellas no sufrirán alteración. Porque las traslaciones de las partes entre ellas dependen del rozamiento. Una parte cualquiera perseverará en aquel movimiento que, al aplicar el rozamiento por ambas partes y en sentidos contrarios, no se acelere más que se retarde.

COROLARIO 4: De donde, si a todo el sistema de cilindros y fluido se le suprime todo el movimiento angular del cilindro exterior, se tendrá el movimiento del fluido en el cilindro en reposo.

COROLARIO 5. Si permanecen en reposo el cilindro y el fluido exteriores mientras el cilindro interior gira uniformemente, se comunicará el movimiento circular al fluido y poco a poco se propagará a todo el fluido; y no dejará de aumentar hasta que cada parte del fluido adquiera el movimiento definido en el corolario 4.

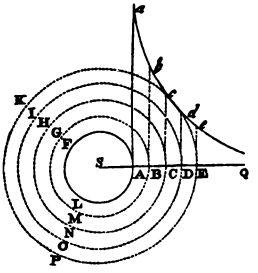
COROLARIO 6. Y puesto que el fluido intenta propagar su movimiento hasta más allá, el cilindro exterior se pondrá a girar por causa de aquel empuje, salvo que se le detenga por la fuerza; y su movimiento se irá acelerando hasta que los tiempos periódicos de ambos cilindros sean iguales entre ellos. Pero si el cilindro exterior se frenase violentamente, éste tratará de retardar el movimiento del fluido; y salvo que el cilindro interior conserve su movimiento mediante alguna fuerza impresa desde fuera, acabará por hacerlo cesar poco a poco.

Todo esto se puede experimentar en agua profunda estancada.

PROPOSICIÓN LII. TEOREMA XL

Si una esfera sólida gira con movimiento uniforme en torno a un eje de posición dada en un fluido uniforme e infinito y el fluido es obligado a girar por el solo impulso de la esfera, y cada parte del fluido persevera en su movimiento uniforme: digo que los tiempos periódicos de las partes del fluido serán como los cuadrados de las distancias al centro de la esfera.

CASO 1. Sea AFL una esfera girando uniformemente en torno al eje S y con los círculos concéntricos BGM, CHN, DIO, EKP, etc., divídase el fluido en innumerables orbes concéntricos de igual grosor. Supongamos que dichos orbes fuesen sólidos; y, al ser el fluido homogéneo, las impresiones mutuas de los orbes contiguos serán (por hipótesis) como sus traslaciones respectivas y las superficies contiguas sobre las que ocurren las impresiones. Si la impresión sobre un orbe cualquiera fuese mayor o menor por la parte cóncava o por la convexa, prevalecerá la impresión mayor, y la velocidad del orbe se acelerará o se retardará, según se dirija hacia la dirección del movimiento o hacia la dirección contraria. Por consiguiente, para que cada orbe persevere en su movimiento uniformemente, las impresiones de una y otra parte deberán igualarse entre sí y producirse en direcciones contrarias. De donde, puesto que las impresiones son como las superficies contiguas y sus traslaciones respectivas, las traslaciones serán inversamente como las superficies, es decir, como el inverso del cuadrado de la distancia de las superficies al centro. Pero las diferencias de los movimientos angulares en torno al eje son como estas traslaciones aplicadas a las distancias, o directamente como las traslaciones e inversamente como las distancias; es decir, juntas ambas razones, como el inverso del cubo de las distancias. Por lo cual, si sobre cada parte de la recta infinita SABCDEQ se elevan las perpendiculares A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, etc., inversamente proporcionales a los cubos de las propias SA, SB, SC, SD, SE, etc., las sumas de las diferencias, es decir, los movimientos angulares totales serán como las correspondientes sumas de las líneas A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, etc., es decir (si para obtener un medio uniformemente fluido se aumenta el número de órbitas y se disminuye su grosor hasta el infinito), como las áreas hiperbólicas A*a*Q, B*b*Q, C*c*Q, D*d*Q, E*e*Q, etc., análogas a dichas sumas. Y los tiempos periódicos inversamente proporcionales a los movimientos angulares serán también inversamente proporcionales a esas áreas. Por consiguiente, el tiempo periódico de un orbe cualquiera DIO es inversamente proporcional al área D*d*Q, es decir, por las ya conocidas cuadraturas de las curvas, directamente proporcional al cuadrado de la distancia SD. Que es lo primero que quería demostrar.



CASO 2. Desde el centro de la esfera trácense muchas rectas indefinidas que formen con el eje ángulos dados y que se superen unos a otros con diferencias iguales; e imagínese que con los giros de estas rectas en torno al eje los orbes son cortados en innumerables anillos; y cada anillo tendrá cuatro anillos contiguos, uno por dentro, otro por fuera y dos a los lados. Con el rozamiento de los anillos interior y exterior un anillo cualquiera no puede ser urgido igualmente hacia direcciones contrarias, salvo que el movimiento se atenga a la ley del caso primero. Esto se sigue de la demostración del primer caso. Y, por tanto, una serie cualquiera de anillos que se aleje en línea recta del globo hasta el infinito, se moverá de acuerdo con la ley del caso primero, salvo que se lo impida el rozamiento de los anillos laterales. Pero en un movimiento realizado según la susodicha ley el rozamiento de los anillos laterales es nulo y por lo mismo en nada impedirá al movimiento realizado de acuerdo con la dicha ley. Si los ani-

llos equidistantes del centro girasen más velozmente o más lentamente en los polos que en la eclíptica, los más lentos se acelerarán y los más veloces se retardarán gracias al mutuo rozamiento y así los tiempos periódicos siempre llegarán a ser iguales, de acuerdo con la ley del primer caso. Por consiguiente, este rozamiento no impedirá que el movimiento se realice de acuerdo con la ley del caso primero y, por tanto, dicha ley se cumplirá: es decir, los tiempos periódicos de cada anillo serán como los cuadrados de sus distancias al centro del globo. Que es lo que quería demostrar en segundo lugar.

CASO 3. Divídase ahora cada anillo, mediante secciones transversales, en innumerables partículas que constituyan una sustancia total y uniformemente fluida, y como estas secciones no afectan a la ley del movimiento circular sino que sirven solamente para la constitución del fluido, el movimiento circular perseverará como antes. Con estas secciones los minúsculos anillos no cambiarán su aspereza y su rozamiento mutuo, o lo cambiarán todos por igual. Y permaneciendo la proporción de las causas permanecerá la proporción de los efectos, es decir, la proporción de los movimientos y de los tiempos periódicos. Q.E.D. Por lo demás, como el movimiento circular, y la fuerza centrífuga nacida del mismo, es mayor en la eclíptica que en los polos, tendrá que haber una causa por la cual cada partícula se mantenga siempre en su círculo, para que la materia que se halla en la eclíptica no se aparte continuamente del centro y por la parte exterior del vórtice se vaya hasta los polos y desde allí a través del eje regrese a la eclíptica en una suerte de circulación continua.

COROLARIO 1. Por lo tanto, los movimientos angulares de las partes del fluido en torno al eje del globo son inversamente proporcionales al cuadrado de las distancias al centro del globo y las velocidades absolutas son inversamente proporcionales a esos cuadrados aplicados a las distancias al eje.

COROLARIO 2. Si un globo gira en un fluido en reposo, uniforme e infinito, con movimiento uniforme en torno a un eje de posición dada, comunicará el movimiento al fluido en forma de vórtice, y dicho movimiento se propagará poco a poco hasta el infinito; y no dejarán de acelerarse las distintas partes del fluido hasta que los tiempos periódicos de cada una no sean como los cuadrados de sus distancias al centro del globo.

COROLARIO 3. Puesto que las partes interiores del vórtice rozan y urgen a las partes exteriores y les comunican continuamente el movimiento con dicha acción, a la vez que esas exteriores transfieren esa misma cantidad de movimiento a otras todavía más exteriores y con esa acción conservan invariante su propia cantidad de movimiento; es evidente que el movimiento es transferido continuamente desde el centro hacia la circunferencia del vórtice y es absorbido por la infinitud de la circunferencia. La materia contenida entre dos superficies esféricas cualesquiera concéntricas al vórtice jamás se acelerará, por cuanto que transfiere siempre todo el movimiento recibido de la materia interior hacia la exterior.

COROLARIO 4. Por lo tanto, para que un vórtice conserve continuamente el mismo estado de movimiento, es necesario algún principio activo del cual reciba el globo continuamente la misma cantidad de movimiento que transfiere hacia la materia. En ausencia de tal principio es necesario que el globo y las partes interiores del vórtice, al estar propagando siempre su movimiento hacia el exterior sin recibir ningún otro movimiento nuevo, acaben por retardarse poco a poco y dejen de girar.

COROLARIO 5. Si otro globo se situase en este vórtice a una cierta distancia del centro girando con una fuerza continuamente en torno a un eje de inclinación dada, su movimiento arrastraría al fluido en forma de vórtice: y primeramente este nuevo y peque-

ño vórtice girará a la vez que el globo en torno al centro del otro y mientras tanto su movimiento se irá alejando propagándose poco a poco hasta el infinito, al igual que el del vórtice primero. Y por la misma razón por la que el movimiento de este globo era arrastrado por el movimiento del otro, el movimiento del otro será ahora arrastrado por el movimiento de éste, de suerte que ambos globos girarán en torno a un cierto punto intermedio, alejándose uno de otro a causa de dicho movimiento circular, salvo que alguna fuerza se lo impida. Después, si cesasen las fuerzas constantes impresas, gracias a las cuales los globos perseveran en sus movimientos, y todo se remitiese a las leyes mecánicas, el movimiento de los globos iría languideciendo poco a poco (por las razones dadas en los corolarios 3 y 4) hasta que junto con los vórtices queden finalmente en reposo.

COROLARIO 6. Si varios globos girasen continuamente en lugares dados en torno a ejes de posición dada y con unas velocidades determinadas, surgirían otros tantos vórtices expandiéndose hasta el infinito. Pues por la misma razón que un globo cualquiera propaga su movimiento hasta el infinito, cualquier otro globo propagará también su movimiento hasta el infinito, hasta que cada parte del fluido infinito se halle agitada por el movimiento resultante de las acciones de todos los globos. Por lo cual, no se podrán definir los vórtices con límites ciertos, sino que poco a poco se desplazarán entre ellos; y los globos por las mutuas interacciones de los vórtices cambiarán continuamente de lugar, como se ha explicado en el corolario anterior; y tampoco conservarán entre ellos una posición determinada, salvo que alguna fuerza los retenga. Y al cesar las fuerzas impresas constantes sobre los globos gracias a las cuales conservaban sus movimientos, la materia, por las razones dadas en los corolarios 3 y 4, entrará en reposo poco a poco y dejará de girar en vórtice.

COROLARIO 7. Si un fluido semejante estuviese contenido en un vaso esférico y, por la rotación uniforme de un globo situado en el centro, se le hiciese girar en un vórtice, mientras el globo y el vaso giran hacia el mismo lado sobre un mismo eje y sus tiempos periódicos son como los cuadrados de los semidiámetros: las partes del fluido no perseverarán en sus movimientos sin aceleración o retardación más que hasta que sus tiempos periódicos sean como los cuadrados de las distancias al centro del vórtice. Y ninguna otra constitución del vórtice puede ser permanente.

COROLARIO 8. Si el vaso, el fluido contenido y el globo conservan este movimiento y además girasen con un movimiento angular común en torno a un eje dado, puesto que con este nuevo movimiento no se cambia el rozamiento de las partes del fluido entre ellas, tampoco se cambiarán los movimientos de las partes entre ellas. Pues las traslaciones de las partes entre ellas dependen del rozamiento. Cada parte perseverará en aquel movimiento que resulta de no estar más retardada por el rozamiento de un lado que acelerada por el rozamiento del otro lado.

COROLARIO 9. Por consiguiente, si el vaso está en reposo y el movimiento del globo está dado, estará dado el movimiento del fluido. Pues imaginemos un plano que pase por el eje del globo y que gire en sentido contrario, y supongamos que la suma del tiempo de revolución de este plano y del tiempo de revolución del globo fuese al tiempo de revolución del globo como el cuadrado del semidiámetro del vaso al cuadrado del semidiámetro del globo: entonces los tiempos periódicos de las partes del fluido con respecto a dicho plano serán como los cuadrados de sus distancias al centro del globo.

COROLARIO 10. Por consiguiente, si el vaso gira en torno al mismo eje que el globo o alrededor de otro distinto con una velocidad dada, estará dado el movimiento del fluido. Porque si al sistema completo se le resta el movimiento angular del vaso, todos

los movimientos permanecerán entre ellos los mismos que antes, por el corolario 8. Y estos movimientos, por el corolario 9, estarán dados.

COROLARIO 11. Si el vaso y el fluido están en reposo mientras que el globo gira con movimiento uniforme, el movimiento se propagará poco a poco por todo el fluido hacia el vaso, y pondrá en giro al vaso salvo que se le detenga por la fuerza, y no dejarán ni vaso ni fluido de acelerarse hasta que sus tiempos periódicos lleguen a ser iguales a los tiempos periódicos del globo. Pero si el vaso es detenido por una fuerza o gira con un movimiento constante y uniforme, el medio paulatinamente llegará al estado de movimiento establecido en los corolarios 8, 9 y 10, y nunca permanecerá en otro estado cualquiera. Pero si después cesasen aquellas fuerzas, con las cuales el vaso y el globo giran con movimientos determinados, y el sistema entero queda remitido a las leyes mecánicas, el vaso y el globo actuarán uno sobre otro por medio del fluido y no dejarán de propagar sus movimientos uno hacia otro a través del fluido hasta que sus tiempos periódicos sean iguales entre sí y el sistema entero gire a la vez al modo de un único cuerpo sólido.

ESCOLIO

En todo esto doy por supuesto que el fluido consta de una materia uniforme en cuanto a densidad y fluidez. Es así aquel en que el mismo globo, con el mismo movimiento, en el mismo espacio de tiempo, podría propagar movimientos semejantes e iguales, siempre a distancias iguales, donde quiera que el globo se halle situado. Ciertamente la materia, con su movimiento circular, trata siempre de apartarse del eje del vórtice y, por lo mismo, presiona siempre a la materia siguiente. De esta presión nace un mayor rozamiento de las partes y mayor dificultad para su mutua separación y, por consiguiente, disminuye la fluidez de la materia. Además, si partes del fluido son más gruesas en algún sitio o mayores, la fluidez será allí menor, por ser menores en número las superficies en las cuales las partes se separarían entre ellas. En tales casos supongo que la deficiencia de fluidez se compensa con la lubricación de las partes o la lisura u otra condición cualquiera. De no ser así, la materia cuándo es menos fluida se cohesionará más, será más lenta y recibirá por ello con mayor lentitud el movimiento y lo propagará más que en la razón establecida más arriba. Si la figura del vaso no fuese esférica, las partículas se moverán en líneas no circulares, sino adaptadas a la figura del vaso y los tiempos periódicos serán como los cuadrados de las distancias medias al centro muy aproximadamente. En los lugares más amplios entre el centro y la circunferencia los movimientos serán más lentos y más rápidos donde son más angostos, y las partículas más rápidas tampoco tenderán hacia la circunferencia. Pues describen arcos menos curvos y el intento de separarse del centro no disminuye menos por el decremento de esta curvatura de lo que aumenta por el incremento de la velocidad. Al salir de los espacios más angostos a los más amplios se alejan un poco del centro pero con este retroceso se retardan, y pasando después de los más amplios a los más angostos se acelerarán, y así cada partícula se retardará y se acelerará alternativamente de modo continuo. Esto es así en un vaso rígido. Pues en un fluido infinito la constitución de vórtices se atiene al corolario 6 de esta proposición.

He tratado de investigar en esta proposición las propiedades de los vórtices con el fin de ensayar la posibilidad de explicar de semejante modo los fenómenos celestes. Pues un fenómeno es que los tiempos periódicos de los planetas que giran en torno a Júpiter son como la potencia $\frac{3}{2}$ de su distancia al centro de Júpiter; y la misma regla

vale para los planetas que giran en torno al Sol. Se cumplen estas reglas en unos y otros planetas con la mayor exactitud, hasta donde las observaciones astronómicas han podido llegar. Y por lo mismo, si dichos planetas fuesen arrastrados por vórtices que girasen en torno a Júpiter y al Sol, también deberían estos vórtices atenerse a esta ley. Pero los tiempos periódicos de las partes del vórtice han resultado estar en razón del cuadrado de las distancias al centro del movimiento y dicha razón no puede disminuirse ni reducirse a la razón de la potencia $\frac{3}{2}$ a no ser que la materia del vórtice sea más fluida cuanto más alejada del centro, o que la resistencia debida a la falta de lubrificación de las partes del fluido, por el aumento de la velocidad con la cual las partes del fluido se separan entre ellas, aumente en mayor proporción que aquella con que aumenta la velocidad. Nada de lo cual parece razonable. Las partes más gruesas y menos fluidas tenderán hacia la circunferencia, salvo que graviten hacia el centro; y, aunque propuse al principio de esta sección para facilidad de las demostraciones la hipótesis de que la resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, es verosímil, sin embargo, que dicha resistencia se halle en una proporción respecto a la velocidad menor que ésa. Supuesto esto, los tiempos periódicos de las partes del vórtice estarán en una razón mayor que la del cuadrado de las distancias al centro del mismo. Y si los vórtices (como algunos creen) se mueven más rápidamente cerca del centro, después más lentamente hasta un límite, y de nuevo más rápidamente cerca de la circunferencia, en verdad que ni la razón de la potencia ni otra alguna cierta y determinada puede hallarse. Que vean pues los filósofos de qué manera podría explicarse mediante vórtices el susodicho fenómeno de la razón de la potencia $\frac{3}{2}$.

PROPOSICIÓN LIII. TEOREMA XLI

Los cuerpos que arrastrados por un vórtice giran en órbita, tienen la misma densidad que el vórtice y se mueven bajo la misma ley que sus partes en cuanto a velocidad y dirección del recorrido.

Pues si suponemos que una pequeña parte del vórtice, cuyas partículas o puntos físicos conservan entre ellos una situación dada, se congelase, dicha parte, por cuanto que ni en su densidad, ni en su fuerza ínsita, ni en su figura sufre cambio alguno, se moverá con la misma ley que antes; y al contrario, si una parte congelada y sólida del vórtice es de la misma densidad que el resto del mismo, y se convierte en fluido, se moverá con la misma ley que antes, salvo en la medida en que sus partículas ahora hechas fluidas se muevan entre ellas. Pero despreciando el movimiento de las partículas entre ellas, como si no afectase al movimiento total de progresión en nada, el movimiento total será el mismo que antes. Y el movimiento será el mismo que el de las otras partes del vórtice equidistantes del centro por cuanto que el sólido resuelto en fluido se convierte en parte del vórtice semejante a las demás partes del mismo. Luego el sólido, si es de la misma densidad que la materia del vórtice, se moverá con el mismo movimiento que las partes de éste, permaneciendo en reposo relativo respecto a la materia que lo rodea. Si fuese más denso, entonces ya tratará de alejarse más que antes del centro del vórtice, y por ello superando ahora a la fuerza del vórtice la cual lo retenía antes en su órbita como si estuviese en equilibrio, se alejará del centro y girando describirá una espiral, sin volver ya más a su órbita. Y por la misma razón, si fuese más raro se acercará al centro. Por tanto, no regresará a la misma órbita salvo que sea de la misma densidad

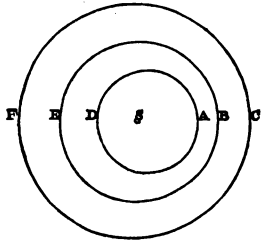
que el fluido. Y en ese caso ya se ha mostrado que girará con la misma ley que las partes del fluido equidistantes del centro del vórtice. Q.E.D.

COROLARIO 1. Luego un sólido que gira en un vórtice y vuelve siempre a la misma órbita reposa relativamente en el fluido en el que flota.

COROLARIO 2. Y si el vórtice es de densidad uniforme, el mismo cuerpo puede girar a cualquier distancia del centro del vórtice.

ESCOLIO

Por esto, es evidente que los planetas no son arrastrados por vórtices corpóreos. Pues los planetas, de acuerdo con la hipótesis de Copérnico, arrastrados en torno al Sol giran en elipses que tienen su foco en el Sol, y con radios trazados al Sol describen áreas proporcionales a los tiempos. Pero las partes de los vórtices no pueden girar con un movimiento semejante. Representen AD, BE, CF, tres órbitas descritas en torno al Sol S, de las cuales, la exterior CF sea un círculo concéntrico con el Sol, y los afelios de las dos interiores sean A, B y los perihelios D, E. Luego un cuerpo que gire en la órbita CF al describir con un radio trazado al Sol áreas proporcionales a los tiempos, se moverá con un movimiento uniforme. Mientras que el cuerpo que gire en la órbita BE se moverá más lentamente en el afelio B y más velozmente en el perihelio E, según las leyes astronómicas; mientras que, según las leyes mecánicas, la materia del vórtice en el espacio más angosto entre A y C habrá de moverse más velozmente que en el espacio más ancho entre D y F; es decir, en el afelio más velozmente que en el perihelio. Cosas estas dos que se contradicen.



Así, al comienzo del signo Virgo, donde ahora se halla el afelio de Marte, la distancia entre las órbitas de Marte y Venus es a la distancia entre las mismas órbitas al principio del signo Piscis casi como tres a dos y, por tanto, la materia del vórtice entre dichas órbitas al principio de Piscis debe ser más veloz que al principio de Virgo en razón de tres a dos. Pues cuanto más estrecho es el espacio por el cual pasa la misma cantidad de materia en el mismo tiempo de una revolución, con tanta mayor velocidad debe pasar. Por consiguiente, si la Tierra reposando relativamente en esta materia celeste es arrastrada por ella y girase en torno al Sol junto con ella, su velocidad al principio de Piscis sería a su velocidad al principio de Virgo en razón de tres a dos. De donde, el movimiento diurno aparente del Sol al principio de Virgo sería superior a setenta minutos; y al principio de Piscis inferior a los cuarenta y ocho. Pero puesto que (testigo la experiencia) dicho movimiento aparente del Sol es mayor al principio de Piscis que al principio de Virgo, por eso la Tierra es más veloz al principio de Virgo que al principio de Piscis. De suerte que la hipótesis de los vórtices está en total desacuerdo con los fenómenos y no lleva tanto a explicar cuanto a perturbar los movimientos celestes. Pero sobre el modo de entender cómo se efectúan estos movimientos sin vórtices en espacios libres puede verse el libro primero, y de manera más completa se mostrará ahora en el Sistema del Mundo.

LIBRO TERCERO
SOBRE EL SISTEMA DEL MUNDO

He ofrecido en los libros anteriores principios de filosofía, aunque no tanto filosóficos cuanto meramente matemáticos, a partir de los cuales tal vez se pueda disputar sobre asuntos filosóficos. Tales son las leyes y condiciones de los movimientos y las fuerzas que en gran medida atañen a la filosofía. Sin embargo, para que no parezcan estériles, los he ilustrado con algunos escolios filosóficos en los que he tratado sobre aquellas cosas que son más generales y en las cuales la filosofía parece hallar mayor fundamento, tales como la densidad y resistencia de los cuerpos, los espacios vacíos de cuerpos y el movimiento de la luz y de los sonidos. Nos falta mostrar, a partir de estos mismos principios, la constitución del sistema del mundo. Sobre esto había compuesto un tercer libro según un método popular para que fuese leído por muchos. Pero quienes no hubiesen comprendido suficientemente los principios propuestos, escasamente comprenderían la fuerza de los argumentos y tampoco abandonarían los prejuicios en los cuales andaban instalados desde muchos años atrás: por lo cual, para que el tema no entrase en controversias, trasladé la suma de aquel libro a proposiciones, al estilo matemático, de suerte que sean leídas por sólo aquellos que antes hubiesen manejado los principios. Pero dado que allí aparecen muchas proposiciones que hasta para un lector matemáticamente documentado podrían significar una gran demora, no pido a nadie que las estudie todas; será suficiente para cualquiera leer las definiciones, las leyes de los movimientos y las tres primeras secciones del libro primero con atención, y pasar después a este libro sobre el sistema del mundo, y consultar según le parezca las restantes proposiciones de los libros anteriores citadas en éste.

REGLAS PARA FILOSOFAR

REGLA I

No deben admitirse más causas de las cosas naturales que aquellas que sean verdaderas y suficientes para explicar sus fenómenos.

Ya dicen los filósofos: la naturaleza nada hace en vano, y vano sería hacer mediante mucho lo que se puede hacer mediante poco.

Pues la naturaleza es simple y no derrocha en superfluas causas de las cosas.

REGLA II

Por ello, en tanto que sea posible, hay que asignar las mismas causas a los efectos naturales del mismo género.

Como en el caso de la respiración en el hombre y en el animal; de la caída de las piedras en Europa y en América; de la luz en el fuego de la cocina y en el Sol; de la reflexión de la luz en la Tierra y en los planetas.

REGLA III

Han de considerarse cualidades de todos los cuerpos aquellas que no pueden aumentar ni disminuir y que afectan a todos los cuerpos sobre los cuales es posible hacer experimentos.

Pues las cualidades de los cuerpos sólo mediante experimentos se esclarecen, y por lo mismo se han de establecer como generales cuantas cuadran generalmente con los experimentos; y aquellas que no pueden disminuir, tampoco pueden ser suprimidas. Ciertamente no hay que fantasear temerariamente sueños en contra de la seguridad de los experimentos, ni alejarse de la analogía de la naturaleza, toda vez que ella suele ser simple y congruente consigo misma. La extensión de los cuerpos no se nos revela si no es por los sentidos, y no se siente por todos, pero como concierne a todos los sensibles, se atribuye universalmente. Experimentamos que muchos cuerpos son duros. Pero la dureza del todo se origina de la dureza de las partes, y de aquí concluimos con razón que son duras las partículas indivisas no sólo de los cuerpos que sentimos, sino también las de todos los demás. Que todos los cuerpos son impenetrables lo inferimos no de la razón, sino de la sensación. Los cuerpos que manejamos resultan ser impenetrables, y de aquí concluimos que la impenetrabilidad es una propiedad de todos los cuerpos. Inferimos que todos los cuerpos son móviles y perseveran en reposo o en movimiento gracias a ciertas fuerzas (que llamamos fuerzas de inercia) a partir de estas propiedades de los cuerpos observados. La extensión, la dureza, la impenetrabilidad, la movilidad y la fuerza de inercia del todo surgen de la extensión, dureza, impenetrabilidad, movilidad y fuerza de inercia de las partes: y de ahí concluimos que todas las partes mínimas de todos los cuerpos son extensas, duras, impenetrables, móviles y dotadas de fuerza de inercia. Y éste es el fundamento de toda la filosofía. Además, hemos visto por los fenómenos que las partes divididas de los cuerpos y contiguas entre sí pueden separarse unas de otras y que las partes indivisas pueden dividirse con la razón en partes menores es cierto por la matemática. En cambio, si esas partes distinguidas matemáticamente, pero no divididas todavía, pudieran dividirse y separarse unas de otras mediante fuerzas naturales, es cosa incierta. Pero, aunque solamente constase por un solo experimento que una partícula indivisa sufriese una división al romper un cuerpo duro y sólido, concluiremos, en virtud de esta regla, que no sólo serían separa-

bles las partes divididas, sino también que las indivisas podrían ser divididas hasta el infinito.

Finalmente, si mediante experimentos y observaciones astronómicas consta universalmente que todos los cuerpos alrededor de la Tierra gravitan hacia ella, y esto según la cantidad de materia contenida en cada uno, que la Luna gravita hacia la Tierra según su cantidad de materia, y viceversa, que nuestro mar gravita hacia la Luna, que todos los planetas gravitan mutuamente entre sí y que la gravedad de los cometas hacia el Sol es similar, habrá que decir, en virtud de esta regla, que todos los cuerpos gravitan entre sí. E incluso será más fuerte el argumento sobre la gravedad universal a partir de los fenómenos, que sobre la impenetrabilidad de los cuerpos: ya que de ésta no tenemos ninguna experiencia en los cuerpos celestes y tampoco observación alguna. Sin embargo, no afirmo en absoluto que la gravedad sea esencial a los cuerpos. Por fuerza ínsita entiendo solamente la fuerza de inercia. Ésta es inmutable. La gravedad disminuye al alejarse de la Tierra.

REGLA IV

Las proposiciones obtenidas por inducción a partir de los fenómenos, pese a las hipótesis contrarias, han de ser tenidas, en filosofía experimental, por verdaderas exacta o muy aproximadamente, hasta que aparezcan otros fenómenos que las hayan o más exactas o expuestas a excepciones.

Debe hacerse esto para evitar que el argumento de inducción sea suprimido por las hipótesis.

FENÓMENOS

FENÓMENO I

Los planetas circunjoviales con radios trazados al centro de Júpiter describen áreas proporcionales a los tiempos, y sus tiempos periódicos, estando en reposo las estrellas fijas, están en razón de las distancias a los centros elevadas a la potencia $\frac{3}{2}$.

Consta por las observaciones astronómicas. Las órbitas de estos planetas no se diferencian sensiblemente de círculos concéntricos con Júpiter, y sus movimientos se perciben uniformes en dichos círculos. Y los astrónomos coinciden en que los tiempos periódicos se hallan en razón de la potencia $\frac{3}{2}$ de los semidiámetros de las órbitas; lo cual también se hace patente por la tabla siguiente.

Tiempos periódicos de los satélites de Júpiter

$1^d18^h27'34''$; $3^d13^h13'42''$; $7^d3^h42'36''$; $16^d16^h32'9''$

Distancias de los satélites al centro de Júpiter

Según observaciones de:	1	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	*Semi-*
Townly, con *micrómetro*	5,52	8,78	13,47	24,72	*diámetros*
Cassini, *con telescopio*	5	8	13	23	*de*
Cassini, *por el eclipse de los satélites*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	*Júpiter*
Según los tiempos periódicos	5,667	9,017	14,384	25.299	

Con excelentes micrómetros el señor Pound ha logrado determinar la elongación de los satélites de Júpiter y el diámetro de éste del modo siguiente. La máxima elongación heliocéntrica del cuarto satélite desde el centro de Júpiter se tomó con micrómetro en un telescopio de quince pies de largo, y resultó ser a la distancia media entre la Tierra y Júpiter de aproximadamente 8' . 16". La del tercer satélite se tomó con micrómetro en un telescopio de 123 pies de largo y resultó a la misma distancia entre la Tierra y Júpiter de 4' . 42". Las elongaciones máximas de los otros satélites a esa misma distancia entre la Tierra y Júpiter resultan ser por los tiempos periódicos de 2' . 56" . 47"' y de 1' . 51" . 6"'.

El diámetro de Júpiter que se ha tomado muchas veces con micrómetro en un telescopio de 123 pies de largo y reducido a la distancia media entre la Tierra y Júpiter o éste y el Sol nunca ha sido mayor de 40" ni menor que 38" y lo más frecuente de 39". En telescopios más pequeños este diámetro es de 40" o de 41". Pues la luz de Júpiter, debido a la refrangibilidad desigual, se dilata un poco, y esta dilatación está en una razón menor respecto al diámetro de Júpiter en los telescopios más largos y perfectos que en los más cortos e imperfectos. Los tiempos en los cuales los dos satélites primero y tercero discurrían por el cuerpo de Júpiter, desde el comienzo de la entrada hasta comienzo de la salida y desde la entrada completa hasta la salida completa fueron observados gracias al mismo telescopio más largo. Y el diámetro de Júpiter a su distancia media de la Tierra resultó por el paso del primer satélite de $37\frac{1}{8}$" *y* por el tránsito del tercero de $37\frac{3}{8}$". También se observó el tiempo de tránsito de la sombra del primer satélite por el cuerpo de Júpiter y de ello resulta un diámetro de Júpiter a su distancia media de la Tierra de casi 37". Supongamos que su diámetro sea muy aproximadamente de $37\frac{1}{4}$", y las elongaciones máximas de los satélites primero, segundo, tercero y cuarto serán respectivamente iguales a 5,965; 9,494; 15,141 y 26,63 semidiámetros de Júpiter.

FENÓMENO II

Los planetas circunsaturnales con radios trazados al centro de Saturno describen áreas proporcionales a los tiempos, y sus tiempos periódicos, estando en reposo las estrellas fijas, están en razón de la potencia de las distancias al centro del mismo.

Efectivamente, Cassini estableció en sus observaciones las distancias de aquéllos al centro de Saturno y los tiempos periódicos del modo siguiente:

Tiempos periódicos de los satélites de Saturno

$1^d . 21^h . 18' . 27''$; $2^d . 17^h . 41' . 22''$; $4^d . 12^h . 25' . 12''$;
$15^d . 22^h . 41' . 14''$; $79^d . 7^h . 48' . 00''$.

Distancias de los satélites al centro de Saturno en semidiámetros del anillo

Por observaciones	$1\frac{19}{20}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	8	24
Por los tiempos periódicos ...	1,93	2,47	3,45	8	23,35

La máxima elongación del cuarto satélite desde el centro de Saturno he inferido de las observaciones que suele ser de aproximadamente ocho semidiámetros. Pero la máxima elongación de este satélite desde el centro de Saturno tomada con el mejor micrómetro en el telescopio de Huygens de 123 pies de largo resultó de 8,7 semidiámetros. Y de esta observación y de los tiempos periódicos, las distancias resultantes de los satélites hasta el centro de Saturno en semidiámetros de anillo son 2,1 . 2,69 . 3,75 . 8,7 y 25,35. En el mismo telescopio el diámetro de Saturno era al diámetro del anillo como 3 a 7, y el diámetro del anillo los días 28 y 29 de mayo de 1719 resultaba de 43". Y por lo mismo, el diámetro del anillo a la distancia media de la Tierra y Saturno es de 42" y el diámetro de Saturno de 18". Esto es así en los telescopios más largos y mejores, por cuanto que las magnitudes aparentes de los cuerpos celestes en los telescopios más largos tienen mayor proporción respecto a la dilatación de la luz en los extremos de dichos cuerpos que en los más cortos. Si se eliminase toda la luz difusa, el diámetro de Saturno no será mayor de 16".

FENÓMENO III

Los cinco planetas primarios, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno, ciñen con sus órbitas al Sol.

Que Mercurio y Venus giran en torno al Sol se demuestra por sus fases lunares. Cuando brillan con la faz llena se hallan situados al otro lado del Sol; cuando muestran media faz se hallan a la altura del Sol, y cuando su faz es anular se hallan más acá del Sol, pasando a veces por su disco en forma de manchas. También de la faz plena de Marte junto a la conjunción con el Sol y curvada en las cuadraturas se sigue con certeza que gira en torno al Sol. Lo mismo se infiere también respecto a Júpiter y a Saturno a partir de sus fases siempre llenas: pues que éstos brillan con luz participada del Sol está claro gracias a las sombras de los satélites proyectadas sobre ellos.

FENÓMENO IV

Supuestas en reposo las estrellas fijas, los tiempos periódicos de los cinco planetas primarios y el del Sol en torno a la Tierra o de la Tierra en torno al Sol están en razón de la potencia de las distancias medias al Sol.

Esta razón hallada por Kepler está reconocida por todos. Pues, los tiempos periódicos son los mismos y las magnitudes de las órbitas las mismas tanto si el Sol gira en torno a la Tierra como si la Tierra gira en torno al Sol. Y sobre la medida de los tiempos periódicos hay acuerdo entre todos los astrónomos. Kepler y Boulliau determinaron mediante observaciones las magnitudes de todas las órbitas con la mayor precisión: y las distancias medias correspondientes a los tiempos periódicos no difieren sensiblemente de las distancias que ellos hallaron, y a lo sumo son intermedias entre ellas, como se puede ver en la tabla siguiente.

Tiempos periódicos de los planetas y de la Tierra en torno al Sol en relación con las estrellas, fijas, en días y décimas de día.

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275	4332,514	686,9785	365,2565	224,6176	87,9692

Distancias medias de los planetas y la Tierra al Sol

	♄	♃	♂
Según Kepler	951000	519650	152350
Según Boulliau	954198	522520	152350
Según los tiempos periódicos	954006	520096	152369
	♁	♀	☿
Según Kepler	100000	72400	38806
Según Boulliau	100000	72398	38585
Según los tiempos periódicos	100000	72333	38710

No ha lugar disputa alguna sobre las distancias de Mercurio y Venus al Sol puesto que éstas se determinan mediante sus elongaciones del Sol. Así mismo desaparece toda disputa sobre la distancia al Sol de los planetas superiores gracias a los eclipses de los satélites de Júpiter. Efectivamente, por dichos eclipses se determina la posición de la sombra proyectada por Júpiter, y con ello se tiene la longitud heliocéntrica de Júpiter. Y comparando las longitudes heliocéntrica y geocéntrica entre sí, se determina la distancia de Júpiter.

FENÓMENO V

Los planetas primarios con radios trazados a la Tierra describen áreas en nada proporcionales a los tiempos; pero con radios trazados al Sol describen áreas proporcionales a los tiempos.

Pues respecto a la Tierra, ya avanzan, ya son estacionarios o bien hasta son retrógrados: pero respecto al Sol son siempre progresivos, y ello con movimiento casi uniforme, aunque un poco más rápido en el perihelio y un poco más lento en el afelio, de suerte que la descripción de las áreas resulta igual. La proposición es archiconocida para los astrónomos, y se demuestra en Júpiter muy bien mediante los eclipses de los satélites, mediante los cuales acabamos de decir que se calculan las distancias y longitudes heliocéntricas de ese planeta al Sol.

FENÓMENO VI

La Luna con un radio trazado al centro de la Tierra describe un área proporcional al tiempo.

Es evidente al comparar el movimiento aparente de la Luna con su diámetro aparente. Pero el movimiento lunar se perturba un tanto por causa de la fuerza solar, mas en estos fenómenos dejo a un lado estas insensibles minucias de errores.

PROPOSICIONES

PROPOSICIÓN I. TEOREMA I

Las fuerzas por las cuales los planetas circunjoviales son continuamente desviados de movimientos rectilíneos y retenidos en sus órbitas se dirigen hacia el centro de Júpiter y son inversamente como los cuadrados de las distancias de los lugares a dicho centro.

La primera parte de la proposición es evidente por el fenómeno primero y por la proposición II o III del libro primero; y la otra parte por el fenómeno I y el corolario 6 de la proposición IV del mismo libro.

Lo mismo se entiende respecto a los planetas que acompañan a Saturno, por el fenómeno segundo.

PROPOSICIÓN II. TEOREMA II

Las fuerzas por las cuales los planetas primarios son continuamente desviados de movimientos rectilíneos y retenidos en sus órbitas se dirigen hacia el Sol y son inversamente como los cuadrados de las distancias al centro del mismo.

La primera parte de la proposición es evidente por el fenómeno V y la proposición II del libro primero: la otra parte por el fenómeno IV y el corolario 6 de la proposición IV del mismo libro. Pero esta parte de la proposición se demuestra con la mayor precisión por la inmovilidad de los afelios. Pues una mínima aberración de la razón del cuadrado

debería hacer (por el corolario I de la proposición XLV del libro primero) que el movimiento de los ápsides fuese perceptible en cada revolución, y muy grande en muchas revoluciones.

PROPOSICIÓN III. TEOREMA III

La fuerza con la cual la Luna es retenida en su órbita se dirige hacia la Tierra y es inversamente como el cuadrado de la distancia de los lugares al centro de la Tierra.

La primera parte de la afirmación es evidente por el fenómeno VI y la proposición II o III del libro primero: y la segunda parte por la gran lentitud del apogeo lunar. Pues este movimiento, que es en cada revolución de tan sólo tres grados y tres minutos hacia adelante, puede despreciarse. Pues está claro (por el corolario 1 de la proposición XLX del libro primero) que si la distancia de la Luna al centro de la Tierra es al semidiámetro de la Tierra como D a 1, la fuerza de la que tal movimiento se originaría será inversamente proporcional a $D^{2\frac{4}{243}}$, es decir, inversamente como aquella misma potencia de D cuyo índice es $2\frac{4}{243}$, o sea, en razón inversa de un poco más que el cuadrado de la distancia, pero que es $59\frac{3}{4}$ más próxima a la razón cuadrada que a la cúbica. Y puesto que se origina de la acción del Sol (como se dirá más tarde) puede, por ello, ser ignorada ahora. La acción del Sol, en tanto que separa a la Luna de la Tierra, es muy aproximadamente como la distancia de la Luna a la Tierra; y por lo mismo (por lo expuesto en el corolario 2 de la proposición XLV del libro primero) es a la fuerza centrípeta de la Luna casi como 2 a 357,45, o como 1 a $178\frac{29}{40}$. Y despreciando esta minúscula fuerza del Sol, la fuerza restante con la cual la Luna es retenida en órbita será inversamente como D^2. Cosa que quedará más clara al comparar esta fuerza con la de la gravedad, como se hace en la proposición siguiente.

COROLARIO. Si la fuerza centrípeta media por la que la Luna es retenida en órbita aumentase primero en la razón de $177\frac{29}{40}$ a $178\frac{29}{40}$ y después también en la razón del cuadrado del semidiámetro de la Tierra a la distancia media entre los centros de la Tierra y la Luna, se tendrá la fuerza centrípeta lunar sobre la superficie de la Tierra, supuesto que dicha fuerza descendiendo hacia la superficie de la Tierra aumente continuamente en razón inversa al cuadrado de la altura.

PROPOSICIÓN IV. TEOREMA IV

La Luna gravita hacia la Tierra y es continuamente desviada del movimiento rectilíneo y retenida en su órbita por la fuerza de la gravedad.

La distancia media de la Luna a la Tierra es en las sicigias según Ptolomeo y los más de los astrónomos de 59 semidiámetros terrestres, según Vendelin y Huygens 60, según Copérnico $60\frac{1}{4}$, según Street $60\frac{2}{3}$, y según Tycho $56\frac{1}{2}$. Pero Tycho, y cuantos siguen sus tablas de refracciones, al establecer las refracciones del Sol y de la Luna (totalmente contra la naturaleza de la luz) mayores que las de las estrellas fijas, y esto en unos cuatro o cinco minutos, aumentaron en otros tantos la paralaje de la Luna, es de-

cir, casi en la duodécima o decimoquinta parte de la paralaje total. Corríjase este error y resultará una distancia de unos $60\frac{1}{2}$ semidiámetros terrestres, casi la misma asignada por los otros. Supongamos que la distancia media en las sicigias es de 60 semidiámetros; y el período lunar completo respecto a las estrellas fijas es de 27 días, 7 horas, 43 minutos, como establecen los astrónomos, y también que la circunferencia de la Tierra es de 123249600 pies parisinos, como han establecido los medidores franceses: y si se imagina que la Luna es desposeída de todo movimiento y abandonada a sí misma, de modo que, bajo la acción de toda aquella fuerza por la cual (por el corolario de la proposición III) es retenida en su órbita, desciende hacia la Tierra, describirá al caer en el tiempo de un minuto un espació de $15\frac{1}{12}$ pies parisinos. Esto se infiere del cálculo realizado a partir de la proposición XXXVI del libro primero o (lo que es lo mismo) del corolario 1 de la proposición IV del mismo libro. Pues el seno verso del arco que la Luna con su movimiento medió a la distancia de sesenta semidiámetros terrestres describiría en el tiempo de un minuto es aproximadamente de $15\frac{1}{12}$ pies parisinos, o más exactamente de 15 pies, 1 pulgada, y $1\frac{4}{9}$ líneas. Por lo cual, toda vez que dicha fuerza aumenta al acercarse a la Tierra en razón inversa del cuadrado de la distancia, y por lo mismo en la superficie terrestre será 60×60 veces mayor que en la Luna, dicho cuerpo cayendo con la mencionada fuerza en nuestras inmediaciones deberá describir en el tiempo de un minuto un espacio de $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, y en un tiempo de un segundo $15\frac{1}{12}$ pies, o más exactamente, 15 pies, 1 pulgada 1 líneas. Y con esa fuerza descienden de hecho los graves en la Tierra. Pues la longitud de un péndulo oscilante al ritmo de una oscilación por segundo en la latitud de París es de tres pies parisinos y $8\frac{1}{2}$ líneas, como observó Huygens. Y la altura que recorre un grave cayendo en el tiempo de un segundo es a la mitad de la longitud del péndulo mencionado como el cuadrado de la razón de la circunferencia del círculo a su diámetro (como también indicó Huygens) y, por tanto, de 15 pies parisinos, 1 pulgada y $1\frac{7}{9}$ líneas. Y, por lo tanto, la fuerza con la cual la Luna es retenida en su órbita, si descendiera hasta la superficie terrestre, resulta igual a la fuerza de la gravedad entre nosotros, y por lo mismo (por las reglas I y II) es esa misma fuerza, a la cual solemos llamar gravedad. Pues si la gravedad fuera distinta de ella, los cuerpos descenderían en dirección a la Tierra con doble velocidad bajo la acción de ambas fuerzas juntas, y en el tiempo de un segundo recorrerían al caer un espacio de $30\frac{1}{6}$ pies parisinos, contra toda la experiencia.

Se basa este cálculo en la hipótesis de que la Tierra está en reposo. Porque si la Tierra y la Luna se mueven en torno al Sol y mientras tanto además giran en torno a su centro común de gravedad, manteniéndose la ley de la gravedad, la distancia entre los centros de la Luna y la Tierra será de aproximadamente $60\frac{1}{2}$ semidiámetros terrestres, como hallará quien haga el cálculo. El cálculo se puede hacer mediante la proposición LX del libro primero.

ESCOLIO

La demostración de la proposición puede explicarse más ampliamente como sigue. Si girasen muchas lunas en torno a la Tierra al igual que ocurre con el sistema de Saturno o de Júpiter, sus tiempos periódicos (por un argumento de inducción) observarían la ley de los planetas hallada por Kepler, y por lo mismo sus fuerzas centrípetas serían inversamente como los cuadrados de las distancias al centro de la Tierra, según la proposi-

ción I de este libro. Y si la más baja de todas esas lunas fuese muy pequeña, y casi llegase a tocar las cimas de los montes más altos, la fuerza centrípeta en cuya virtud se mantiene en su órbita vendría a ser casi igual a la gravedad de los cuerpos en las cimas de dichos montes (por el cálculo precedente) y haría que esa pequeña luna, si perdiera todo el movimiento con el que se desplaza en su órbita, al faltarle la fuerza centrífuga con la que había permanecido en su órbita, caería hacia la Tierra, y esto con la velocidad con la que caen los graves en esas crestas montañosas; dada la igualdad de fuerzas con que descienden. Y si la fuerza con la que desciende dicha pequeña luna más baja fuese distinta de la gravedad, y dicha luna fuera grave también hacia la Tierra como los cuerpos en lo alto de los montes, dicha luna con ambas fuerzas juntas descendería doblemente más veloz. Por lo cual, como ambas fuerzas, estas de los cuerpos graves y aquellas de las lunas, tiendan al centró de la Tierra y sean semejantes entre ellas e iguales, las tales fuerzas (por las reglas I y II) tendrán la misma causa. Y, por consiguiente, la fuerza por la que la Luna es retenida en su órbita será aquella misma a la cual solemos llamar gravedad: sobre todo porque si no, la pequeña luna en la cima de la montaña o carecería de gravedad o caería dos veces más rápida que lo que suelen hacer los cuerpos graves.

PROPOSICIÓN V. TEOREMA V

Los planetas circunjoviales gravitan hacia Júpiter, los circunsaturnales hacia Saurno, y los circunsolares hacia el Sol, y por la fuerza de su gravedad son continuamente desviados de movimientos rectilíneos y retenidos en órbitas curvilíneas.

Pues las revoluciones de los planetas circunjoviales en torno a Júpiter, de los circunsaturnales en torno a Saturno, y de Mercurio, Venus y el resto de los circunsolares en torno al Sol son fenómenos del mismo género que la revolución de la Luna en torno a la Tierra; y por ello (por la regla II) dependen de causas del mismo género: sobre todo si se ha demostrado que las fuerzas, de las cuales dependen dichas revoluciones, se dirigen hacia los centros de Júpiter, Saturno y el Sol, y al apartarse de Júpiter, Saturno y el Sol decrecen con la misma ley y proporción con la que la fuerza de la gravedad decrece al alejarse de la Tierra.

COROLARIO 1. Luego la gravedad se da en todos los planetas. Pues nadie duda de que Venus, Mercurio y los demás planetas sean cuerpos del mismo género que Júpiter y Saturno. Y puesto que por la tercera ley del movimiento toda atracción es mutua, Júpiter gravitará hacia todos sus satélites, Saturno hacia los suyos, la Tierra hacia la Luna, y el Sol hacia todos los planetas primarios.

COROLARIO 2. La gravedad que se dirige hacia cada planeta es inversamente proporcional al cuadrado de las distancias de los lugares al centro del planeta.

COROLARIO 3. Todos los planetas gravitan entre sí, por los corolarios 1 y 2. Y de aquí que Júpiter y Saturno en la proximidad de su conjunción, atrayéndose mutuamente, perturben sus movimientos sensiblemente, el Sol perturbe los movimientos lunares, el Sol y la Luna perturben nuestros mares, como se explicará más adelante.

ESCOLIO

Hemos llamado hasta aquí centrípeta a la fuerza por la que los cuerpos celestes son retenidos en sus órbitas. Ahora ya consta que es la gravedad, y por ello la llamaremos en lo sucesivo gravedad. Pues la causa de aquella fuerza centrípeta por la que la Luna es retenida en órbita debe ser extendida a todos los planetas por las reglas I, II y IV.

PROPOSICIÓN VI. TEOREMA VI

Todos los cuerpos gravitan hacia cada planeta y sus pesos hacia un mismo planeta, a iguales distancias del centro del planeta, son proporcionales a la cantidad de materia existente en cada uno.

Hace ya tiempo que otros observaron que el descenso de todos los graves hacia la Tierra (al menos si se elimina la retardación desigual que se debe a la mínima resistencia del aire) ocurre en tiempos iguales; y se puede registrar esa igualdad de los tiempos de la manera más exacta mediante los péndulos. He tratado de examinar esto con oro, plata, plomo, vidrio, arena, sal común, madera, agua, trigo. Me servía de dos vasijas de madera, redondas e iguales. Llenaba una de madera y colgaba el mismo peso de oro (tan exacto como podía) en el centro de oscilación del otro. Las vasijas colgando de hilos iguales de once pies constituían péndulos completamente iguales en cuanto al peso, la figura y la resistencia del aire: situados juntos, iban y venían a la vez con oscilaciones iguales durante largo tiempo. Por tanto, la cantidad de materia en el oro era (por los corolarios 1 y 6 de la proposición XXIV del libro segundo) a la cantidad de materia en la madera como la acción de la fuerza motriz sobre todo el oro a la acción de la fuerza motriz sobre toda la madera; es decir, como un peso a otro peso. Y lo mismo en los demás. En cuerpos del mismo peso la diferencia de materia podía detectarse con estos experimentos aunque fuese de una milésima de la materia total. Y por otra parte, no hay duda de que la naturaleza de la gravedad es la misma en los planetas que en la Tierra. Imagínese, pues, que estos cuerpos terrestres se elevasen hasta la órbita de la Luna y se los dejase caer junto con la Luna privada de todo movimiento, de modo que caigan a la vez hacia la Tierra; y, por lo ya expuesto antes, es cierto que en tiempos iguales describirán espacios iguales junto con la Luna y por lo mismo que son respecto a la cantidad de materia en la Luna como sus pesos al peso de la misma. Además, toda vez que los satélites de Júpiter giran en tiempos que son como la potencia $\frac{3}{2}$ de las distancias al centro de Júpiter, por lo mismo, a iguales distancias de Júpiter sus gravedades aceleratrices resultarán iguales. Por tanto, cayendo de alturas iguales en tiempos iguales describirán espacios iguales; lo mismo que ocurre con los graves en nuestra Tierra. Y por la misma razón los planetas circunsolares, lanzados desde iguales distancias del Sol, en su descenso hacia el Sol describirán espacios iguales en tiempos iguales. En cambio, las fuerzas por las que cuerpos desiguales son acelerados igualmente, son como los cuerpos, es decir, los pesos son como las cantidades de materia en los planetas. Además, que los pesos de Júpiter y de sus satélites hacia el Sol son proporcionales a la cantidad de materia existente en ellos es evidente por el movimiento sumamente regular de los satélites, por el corolario 3 de la proposición LXV del libro primero. Pues si alguno de ellos fuera atraído hacia el Sol en grado mayor que el debido a su cantidad de materia de lo

que lo son los otros, el movimiento de los satélites (por el corolario 2 de la proposición LXV del libro primero) resultaría perturbado por la desigualdad de la atracción. Si, a iguales distancias del Sol, un satélite resultase más grave hacia el Sol en razón de su cantidad de materia que Júpiter en razón de la suya en una razón cualquiera dada, tal como *d* a *e* por ejemplo, la distancia entre el centro del Sol y el centro de la órbita del satélite siempre sería mayor que la distancia entre el centro del Sol y el centro de Júpiter aproximadamente como la raíz cuadrada de esa razón como hallé con un cálculo que hice. Y si el satélite fuese menos grave hacia el Sol en la proporción dicha de *d* a *e*, la distancia del centro de la órbita del satélite al Sol sería menor que la distancia del centro de Júpiter al Sol en razón de dicha raíz cuadrada. Por tanto, si a iguales distancias del Sol, la gravedad aceleratriz de un satélite cualquiera hacia el Sol fuese mayor o menor que la gravedad aceleratriz de Júpiter hacia el Sol tan sólo en una milésima parte de la gravedad total, la distancia del centro de la órbita del satélite hasta el Sol sería mayor o menor que la distancia de Júpiter hasta el Sol en 1/2000 de la distancia total, es decir, una quinta parte de la distancia del satélite exterior al centro de Júpiter: excentricidad de la órbita que sería bien sensible. Pero las órbitas de los satélites son concéntricas a Júpiter, y por lo mismo las gravedades aceleratrices de Júpiter y de los satélites hacia el Sol son iguales entre ellas. Y por la misma razón los pesos hacia el Sol de Saturno y sus compañeros, a iguales distancias del Sol, son como las cantidades de materia que hay en ellos; y los pesos hacia el Sol de la Luna y la Tierra o bien son nulos, o son muy exactamente proporcionales a sus masas. Pero alguno es el peso, por los corolarios 1 y 3 de la proposición V.

Y también los pesos de cada una de las partes de un planeta cualquiera hacia otro son entre sí como la materia que hay en, cada parte. Porque, si unas partes gravitasen más y otras menos que en razón de su cantidad de materia, el planeta entero, según el género de partes en que abunde más, gravitará más o menos que en razón de su cantidad de materia total. Y no importa si dichas partes son internas o externas. Pues si, por ejemplo, los cuerpos terrestres que están a nuestro alrededor los elevamos imaginariamente hasta la órbita de la Luna y se comparan con el cuerpo de la misma, si sus pesos fuesen a los pesos de las partes externas de la Luna como las cantidades de materia en unos y otra, pero respecto a los pesos de las partes interiores en razón mayor o menor, tales cuerpos estarían respecto al peso total de la Luna en una proporción mayor o menor: contra lo mostrado más arriba.

COROLARIO 1. De aquí que los pesos de los cuerpos no dependan de sus formas y texturas. Pues si pudieran variar con las formas, serían mayores o menores según la variedad de las formas, a igualdad de materia, en contra totalmente de la experiencia.

COROLARIO 2. Todos los cuerpos que están alrededor de la Tierra son graves hacia ella; y los pesos de todos los que distan igual del centro de la Tierra son como las cantidades de materia en cada uno de ellos. Ésta es una cualidad de todos aquellos en los que es posible hacer experimentos, y en consecuencia, por la regla III, ha de afirmarse de todos. Si el éter u otro cuerpo cualquiera estuviese desprovisto por completo de gravedad o gravitase menos que en razón de su cantidad de materia: puesto que éste (en opinión de Aristóteles, Descartes y otros) no se diferencia de los demás cuerpos sino sólo en la forma de la materia, tal cuerpo podría mediante el cambio gradual de forma transformarse en un cuerpo de la misma condición que aquellos que gravitan lo más posible según su cantidad de materia, y viceversa, los cuerpos sumamente graves, adquiriendo gradualmente la forma de aquél, podrían perder su gravedad gradualmente.

Y de esta suerte los pesos dependerían de las formas de los cuerpos y podrían variar con las formas, contra lo que se ha probado en el corolario anterior.

COROLARIO 3. Todos los espacios no están igualmente llenos. Pues si todos los espacios estuviesen igualmente llenos, la gravedad específica del fluido con el cual se llena la región del aire, por la gran densidad de su materia, en nada cedería a la gravedad específica del mercurio, del oro o de otro cuerpo cualquiera muy denso; y por ello ni el oro, ni otro cuerpo cualquiera podría descender en el aire. Pues los cuerpos en los fluidos, salvo que sean específicamente más graves, no descienden en absoluto. Pero si la cantidad de materia en un espacio dado puede disminuir por alguna rarefacción cualquiera ¿por qué no podría disminuir infinitamente?

COROLARIO 4. Si todas las partículas sólidas de todos los cuerpos son de la misma densidad, y sin poros no son susceptibles de rarefacción, se da de hecho el vacío. Digo que son de la misma densidad aquellas cuyas fuerzas inerciales son como las magnitudes.

COROLARIO 5. La fuerza de la gravedad es de distinta naturaleza que la fuerza magnética. Pues la atracción magnética no es como la materia atraída. Unos cuerpos son más atraídos, otros menos, muchos no lo son. Y la fuerza magnética en uno y el mismo cuerpo puede aumentar y disminuir y es bastante mayor a veces respecto a la cantidad de materia que la fuerza de la gravedad, y al alejarse del imán decrece en una razón de la distancia no cuadrada sino casi cúbica, en cuanto he podido comprobar con algunos experimentos un tanto rudimentarios.

PROPOSICIÓN VII. TEOREMA VII

La gravedad ocurre en todos los cuerpos y es proporcional a la cantidad de materia existente en cada uno.

Hemos probado ya que todos los planetas gravitan entre sí, y también que la gravedad hacia cada uno de ellos considerado individualmente es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde cada lugar al centro del planeta. De lo cual se sigue que (por la proposición LXIX del libro primero y sus corolarios) la gravedad hacia todos es proporcional a la materia existente en ellos.

Por lo demás, dado que todas las partes de un planeta A gravitan hacia otro planeta B, y la gravedad de una parte cualquiera es a la gravedad del todo como la materia de la parte a la materia del todo, y para toda acción haya igual reacción (por la tercera ley del movimiento), el planeta B gravitará a la inversa hacia todas las partes del planeta A, y su gravedad hacia cada parte será a su gravedad hacia el todo como la materia de la parte a la materia del todo Q.E.D.

COROLARIO 1. Por consiguiente, la gravedad hacia todo el planeta surge y se compone de la gravedad hacia cada parte. De lo cual tenemos ejemplos en las atracciones magnéticas y eléctricas. Pues la atracción entera hacia el todo surge de las atracciones hacia cada parte. Para la gravedad esto se entenderá imaginando que muchos planetas menores se reúnen en un globo y constituyen uno mayor. Pues la fuerza del todo deberá originarse de las fuerzas de las partes componentes. Si alguien objeta que todos los cuerpos que nos rodean deberían gravitar entre sí según esta ley, mientras que no percibimos en absoluto una gravedad de este estilo, debo responder que la gravedad en estos

cuerpos al ser respecto a la gravedad de toda la Tierra como son estos cuerpos al cuerpo de la Tierra entera, es bastante menor que la que es observable.

COROLARIO 2. La gravitación hacia cada partícula igual de un cuerpo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares a las partículas. Es evidente por el corolario 3 de la proposición LXXIV del libro primero.

PROPOSICIÓN VIII. TEOREMA VIII

Si la materia de dos globos que gravitan entre sí es homogénea en todos los lugares que equidistan de los centros por todos los lados, el peso de cada uno de ellos hacia el otro será inversamente como el cuadrado de la distancia entre los centros.

Después de que hube hallado que la gravedad hacia el planeta entero surge y se compone de las gravedades hacia las partes, y que es hacia cada parte inversamente proporcional a los cuadrados de las distancias a las partes, dudaba de si la dicha proporción inversa del cuadrado se cumpliría exactamente en la fuerza entera compuesta de muchas fuerzas o si sólo de modo aproximado. Pues podría ocurrir que la proporción, que en las distancias más grandes se cumplía con bastante exactitud, en las inmediaciones de la superficie del planeta, debido a las distancias desiguales de las partículas y a las desemejanzas de los lugares, variase notablemente. Mas al fin, por las proposiciones LXXV y LXXVI del libro primero y sus corolarios, comprendí la verdad de la proposición de que aquí se trata.

COROLARIO 1. De aquí se pueden hallar y comparar entre sí los pesos de los cuerpos en los distintos planetas. Pues los pesos de cuerpos iguales que giran en círculos en torno a los planetas son (por el corolario 2 de la proposición IV del libro primero) directamente como los diámetros de los círculos e inversamente cómo los cuadrados de los tiempos periódicos, y los pesos sobre las superficies de los planetas o a otras distancias cualesquiera del centro son mayores o menores (por esta proposición) en razón inversa del cuadrado de las distancias. De este modo, a partir de los tiempos periódicos de Venus en torno al Sol de 224 días y $16\frac{3}{4}$ horas, del satélite exterior de Júpiter alrededor de Júpiter de 16 días y $16\frac{8}{15}$ horas, del satélite de Huygens en torno a Saturno de 15 días y $22\frac{2}{3}$ horas y de la Luna en torno a la Tierra de 27 días 7 horas y 43 minutos, comparados con la distancia media de Venus al Sol y con las elongaciones heliocéntricas máximas del satélite exterior de Júpiter respecto al centro de éste de 8',16", del satélite Huygens del centro de Saturno de 3', 4", y de la Luna del centro de la Tierra de 10',33", haciendo un cálculo hallé que los pesos de cuerpos iguales a iguales distancias del centro del Sol, de Júpiter, de Saturno y de la Tierra eran hacia el Sol, hacia Júpiter, hacia Saturno y la Tierra como 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, y $\frac{1}{169282}$, respectivamente, y aumentando o disminuyendo las distancias, los pesos aumentaban o disminuían en razón del cuadrado: los pesos de cuerpos iguales hacia el Sol, Júpiter, Saturno y la Tierra a las distancias de 10000, 997, 791 y 109 de sus centros, y, por ende, en sus superficies, serán como 10000, 943, 529 y 435 respectivamente. Cuánto pesan los cuerpos en la superficie de la Luna se verá después.

COROLARIO 2. También se sigue la cantidad de materia en cada planeta. Pues las cantidades de materia en los planetas son como sus fuerzas a iguales distancias de sus

centros, esto es, en el Sol, Júpiter, Saturno y la Tierra como 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, y $\frac{1}{169282}$, respectivamente. Si la paralaje solar se estableciera mayor o menor que 10"30"', la cantidad de materia en la Tierra deberá aumentarse o disminuirse en razón cúbica.

COROLARIO 3. También aparecen así las densidades de los planetas. Pues los pesos de cuerpos iguales y homogéneos hacia esferas homogéneas son en las superficies de éstas como los diámetros de las mismas, por la proposición LXXII del libro primero, y por lo mismo, las densidades de esferas heterogéneas son como aquellos pesos divididos por los diámetros de las esferas. Los diámetros verdaderos del Sol, de Júpiter, de Saturno y de la Tierra eran entre sí como 10000, 997, 791, y 109, y los pesos hacia ellos como 10000, 943, 529 y 435 respectivamente y, por tanto, las densidades son como 100, $94\frac{1}{2}$, 67 y 400. La densidad de la Tierra resultante de este cálculo no depende de la paralaje solar, sino que se obtiene de la paralaje lunar, con lo cual aquí se establece con exactitud. Por consiguiente el Sol es algo más denso que Júpiter y éste que Saturno, mientras la Tierra es cuatro veces más densa que el Sol. Ya que éste, por su enorme calor, se enrarece. La Luna, en cambio, es más densa que la Tierra, como se mostrará más tarde.

COROLARIO 4. Son, por tanto, más densos los planetas que son más pequeños, a igualdad de condiciones restantes. De este modo la fuerza de la gravedad se acerca más a la igualdad en sus superficies. Pero, a igualdad de condiciones, son más densos los planetas más próximos al Sol; Júpiter más que Saturno y la Tierra más que Júpiter. Efectivamente, había que situar a distintas distancias del Sol a los planetas para que cada uno según su densidad disfrutase de un mayor o menor grado de calor solar. Nuestra agua, si la Tierra estuviese situada en la órbita de Saturno se solidificaría y en la órbita de Mercurio se evaporaría al instante. Pues la luz del Sol, a la cual es proporcional el calor, es siete veces más densa en la órbita de Mercurio que aquí entre nosotros: y con el termómetro he hallado que con siete veces el calor estival del Sol al agua hierve. Y no hay duda de que la materia de Mercurio está acomodada al calor, y por lo mismo, sea más densa que la nuestra, toda vez que la materia más densa exija mayor calor para realizar las operaciones naturales.

PROPOSICIÓN IX. TEOREMA IX

la gravedad, a partir de la superficie de los planetas hacia abajo, decrece en razón muy aproximada de la distancia al centro.

Si la materia del planeta es uniforme en cuanto a la densidad, esta proposición se cumple exactamente, por la proposición LXXIII del libro primero. Por lo tanto, no habrá más error que el que se siga de la desigualdad de la densidad.

PROPOSICIÓN X. TEOREMA X

El movimiento de los planetas en los cielos puede conservarse durante mucho tiempo.

Se ha mostrado en el Escolio de la proposición XL del libro segundo que un globo de agua congelada, moviéndose libremente en nuestra atmósfera y describiendo la longi-

tud de su semidiámetro, perdería por la resistencia del aire $\frac{1}{4986}$ parte de su movimiento. Pero la misma proporción resulta para cualquier globo muy aproximadamente de cualquier tamaño y a cualquier velocidad. Ahora bien, que el globo de nuestra Tierra es más denso que si fuera de agua lo infiero como sigue. Si este globo fuera todo de agua, las cosas todas que fuesen menos densas que el agua, por su menor gravedad específica, emergerían y flotarían. Por esa razón, un globo terroso cubierto de agua por todas partes, si fuese de mayor rareza que el agua, emergería por un lado, y toda el agua discurriendo desde allí se concentraría en la región opuesta. E igual es el caso de nuestra Tierra rodeada de mares por la mayor parte. Si ella no fuere más densa, emergería de los mares y con una parte de la misma de acuerdo con su grado de levedad sobresaldría del agua, concentrándose todos los mares hacia la región opuesta. Por la misma razón, las manchas solares son más leves que la materia luminosa solar a la que se sobreponen. Y al formarse cualquiera de los planetas, cuando la masa era fluida, toda materia más grave tendía desde la masa líquida hacia el centro. Por lo cual, al ser la Tierra común periférica casi dos veces más grave que el agua, y un poco más abajo en las minas tres, cuatro y hasta cinco veces más densa, es probable que toda la materia de la Tierra junta sea cinco o seis veces más pesada que si fuera de agua; sobre todo porque, como se ha mostrado, la Tierra es casi cuatro veces más densa que Júpiter. Por ello, si Júpiter fuera algo más denso que el agua, en el tiempo de treinta días en el que recorre la longitud de 459 semidiámetros suyos, perdería en un medio de la densidad de nuestro aire casi una décima parte de su movimiento. Pero como la resistencia de los medios disminuye en razón del peso y de la densidad, como en el caso del agua que al ser $13\frac{3}{5}$ más leve que el mercurio es menos resistente en esa proporción; y el aire que es 860 veces más leve que el agua es también menos resistente en esa misma proporción, y si se considera en los cielos donde el peso del medio en el que se mueven los planetas disminuye enormemente, la resistencia casi vendrá a desaparecer. Hemos mostrado, en efecto, en el escolio de la proposición XXII del libro segundo, que si ascendemos hasta una altura de doscientas millas sobre la Tierra el aire sería allí más raro que sobre la superficie terrestre en una proporción de 30 a 0,000 000 000 000 3998 y también como 75 000 000 000 000 a 1 aproximadamente. Por consiguiente, el planeta Júpiter girando en un medio de la densidad de ese aire más alto en el tiempo de 1000 000 de años no perdería de su movimiento por la resistencia del medio ni una millonésima parte. En los espacios próximos a la Tierra nada hay que produzca resistencia salvo los vapores y exhalaciones del aire. Si éstos son extraídos con todo cuidado de un vaso de cristal cilíndrico cerrado, los graves caen dentro del vaso con toda libertad y sin resistencia sensible alguna; el mismo oro y una pluma muy leve soltados a la vez caen con igual velocidad, y describiendo en su caída una altura de cuatro, seis u ocho pies tocan el suelo a la vez, como se ha visto experimentalmente. Y, por tanto, si nos trasladamos a los cielos, vacíos de aire y de exhalaciones, los planetas y los cometas sin resistencia sensible alguna se moverán por esos espacios durante larguísimo tiempo.

HIPÓTESIS I

El centro del sistema del mundo está en reposo.

Esto lo conceden todos, si bien unos sostienen que la Tierra y otros que el Sol reposan en el centro del sistema. Veamos qué se sigue de aquí.

PROPOSICIÓN XI. TEOREMA XI

El centro común de gravedad de la Tierra, el Sol y todos los planetas está en reposo.

Pues (por el corolario IV de las leyes) dicho centro o está en reposo, o se desplaza uniformemente en línea recta. Pero si tal centro se desplaza continuamente, el centro del mundo también se moverá, contra la hipótesis.

PROPOSICIÓN XII. TEOREMA XII

El Sol es agitado por un movimiento permanente, pero jamás se aleja mucho del centro común de gravedad de todos los planetas.

Pues toda vez que (por el corolario 2 de la proposición VIII) la materia en el Sol es a la materia en Júpiter como 1067 a 1, y la distancia de Júpiter al Sol es al semidiámetro solar en razón ligeramente mayor, el centro común de gravedad de ambos cae en un punto muy poco distante fuera de la superficie del Sol. Por la misma razón, puesto que la materia del Sol es a la de Saturno como 3021 a 1, y la distancia de Saturno al Sol es ligeramente menor respecto al semidiámetro solar, el punto común de gravedad de ambos caerá en un punto ligeramente interior a la superficie solar. Y repitiendo los elementos de este cálculo, si los planetas todos y la Tierra se situaran a un lado del Sol, el centro común de gravedad de todos ellos apenas se alejaría del centro del Sol el valor de un diámetro solar. En los demás casos la distancia entre esos centros siempre sería menor. Por consiguiente, dado que dicho centro de gravedad siempre está en reposo, el Sol a tenor de las diferentes ubicaciones de los planetas, se moverá hacia todas partes, pero jamás se apartará mucho de dicho centro.

COROLARIO. De aquí que el centro común de gravedad de la Tierra, el Sol y el resto de los planetas, haya de ser considerado como el centro del mundo. Puesto que la Tierra, el Sol y todos los demás planetas gravitan mutuamente entre sí y, por tanto, se mueven siempre según las leyes del movimiento en razón de sus fuerzas de gravedad, es evidente que sus centros móviles no se pueden tomar por el centro inmóvil del mundo. Si hubiera que situar en dicho centro al cuerpo hacia el que todos los otros gravitan en grado máximo (cual es la opinión corriente) tal privilegio habría que concedérselo al Sol. Mas como el Sol se mueve, hay que elegir un punto en reposo, respecto al cual el centro del Sol se separa muy poco, y del cual se alejaría aún menos si el Sol fuera más denso y más grande de suerte que se moviera menos.

PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA XIII

los planetas se mueven en elipses que tienen un foco en el centro del Sol, y con radios trazados a dicho centro describen áreas proporcionales a los tiempos.

Ya hemos considerado estos movimientos más arriba partiendo de los fenómenos. Ahora que se conocen los principios del movimiento, de ellos deducimos «a priori» los movimientos celestes. Puesto que los pesos de los planetas hacia el Sol son inversa-

mente como los cuadrados de las distancias al centro del Sol, si el Sol reposase y los demás planetas no actuasen mutuamente entre ellos, sus órbitas serían elípticas, teniendo al Sol en el foco común, y describirían áreas proporcionales a los tiempos (por las proposiciones I y XI y el corolario 1 de la proposición XIII del libro primero), pero las acciones de los planetas entre ellos son mínimas (de suerte que pueden despreciarse) y perturban menos los movimientos en elipses de los planetas en torno al Sol (por la proposición LXVI del libro primero) que si tales movimientos se realizasen en torno a un Sol en reposo.

No se puede despreciar enteramente la acción de Júpiter sobre Saturno. Pues la gravedad hacia Júpiter es a la gravedad hacia el Sol (a iguales distancias) como 1 a 1067; por ello, en la conjunción , de Júpiter y Saturno, al ser la distancia de Saturno a Júpiter respecto a la distancia de Saturno al Sol casi como 4 a 9, la gravedad de Saturno hacia Júpiter será a la gravedad de Saturno hacia el Sol como 81 a 16×1067, o como 1 a 211 aproximadamente. Y a esto se debe la perturbación de la órbita de Saturno en cada conjunción de este planeta con Júpiter, lo suficientemente sensible como para extrañar a los astrónomos. Según la diferente situación del planeta en estas conjunciones su excentricidad aumenta o disminuye y su afelio se adelanta o se retrasa notablemente, y el movimiento medio se acelera o se retarda alternativamente. Sin embargo, el error total en su movimiento en torno al Sol debido a tamaña fuerza (además del movimiento medio) puede casi evitarse situando el foco inferior de su órbita en el centro común de gravedad de Júpiter y el Sol (por la proposición LXVII del libro primero) y, por tanto, cuando resulta mayor no sobrepasa los dos minutos. Y el error máximo en el movimiento medio apenas supera los dos minutos por año. Por otra parte, en la conjunción de Júpiter y Saturno las gravedades aceleratrices del Sol hacia Saturno, de Júpiter hacia Saturno y de Júpiter hacia el Sol vienen a ser casi como 16, 81 y $\frac{(16 \times 81 \times 3021)}{25}$, o sea, por lo cual la diferencia de las fuerzas de gravedad del Sol hacia Saturno y de Júpiter hacia Saturno es a la fuerza de gravedad de Júpiter hacia el Sol como 65 a 156609 y también como 1 a 2409. Pero el poder máximo de Saturno para perturbar el movimiento de Júpiter es proporcional a esta diferencia, de suerte que la perturbación de la órbita de Júpiter es mucho menor que la de Saturno. Las perturbaciones de las demás órbitas son aún más pequeñas, salvo la de la Tierra sensiblemente perturbada por la Luna. El centro común de gravedad de la Tierra y la Luna discurre por una elipse en torno al Sol situado en el foco de la misma y, con un radio trazado al Sol, describe en ella áreas proporcionales a los tiempos, pero la Tierra gira con un movimiento mensual en torno a dicho centro común.

PROPOSICIÓN XIV. TEOREMA XIV

Los afelios y nodos de las órbitas están en reposo.

Los afelios están en reposo, por la proposición XI del libro primero, al igual que los planos de las órbitas, por la proposición I del mismo libro, y al reposar los planos también reposan los nodos. No obstante, debido a las acciones mutuas de los planetas y cometas en revolución se originan algunas desigualdades, pero tan insignificantes que aquí pueden despreciarse.

COROLARIO 1. También están en reposo las estrellas fijas, toda vez que conservan las posiciones dadas respecto a los afelios y a los nodos.

COROLARIO 2. Y por tanto, al no percibirse paralaje alguna de las mismas como consecuencia del movimiento anual de la Tierra, sus fuerzas no producen efecto alguno sensible en nuestro sistema por la enorme distancia a que se hallan. Además de que las estrellas fijas, esparcidas igualmente por todas las partes del cielo, destruyen sus fuerzas mutuas con atracciones opuestas, por la proposición LXX del libro primero.

ESCOLIO

Puesto que los planetas más próximos al Sol (es decir, Mercurio, Venus, Tierra y Marte) debido a la pequeñez de sus cuerpos influyen muy poco unos sobre otros, sus afelios y nodos están en reposo, salvo en la medida en que sean perturbados por las fuerzas de Júpiter, Saturno y los cuerpos superiores. Y de aquí se sigue, por la teoría de la gravedad, que sus afelios se mueven un poco hacia adelante respecto a las fijas y esto en una proporción de la potencia $\frac{3}{2}$ de sus distancias al Sol. De suerte que si el afelio de Marte en cien años se adelanta respecto a las fijas 33'20", los afelios de la Tierra, de Venus y de Mercurio en cien años se adelantarán 17'40"; 10'53" y 4'16" respectivamente. Estos movimientos, por su insignificancia, se deprecian en esta proposición.

PROPOSICIÓN XV. PROBLEMA I

Hallar los diámetros principales de las órbitas.

Han de tomarse en razón de la potencia $\frac{2}{3}$ de los tiempos periódicos, por la proposición XV del libro primero, y después hay que aumentar cada uno en razón de la suma de las masas del Sol y cada planeta a la primera de las dos medias proporcionales entre dicha suma y el Sol, por la proposición LX del libro primero.

PROPOSICIÓN XVI. PROBLEMA II

Hallar las excentricidades y los afelios de las órbitas.

El problema se resuelve por la proposición XVIII del libro primero.

PROPOSICIÓN XVII. TEOREMA XV

Los movimientos diarios de los planetas son uniformes y la libración lunar se debe a su movimiento diario.

Es evidente por la ley I del movimiento y por el corolario 22 de la proposición LXVI del libro primero. Ciertamente Júpiter gira respecto a las estrellas fijas en 9 h. 56', Marte en 24 h. 39', Venus en casi 23 h., la Tierra en 23 h. 56', el Sol en $25\frac{1}{2}$ días y la

Luna en 27 d. 7 h. 43'. Está claro por los fenómenos que esto es así. Las manchas en el cuerpo solar vuelven al mismo sitio en el disco tras $27\frac{1}{2}$ días aproximadamente respecto a la Tierra; y, por tanto, respecto a las fijas el Sol gira aproximadamente en $25\frac{1}{2}$ días. Y dado que el día lunar girando uniformemente sobre su eje es de un mes, la misma cara de ella mirará siempre hacia el otro foco de su órbita muy aproximadamente, y, por consiguiente, se desviará hacia acá o hacia allá de la Tierra según se halle el sitio de dicho foco. Ésta es la libración longitudinal de la Luna; pues la latitudinal se debe a la latitud de la Luna y a la inclinación de su eje hacia el plano de la eclíptica. Esta teoría de la libración lunar fue expuesta por N. Mercator en su astronomía editada al principio de 1676 con detalle y gracias a las cartas que le envié. Con un movimiento semejante parece que gira alrededor de su eje el satélite exterior de Saturno, mirando siempre hacia éste con la misma cara. Pues al girar en torno a Saturno, cada vez que llega a la parte oriental de su órbita se ve escasamente y muchas veces deja de verse, cosa que puede deberse, como ha hecho notar Cassini, a algunas manchas en esa parte del cuerpo que entonces se orienta hacia la Tierra. Y también el satélite exterior de Júpiter parece girar en torno a su eje con un movimiento semejante, toda vez que en la parte del cuerpo opuesta a Júpiter tiene una mancha que aparece como si estuviera en Júpiter cada vez que pasa entre Júpiter y nuestros ojos.

PROPOSICIÓN XVIII. TEOREMA XVI

Los ejes de los planetas son menores que los diámetros trazados perpendicularmente a dichos ejes.

Los planetas, si se suprime todo movimiento circular diario, deberían adoptar figura esférica debido a la igual gravedad de las partes por todos lados. Gracias a ese movimiento circular ocurre que las partes que se apartan del eje intentan ascender junto al ecuador. Por lo cual, si la materia fuese fluida aumentaría con su ascenso los diámetros ecuatoriales, mientras haría disminuir el eje con su descenso hacia los polos. Y así el diámetro de Júpiter (coincidiendo las observaciones de los astrónomos) se ve más corto entre los polos que de oriente a occidente. Y por la misma razón, a no ser que nuestra Tierra fuera algo más alta en el ecuador que en los polos, los mares se hundirían hacia los polos, y elevándose junto al ecuador lo inundarían allí todo.

PROPOSICIÓN XIX. PROBLEMA III

Hallar la proporción del eje de un planeta respecto a los diámetros perpendiculares al mismo.

Nuestro Norwood, midiendo hacia 1635 la distancia de 905751 pies londinenses entre Londres y York, y observando una diferencia de latitud de 2°28' dedujo que el valor de un grado era de 367196 pies londinenses, es decir, de 57300 toesas parisinas.

Picard, midiendo un arco de un grado y 22'55" sobre el meridiano entre Amiens y Malvoisine, halló que el grado de arco equivalía a 57060 toesas parisinas. Cassini, padre, midió la distancia sobre el meridiano desde Collioure, en el Rosellón, hasta el ob-

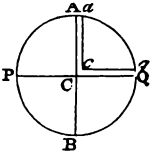
servatorio de París, y su hijo añadió la distancia desde el observatorio hasta la torre de la ciudad de Dunquerque. La distancia entera resultó ser de 486156½ toesas, y la diferencia de latitudes entre Collioure y Dunquerque de 8 grados, 31'11⅚". Por consiguiente, el arco de un grado resulta ser de 57061 toesas parisinas. De esas medidas se sigue que el perímetro de la Tierra viene a ser de 123249600 pies parisinos y su semidiámetro de 19615800 pies parisinos, en la hipótesis de que la Tierra sea esférica.

En la latitud de París un grave en el tiempo de un segundo recorre al caer 15 pies, 1 pulgada y 1⁷/₉ líneas, como se ha dicho antes, es decir, 2173⁷/₉ líneas. El peso del cuerpo disminuye por el peso del aire ambiente. Y supongamos que esta disminución es del orden de 0,0011 del peso total, de suerte que dicho grave, cayendo en el vacío, recorrerá 2174 líneas en el tiempo de un segundo.

En cada día sideral de 23 h. 56'4", un cuerpo que gire uniformemente en un círculo a la distancia de 19615800 pies del centro describirá en el tiempo de un segundo un arco de 1433, 46 pies, cuyo seno verso es de 0,0523656 pies, o de 7,54064 líneas. Por lo tanto, la fuerza con que los cuerpos descienden en la latitud de París es a la fuerza centrífuga de los cuerpos en el ecuador debida al movimiento diurno de la Tierra como 2174 a 7,54064.

La fuerza centrífuga de los cuerpos en el ecuador es a la fuerza centrífuga con que los cuerpos tienden a despegarse de la Tierra en la latitud de París de 48 grados, 50', 10", como el cuadrado del radio al seno del complemento de la susodicha latitud, esto es, como 7,54064 a 3, 267. Añádase esta fuerza a la fuerza con la que caen los graves a dicha latitud de París y el cuerpo en esa latitud cayendo con toda la fuerza de la gravedad en el tiempo de un segundo recorrerá 2177,267 líneas, o 15 pies parisinos, 1 pulgada y 5,267 líneas. Y toda la fuerza de la gravedad en dicha latitud será a la fuerza centrífuga de los cuerpos en el ecuador de la Tierra como 2177,267 a 7,54064 o como 289 a 1.

Por ello, si se representa la figura de la Tierra por APBQ, ahora ya no esférica, sino engendrada por la rotación de una elipse en torno al eje menor PQ, y ACQ*qca* es un canal lleno de agua que va desde el polo Q*q* al centro C*c* y después hasta el ecuador A*a*, el peso del agua en el brazo del canal AC*ca* tendrá que ser al peso del agua en el otro brazo del canal QC*cq* como 289 a 288, debido a que la fuerza centrífuga generada por el movimiento circular soportará una parte de las 289 del peso y la suprime mientras que el peso de las 288 partes del otro brazo sostiene a las restantes. Además, haciendo un cálculo (a partir del corolario 2 de la proposición XCI del libro primero) hallo que si la Tierra constase de materia uniforme y quedase desprovista de todo movimiento, y su eje PQ fuese al diámetro AB como 100 a 101, la gravedad en el punto Q de la Tierra sería a la gravedad en el mismo punto Q de una esfera descrita con centro en C y radio PC o QC como 126 a 125. Y por la misma razón, la gravedad en el punto A hacia un esferoide descrito en torno al eje AB por rotación de la elipse APBQ es la gravedad en el mismo punto A de una esfera descrita con centro en C y radio AC, como 125 a 126. Pues la gravedad hacia la Tierra en el punto A es la media proporcional entre las gravedades hacia la esfera y hacia el susodicho esferoide; por cuanto que la esfera, disminuyendo el diámetro PQ en la razón de 101 a 100, tiende a la figura de la Tierra, al igual que esta figura, al disminuir en la misma razón un tercer diámetro que fuese perpendicular a los dos anteriores AB y PQ, se convierte en el susodicho esferoide; y la gravedad en el punto A, en



uno y otro caso, disminuye en la misma proporción muy aproximadamente. Por consiguiente, la gravedad en el punto A hacia una esfera descrita con centro en C y radio AC es a la gravedad en el punto A hacia la Tierra como 126 a $1251\frac{1}{2}$, y la gravedad en el punto Q hacia una esfera descrita con centro en C y radio QC es a la gravedad en el punto A hacia la esfera descrita con centro en C y radio AC, en razón de los diámetros (por la proposición LXXII del libro primero), es decir, como 100 a 101. Únanse ahora estas tres razones, 126 a 125, 126 a $125\frac{1}{2}$, y 100 a 101; resultará que la gravedad en Q hacia la Tierra es a la gravedad en A hacia la Tierra como $126 \times 126 \times 100$ a $125 \times 1251\frac{1}{2} \times 101$, o como 501 a 500.

Ahora, dado que (por el corolario 3 de la proposición XCI del libro primero) la gravedad en cada brazo de uno y otro canal AC*ca* y QC*cq* es como la distancia de cada lugar al centro de la Tierra, si dichos brazos se separan mediante superficies transversales y equidistantes en partes proporcionales a los todos, los pesos de cada parte en el brazo AC*ca* serán a los pesos de cada otra parte en el otro brazo como las magnitudes y las gravedades aceleratrices conjuntamente; es decir, como 101 a 100 y 500 a 501, o sea, como 505 a 501. Y, por consiguiente, si la fuerza centrífuga de una parte cualquiera en el brazo AC*ca* generada por el movimiento diurno fuese a su propio peso como 4 a 505, de suerte que restase cuatro partes del peso total de cada una dividida en 505, los pesos en uno y otro brazo permanecerían iguales y, por tanto, el fluido permanecería en equilibrio. Sin embargo la fuerza centrífuga de cada una de las partes es a su peso como 1 a 289, es decir, la fuerza centrífuga que debería ser $\frac{4}{505}$ partes del peso es solamente $\frac{1}{289}$ parte del mismo. Y por lo mismo digo, por la regla áurea, que si la fuerza centrífuga $\frac{4}{505}$ hace que la altura del agua en el brazo AC*ca* supere a la altura del agua en el brazo QC*cq* en $\frac{1}{100}$ parte de la altura total, la fuerza centrífuga $\frac{1}{289}$ hará que el exceso de altura en el brazo AC*ca* sea solamente $\frac{1}{289}$ parte de la altura del otro brazo QC*cq*.

Por lo tanto, el diámetro de la Tierra en el ecuador es al diámetro de la misma en los polos como 230 a 229. De suerte que, siendo el semidiámetro medio terrestre, según la medición de Picard, de 19615800 pies parisinos, o de 3923,16 millas (suponiendo para la milla 5000 pies), la Tierra será más alta en el ecuador que en los polos en un exceso de 85472 pies, o de $17\frac{1}{10}$ millas. Y su altura en el ecuador será casi de 19658600 pies, mientras en los polos será de 19573000 pies.

Si un planeta fuera mayor o menor que la Tierra, manteniendo su misma densidad y su mismo tiempo periódico de revolución diaria, se mantendrá la proporción de la fuerza centrífuga a la gravedad, y por ello se mantendrá también la proporción del diámetro entre polos respecto al diámetro en el ecuador. Pero si el movimiento diario se acelerase o retardase en una proporción cualquiera, la fuerza centrífuga aumentará o disminuirá en razón cuadrada de aquella proporción y, por lo mismo, la diferencia entre diámetros aumentará o disminuirá muy aproximadamente en razón del cuadrado de la susodicha proporción. Y si la densidad del planeta aumentase o disminuyese en una razón cualquiera, también la gravedad tendente hacia el mismo aumentara o disminuirá en la misma razón, y la diferencia entre diámetros, a la inversa, disminuirá en la razón

del aumento de la gravedad o aumentará en la razón de la disminución de la gravedad. De donde, al girar la Tierra respecto a las fijas en 23 h. 56', mientras Júpiter lo hace en 9 h. 56' y ser los cuadrados de los tiempos como 29 a 5, mientras las densidades de los cuerpos en giro son como 400 a $94\frac{1}{2}$, la diferencia de diámetros de Júpiter será a su diámetro menor como $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ a 1, o sea, como 1 a $9\frac{1}{7}$, aproximadamente. De donde, al ser su diámetro mayor de 37", su diámetro menor entre polos será de 33"25'". Auméntese casi 3 por la luz difusa, y los diámetros aparentes de este planeta resultan ser 40" y 36" 25'"; que resultan ser entre sí como $11\frac{1}{6}$ a $10\frac{1}{6}$, aproximadamente. Esto resulta así en la hipótesis de que el cuerpo de Júpiter sea uniformemente denso. Pero si su cuerpo fuese más denso hacia el plano ecuatorial que hacia los polos, sus diámetros podrían hallarse entre ellos en la relación de 12 a 11, o de 13 a 12, o quizá de 14 a 13. Cassini el año 1691 observó que el diámetro de Júpiter de este a oeste superaba en casi una décimo quinta parte de su longitud al otro diámetro. Y nuestro Pound, con un telescopio de 123 pies de largo y un buen micrómetro, midió los diámetros de Júpiter en 1719 con los resultados siguientes:

	Tiempo		*Diámetro máximo*	*Diámetro mínimo*	*Relación mutua*
	Día	*Hora*	*Partes*	*Partes*	
Enero	28	6	13,40	12,28	Como 12 a 11
Febrero	6	7	13,12	12,20	Como $13\frac{3}{4}$ a $12\frac{3}{4}$
Marzo	9	7	13,12	12,08	Como $12\frac{2}{3}$ a $11\frac{2}{3}$
Abril	9	4	12,32	11,48	Como $14\frac{1}{2}$ a $13\frac{1}{2}$

La teoría cuadra bastante bien con los fenómenos. Pues los planetas se calientan algo más por la luz del Sol hacia el ecuador, por lo que allí se recuecen algo más que hacia los polos.

Por otra parte, que la gravedad disminuye en el ecuador debido a la rotación diaria de nuestra Tierra, y por tanto que la Tierra asciende allí más que en los polos (siempre que sea uniformemente densa) se verá por los experimentos con péndulos de los que se da cuenta en la proposición siguiente.

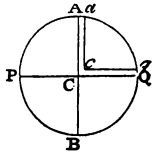
PROPOSICIÓN XX. PROBLEMA IV

Hallar y comparar entre ellos los pesos de los cuerpos en las distintas regiones de esta Tierra.

Puesto que los pesos de los brazos desiguales del canal de agua ACQ*gca* son iguales, y los pesos de las partes, proporcionales a los brazos enteros y colocadas semejantemente en ellos, son entre sí como los pesos de los todos, y por lo mismo son iguales entre

sí, los pesos de las partes iguales y situadas semejantemente en los brazos serán inversamente como los brazos, es decir, inversamente como 230 a 229. E igual es la razón entre cuerpos homogéneos e iguales cualesquiera situados semejantemente en los brazos del canal. Sus pesos son inversamente como los brazos, es decir, inversamente como la distancia de los cuerpos al centro de la Tierra. Por lo tanto, si los cuerpos se hallan en las partes superiores del canal, esto es, en la superficie de la Tierra, sus pesos serán entre sí como los inversos de sus distancias al centro de la Tierra. Y por la misma razón los pesos en otras regiones cualesquiera por toda la superficie de la Tierra son entre sí como los inversos de las distancias de esos lugares al centro y, por tanto, bajo la hipótesis de que la Tierra es un esferoide, están dados en proporción.

De donde se viene a concluir en el teorema que el incremento del peso, caminando desde el ecuador hacia los polos, es aproximadamente como el seno verso del doble de la latitud, o, lo que es lo mismo, como el cuadrado del seno recto de la latitud. Y casi en esa misma razón se halla el incremento del arco de los grados de latitud sobre el meridiano. Y por lo mismo, puesto que la latitud de París es de 48° 50', la de los lugares del ecuador de 00° 00' y la de los polos de 90° y los duplos de los senos versos son 11134, 00000, y 20000, siendo el radio 10000, y la gravedad en los polos es a la gravedad en el ecuador como 230 a 229, mientras el exceso de la gravedad en el polo es a la gravedad en el ecuador como 1 a 229, el exceso de la gravedad en la latitud de París será a la gravedad en el ecuador como $1 \times (11334/20000)$ a 229, o también como 667 a 2290000. Por consiguiente, las fuerzas totales de la gravedad en esos lugares serán entre ellas como 2295667 a 2290000. Por lo tanto, dado que la longitud de los péndulos que oscilan en tiempos iguales es como las gravedades, y en la latitud de París la longitud de un péndulo que oscile cada segundo es de 3 pies parisinos y $8\frac{1}{2}$ líneas, o mejor, debido al peso del aire, de $8\frac{5}{9}$ líneas; la longitud del péndulo en el ecuador se verá superada por la longitud del péndulo sincrónico de París con un exceso de 1,087 líneas. Y con cálculos similares se construye la tabla de la página siguiente.



Por esta tabla se ve con claridad que la desigualdad de los grados es tan pequeña que en asuntos geográficos la figura de la Tierra puede considerarse esférica: sobre todo si la Tierra es algo más densa hacia el plano ecuatorial que hacia los polos.

Ahora bien, algunos astrónomos enviados a lejanas tierras para hacer observaciones astronómicas han observado que los relojes de péndulo oscilaban más lentamente cerca del ecuador que en nuestras regiones: El primero fue el señor Richer que lo observó el año de 1672 en la isla de Cayena. Pues mientras observaba el paso de las fijas por el meridiano en el mes de agosto se dio cuenta de que su reloj se movía más lentamente que el movimiento medio del Sol con una diferencia de 2' 28" por día. Después preparó un péndulo simple que oscilaba al segundo, medido mediante un buen reloj y anotó la longitud del péndulo simple una vez por semana durante diez meses. Después, vuelto a Francia, comparó esa longitud del péndulo con la longitud del péndulo en París (que era de 3 pies parisinos y $8\frac{1}{5}$ líneas) y halló que resultaba más corta en $1\frac{1}{4}$ líneas.

Más tarde nuestro Halley hacia 1677, navegando hacia la isla de Santa Elena, observó que su reloj de péndulo se movía allí más lentamente que en Londres, pero no anotó la diferencia. Pero acortó la longitud del péndulo en más de una octava parte de pul-

Latitud del lugar	*Longitud del péndulo*	*Medida de un grado en el meridiano*	*Latitud del lugar*	*Longitud del péndulo*	*Medida de un grado en el meridiano*
grados	*pies líneas*	*toesas*	*grados*	*pies líneas*	*toesas*
0	3·7,468	56637	46	3·8,461	57022
5	3·7,482	56642	7	3·8,494	57035
10	3·7,526	56659	8	3·8;528	57048
15	3·7,596	56687	9	3·8,561	57061
20	3·7,692	56724	50	3·8,594	57074
25	3·7,812	56769	55	3·8,756	57137
30	3·7,948	56823	60	3·8,907	57196
35	3·8,099	56882	65	3·?,044	57250
40	3·8,261	56945	70	3·9,162	57295
1	3·8,294	56958	75	3·9,258	57332
2	3·8,327	56971	80	3·9,329	57360
3	3·8,361	56984	85	3·9,372	57377
4	3·8,394	56997	90	3·9,387	57382
45	3·8,428	57010			

gada, o sea, en una línea y media. Para hacer esto, como no alcanzaba el tornillo de la parte inferior del péndulo, interpuso un anillo de madera entre la tuerca del tornillo y el peso del péndulo.

Después, en el año 1682 los señores Varin y Des Hayes hallaron que la longitud del péndulo oscilante al segundo en el Real Observatorio de París era de 3 pies y $8\frac{5}{9}$ líneas. Con el mismo método hallaron que en la isla de Gore la longitud del péndulo isócrono era de 3 pies y $6\frac{5}{9}$ líneas, con una diferencia de 2 líneas respecto al anterior. Y ese mismo año navegando a las islas de Guadalupe y Martinica hallaron que la longitud del péndulo isócrono en esas islas era de 3 pies y $6\frac{1}{2}$ líneas.

Posteriormente el señor Couplet, hijo, en junio de 1697, ajustó su reloj de péndulo al movimiento medio del Sol en el Real Observatorio de París de manera que concordase durante un tiempo largo con el movimiento del Sol. Después, navegando hasta Lisboa halló que en el mes de noviembre siguiente el reloj marchaba más lentamente que antes siendo la diferencia de 2' 13" cada 24 horas. Y al siguiente mes de marzo navegando hasta Paraiba observó que allí su reloj marchaba más despacio que en París siendo la diferencia de 4'12" cada 24 horas. Afirma que el péndulo oscilando al segundo era en Lisboa $2\frac{1}{2}$ líneas más corto y en Paraiba $3\frac{3}{4}$ más corto que en París. Más correctas hubieran sido las diferencias si las hubiera establecido en $1\frac{1}{3}$ y $2\frac{5}{6}$. Ya que estas diferencias corresponden a las diferencias de tiempos de 2' 13" y 4' 12". No hay que fiarse de sus toscas observaciones.

En los años siguientes (1699 y 1700) Des Hayes viaja de nuevo a América y determinó que en las islas de Cayena y Granada la longitud del péndulo oscilando al segundo era algo menor de 3 pies y 6 líneas, y que en la isla de San Cristóbal dicha longitud era de 3 pies y $6\frac{3}{4}$ líneas, mientras que en la isla de Santo Domingo era de 3 pies y 7 líneas.

Y en el año 1704, Fueille determinó en Porto Bello en América que la longitud del péndulo oscilante al segundo era de tres pies parisinos y sólo $5\frac{7}{12}$ líneas, es decir, casi tres líneas más corta que en París, pero la observación es errónea. Pues, pasando de allí a la isla Martinica, halla que la longitud del péndulo isócrono era solamente de tres pies parisinos y $5\frac{10}{12}$ líneas.

Ahora bien, la latitud de Paraiba es de 6° 38' sur, la de Porto Bello, 9° 33" norte y las latitudes de las islas de Cayena, Gore, Guadalupe, Martinica, Granada, San Cristóbal y Santo Domingo son, respectivamente, 4° 55', 14° 40', 14° 00', 14° 44', 12° 6', 17° 19' y 19° 48'. Y el exceso de la longitud del péndulo en París sobre las longitudes de los péndulos isócronos observadas en esas latitudes es un poco mayor que el correspondiente a tenor de la tabla de longitudes del péndulo calculada poco más arriba. Y, por tanto, la Tierra es algo más alta en el ecuador que lo previsto en el cálculo anterior y algo más densa hacia el centro que en los pozos próximos a la superficie, salvo que los calores de la zona tórrida aumentasen un tanto la longitud del péndulo.

Picard ha observado, efectivamente, que una varilla de hierro que en invierno medía un pie de larga con el frío de los hielos, calentada al fuego resultaba de un pie y un cuarto de línea. Después, De la Hire observó que una varilla de hierro que en tiempo igualmente invernal era de seis pies de longitud, cuando se exponía al Sol del verano resultaba de seis pies y dos tercios de línea. En el primer caso el calor era mayor que en el segundo, pero en éste el calor fue mayor que el de las partes externas del cuerpo humano, pues lo metales con el calor del sol estival se calientan en gran medida. Pero la varilla del péndulo en el reloj oscilatorio nunca se expone al calor del sol estival, nunca recibe un calor igual al calor de la superficie externa del cuerpo humano. Por lo mismo la varilla del péndulo del reloj de tres pies de larga, será un poco más larga en verano que en invierno, pero el exceso escasamente superará $\frac{1}{4}$ de línea. Por consiguiente, la diferencia total de longitud de péndulos que sean isócronos en las diferentes latitudes, no puede atribuirse a las diferencias de calor. Tampoco a los errores de los astrónomos enviados por Francia. Pues, aunque sus observaciones no concuerdan exactamente entre ellas, sin embargo los errores son tan pequeños que se pueden despreciar. Y todos convienen en algo, en que los péndulos isócronos son; más cortos en el ecuador que en el Real Observatorio de París, siendo la diferencia no menor de una línea y cuarto y no mayor de $2\frac{1}{4}$ líneas. Por las observaciones de Richer en Cayena la diferencia resultaba de una línea y cuarto. Por las observaciones de Des Hayes dicha diferencia corregida resultaba de una línea y media o de una línea y tres cuartos de línea. Por las observaciones menos exactas de otros dicha diferencia resultaba de casi dos líneas. Esta diferencia pudo deberse en parte a errores de observación, en parte a la desemejanza de las partes interiores de la Tierra y de la altura de los montes y en parte a los distintos calores del aire.

En mi opinión, una varilla de hierro de tres pies de larga es en Inglaterra en invierno un sexto de línea más corta que en verano. Por los calores ecuatoriales, réstese esta cantidad de la diferencia de una línea y cuarto observada por Richer y quedará $1\frac{1}{12}$ líneas; cosa que concuerda bastante bien con $1\frac{87}{1000}$ líneas establecidas antes por la teoría. Richer repitió cada semana durante diez meses las observaciones hechas en Cayena y comparó las longitudes de la varilla de hierro del péndulo anotadas allí con las anotadas de igual modo en Francia. Diligencia y cautela que parecen faltar en otros observadores. Si sus observaciones son de fiar, la Tierra será más alta en el ecuador

que en los polos con un exceso de casi 17 millas, como la teoría había determinado más arriba.

PROPOSICIÓN XXI. TEOREMA XVII

Los puntos equinocciales retroceden y el eje de la Tierra en cada revolución anual se balancea inclinándose dos veces hacia la eclíptica y retornando dos veces a la posición inicial.

Se sigue del corolario 20 de la proposición LXXI del libro primero. Pero este movimiento de nutación debe ser muy pequeño, y apenas o, ni apenas, sensible.

PROPOSICIÓN XXII. TEOREMA XVIII

Todos los movimientos lunares, y todas las desigualdades de los movimientos se siguen de los principios expuestos.

De la proposición LXV del libro primero se sigue que los planetas mayores, mientras giran en torno al Sol, pueden arrastrar a otros planetas menores girando en torno a ellos mismos, y estos menores deben girar en elipses que tienen sus focos en los centros de los mayores. Pero por la acción del Sol sus movimientos resultarán perturbados de diversas formas, y sufrirán de las desigualdades que se observan en nuestra Luna. Ésta, en efecto (por los corolarios 2, 3, 4 y 5 de la proposición LXVI del libro primero) se mueve rápidamente y con un radio trazado a la Tierra describe un área mayor que la correspondiente al tiempo y tiene una órbita menos curva y por ello se acerca más a la Tierra en las sicigias que en las cuadraturas, salvo en la medida en que la excentricidad lo impide. Ahora bien, la excentricidad es máxima (por el corolario 9 de la proposición LXVI) cuando el apogeo de la Luna ocurre en las sicigias, mientras que es mínima cuando acontece en las cuadraturas; y de aquí que la Luna es más veloz y más próxima a nosotros en el perigeo y más lenta y remota en el apogeo, en las sicigias que en las cuadraturas. Además, el apogeo avanza mientras que los nodos retroceden, pero con movimiento desigual. Pues el apogeo (por los corolarios 7 y 8 de la proposición LXVI) avanza más velozmente en las sicigias y regresa más lentamente en las cuadraturas, y el exceso del progreso sobre el regreso tiene una resultante anual hacia adelante. Los nodos, en cambio (por el corolario 2 de la proposición LXVI) reposan en las sicigias y retroceden muy rápidamente en las cuadraturas. Pero la latitud máxima de la Luna es mayor en sus cuadraturas (por el corolario 10 de la proposición LXVI) que en las sicigias, y el movimiento medio es más lento en el perihelio terrestre que en su afelio. Y éstas son las desigualdades más notables registradas por los astrónomos.

Pero hay también otras desigualdades no observadas por los anteriores astrónomos por medio de las cuales los movimientos lunares sufren perturbaciones tales que hasta la fecha no han podido ser reducidas a regla cierta alguna. Las velocidades o los movimientos horarios de los apogeos y nodos lunares y sus ecuaciones, así como las excentricidades máximas en las sicigias y mínimas en las cuadraturas, o la desigualdad llamada variación, aumentan y disminuyen anualmente (por el corolario 14 de la pro-

posición LXVI) en razón del cubo del diámetro aparente del Sol. Y la variación, además, aumenta o disminuye en razón del cuadrado del tiempo entre cuadraturas muy aproximadamente (por los corolarios 1 y 2 del lema X y el corolario 16 de la proposición LXVI del libro primero), pero esta desigualdad, en los cálculos astronómicos, suele incluirse en la prostaféresis lunar y confundirse con ella.

PROPOSICIÓN XXIII. PROBLEMA V

Derivar los movimientos desiguales de los satélites de Júpiter y de Saturno a partir de los movimientos lunares.

Partiendo de los movimientos de nuestra Luna se derivan los movimientos análogos de las lunas o satélites de Júpiter del modo siguiente. El movimiento medio de los nodos del satélite exterior de Júpiter es al movimiento medio de los nodos de nuestra Luna en una razón compuesta de la razón cuadrada entre el tiempo periódico de la Tierra en torno al Sol y el tiempo periódico de Júpiter en torno al Sol, y de la razón simple entre el tiempo periódico del satélite en torno a Júpiter y el tiempo periódico de la Luna en torno a la Tierra (por el corolario 16 de la proposición LXVI del libro primero) y, por tanto, en cien años dicho nodo avanza 8° 24' hacia adelante. Los movimientos medios de los nodos de los satélites interiores son al movimiento del anterior como sus tiempos periódicos al tiempo periódico del exterior (por el mismo corolario) y, por tanto, están dados. En cambio, el movimiento del ápside de un satélite cualquiera hacia adelante es al movimiento regresivo de sus nodos como el movimiento del apogeo de nuestra Luna a su movimiento de los nodos (por el mismo corolario) y, por tanto, están dados. Pero este movimiento de los ápsides así hallado debe disminuirse en razón de 5 a 9 o de 1 a 2 aproximadamente, por razones que no hay espacio aquí de exponer. Las ecuaciones máximas de los nodos y del ápside de un satélite cualquiera casi son a las ecuaciones máximas de los nodos y el ápside de la Luna respectivamente como el movimiento de los nodos y del ápside de los satélites en el tiempo de una revolución de las ecuaciones primeras al tiempo de los nodos y del apogeo de la Luna en el tiempo de una revolución de las ecuaciones segundas. La variación de un satélite visto desde Júpiter es a la variación de la Luna como son entre sí todos los movimientos de los nodos en los tiempos en los que el satélite y la Luna regresan hacia el Sol, por el mismo corolario; y, por tanto, para el satélite exterior, no pasa de 5" 12'".

PROPOSICIÓN XXIV. TEOREMA XIX

El flujo y reflujo del mar proceden de las acciones del Sol y de la luna.

Cada día, tanto lunar como solar, debe crecer y decrecer el mar dos veces como se desprende de los corolarios 19 y 20 de la proposición LXVI del libro primero, lo mismo que se desprende que la máxima altura del agua en los mares profundos y abiertos sigue en un espacio menor de seis horas al paso de los astros por el meridiano del lugar, como ocurre en todo el recorrido del mar Atlántico y Etiópico desde Francia al cabo de Buena Esperanza al igual que en el mar Pacífico en la costa chilena y peruana; en todos

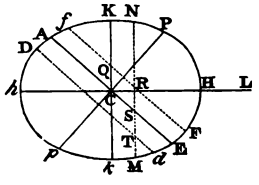
los cuales litorales la marea ocurre a las dos, tres o cuatro horas, salvo cuando el movimiento se propaga desde el océano profundo a través de fondos de poco calado y se retarda hasta la hora quinta, sexta, séptima o más. Cuento las horas desde la llegada de ambos astros al meridiano del lugar, tanto bajo como sobre el horizonte, y entiendo por horas del día lunar las vigesimocuartas partes del tiempo en el cual la Luna con el movimiento aparente diurno regresa al meridiano del lugar. La fuerza del Sol o de la Luna para elevar el mar es máxima en el mismo paso del astro por el meridiano del lugar. Pero la fuerza impresa en el mar en ese momento permanece durante algún tiempo y aumenta por causa de la nueva fuerza impresa después, hasta que el mar alcanza la altura máxima, cosa que ocurre al cabo de una o dos horas aunque más frecuentemente sea al cabo de tres cuando alcance las costas, o incluso más, si el mar es poco profundo. Pero los dos movimientos que los dos astros provocan, no se ven separadamente, sino que constituyen un cierto movimiento mixto. En la conjunción de los astros o en la oposición también se juntan sus efectos, y se componen el flujo o reflujo máximos. En las cuadraturas el Sol aporta agua cuando la Luna la retrae, y la retrae cuando la Luna la aporta; y de la diferencia de los efectos surgirá la marea más pequeña de todas. Y puesto que, bajo el testimonio de la experiencia, es mayor el efecto de la Luna que el del Sol la altura máxima del agua ocurre aproximadamente en la tercera hora lunar. Fuera de las sicigias y de las cuadraturas, la marea máxima que por la sola fuerza lunar debería siempre ocurrir en la tercera hora lunar y con la sola fuerza solar en la tercera hora solar, con la composición de ambas fuerzas ocurre en un tiempo intermedio más próximo a la tercera hora lunar; por ello al pasar la Luna de las sicigias hacia las cuadraturas, cuando la tercera hora solar precede a la tercera lunar, la altitud máxima de las aguas precede también a la tercera hora lunar, y esto con intervalo máximo poco después de los octantes lunares; y con intervalos parecidos la marea máxima seguirá a la tercera hora lunar al pasar la Luna de las cuadraturas hacia las sicigias. Esto es así en mar abierto. Pues en las desembocaduras de los ríos las mareas máximas, en iguales circunstancias, alcanzan más tarde su *ἀκμίω* (acmé).

Pero los efectos de los astros dependen de sus distancias a la Tierra. Pues a menores distancias son mayores sus efectos, y menores a mayores distancias, y esto en razón del cubo de sus diámetros aparentes. Por tanto, el Sol, en invierno, hallándose en el perigeo, produce efectos mayores, y hace que las mareas en las sicigias sean algo mayores y en las cuadraturas algo menores (en circunstancias iguales) que en verano; y la Luna en el perigeo de cada mes genera mareas más grandes que quince días antes o después, cuando se halla en el apogeo. De donde se sigue que dos mareas absolutamente máximas no se sigan una a otra en sicigias inmediatamente sucesivas.

También dependen los efectos de ambos astros de su declinación o distancia al ecuador. Pues si el astro se situase en el polo, atraería hacia allí a cada parte de agua de modo constante, sin aumento y disminución de la acción, con lo que no provocaría ninguna reciprocación de movimientos. Por consiguiente, los astros al apartarse del ecuador hacia los polos, pierden gradualmente sus efectos, y por ello generarán menores mareas en las sicigias solsticiales que en las equinocciales. En cambio, en las cuadraturas solsticiales provocarán mayores mareas que en las cuadraturas equinocciales, debido a que la Luna situada ahora en el ecuador supera en su efecto al del Sol más que nunca. Por tanto, ocurren las mareas máximas en las sicigias y las mínimas en las cuadraturas de los astros, en torno a las fechas de uno y otro equinoccio. Y a una marea máxima en las sicigias acompaña siempre, como muestra la experiencia, una marea mí-

nima en las cuadraturas. Mas, por la menor distancia del Sol a la Tierra en invierno que en verano, ocurre que las mareas máximas y mínimas precedan más frecuentemente que sigan al equinoccio de primavera y más frecuentemente le sigan que le precedan en el otoño.

También dependen los efectos de los astros de la latitud de los lugares. Represente ApEP a la Tierra cubierta de agua profunda por todas partes; C su centro; P, *p* los polos; AE el ecuador; F un punto cualquiera fuera del ecuador; F*f* el paralelo del punto; D*d* el paralelo correspondiente al anterior al otro lado del ecuador; L el lugar ocupado por la Luna tres horas antes; H el lugar de la Tierra perpendicularmente debajo; *h* el lugar opuesto al anterior; *K*, *k* los lugares distantes de los anteriores 90°, CH, C*h* las alturas máximas del mar medidas desde el centro de la Tierra; y CK, C*k* las alturas mínimas: y si con los ejes H*h*, K*k*, se describe una elipse y con la revolución de dicha elipse se obtiene el esferoide HPK*hpk*, esta figura representará muy aproximadamente a la del mar, y CF, C*f*, CD, C*d*, serán las alturas del mar en los lugares F, *f*, D, *d*. Además, en la susodicha revolución de la elipse un punto cualquiera N describirá un círculo NM secante de los paralelos F*f*, D*d* en unos lugares cualesquiera R, T, y del ecuador AE en S; CN será entonces la altura del mar en todos los lugares R, S, T, situados en este círculo. De aquí que, en la revolución diaria de cualquier punto F, el aflujo será máximo en F, en la tercera hora después del paso de la Luna por el meridiano sobre el horizonte; después, el reflujo máximo en Q tres horas después del ocaso de la Luna; después el aflujo máximo en *f* a la tercera hora siguiente al paso de la Luna por el meridiano bajo el horizonte; por fin el reflujo máximo en Q en la tercera hora después del orto lunar; y el aflujo posterior en *f* será menor que el aflujo anterior en F. Pues el mar entero se divide en dos flujos completamente hemisféricos, uno en el hemisferio KH*k* vertido hacia el lado boreal y el otro en el hemisferio K*hk*, a los cuales se puede llamar flujo boreal y flujo austral. Estos flujos oponiéndose entre ellos y alternativamente acuden siempre a los meridianos de cada lugar, mediando entre ellos un tiempo de doce horas lunares. Y puesto que las regiones boreales participan en mayor grado del flujo boreal y las australes del austral, de ello se sigue que surjan mareas alternativamente mayores y menores en cada uno de los lugares, fuera del ecuador, ponlos que nacen o se ponen los astros. Pero la marea mayor, cuando la Luna declina hacia el vértice del lugar, ocurre casi en la hora tercera del paso de la Luna por el meridiano sobre el horizonte, y al cambiar la declinación de la Luna empieza a disminuir. Y la máxima diferencia de flujos ocurre en la época de los solsticios; sobre todo si el nodo ascendente de la Luna viene a ocurrir al principio de Aries. Así atestigua la experiencia que las mareas matutinas en invierno superan a las vespertinas y las vespertinas superan en verano a las matutinas, diferencia que en Plymouth alcanza un pie de altura, mientras que en Bristol llega a quince pulgadas, según las observaciones de Colepress y de Sturmy.



Pero los movimientos descritos hasta aquí cambian un tanto debido a aquella fuerza de reciprocación de las aguas, por la que la marea del mar, incluso habiendo cesado las acciones de los astros, podría continuar durante algún tiempo. Esta conservación del movimiento impreso disminuye la diferencia de mareas alternas; y hace mayores las

mareas inmediatamente posteriores a las sicigias, mientras hace disminuir a las inmediaciones posteriores a las cuadraturas. De lo que resulta que las mareas alternas en Plymouth y Bristol no difieren entre sí más que un pie o quince pulgadas de altura; y que las mareas mayores de todas en esos mismos puertos no sean las primeras desde las sicigias, sino las terceras. También se retrasan todos los movimientos por su tránsito por los vados, hasta el punto de que las mareas mayores de todas en determinados estrechos y desembocaduras de ríos, sean las cuartas o incluso las quintas después de las sicigias.

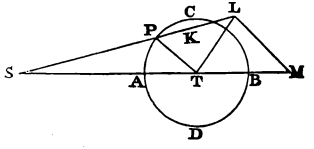
Además puede ocurrir que la marea se propague desde el océano hacia un mismo puerto por estrechos diferentes, y llegue primero por un estrecho que por otros; en cuyo caso la misma marea, dividida en dos arribadas o más, podría componer movimientos nuevos de distintas clases. Imaginemos que dos mareas iguales llegan al mismo puerto desde lugares distintos, de las cuales la primera precede a la segunda en seis horas, y acontezca en la tercera hora después del paso de la Luna por el meridiano del puerto. Si la Luna en este paso por el meridiano se hallare en el ecuador, vendrán casa seis horas aflujos iguales, los cuales incidiendo sobre los flujos mutuos los igualarán a los aflujos, haciendo de este modo que en el espacio de ese día el agua repose tranquila. Si en ese momento la Luna declinase del ecuador, las mareas ocurrirán en el océano alternativamente mayores y menores, como se ha dicho; y de aquí se propagarán hacia el dicho puerto dos aflujos mayores y dos menores, en veces alternas. Pero los dos aflujos mayores compondrán una muy grande elevación de agua en el medio entre ambos, el aflujo mayor y menor harán que el agua ascienda a una altura media en el medio entre ambos, y entre los dos aflujos menores el agua ascenderá a la altura mínima. De este modo, en el espacio de veinticuatro horas, el agua alcanzará la máxima altura no dos veces como suele ocurrir, sino solamente una vez y una sola vez la mínima; y la altura máxima, si la Luna declina hacia el polo sobre el horizonte del lugar, ocurrirá en la hora sexta o en la treinta después del paso de la Luna por el meridiano, y al cambiar la declinación de la Luna se tornará en reflujo. Un ejemplo de todo lo cual ha ofrecido Halley a partir de las observaciones de los navegantes en el puerto de Batshae en el reino de Tonquin con una latitud boreal de 20° 50'. Allí el agua al día siguiente del paso de la Luna por el ecuador se estanca, después, al declinar la Luna hacia el Norte empieza a fluir y refluir, no dos veces como en otros puertos, sino una sola vez cada día; y la marea ocurre al ocaso de la Luna mientras la bajamar máxima ocurre al orto lunar. Con la declinación de la Luna aumenta esta marea hasta el día séptimo u octavo, y después durante otros siete días decrece gradualmente como antes había crecido; y cesa con el cambio de declinación de la Luna, y al fin se torna en reflujo. A partir de ese momento el reflujo coincide con el ocaso de la Luna y el aflujo con el nacimiento, hasta que de nuevo cambie la declinación. Doble es la entrada a este puerto y a los estrechos próximos, una desde el océano chino entre el continente y la isla de Leuconia y la otra desde el mar Índico en doce horas y la procedente del mar de China en seis a través de dichos estrechos, incidiendo así en las horas lunares tercera y novena, llegan a componer movimientos de este género, o si más bien es otra la condición de aquellos mares.

Hasta ahora he expuesto las causas de los movimientos de la Luna y de los mares. Ahora será conveniente añadir algo sobre la cantidad de los movimientos.

PROPOSICIÓN XXV PROBLEMA VI

Hallar las fuerzas del Sol para perturbar los movimientos de la luna.

Represente S el Sol, T la Tierra, P la Luna, CABD la órbita de la Luna. Sobre SP tómese SK igual a ST; y sea SL a SK en razón cuadrada de SK a SP, y trácese LM paralela a PT; y si la gravedad aceleratriz de la Tierra hacia el Sol se representa por la distancia ST o SK, será SL la gravedad aceleratriz de la Luna hacia el Sol. Esta fuerza se compone de las partes SM y LM, de las cuales LM y la parte TM de SM perturban el movimiento de la Luna, como se ha expuesto en la proposición LXVI y sus corolarios del libro primero. En tanto que la Tierra y la Luna giran en torno a un centro común de gravedad, también será perturbado el movimiento de la Tierra en torno a dicho centro por fuerzas similares; pero las sumas, tanto de las fuerzas como de los movimientos, son susceptibles de ser referidos a la Luna, y representar las sumas de las fuerzas por medio de las líneas TM y ML análogas a ellas. La fuerza ML en su valor medio es la fuerza centrípeta, con la que la Luna puede girar en torno a la Tierra en reposo a la distancia PT, cómo la razón cuadrada de los tiempos de la Luna en torno a la Tierra y de la Tierra en torno al Sol (por el corolario 17 de la proposición LXVI del libro primero), es decir, como la razón cuadrada de 27d. 7h. 43' a 365 d. 6h. 9', o sea, como 1000 a 178725, o también como 1 a $178\frac{29}{40}$. Pero hemos hallado en la proposición IV que si la Tierra y la Luna giran en torno a su centro común de gravedad, su distancia mutua media será de $60\frac{1}{2}$ semidiámetros medios terrestres muy aproximadamente. Y la fuerza con la que la Luna puede girar en torno a la Tierra en reposo a la distancia PT de $60\frac{1}{2}$ semidiámetros terrestres es a la fuerza con la que puede girar, en el mismo tiempo a la distancia de 60 semidiámetros, como $60\frac{1}{2}$ a 60; y esta fuerza es a la fuerza de la gravedad entre nosotros como 1 a 60×60, muy aproximadamente. Por consiguiente, la fuerza media ML es a la fuerza de la gravedad en la superficie de la Tierra como $1 \times 60\frac{1}{2}$ a $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, o también como 1 a 638092,6. De suerte que por la proporción de las líneas TM, ML está dada también la fuerza TM; y éstas son las fuerzas del Sol por las que resultan perturbados los movimientos de la Luna. Q.E.I.

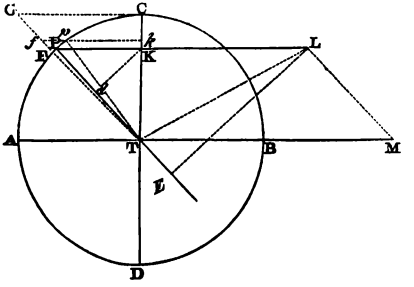


PROPOSICIÓN XXVI. PROBLEMA VII

Hallar el incremento horario del área que, con un radio trazado a la Tierra, describe la luna en una órbita circular.

Hemos dicho que el área que describe la Luna con un radio trazado a la Tierra es proporcional al tiempo, salvo en la medida en que el movimiento lunar es perturbado por la acción del Sol. Nos proponemos investigar aquí la desigualdad del momento, o del incremento horario. Para que el cálculo resulte más sencillo, supongamos que la órbita de la Luna es circular, despreciemos todas las desigualdades, con la sola excepción de

la que tratamos aquí. Pero por la enorme distancia del Sol, supongamos también que las líneas SP, ST son paralelas entre sí. De este modo, la fuerza LM se reduce siempre a su valor medio TP, al igual que la fuerza TM se reduce a su valor medio 3PK. Estas fuerzas (por el Corolario II de las leyes) componen la fuerza TL; y esta fuerza, si se hace descender la perpendicular LE sobre el radio TP, se descompone en las fuerzas TE, EL, de las cuales TE, actuando siempre según el radio TP ni acelera ni retrasa la descripción del área TPC realizada por el susodicho radio TP; mientras que EL actuando según la perpendicular, la acelera o retarda, en la medida en que acelera o retarda a la Luna. Esta aceleración de la Luna, a su paso de la cuadratura C a la conjunción A, realizada en cada momento de tiempo, es como la misma fuerza aceleratriz, es decir, como $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Represéntese el tiempo por el movimiento medio lunar o (lo que casi es lo mismo) por el ángulo CTP, o también por el arco CP. Sobre CT elévese la normal CG igual a la propia CT. Y dividiendo el arco cuadrantal AC en innumerables partículas iguales P*p*, etc., por las que se representasen otras tantas partículas iguales de tiempo, y trazada *pk* perpendicular a CT, únanse TG con las prolongaciones de KP, *kp* cortándose en F y *f*, y FK será igual a TK, y K*k* será a PK como P*p* a T*p*, es decir, en una razón dada, y, por consiguiente, FK × K*k* o el área FK*kf* será como $\frac{3PK \times TK}{TP}$, esto es, como EL; y, componiendo, el área total de GCKF como la suma de todas las fuerzas EL impresas en la Luna en el tiempo total CP y, por tanto, también como la velocidad generada con esa suma, o sea, como la aceleración de la descripción del área CTP, o incremento del momento. La fuerza con la que la Luna podría girar en torno a la Tierra en reposo a la distancia TP, en su tiempo periódico CADB de 27d. 7h. 43', haría que un cuerpo, cayendo en el tiempo CT, describiese la longitud $\frac{1}{2}$CT, y adquiriría mientras tanto una velocidad igual a aquella con la que la Luna se mueve en su órbita. Esto es evidente por el corolario 9 de la proposición IV del libro primero. Pero puesto que la perpendicular K*d* abatida sobre TP es la tercera parte de la propia EL, y la mitad de TP o de ML en los octantes, la fuerza EL en los octantes, cuando mayor resulta, superará a la fuerza ML en razón de 3 a 2, y por lo mismo, será a la fuerza con la cual la Luna puede girar en torno a la Tierra en reposo en su tiempo periódico, como 100 a $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$, o sea, 11915, y en el tiempo CT deberá generar una velocidad que fuese la $\frac{100}{11915}$ parte de la velocidad lunar, mientras que en el tiempo CPA generaría una velocidad mayor en la proporción de CA a CT o TP. Represéntese la fuerza máxima en los octantes EL por medio del área FK × K*k*, igual al rectángulo $\frac{1}{2}$TP × P*p*. Y la velocidad que la fuerza máxima puede generar en un tiempo cualquiera CP, será a la velocidad que toda fuerza menor EL genera en el mismo tiempo, como el rectángulo $\frac{1}{2}$TP × CP al área KCGF: en cambio, en el



tiempo entero CPA, las velocidades generadas serán entre sí como el rectángulo $\frac{1}{2}$TP × CA y el triángulo TCG, o como el arco cuadrantal CA y el radio TP. Por lo tanto (por la proposición IX del libro V de los *Elementos*) la última velocidad, generada en todo el tiempo será $\frac{100}{11915}$ partes de la velocidad de la Luna. A esta velocidad de la Luna, que es análoga al momento medio del área, añádase o réstese la mitad de la otra velocidad; y si se representa él momento medio por el número 11915, la suma 11915 + 50, o sea, 11965 representará el momento máximo del área en la sicigia A, mientras que la diferencia 11915 – 50, o sea, 11865 el momento mínimo de la misma en las cuadraturas. Por consiguiente, las áreas descritas en tiempos iguales en las sicigias y en las cuadraturas son entre sí como 11965 a 11865. Añádase al momento mínimo 11865 un momento que sea a la diferencia 100 de los momentos como el trapecio FKCG al triángulo TCG (o lo que es lo mismo, como el seno cuadrado de PK al cuadrado del radio TP, esto es, como Pd a TP) y la suma representará el momento del área cuando la Luna se halla en un lugar P intermedio.

Todo esto es así, en la hipótesis de que el Sol y la Tierra están en reposo, y la Luna gira en el tiempo sinódico de 27d. 7h. 43'. Pero como el período sinódico lunar sea en realidad de 29d. 12h. 44', deben aumentarse los incrementos de los momentos en razón del tiempo, esto es, en razón de 1080853 a 1000000. De este modo, el incremento total, que era $\frac{100}{11915}$ partes del momento medio será ahora de $\frac{100}{11023}$ partes del mismo. Por ello el momento del área en la cuadratura de la Luna será a su momento en la sicigia pomo 11023 – 50 a 11023 + 50, o sea, como 10973 a 11073; y a su momento, cuando la Luna se halla en otro lugar intermedio cualquiera P, como 10973 a 10973 + P*d*, siendo TP igual a 100.

Por lo tanto, el área que describe la Luna con un radio trazado a la Tierra en cada una de las partículas iguales de tiempo, es muy aproximadamente como la suma del número 219,46 y el seno verso del doble de la distancia de la Luna a la cuadratura próxima, en un círculo cuyo radio es la unidad. Todo esto es así cuando la variación en los octantes es de valor medio. Pero si la variación es allí mayor o menor, dicho seno verso debe aumentarse o disminuirse en la misma razón.

PROPOSICIÓN XXVII. PROBLEMA VIII

Hallar la distancia de la Luna a la Tierra a partir del movimiento horario de la Luna.

El área que la Luna, con un radio trazado a la Tierra, describe en cada uno de los momentos de tiempo, es como el movimiento horario de la Luna y el cuadrado de la distancia de la Luna a la Tierra conjuntamente; y, por tanto, la distancia de la Luna a la Tierra está en razón compuesta de la raíz cuadrada del área directamente y de la raíz cuadrada del movimiento horario inversamente. Q.E.I.

Corolario 1. De aquí que venga dado el diámetro aparente de la Luna, toda vez que es inversamente como su distancia a la Tierra. Intenten los astrónomos comprobar la medida en que esta regla concuerda con los fenómenos.

Corolario 2. De aquí también que la órbita lunar pueda definirse a partir de los fenómenos más exactamente que antes.

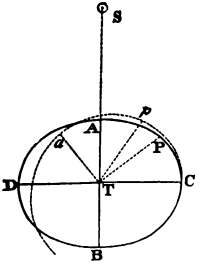
PROPOSICIÓN XXVIII. PROBLEMA IX

Hallar los diámetros de la órbita en que debe moverse la Luna sin excentricidad.

La curvatura de la trayectoria que describe un móvil, si es atraído según la perpendicular a dicha trayectoria, es directamente como la atracción e inversamente como el cuadrado de la velocidad. Supongo que las curvaturas de las líneas son entre sí como las razones últimas de los senos o de las tangentes de los ángulos de contacto pertenecientes a radios iguales, cuando tales radios disminuyen infinitamente. Pero la atracción de la Luna hacia la Tierra en las sicigias es el exceso de su gravedad hacia la Tierra sobre la fuerza del Sol 2PK (véase figura, proposición XXV) por la que la gravedad aceleratriz de la Luna hacia el Sol supera a la gravedad aceleratriz de la Tierra hacia el Sol o es superada por ella. Pero en las cuadraturas dicha atracción es la suma de la gravedad de la Luna hacia la Tierra y de la fuerza solar KT, con la que la Luna es atraída hacia la Tierra. Si llamamos $\frac{AT + CT}{2}$ estas atracciones son como

$$\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{CT \times N} \text{ y } \frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \times N}$$

muy aproximadamente; o también como $178725N \times CT^2 - 2000AT^2 \times CT$ y $178725N \times AT^2 + 1000CT^2 \times AT$. Pues, si la gravedad aceleratriz de la Luna hacia la Tierra se representa por el número 178725, la fuerza media ML, que en las cuadraturas es PT o TK y atrae a la Luna hacia la Tierra, será 1000, mientras que la fuerza media TM en las sicigias será 3000; dè la cual, si se resta la fuerza media ML, quedará 2000, fuerza con la que en las sicigias es atraída la Luna por la Tierra, y a la cual ya he denominado antes 2PK. Pero la velocidad de la Luna en las sicigias A y B es a su velocidad en las cuadraturas C y D, como CT a AT y el momento del área que describe la Luna con un radio trazado a la Tierra en las sicigias al momento de la misma área en las cuadraturas con juntamente, esto es, como 11073CT a 10973AT. Tómese inversamente el cuadrado de esta razón y directamente la primera razón y resultará la curvatura de la órbita lunar en las sicigias a la curvatura de la misma en las cuadraturas como $120406729 \times 178725AT^2 \times CT^2 \times N - 120406729 \times 2000AT^4 \times CT$ a $122611329 \times 178725AT^2 \times CT^2 \times N + 122611329 \times 1000CT^4 \times AT$, esto es, como $2151969AT \times CT \times N - 24081AT^3$ a $2191371AT \times CT \times N + 12261CT^3$.



Puesto que la figura de la órbita lunar se desconoce, supongamos en su lugar la elipse DBCA, en cuyo centro T se halle la Tierra, y cuyo eje mayor DC yace entre las cuadraturas, mientras el menor AB yace entre las sicigias. Pero puesto que el plano de esta elipse se mueve con un movimiento angular en torno a la Tierra, y la trayectoria cuya curvatura consideramos debe ser descrita en un plano carente por completo de movimiento angular, debemos considerar la figura que describe la Luna al gi-

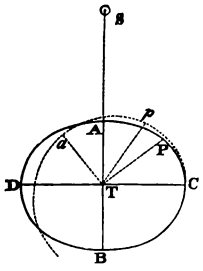
rar en elipse sobre este plano, esto es, la figura C*pa*, cada uno de cuyos puntos *p* se halla tomando un punto cualquiera P en la elipse que represente el lugar de la Luna, y trazando Tp igual a TP con la condición de que el ángulo PT*p* sea igual al movimiento aparente del Sol efectuado desde el momento de la cuadratura C; o (lo que viene a ser lo mismo) de modo que el ángulo CT*p* sea al ángulo CTP como el tiempo de la revolución sinódica al tiempo de la revolución periódica, o sea, como 29d. 12h. 44' a 27d. 7h. 43'. Tómese, pues, el ángulo CT*a* en la misma razón al ángulo CTA, y sea la longitud T*a* igual a la longitud TA, y *a* será el ápside inferior y C el superior de esta órbita C*pa*. Estableciendo proporciones encuentro que la diferencia entre la curvatura de la órbita C*pa* en el vértice *a* y la curvatura del círculo con centro en T y radio TA es a la diferencia entre la curvatura de la elipse en el vértice A y la curvatura de ese mismo círculo como la razón cuadrada del ángulo CTP al ángulo CT*p*; y también que la curvatura de la elipse en A es a la curvatura del antedicho círculo como la razón cuadrada de TA a TC; y también que la curvatura del círculo antedicho es a la curvatura del círculo trazado con centro en T y radio TC como TC a TA; mientras que la curvatura de este último es a la curvatura de la elipse en C como la razón cuadrada de TA a TC; y también que la diferencia entre la curvatura de la elipse en el vértice C y la curvatura del segundo círculo mencionado es a la diferencia entre la curvatura de la figura T*pa* en el vértice C y la curvatura del mismo recién mencionado círculo como la razón cuadrada del ángulo CT*p* al ángulo CTP. Razones que, por lo demás, son fáciles de obtener a partir de los senos de los ángulos de contacto y de las diferencias de ángulos. Y comparándolas entre sí, resulta que la curvatura de la figura C*pa* en *a* es a su misma curvatura en C como $AT^3 + \frac{16824}{100000}\ CT^2 \times AT$ a $CT^3 + \frac{16824}{100000}\ AT^2 \times CT$. Donde el número $\frac{16824}{100000}$ representa la diferencia de los cuadrados de los ángulos CTP y CT*p* dividida por el cuadrado del ángulo menor CTP, o (lo que es lo mismo), la diferencia de los cuadrados de los tiempos 27d. 7h. 43' y 29d. 12h. 44' dividida por el cuadrado del tiempo 27d. 7h. 43'.

Por consiguiente, dado que *a* representa la sicigia de la Luna y C su cuadratura, la proporción hallada debe ser la misma que la proporción de la curvatura de la órbita de la Luna en las sicigias a su curvatura en las cuadraturas, proporción hallada más arriba. Por tanto, para hallar la proporción de CT a AT, multiplico entre sí medios y extremos. Y los términos resultantes divididos por AT × CT producen $2062{,}79CT^4 - 2151969N \times CT^3 + 368676N \times AT \times CT^2 + 36342AT^2 \times CT^2 - 362047N \times AT^2 \times CT + 2191371N \times AT^3 + 4051{,}4Kf^4 = 0$. Aquí, por la semisuma N de los términos AT y CT escribo 1, y por su semidiferencia escribo x, resulta $CT = 1 + x$, y $AT = 1 - x$; trasladando éstos a la ecuación y resolviendo la ecuación resultante se obtiene *x* igual a 0,00719 y, por tanto, el semidiámetro CT resulta 1,00719, y el semidiámetro AT 0,99281, números que son como $70\frac{1}{14}$ y $69\frac{1}{14}$ muy aproximadamente. Luego la distancia de la Luna a la Tierra en las sicigias es a su distancia en las cuadraturas (dejando de lado la consideración de la excentricidad) como $69\frac{1}{14}$ a $70\frac{1}{14}$, o en números redondos como 69 a 70.

PROPOSICIÓN XXIX. PROBLEMA X

Hallar la variación de la Luna.

Procede esta desigualdad en parte de la forma elíptica de la órbita lunar, y en parte de la desigualdad de los momentos del área que describe la Luna con un radio trazado a la



Tierra. Si la Luna P se moviera en la elipse DBCA en torno a la Tierra en reposo en el centro de la elipse, y con el radio TP trazado a la Tierra describiera el área CTP proporcional al tiempo, y el semidiámetro mayor CT fuese al semidiámetro menor TA como 70 a 69, la tangente del ángulo CTP sería a la tangente del ángulo del movimiento medio calculado desde la cuadratura C como el semidiámetro TA de la elipse a su semidiámetro TC, o como 69 a 70. Pues la descripción del área CTP, al pasar la Luna de la cuadratura a la sicigia, debe acelerarse en una razón tal que el momento en la sicigia de la Luna sea a su momento en la cuadratura como 11073 a 10973, y de modo que el exceso del momento en un lugar intermedio cualquiera P sobre el momento en la cuadratura sea como el cuadrado del seno del ángulo CTP. Cosa que ocurre con bastante exactitud si la tangente del ángulo CTP disminuye como la raíz cuadrada de la razón del número 10973 al número 11073, es decir, en la razón del número 68,6877 al número 69. De este modo, la tangente del ángulo CTP será ahora a la tangente del movimiento medio como 68,6877 a 70 y el ángulo CTP en los octantes, donde el movimiento medio es de 45°, resultará de 44° 27' 28", que restado del ángulo del movimiento medio de 45° deja un resto de variación máxima de 32' 32". Esto sería así si la Luna, al pasar de la cuadratura a la sicigia, recorriera un ángulo de sólo 90°. Pero por el movimiento de la Tierra, por el cual el Sol aparentemente se adelanta, la Luna, hasta que alcanza al Sol, describe un ángulo CT*a* mayor que un ángulo recto en la proporción del tiempo de la revolución sinódica lunar al tiempo de la revolución periódica, es decir, en la razón de 29d. 12h. 44" a 27d. 7h. 43'. Y de esta manera todos los ángulos en torno al centro de T se dilatan en esa proporción, con lo que la variación máxima, que en otro caso sería de 32' 32", aumentada ahora en esa razón, se torna de 35' 10".

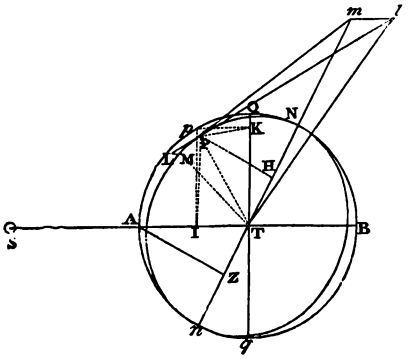
Éste es su valor a la distancia media del Sol a la Tierra, ignorando las diferencias que puedan surgir de la curvatura del Orbe Máximo o de la mayor acción del Sol sobre la Luna menguante y nueva que creciente y llena. A otras distancias del Sol a la Tierra, la variación máxima está en razón compuesta de la razón cuadrada del tiempo de revolución sinódica lunar directamente (dado el tiempo del año) e inversamente de la razón cúbica de la distancia del Sol a la Tierra. Por consiguiente, en el apogeo del Sol, la variación máxima es de 33' 14", mientras que en su perigeo es de 37' 11", siempre que la excentricidad del Sol sea al semidiámetro transversal del Orbe Máximo como $16\frac{15}{16}$ – a 1000.

Hemos investigado hasta ahora la variación en una órbita no excéntrica, en la cual, por cierto, la Luna está siempre en sus octantes a la distancia media de la Tierra. Si la Luna, debido a su excentricidad, dista más o menos de la Tierra que si se hallase situada en dicha órbita, la variación puede ser entonces algo mayor o menor que lo establecido con la regla aquí dada; pero dejo para los astrónomos la tarea de determinar mediante los fenómenos el exceso o el defecto.

PROPOSICIÓN XXX. PROBLEMA XI

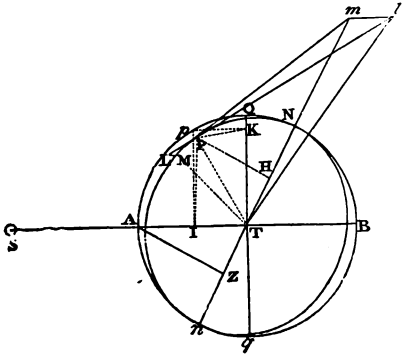
Hallar el movimiento horario de los nodos de la Luna en una órbita circular.

Representen S al Sol, T a la Tierra, P a la Luna, NP*n* la órbita de la Luna, N*pn* la proyección de la órbita sobre el plano de la eclíptica; N, *n* los nodos, *n*TN*m* la línea de los nodos prolongada infinitamente; PI, PK, perpendiculares trazadas sobre el plano de la eclíptica; A, B, las sicigias de la Luna en el plano de la eclíptica; AZ, una perpendicular sobre la línea de los nodos N*n*; Q, *q* las cuadraturas de la Luna en el plano de la eclíptica, y *p*K una perpendicular sobre la línea Q*q* situada entre las curvaturas. La fuerza del Sol para perturbar el movimiento de la Luna (por la proposición XXV) es doble, una proporcional a la línea LM del esquema de dicha proposición, y la otra proporcional a la línea MT. Y la Luna es atraída hacia la Tierra con la primera de las fuerzas y hacia el Sol con la segunda según una línea recta paralela a la recta ST trazada de la Tierra al Sol. La primera fuerza LM actúa según el plano de la órbita lunar, y por ello en nada cambia la situación del plano. Por tanto, ésta debe ignorarse. La segunda fuerza MT, con la que se perturba el plano de la órbita lunar, es la misma que 3PK o que 3IT. Y esta fuerza (por la proposición XXV) es a la fuerza con la cual la Luna podría girar uniformemente en su tiempo periódico y en un círculo en torno a la Tierra en reposo como 3IT al radio del círculo multiplicado por 178,725, o como IT al radio multiplicado por 59,575. Por lo demás, en este cálculo y en todo lo que sigue, considero a todas las líneas trazadas desde la Luna al Sol como paralelas a la línea que une la Tierra y el Sol, debido a que la inclinación disminuye los efectos en unos casos casi lo mismo que los aumenta en otros; y tratamos de hallar los movimientos medios de los nodos, ignorando estas menudencias, que harían al cálculo demasiado pesado.



Represente ahora PM al arco descrito por la Luna en un tiempo dado mínimo y ML un pequeño segmento cuya mitad podría recorrer la Luna en ese tiempo bajo la acción de la fuerza 3IT. Únanse PL, MP, y prolónguense hasta *m* y *l*, donde cortan al plano de la eclíptica; y sobre T*m* hágase descender la perpendicular PH. Y puesto que la recta ML es paralela al plano de la eclíptica y, por tanto, no puede encontrarse con la recta *ml* que se halla en dicho plano, y sin embargo ambas rectas están en el plano común LMP*ml*, estas rectas serán paralelas, y por lo mismo los triángulos LMP y *lm*P serán semejantes. Pero como MP*m* está en el plano de la órbita por la cual se movía la

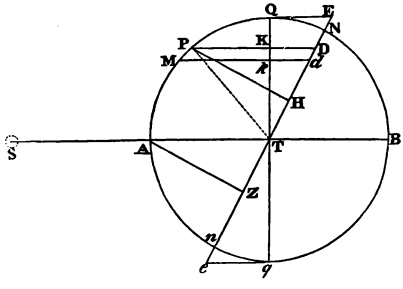
Luna cuando estaba en P, el punto m caerá sobre la línea N*n* trazada por los nodos N, *n*, de dicha órbita. Y puesto que la fuerza por la que se genera la mitad del pequeño segmento LM, si se imprimiese o toda la vez en el punto P, generaría toda la dicha línea, y que Luna se moviese en un arco cuya cuerda fuese LP, y, por tanto, trasladaría a la Luna del plano MP*m*T al plano LP*l*T, el movimiento angular de los nodos generado por dicha fuerza será igual al ángulo *m*T*l*. Pero *ml* es a *m*P como ML a MP, y, por tanto, como MP está dada por estar dado el tiempo, *ml* es como el rectángulo ML × *m*P, es decir, como el rectángulo IT × *m*P. Y el ángulo *m*T*l*, siempre que el ángulo T*ml* sea recto, es como $\frac{ml}{Tm}$ y, por tanto, como $\frac{IT \times Pm}{Tm}$, es decir (por ser proporcionales T*m* y *m*P, TP y PH) como TP como IT × PH. Pero si el ángulo T*ml*, o STN, fuera oblicuo el ángulo *m*T*l* será aún menor, en razón del seno del ángulo STN al radio, o también en razón de AZ a AT. Por consiguiente, la velocidad de los nodos es como IT × PH × AZ o también como el producto de los senos de los tres ángulos TPI, PTN, y STN.



Si estos ángulos fuesen rectos, estando los nodos en las cuadraturas y la Luna en las sicigias, la pequeña línea *ml* se irá al infinito, y el ángulo *m*T*l* resultará igual al ángulo mPl. En este caso, el ángulo *m*P*l* es al ángulo PTM, el cual describe la Luna en torno a la Tierra en el mismo tiempo con su movimiento aparente, como 1 a 59,575. Pues el ángulo *m*P*l* es igual al ángulo LPM, es decir, al ángulo de deflexión de la Luna de la trayectoria recta, ángulo que la antedicha fuerza solar de 3IT podría generar en dicho tiempo dado, si entonces cesase la gravedad de la Luna; y el ángulo PTM es igual al ángulo de deflexión de la Luna de la trayectoria recta, ángulo que podría generar en el mismo tiempo la fuerza, con la que la Luna es retenida en su órbita, si cesare entonces la fuerza solar 31T. Y estas fuerzas son entre ellas, como hemos dicho antes, como 1 a 59,575. Luego, como el movimiento medio horario de la Luna respecto a las fijas sea de 32'56" 27"' $12\frac{1}{2}$"", el movimiento horario de los nodos en este caso será 33" 10"' 33"" 12"". Pero en otros casos este movimiento horario será a 33" 10"' 33"" 12"" como el producto de los senos de los tres ángulos TPI, PTN y STN (o de las distancias de la Luna a la cuadratura, al nodo y al Sol) al cubo del radio. Y cuantas veces el signo de un ángulo cualquiera pase de positivo a negativo, y de negativo a positivo, deberá pasar el movimiento regresivo a progresivo y el progresivo a regresivo. De donde se seguirá que los nodos progresarán siempre que la Luna se halle entre una de las cuadraturas y el nodo próximo a la cuadratura. En los demás casos regresan, y por el exceso del regreso sobre el progreso en cada mes van resultando retrógrados.

COROLARIO 1. De aquí que, si desde los extremos P y M de un arco muy pequeño dado y sobre la línea Q*q* que une las cuadraturas se hacen descender sendas perpendiculares PK, M*k* y se las prolonga hasta que corten la línea de los nodos N*n* en D y *d*, el movimiento horario de los nodos será como el área MPD*d* y el cuadrado de la línea AZ conjuntamente. Pues sean PK, PH y AZ los tres senos antedichos. A saber, PK el seno de la distancia de la Luna a la cuadratura, PH el seno de la distancia de la Luna al nodo, y AZ el seno de la distancia del nodo al Sol; y la velocidad del nodo será como el producto PK × PH × AZ PT y PT es a PK como PM a K*k*, y por tanto, *p* PM, K*k* es proporcional a PK. Y AT es a PD como AZ a PH, y por tanto PH, proporcional al rectángulo PD × AZ, y multiplicando las razones, PK × PH es como el producto Kk × PD × AZ, y PK x PH x AZ como Kk × PD × AZ^2, esto es, como el área PD*d*M y AZ^2 conjuntamente. Q.E.D.

COROLARIO 2. En una posición dada cualquiera de los nodos, el movimiento horario medio es la mitad del movimiento horario en las sicigias de la Luna, y por tanto es a 16" 35"' 16"'' 36"''' como el cuadrado del seno de la distancia de los nodos a las sicigias al cuadrado del radio, o también como AZ^2 a AT^2. Pues si la Luna, con movimiento uniforme, circulase por el semicírculo QA*q*, la suma de todas las áreas PD*d*M, en el tiempo en que la Luna pasa de Q a M, será el área QM*d*E, que Q tangente del círculo; y en el tiempo en que la Luna alcanza el punto *n*, dicha suma será el área completa EQA*n* que describe la línea PD, después al pasar la Luna de *n* a *q* la línea PD caerá fuera del círculo y describirá el área *nqe* limitada por *qe* tangente al círculo; la cual, puesto que antes los nodos regresaban, mientras ahora progresan, debe restarse del área primera, y puesto que es igual al área QEN dejará el semicírculo NQA*n*. Por tanto, la suma de todas las áreas PD*d*M, en el tiempo en que la Luna describe un semicírculo, es el área del semicírculo; y la suma de todas en el tiempo en que la Luna describe el círculo es el área de todo el círculo. Pero el área PDdM, cuando la Luna anda por las sicigias, es el rectángulo comprendido bajo el arco PM y el radio PT; y la suma de todas las áreas iguales a ésta, en el tiempo en que la Luna describe el círculo, es el rectángulo comprendido bajo toda la circunferencia y el radio del círculo; y este rectángulo, al ser igual a dos círculos, es el doble mayor que el rectángulo anterior. Por tanto, los nodos, con la misma velocidad continua que tienen en las sicigias lunares, describirían un espacio doblemente mayor del que de hecho describen; y, por tanto, el movimiento medio, con el cual podrían describir, si se continuase uniformemente, un espacio desigual de por sí del realmente descrito, es la mitad del movimiento que tienen en las sicigias de la Luna. De donde, „ puesto que el movimiento horario máximo, si los nodos se hallan en las cuadraturas, es de 33" 10"' 33"'' 12"''', el movimiento horario medio, en este caso, será 16", 35"',

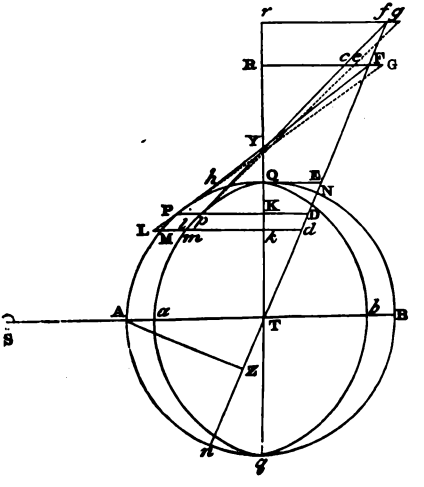


16'''', 36''''. Y, puesto que el movimiento horario de los nodos es siempre como AZ^2 y el área PD*d*M conjuntamente, y por lo mismo, el movimiento horario de los nodos en las sicigias de la Luna es como AZ^2 y el área PD*d*M conjuntamente, es decir (por estar dada PD*d*M descrita en las sicigias) como AZ^2, el movimiento medio será también como AZ^2 y, por consiguiente, este movimiento, cuando los nodos se encuentran fuera de las cuadraturas, será a 16", 35''', 16'''', 36'''' como AZ^2 a AT^2. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XXXI. PROBLEMA XII

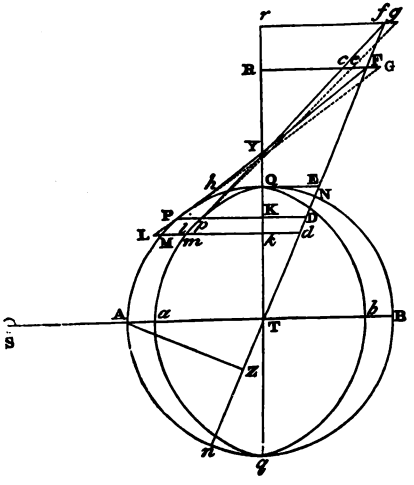
Hallar el movimiento horario de los nodos de la Luna en una órbita elíptica.

Represente Q*pmaq* una elipse trazada con el eje mayor Q*q* y el menor *ab*, QA*q*B un círculo circunscrito, T la Tierra en el centro común de ambos, S el Sol, *p* la Luna moviéndose en la elipse, y *pm* el arco que describe en una mínima partícula de tiempo dada, N y *n* los nodos unidos por la línea N*n*, *p*K y *m*k perpendiculares trazadas sobre el eje Q*q* y desde él prolongadas a ambos lados hasta que corten el círculo en P y M, y a la línea de los nodos en D y *d*. Y si la Luna, con radio trazado a la Tierra, describe un área proporcional al tiempo, el movimiento horario de un nodo en la elipse será como el área *p*D*dm* y AZ^2 conjuntamente.



Pues, si PF es tangente al círculo en P, y prolongada corta a TN en F, y *pf* es tangente a la elipse en *p* y prolongada corta a la misma TN en *f*, y si ambas tangentes concurren sobre el eje TQ en Y; y si ML representa el espació que la Luna, girando en el círculo y en el tiempo en que describe el arco PM, puede describir con movimiento transversal bajo la acción de la antedicha fuerza 3IT o 3PK, y *ml* representa el espacio que la Luna, girando en el mismo tiempo en la elipse, bajo la acción de la misma fuerza 3IT o 3PK, pudiera también describir; y se prolongan LP y *lp* hasta que encuentren al plano de la eclíptica en G y *g*, y se unen FG y *fg*, de las cuales la prolongación de FG corta a *pf*, *pg* y TQ en *c*, *e* y R, respectivamente, y la prolongación de *fg* corta a TQ en *r*. Entonces, puesto que la fuerza 3IT o 3PK en el círculo es a

la fuerza 3IT o 3PK en la elipse como PK a *p*K, o como AT a aT, el espacio ML generado por la primera fuerza será al espacio *ml* generado por la segunda como PK a *p*K, es decir, por la semejanza de figuras PYK*p* y FYR*c*, como FR a *c*R. Pero ML es a FG (por la semejanza de los triángulos PLM, PGF) como PL a PG, es decir (por ser paralelas L*k*, PK, GR) como pl a *pe*, es decir (por la semejanza de los triángulos *plm, cpe)* como *lm* a *ce;* e inversamente, como LM es a *lm,* o FR a *c*R, así es FG a *ce. Y* por lo mismo, si *fg* fuese a *ce* como *f*Y a *c*Y, es decir, como *fr a c*R (esto es, como *fr a* FR y FR a R conjuntamente, es decir, como *f*T a FT y FG a *ce* conjuntamente) como al suprimir la razón de FG a *ce* en uno y otro quedan las razones de *fg* a FG y *f*T a FT, será *fg* a FG como *f*T a FT; y, por consiguiente, los ángulos que subtenderían FG y fg a la Tierra T serían iguales entre ellos. Pero esos ángulos (por lo expuesto en la proporción anterior) son los movimientos de los nodos en el tiempo en que la Luna recorre en el círculo el arco PM y en la elipse el arco *pm*: y por tanto los movimientos de los nodos en el círculo y en la elipse serán iguales entre ellos. Todo esto será así siempre que *fg* sea a *ce* como *f*Y a *c*Y, esto es, si *fg* fuese igual a $\frac{ce \times fY}{cY}$. Pero por la semejanza de los triángulos *fgp, cep, fg* es a *ce*



como *fp* es *cp*; y por tanto, *fg* es igual $\frac{ce \times fp}{cp}$ y, por lo tanto, el ángulo que en realidad subtiende *fg* es al ángulo anterior que subtiende FG, esto es, el movimiento de los nodos en la elipse al movimiento de los nodos en el círculo como este *fg*, o $\frac{ce \times fp}{cp}$ al anterior *fg* o $\frac{ce \times fY}{cY}$, esto es, como *fp* × *c*Y a *f*Y x *cp*, o *fp* a *f*Y y *c*Y a *cp*, es decir, si *ph* paralela a TN corta a FP en *h,* como F*h* a FY y FY a FP; esto es, como F*h* a FP o D*p* a DP, y por tanto, como el área D*pmd* al área DPMD. Y por consiguiente, puesto que (por el corolario 1 de la proposición XXX) el área segunda y AZ^2 conjuntamente son proporcionales al movimiento horario de los nodos en el círculo, el área primera y AZ^2 conjuntamente serán proporcionales al movimiento horario de los nodos en la elipse. Q.E.D.

COROLARIO. Por lo cual, como para una posición dada de los nodos, la suma de todas las áreas *p*D*dm*, en el tiempo en que la Luna va desde una cuadratura hasta un lugar cualquiera m, viene a ser *mp*QE*d*, que está delimitada por la tangente a la elipse QE; y

la suma de todas esas áreas en la revolución completa, venga a ser el área de la elipse entera, el movimiento medio de los nodos en la elipse será al movimiento medio de los nodos en el círculo, como la elipse al círculo; esto es, como T*a* a TA, o como 69 a 70. Y por tanto, puesto que (por el corolario 2 de la proposición XXX) el movimiento horario medio de los nodos en el círculo es a 16", 35"', 16"", 36""' como AZ^2 a AT^2, si se toma un ángulo de 16", 21"', 3"", 30""' al ángulo de 16", 35"', 16"", 36""' como 69 a 70, el movimiento horario medio de los nodos en la elipse será a 16", 21"', 3"", 30""' como AZ^2 a AT^2; esto es, como el cuadrado del seno de la distancia del nodo al Sol al cuadrado del radio.

Pero, por otra parte, la Luna con un radio trazado a la Tierra describe el área con mayor velocidad en las sicigias que en las cuadraturas, y por eso el tiempo en las sicigias se acorta mientras en las cuadraturas se alarga, y junto con el tiempo el movimiento de los nodos aumenta y disminuye. Pero el momento del área en las cuadraturas de la Luna era al momento del área en las sicigias como 10973 a 11073, y por ello, el momento medio en los octantes es al exceso en las sicigias y al defecto en las cuadraturas como la semisuma de ambas cantidades 11023 a su semidiferencia 50. De donde, puesto que el tiempo de la Luna en cada una de lasa partículas iguales de la órbita es inversamente como su velocidad, el tiempo medio en los octantes será al exceso de tiempo en las cuadraturas y al defecto de tiempo en las sicigias, debidos a estas causas, como 11023 a 50 muy aproximadamente. Pero marchando desde las cuadraturas hacia las sicigias, encuentro que el exceso de los momentos del área en cada lugar por encima del momento mínimo en las cuadraturas es como el cuadrado del seno de la distancia de la Luna hasta las cuadraturas muy aproximadamente; y por ello, la diferencia entre el momento en un lugar cualquiera y el momento medio en los octantes es como la diferencia entre el cuadrado del seno de la distancia de la Luna hasta las cuadraturas y el cuadrado del seno de 45 grados, o la mitad del cuadrado del radio; y el incremento del tiempo en cada lugar entre los octantes y las cuadraturas y su decremento entre los octantes y las sicigias se halla en la misma razón. Pero el movimiento de los nodos, en el tiempo en que la Luna recorre cada una de las partículas iguales de su órbita, se acelera o retarda en razón del cuadrado del tiempo. Pues este movimiento, mientras («caeteris paribus») la Luna recorre PM, es como ML, y ML está en razón del cuadrado del tiempo. Por lo cual, el movimiento de los nodos en las sicigias, realizado en el tiempo en que la Luna recorre partículas dadas de la órbita, disminuye como el cuadrado de la razón de 11073 a 11023; y el decremento es al resto del movimiento como 100 a 10973, mientras que respecto al movimiento entero es como 100 a 11073 muy aproximadamente. Pero el decremento en los lugares entre los octantes y las sicigias, y el incremento entre los lugares de los octantes y las cuadraturas es aproximadamente a este decremento como el movimiento total en dichos lugares al movimiento total en las sicigias y la diferencia entre el cuadrado del seno de l"' distancia de la Luna hasta la cuadratura y la mitad del cuadrado del radio, a la mitad del cuadrado del radio conjuntamente. De donde, si los nodos se hallan en las cuadraturas y se toman dos lugares equidistantes a un lado y otro del octante, y otros dos a esa misma distancia uno de la sicigia y otro de la cuadratura, y de los decrementos de movimientos en los dos lugares entre la sicigia y el octante se restan los incrementos de movimientos en los otros dos lugares situados entre el octante y la cuadratura, el decremento restante será igual al decremento en la sicigia, como verá fácilmente quien haga el cálculo. Por consiguiente, el decremento medio, que debe restarse del movimiento medio de los nodos, es la cuarta

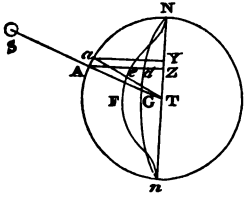
parte del decremento en la sicigia. El movimiento horario total de los nodos en las sicigias, cuando la Luna con un radio trazado a la Tierra se suponía que describía un área proporcional al tiempo, era de 32" 42"' 7"". Y el decremento del movimiento de los nodos, en el tiempo en que la Luna, más veloz ahora, describe el mismo espacio, hemos dicho que era a este movimiento como 100 a 11073; y por consiguiente, dicho decremento es de 17"' 43"" 11""', cuya cuarta parte 4"' 25""48"" restada al movimiento horario medio hallado más arriba deja un resto de 16" 16"' 37"" 42""' como movimiento horario medio corregido.

Si los nodos están fuera de las cuadraturas y se contemplan dos lugares equidistantes de las sicigias, uno a cada lado, la suma de los movimientos de los nodos, cuando la Luna se halla en dichos lugares, será a la suma de los movimientos cuando la Luna se halla en esos lugares y los nodos se hallan en las cuadraturas como AZ^2 a AT^2. Y los decrementos, de los movimientos, debidos a las causas expuestas más arriba, serán entre sí como los movimientos mismos, y por tanto, los movimientos restantes serán entre sí como AZ^2 a AT^2, y los movimientos medios serán como los movimientos restantes. Por consiguiente, el movimiento horario medio corregido en cualquier situación dada de los nodos es a 16"16"'37""42""' como AZ^2 a AT^2; es decir, como el cuadrado del seno de la distancia de los nodos a las sicigias al cuadrado del radio.

PROPOSICIÓN XXXII. PROBLEMA XIII

Hallar el movimiento medio de los nodos de la Luna.

El movimiento medio anual es la suma de todos los movimientos horarios medios del año. Imagínese que el nodo se halla en N y en cada una de las horas regresa a su lugar inicial, de suerte que, no obstante su movimiento propio, conserve siempre su lugar respecto a las estrellas fijas. Pero, mientras tanto, el Sol S, por el movimiento de la Tierra, se desplaza desde el nodo y completa uniformemente su curso anual aparente. Y sea *Aa* arco mínimo dado que la recta TS trazada continuamente al Sol describe con su intersección con el círculo N*An* en un tiempo mínimo dado: y el movimiento horario medio (por lo que ya se ha mostrado) será como AZ^2, esto es (por ser proporcionales *AZ*, ZY), como el rectángulo AZ y ZY, es decir, como el área AZY*a*. Y la suma de todos los movimientos horarios medios desde el principio será como la suma de todas las áreas aYZA, es decir, como el área NAZ. Pero la máxima AZ*Ya* es igual al rectángulo bajo el arco A*a* y el radio del círculo y, por tanto, la suma de todos los rectángulos en el círculo entero es a la suma de otros tantos rectángulos máximos, como el área de todo el círculo al rectángulo bajo la circunferencia y el radio, es decir, como 1 a 2 Pero el movimiento correspondiente al rectángulo máximo era de 16" 16"' 37"" 42""'. Y este movimiento, en un año sidéreo completo de 365d. 6h. 9' resulta de 39° 38' 7" 50"'. Y, por consiguiente, su mitad 19° 49' 3" 55"' es el movimiento medio de los nodos que corresponde al círculo en-



tero. Y el movimiento de los nodos en el tiempo en que el Sol pasa de N hasta H es a 19° 49' 3" 55"' como el área NAZ al círculo entero.

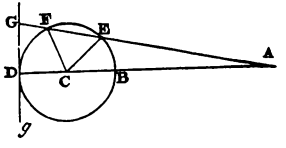
Esto es así en la hipótesis de que el nodo tras cada hora regresase al lugar inicial y de que el Sol tras el recorrido anual completo regresase al mismo nodo del que había partido. Pero por causa del movimiento del nodo ocurre que el Sol regresa antes al nodo, y ahora hay que calcular la abreviación del tiempo. Puesto que el Sol en el año entero completa 360 grados y el nodo con movimiento máximo completa en ese mismo tiempo 39° 38' 7" 50"', o 39,6355 grados, y el movimiento medio del nodo en un lugar cualquiera N es a su movimiento medio en sus cuadraturas como AZ^2 a AT^2; el movimiento del Sol al movimiento del nodo en N será como $360AT^2$ a $39,6355AZ^2$; es decir, como $9,0827646AT^2$ a AZ^2. De donde, si la circunferencia NA*n* del círculo entero se divide en partículas iguales A*a*, el tiempo en el que el Sol recorre una partícula A*a* si el círculo está en reposo, será al tiempo en que recorre esa misma partícula, si el círculo junto con los nodos gira en torno al centro T, inversamente como $9,0827646AT^2$ a $9,0827646AT^2 + AZ^2$. Pues el tiempo es inversamente como la velocidad con la que se recorre la partícula, y esta velocidad es la suma de las velocidades del Sol y del nodo. Por tanto, si el tiempo en el que el Sol sin el movimiento del nodo recorrería el arco NA se representa por el sector NTA, y la partícula de tiempo en que recorrería el arco mínimo A*a*, se representa por la partícula AT*a* del sector; y (trazada la perpendicular *a*Y sobre N*n*) si sobre AZ se toma *d*Z de una longitud tal que el rectángulo *d*Z por ZY sea a la partícula AT*a* del sector como AT^2 a $9,0827646AT^2 + AZ^2$, es decir, de modo que *d*Z sea a $\frac{1}{2}$AZ como AT^2 a $9,0827646AT^2 + AZ^2$, el rectángulo *d*Z por ZY representará el decremento de tiempo debido al movimiento de los nodos, durante todo el tiempo en que se recorre el arco A*a*. Y si el punto *d* es tangente a la curva N*d*G*n*, el área curvilínea N*d*Z será el decremento total en el tiempo en que se recorre el arco entero NA; y por ello el exceso del sector NAT sobre el área N*d*Z será dicho tiempo total. Y, puesto que el movimiento del nodo en menor tiempo es menor en razón del tiempo, también el área A*a*YZ deberá disminuir en esa proporción. Cosa que ocurrirá si sobre AZ se toma la longitud *e*Z tal que sea a la longitud AZ como AZ^2 a $9,0827646AT^2 + AZ^2$. Pues de este modo el rectángulo *e*Z por ZY será al área AZY*a* como el decremento del tiempo en que se recorre el arco A*a*, al tiempo total en que se recorrería si el nodo estuviese en reposo: y por lo tanto, dicho rectángulo corresponderá al decremento del movimiento del nodo. Y si el punto *e* fuera tangente a la curva N*e*F*n*, el área entera N*e*Z, que es la suma de todos los decrementos, corresponderá al decremento total en el tiempo en que es recorrido el arco AN; y el área restante NA*e* corresponderá al movimiento restante, que es el verdadero movimiento del nodo, en el tiempo en que el arco entero NA es recorrido por los movimientos conjuntos del Sol y del nodo. Ahora bien, el área del semicírculo es al área de la figura N*e*F*n*, hallada por el método de las series infinitas, como 793 a 60 muy aproximadamente. Pero el movimiento que correspondía al círculo entero era de 19° 49' 3" 55"' ,y por lo mismo, el movimiento correspondiente al doble de la figura N*e*F*n* es 1° 29' 58" 2"'. El cual restado del movimiento anterior deja un resto de 18° 19' 5" 53"' movimiento total del nodo respecto a las fijas entre sus propias conjunciones con el Sol; y restado este movimiento de los 360 grados del movimiento anual del Sol, deja un resto de 341° 40' 54" 7"' movimiento del Sol entre esas mismas conjunciones. Pero este movimiento es al movimiento anual de 360 grados como él movimiento del nodo ya hallado de 18° 19' 5" 53"' a su movimiento anual, que será por tanto de 19° 18' 1"23"'. Este es el movimiento medio de los nodos en el año sidéreo. El

mismo, por las tablas astronómicas es es de 19° 21'2l" 50"'. La diferencia es menor que $\frac{1}{300}$ del movimiento total, y parece deberse a la excentricidad de la órbita lunar y a la inclinación hacia el plano de la eclíptica. Por causa de la excentricidad de la órbita el movimiento de los nodos se acelera demasiado, mientras que, por contra, debido a su inclinación se retarda un poco, reduciéndose así a su justa velocidad.

PROPOSICIÓN XXXIII. PROBLEMA XIV

Hallar el movimiento verdadero de los nodos de la luna.

En un tiempo que sea como el área NTA – N*d*Z (de la figura precedente) este movimiento es como el área NA*e*, y por tanto está dado. Pero por la excesiva dificultad del cálculo es conveniente presentar la construcción del problema del modo siguiente. Con centro en C y una distancia cualquiera CD trácese el círculo BEFD. Prolónguese DC hasta A de modo que AB sea a AC como el movimiento medio a la mitad del movimiento medio verdadero, cuando los nodos están en las cuadraturas, es decir, como 19° 18' 1" 23"' a l9° 49' 3" 55"' y, por tanto, BC será a AC como la diferencia de movimiento 0° 31' 2" 32"' es al movimiento posterior l9° 49' 3" 55"', es decir, como 1 a $38\frac{3}{10}$; trácese después por el punto D la recta infinita Gg, tangente al círculo en D; y si se toma el ángulo BCE o BCF igual al doble de la distancia entre el lugar del Sol y el nodo, hallado por medio del movimiento medio, y se traza HE o AF secante de la perpendicular DG en G, y se toma un ángulo que sea al movimiento total del nodo entré éste y las sicigias (es decir, a 9° 11' 3") como la tangente DG a la circunferencia entera del círculo BED, y este ángulo (en cuyo lugar puede tomarse el ángulo DAG) se añade al movimiento medio de los nodos cuando éstos pasan de las cuadraturas a las sicigias o se sustrae del dicho movimiento medio cuando pasan de las sicigias a las cuadraturas, se tendrá su movimiento medio verdadero. Pues el movimiento verdadero así obtenido concuerda muy aproximadamente con el movimiento verdadero que resulta representando el tiempo por el área NTA-N*d*Z, y el movimiento del nodo por el área NA*e*; como comprobará quien se interese y haga los cálculos. Esta es la ecuación semestral del movimiento de los nodos. También hay una ecuación mensual, pero no es necesaria en absoluto para hallar la latitud de la Luna. Pues dado que la variación de la inclinación de la órbita lunar hacia el plano de la eclíptica está sometida a una doble desigualdad, una semestral y otra mensual, su desigual mensual y la ecuación mensual de los nodos se compensan y corrigen entre ellas de tal modo que ambas pueden ser ignoradas a la hora de determinar la latitud de la Luna.



Corolario. De ésta y de la proposición precedente se desprende que los nodos en sus sicigias reposan, mientras en las cuadraturas retroceden con un movimiento horario de 16" 19"' 26"" y que la ecuación del movimiento de los nodos en los octantes es de 1° 30'. Todo lo cual concuerda adecuadamente con los fenómenos celestes.

ESCOLIO

J. Machin, profesor de astronomía en Gresham y Henry Pemberton, D. M. cada uno por su parte hallaron otra forma de determinar los movimientos de los nodos. Se ha hecho alguna mención de este método en otra parte. Y las cartas que he visto de ambos contenían dos proposiciones que concordaban entre ellas. Añadiré aquí la carta del señor Machin, primera que llegó a mis manos:

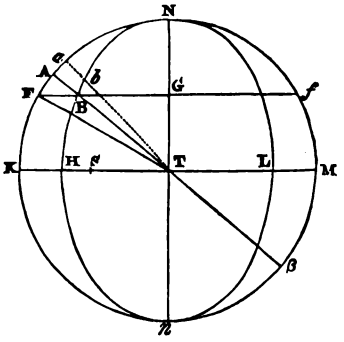
«SOBRE EL MOVIMIENTO DE LOS NODOS DE LA LUNA

»PROPOSICIÓN I

»El movimiento medio del Sol desde el nodo se define por una media geométrica proporcional entre el movimiento medio del mismo Sol y aquel movimiento medio con el cual el Sol se separa velozmente del nodo en las cuadraturas.

»Sea T el lugar de la Tierra, N*n* la línea de los nodos de la Luna para un tiempo dado cualquiera, KTM una perpendicular a ella, TA una recta que gira alrededor del centro con la misma velocidad angular con que el Sol y el nodo se alejan uno de otro, de modo que el ángulo comprendido entre la recta en reposo N*n* y la recta en giro TA, siempre resulte igual a la distancia entre los lugares del Sol y del nodo. Ahora, si se divide una recta cualquiera TK en partes TS y SK que sean como el movimiento horario medio del Sol al movimiento horario medio del nodo en las cuadraturas, y se toma a la línea TH como media proporcional entre la parte TS y la línea entera TK, esta recta será, entre las demás, proporcional al movimiento medio del Sol desde el nodo.

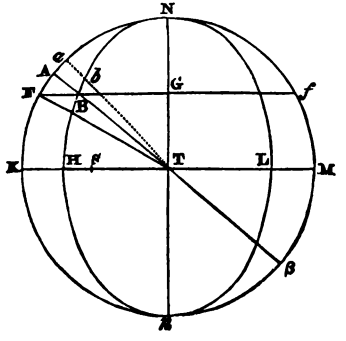
»Pues, descríbase el círculo NK*n*M con centro en T y radio TK, y con el mismo centro y con las ejes TH y TN trácese la elipse NH*n*L, y en el tiempo en que el Sol se separa del nodo por el arco N*a*, si se traza la recta N*ba*, el área del sector NT*a* representará la suma de los movimientos del nodo y del Sol en ese mismo tiempo. Sea, pues, el arco mínimo A*a* un arco que describe la recta T*ba* girando uniformemente según la antedicha ley en una partícula dada de tiempo, y el sector mínimo TA*a* será como la suma de las velocidades con que el Sol y el nodo se desplazan en ese tiempo. Pero la velocidad del Sol es casi uniforme, por cuanto su pequeña desigualdad apenas produce variación en el movimiento medio de los nodos. La otra parte de esta suma, o sea, la velocidad del nodo en su valor medio, aumenta al apartarse de las sicigias como el cuadrado del seno de su distancia al Sol; por el corolario de la proposición XXXI del libro tercero de los *Principia*, y cuando es máxima en las cuadraturas con el Sol en K, alcanza la misma razón respecto a la velocidad del Sol que SK a TS, esto es, como (diferencia de los cuadrados de TK y TH o) el rectángulo KHM a TH al cuadrado. Pero la elipse NBH divide al sector AT*a*, representación de la suma de estas dos velocidades, en dos partes AB*ba* y BT*b* proporcionales a las propias velocidades. Prolónguese, pues, BT hasta el círculo β y desde el punto B hágase descender sobre el eje mayor la perpendicular BG, que prolongada a ambos lados toque al círculo en los puntos F y *f*, y puesto que el espacio AB*ba* es al sector TB*b* como el rectángulo ABβ a BT cuadrado (pues dicho rectángulo es igual a la diferencia de cuadrados de TA y TB por estar la recta Aβ cortada igualmente en T y desigualmente en B). Por tanto, esta razón, cuando el espacio AB*ba* es



máximo en K, será la misma razón que la del rectángulo KHM a HT al cuadrado, pero la velocidad media máxima del nodo estaba a la velocidad del Sol en esta misma razón. Por consiguiente, en las cuadraturas, el sector AT*a* se divide en partes proporcionales a la velocidad. Y puesto que el rectángulo KHM es a HT cuadrado como FB*f* a BG cuadrado, y el rectángulo AB*β* es igual al rectángulo FB*f*, el área pequeña AB*ba*, cuando es máxima, será al resto del sector TB*b* como el rectángulo AB*b* a BG cuadrado. Pero la razón de estas pequeñas áreas era siempre como el rectángulo AB*β* a BT cuadrado; y, por lo tanto, la pequeña área AB*ba* en el lugar A es menor que el área semejante en las cuadraturas, en razón cuadrada de BG a BT, esto es, en razón cuadrada del seno de la distancia del Sol al nodo. Y, por tanto, la suma de todas las áreas pequeñas AB*ba*, o sea, el espacio ABN será como el movimiento del nodo en el tiempo en que el Sol se separa del nodo por el arco NA. Y el espacio restante, o sea, el sector elíptico NTB será como el movimiento medio del Sol en ese tiempo. Y por lo mismo, como el movimiento medio anual del nodo es aquel que ocurre en el tiempo en el que el sol completa su período, el movimiento medio del nodo desde el Sol será al movimiento medio del propio Sol como el área del círculo al área de la elipse, es decir, como la recta TK a la recta TH que es la media proporcional entre TK y TS; o lo que da lo mismo, como la media proporcional TH a la recta TS.

»PROPOSICIÓN II

»Dado el movimiento medio de los nodos de la Luna, hallar el movimiento verdadero.



»Sea el ángulo A la distancia del Sol al lugar medio del nodo, o el movimiento medio del Sol desde el nodo. Si se toma entonces un ángulo B cuya tangente sea a la tangente del ángulo A como TH a TK, esto es, como la raíz cuadrada de la razón del movimiento horario medio del Sol al movimiento medio horario del Sol desde el nodo cuando éste se halla en las cuadraturas, este ángulo B será la dis-

tancia del Sol al verdadero lugar del nodo. Pues únase FT y, por la demostración de la proposición anterior, el ángulo FTN será la distancia del Sol del lugar medio del nodo, mientras que el ángulo ATN será la distancia del lugar verdadero, y las tangentes de estos dos ángulos son entre ellas como TK a TH.

»COROLARIO. De aquí que el ángulo FTA es la ecuación de los nodos de la Luna, y el seno de este ángulo cuando es máximo en los octantes, es al radio como KH a TK + TH. En cambio el seno de esta ecuación en otro lugar cualquiera A es al seno máximo como el seno de la suma de los ángulos FTN + ATN al radio: esto es, casi como el seno del doble de la distancia del Sol al lugar medio del nodo (o sea 2FTN) al radio.

»ESCOLIO

»Si el movimiento horario medio de los nodos en las cuadraturas es de 16" 16"' 37"" 42"'", es decir, en el año sidéreo completo 39° 38' 7" 50"', TH será a TK como la raíz cuadrada de la razón del número 9,0827646 al número 10,0827646, esto es, como 18,6524761 a 19,6524761. Y, por lo tanto, TH a HK como 18, 6524761 a 1, es decir, como el movimiento del Sol en el año sidéreo al movimiento medio del nodo de 19° 18'1" $23\frac{3}{4}$"'.

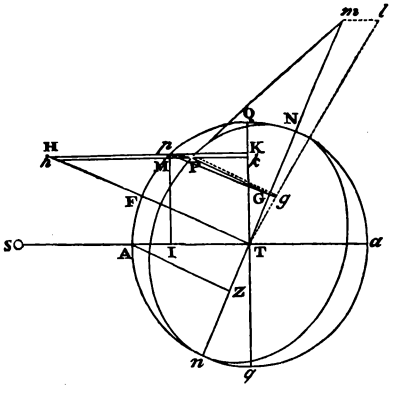
»Pero si el movimiento medio de los nodos de la Luna en 20 años julianos es de 386° 50' 15" como se deduce de las observaciones aportadas por la teoría de la Luna, el movimiento medio de los nodos en el año sidéreo será de 19° 20' 31" 58"'. Y TH será a HK como 360° es a 19° 20' 31" 58"', esto es, como 18,61214 a 1, de donde el movimiento horario medio de los nodos en las cuadraturas resulta de 16" 18"' 48"". Y la ecuación máxima de los nodos en los octantes, de 1° 29' 57".»

PROPOSICIÓN XXXIV. PROBLEMA XV

Hallar la variación horaria de la inclinación de la órbita lunar hacia el plano de la eclíptica.

Representen A y *a* las sicigias; Q y *q* las cuadraturas; N y *n* los nodos; P el lugar de la Luna en su órbita; *p* la proyección de dicho lugar sobre el plano de la eclíptica, y *mTl* el movimiento momentáneo de los nodos como más arriba. Y si sobre la línea T*m* se hace descender la perpendicular PG, únase *p*G, y prolónguese hasta que corte a T*l* en *g* y únanse también P*g*; el ángulo PG*p* será la inclinación de la órbita lunar hacia el plano de la eclíptica cuando la Luna se halle en P; y el ángulo P*gp* será su inclinación al completar un momento de tiempo; y, por lo tanto, el ángulo GP*g* será la variación momentánea de la inclinación. Pero este ángulo GP*g* es al ángulo GT*g* como TG a PG y PG y P*p* a PG conjuntamente. Y, por consiguiente, si por un momento de tiempo se toma una hora, puesto que el ángulo GT*g* (por la proposición XXX) es al ángulo de 33" 10"' 33"" como IT × AZ a AT al cubo, el ángulo GP*g* (o la variación horaria de la inclinación) será al ángulo de 33" 10"' 33"" como

$$IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG} \text{ a } AT^3. \text{ Q.E.I.}$$



Esto es así bajo la hipótesis de que la Luna girase en una órbita circular uniformemente. Pero si dicha órbita fuese elíptica, el movimiento medio de los nodos disminuye en la razón del eje menor al eje mayor; como se ha expuesto más arriba. Y en esa misma razón disminuye también la variación de la inclinación.

COROLARIO 1. Si sobre *Nn* se eleva la perpendicular TF, y pM es el movimiento horario de la Luna en el plano de la eclíptica; y las perpendiculares *p*K, *Mk* trazadas sobre QT y prolongadas ambas encuentran a TF en H y *h*: será IT a AT como K*k* a M*p*, y TG a H*p* como TZ a AT y por lo mismo IT × TG será igual a $\frac{\text{K}k \times \text{H}p \times \text{TZ}}{\text{M}p}$, esto es, igual al área H*p*M*h* multiplicada por la razón $\frac{\text{TZ}}{\text{M}p}$: y en consecuencia, la variación horaria de la inclinación es a 33" 10"' 33"" como H*p*M*h* multiplicada por AZ × $\frac{\text{TZ}}{\text{M}p}$ × $\frac{\text{P}p}{\text{PG}}$ es a AT^3.

COROLARIO 2. Y, por tanto, si la Tierra y los nodos en cada hora completada se retirasen de sus nuevos lugares y regresaren en un instante siempre a sus lugares iniciales, de modo que su posición durante un mes periódico entero permaneciese dada; toda la variación de la inclinación durante dicho mes sería a 33" 10"' 33"" como la reunión de todas las áreas H*p*M*h* generadas con la revolución del punto P unidas por los signos correspondientes + y -, multiplicada dicha reunión por AZ × TZ × $\frac{\text{P}p}{\text{PG}}$ a Mp × AT^3, es decir, como el círculo entero QA*qa* multiplicado por AZ × TZ × $\frac{\text{P}p}{\text{PG}}$ a M*p* × AT^3, o sea, como la circunferencia DA*qa* multiplicada por AZ × TZ × $\frac{\text{P}p}{\text{PG}}$ a 2M*p* × AT^2.

COROLARIO 3. Por consiguiente, en una posición dada de los nodos, la variación horaria media que, continuada uniformemente durante un mes, podría generar aquella variación mensual, es a 33" 10"' 33"" como AZ × TZ × $\frac{\text{P}p}{\text{PG}}$ a 2AT^2, o como P*p* × $\frac{\text{AZ} \times \text{TZ}}{\frac{1}{2}\text{AT}}$ a PG × 4AT, es decir (puesto que P*p* es a PG como el seno de la inclinación susodicha al radio, y $\frac{\text{AZ} \times \text{TZ}}{\frac{1}{2}\text{AT}}$ AT sea a 4AT como el seno del doble del ángulo AT*n* al cuádruplo del radio) como el seno de la misma inclinación multiplicado por el seno de la doble distancia entre los nodos y el Sol al cuádruplo del cuadrado del radio.

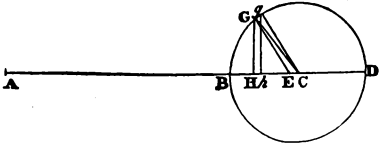
COROLARIO 4. Puesto que la variación horaria de la inclinación, cuando los nodos se hallan en las cuadraturas, es (por esta Proposición) al ángulo de 33" 10"' 33"" como IT $\times$ AZ $\times$ TG $\frac{Pp}{PG}$ a AT^3, es decir, como $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ a 2AT; esto es, como el seno de la doble distancia de la Luna a las cuadraturas multiplicado por $\frac{Pp}{PG}$ al doble del radio: la suma de todas las variaciones horarias en el tiempo en que la Luna en esta situación de los nodos, pasa de la cuadratura a la sicigia (esto es, en el espacio de $177\frac{1}{6}$ horas) será a la suma de otros tantos ángulos de 33" 10"' 33"" o sea, 5878", como la suma de todos los senos de la doble distancia de la Luna a las cuadraturas multiplicada por $\frac{Pp}{PG}$ a la suma de otros tantos diámetros; esto es, como el diámetro multiplicado por $\frac{Pp}{PG}$ a la circunferencia; es decir, si la inclinación fuese de 5° 1', como $7 \times \frac{874}{10000}$ a 22, o 278 a 10000. Y por lo mismo, la variación total procedente de la suma de todas las variaciones horarias es de 163", o de 2' 43".

PROPOSICIÓN XXXV. PROBLEMA XVI

Hallar la inclinación de la órbita de la Luna hacia el plano de la eclíptica en un tiempo dado.

Sea AD el seno de la inclinación máxima, y sea AB el seno de la inclinación mínima. Bisecando a BD en C, y por centro en C y distancia BC trácese el círculo BGD. Sobre AC tómese CE en la misma razón respecto a EB en que está EB respecto a 2BA: y si para el tiempo dado se forma el ángulo HEG igual al doble de la distancia de los nodos a las cuadraturas, y sobre AD se hace descender la perpendicular GH: será AH el seno de la inclinación buscada.

Pues, GE^2 es igual a
$GH^2 + HE^2 = BHD + HE^2 = HBD + HE^2 - BH^2 = HBD + BE^2$
$-2BH \times BE = BE^2 + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH$
$= 2EC \times AH$. Por consiguiente, al estar dado 2EC, GE^2 es como AH. Represente ahora AEg al doble de la distancia de los nodos a las cuadraturas después de completado un momento de tiempo dado, y el arco G*g*, por estar dado el ángulo GE*g*, será como la distancia GE. Pero H*h* es a G*g* como GH a GC y, por tanto, H*h* es como el producto GH $\times$ G*g*, o GH $\times$ GE; es decir, como



$$\frac{GH}{GE} \times GE^2 \text{ o } \frac{GH}{GE} \times AH,$$

es decir, como AH y el seno del ángulo AEG conjuntamente. Por consiguiente, si AH en algún caso fuese el seno de la inclinación, ésta aumentará con incrementos iguales a los del seno de la inclinación, por el corolario 3 de la proposición anterior, y por lo mismo siempre permanecerá igual a dicho seno. Pero AH, cuando el punto G cae en uno de los puntos B o D, es igual a dicho seno, y por consiguiente siempre permanece igual a él. Q.E.D.

En esta demostración he supuesto que el ángulo BEG, que es el doble de la distancia de los nodos a las cuadraturas, aumenta uniformemente. Pues no hay tiempo de examinar todas las minucias de las desigualdades. Imaginemos ahora que el ángulo BEG es recto, y en este caso G*g* sería el aumento horario de la doble distancia entre los nodos y el Sol; y la variación horaria de la inclinación en dicho caso (por el corolario 3 de la anterior proposición) será a 33" 10"' 33"" como el producto del seno de la inclinación AH por el seno del ángulo recto BEG, que es el doble de la distancia de los nodos al Sol, al cuádruplo del cuadrado del radio; es decir, como el seno de la inclinación media AH al cuádruplo del radio; esto es (puesto que dicha inclinación media viene a ser de casi 5° y $8\frac{3}{5}$), como su seno 896 al radio cuadruplicado 40000, o como 224 a 10000. Es por tanto la variación entera, correspondiente a la diferencia BD de los senos respecto a la susodicha variación horaria como el diámetro BD al arco G*g*; es decir, conjuntamente como el diámetro BD a la semicircunferencia BGD y el tiempo de $2079\frac{7}{10}$ horas en que el nodo pasa de las cuadraturas a las sicigias a una hora; o también, como 7 a 11 y $2079\frac{7}{10}$ y a 1. Por lo cual, si se combinan todas estas razones, la variación total BD resultará ser respecto a 33" 10"' 33"" como $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ a 110000, es decir, como 29645 a 1000, y de aquí que la susodicha variación BD resultará de $16'231\frac{1}{2}$.

Ésta es la variación máxima de la inclinación en tanto no se considera el lugar de la Luna en su órbita. Pues la inclinación, si los nodos se hallan en las sicigias, no cambia en nada por los cambios de lugar de la Luna. Pero si los nodos se encuentran en las cuadraturas, la inclinación es menor cuando la Luna se halla en las sicigias que cuando se halla en las cuadraturas, con diferencia de 2' 43", como ya he indicado en el corolario IV de la proposición anterior. Y restando 1' $21\frac{1}{2}$", mitad de esta diferencia, de la variación media total B*d* en las cuadraturas lunares se tiene 15' 2", y sumada en las sicigias se tiene 17' 45". Así pues, si la Luna se hallase en las sicigias, la variación entera en el pasó de los nodos desde las cuadraturas a las sicigias será de 17' 45": y, por lo tanto, si la inclinación, cuando los nodos se hallan en las sicigias, fuese de 5° 17' 20", la misma, cuando los nodos están en las cuadraturas y la Luna en las sicigias, será de 4° 59' 35". Y que esto es así se confirma por las observaciones.

Pero si ahora se deseare la inclinación de la órbita, cuando la Luna se halla en las sicigias y los nodos en un lugar cualquiera, sea AB a AD como el seno del ángulo de 4° 59' 35" al seno del ángulo de 5° 17' 20", y tómese el ángulo AEG igual al doble de la distancia de los nodos a las cuadraturas; y AH será el seno de la inclinación buscada. A la inclinación de esta órbita viene a ser igual su inclinación cuando la Luna dista 90° de los nodos. Para otros lugares de la Luna, la desigualdad mensual que admite la variación de la inclinación se compensa en el cálculo de la latitud de la Luna, y hasta en cierto modo se anula, por la desigualdad mensual del movimiento de los nodos (como se ha dicho más arriba) y, por tanto, puede despreciarse al calcular dicha latitud.

ESCOLIO

Con estos cálculos de los movimientos lunares he querido mostrar que dichos movimientos pueden calcularse mediante la teoría de la gravedad a partir de sus causas. Mediante la misma teoría he hallado, además, que la ecuación anual del movimiento medio de la Luna se debía a la diferente dilatación de la órbita lunar por la fuerza del Sol, según el corolario 6 de la proposición LXVI del libro primero. Esta fuerza en el perigeo del Sol es mayor y dilata la órbita de la Luna; en su apogeo es menor y permite a dicha órbita contraerse. La Luna gira más lentamente en la órbita dilatada, y más rápidamente en la contraída; y la ecuación anual, por la que se compensa esta desigualdad, es nula en el apogeo y perigeo solares, mientras que en la distancia media de la Tierra y el Sol asciende casi a 11' 50", y en otros lugares es proporcional a da ecuación del centro del Sol; y se suma al movimiento medio de la Luna cuando la Tierra pasa de su afelio a su perihelio, mientras se resta en la parte opuesta de la órbita. Suponiendo el radio del Orbe Magno de 1000 y la excentricidad de la tierra $16\frac{7}{8}$, esta ecuación, cuando es máxima, resulta de 11' 49" por la teoría de la gravedad. Pero la excentricidad de la Tierra parece ser algo mayor, y al aumentar la excentricidad esta ecuación debe aumentarse en la misma proporción. Sea la excentricidad de $16\frac{11}{12}$, y la ecuación máxima será de 11' 51".

También descubrí que en el perihelio de la Tierra, debido a la mayor fuerza del Sol, el apogeo y los nodos de la Luna se mueven más rápidamente que en su afelio, y ello en razón inversa del cubo de la distancia de la Tierra al Sol. Y de aquí surgen las ecuaciones anuales de estos movimientos proporcionales a la ecuación del centro solar. Pero el movimiento del Sol es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la Tierra al Sol, y la máxima ecuación del centro generada por esta desigualdad es de 1° 56' 20", que se corresponde con la excentricidad del Sol de $16\frac{11}{12}$ mencionada más arriba. Pero si el movimiento del Sol se hallase en razón inversa del cubo de la distancia, esta desigualdad generaría una ecuación máxima de 2° 54' 30". Y, por lo tanto, las ecuaciones máximas generadas por las desigualdades del apogeo y de los nodos de la Luna, son a 2° 54' 30" como el movimiento medio diario del apogeo y el movimiento medio diario de los nodos de la Luna son al movimiento diario medio del Sol. De donde resulta la ecuación máxima del movimiento medio del apogeo de 19' 43" y la ecuación máxima del movimiento medio de los nodos de 9' 24". La primera ecuación se suma y la última se resta cuando la Tierra pasa del perihelio al afelio; y al contrario ocurre en la parte opuesta de la órbita.

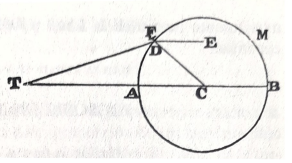
También se ha establecido mediante la teoría de la gravedad que la acción del Sol sobre la Luna es algo mayor cuando el diámetro transversal de la órbita lunar pasa por el Sol que cuando se halla en ángulo recto con la línea que une a la Tierra y el Sol: y por ello la órbita lunar es algo mayor en el primer caso que en el segundo. Y de aquí surge otra ecuación del movimiento medio lunar, que depende del lugar del apogeo de la Luna respecto al Sol, la cual resulta máxima cuando coincide en el octante con el Sol; y es nula cuando el apogeo llega a las cuadraturas o a las sicigias: y se añade al movimiento medio al pasar el apogeo de la Luna desde la cuadratura del Sol a las sicigias mientras que se resta cuando el apogeo pasa de la sicigia a las cuadraturas. Esta ecuación, que llamaré semestral, en los octantes del apogeo, cuando es máxima, asciende a casi 3' 45", en la medida en que pude inferirlo de los fenómenos. Este es su valor a la distancia media del Sol a la Tierra. Pero aumenta o disminuye en razón inversa del

cubo de la distancia del Sol, y por ende a la máxima distancia del Sol es de 3' 34" y a la mínima de 3' 56" aproximadamente: pero cuando el apogeo de la Luna se halla situado fuera de los octantes, resulta menor; y es a la ecuación máxima como el seno de la doble distancia del apogeo de la Luna hasta las inmediatas sicigias o la cuadratura al radio.

Por la misma teoría de la gravedad la acción del Sol sobre la Luna es algo mayor cuando la línea recta que pasa por los nodos de la Luna pasa también por el Sol que cuando dicha línea forma ángulo recto con la línea que une a la Tierra y el Sol. Y de aquí surge otra ecuación del movimiento medio lunar, que llamaré segunda semestral, y que es máxima cuando los nodos se encuentran en los octantes del Sol y que se desvanece cuando se hallan en las sicigias o en las cuadraturas, mientras en las demás posiciones de los nodos es proporcional al seno de la doble distancia de uno cualquiera de los nodos a la sicigia o cuadratura próxima; y se añade al movimiento medio de la Luna si el Sol está antes del nodo inmediato a la Luna y se resta si está delante, y en los octantes, cuando es máxima, asciende a 47" a la distancia media del Sol y la Tierra, como infiero de la teoría de la gravedad. A otras distancias del Sol esta ecuación máxima en los octantes es inversamente proporcional al cubo de la distancia del Sol a la Tierra, y por ende en el perigeo del Sol asciende casi a 49" y en su apogeo a casi 45".

Por la misma teoría de la gravedad el apogeo de la Luna progresa máximamente cuando o bien se halla en conjunción con el Sol, o bien en oposición a él, y retrocede cuando forma cuadratura con el Sol. Y la excentricidad se torna máxima en el primer caso y mínima en el segundo, por los corolarios 7, 8 y 9 de la proposición LXVI del libro primero. Y estas desigualdades, por los mismos corolarios, son muy grandes y generan la ecuación principal del apogeo, a la que llamaré semestral. Y la ecuación máxima del semestre es de 12° 18' aproximadamente, en la medida en que pude inferirlo de las observaciones. Nuestro Horrox fue el primero en establecer que la Luna gira en una elipse en torno a la Tierra que está situada en su foco inferior. Halley situó el centro de la elipse en un epiciclo cuyo centro gira uniformemente en torno a la Tierra. Y del movimiento en el epiciclo surgen las desigualdades ya mencionadas en el progreso y regreso del apogeo y en el valor de la excentricidad. Imaginemos que la distancia media de la Luna a la Tierra se divide en 100000 partes, y T represente a la Tierra, TC la excentricidad media de la Luna de 5505 partes. Prolónguese T*c* hasta B, de modo que CB sea el seno de la ecuación máxima semestral de 12° 18' para el radio TC, y el círculo BDA trazado con centro en C y radio CB será el susodicho epiciclo en el que se halla situado el centro de la órbita lunar y gira según el orden de las letras BDA. Tómese el ángulo BCD igual al doble del argumento anual, o a la doble distancia del verdadero lugar del Sol al apogeo de la Luna igualado una vez, y CTD será la ecuación semestral del apogeo lunar y TD la excentricidad de la órbita de la Luna que se dirige hacía el apogeo igualado por segunda vez. Pues bien, una vez conocidos el movimiento medio de la Luna y el apogeo y la excentricidad, así como el eje mayor de la órbita de la Luna de 200000 partes; a partir de esto se obtiene el verdadero lugar de la Luna en la órbita y su distancia a la Tierra, y esto por métodos muy conocidos.

En el perihelio de la Tierra, debido a la mayor fuerza del Sol, el centro de la órbita lunar se mueve más velozmente en torno al centro C que en el afelio, y esto en razón inversa del cubo de la distancia del Sol a la Tierra. Por estar la ecuación del centro del Sol comprendida en el argumento anual, el centro de la órbita de la Luna se mueve más velozmente en el epiciclo BDA en razón inversa del cuadrado de la distancia de la Tierra al Sol. Para que pueda moverse aún más deprisa en razón simple inversa de la distancia,



trácese desde el centro D de la órbita hacia el apogeo de la Luna la recta DE, paralela a TC, y tómese el ángulo EDF igual al exceso del argumento anual antedicho sobre la distancia hacia adelante del apogeo de la Luna hasta el perigeo del Sol; o lo que es lo mismo, tómese el ángulo CDF igual al complemento de la verdadera anomalía del Sol respecto a 360 grados. Y sea DF a DC como el doble de la excentricidad del Orbe Magno respecto a la distancia media del Sol a la Tierra y el movimiento diario medio del Sol desde el apogeo de la Luna al movimiento diario medio del Sol desde su propio apogeo conjuntamente, es decir, como $33\frac{7}{8}$ a 1000 y 52' 27" 16"' a 59' 8" 10"' conjuntamente, o como 3 a 100. E imaginemos que el centro de la órbita de la Luna se sitúa en el punto F y, mientras gira en el epiciclo de centro D y radio DF, el punto D progresa por la circunferencia del círculo DABD. Pues con esta proporción, la velocidad con la que el centro de la órbita lunar se moverá por una cierta línea curva descrita en torno al centro C, será inversamente como el cubo de la distancia del Sol a la Tierra muy aproximadamente, como es preciso.

Es difícil el cálculo de este movimiento, pero se torna más fácil mediante la aproximación siguiente. Si la distancia media de la Luna a la Tierra es de 100000 partes y la: excentricidad es de 5505 partes, como antes, la recta CB o CD resultará de $1172\frac{3}{4}$ partes y DF de $35\frac{1}{3}$ partes. Y esta recta, a la distancia TC, subtiende a la Tierra el ángulo generado por la traslación del centro de la órbita desde el punto D al punto F debido al movimiento de dicho centro: y el doble de esa línea en posición paralela y a la distancia del foco superior de la órbita de la Luna a la Tierra subtiende el mismo ángulo también generado en el movimiento del foco por dicha traslación y que por ello puede ser llamado segunda ecuación del centro. Y esta ecuación, a la distancia media de la Luna a la Tierra, es como el seno del ángulo comprendido entre la susodicha recta DF y la trazada desde el punto F hasta la Luna muy aproximadamente, y cuando es máxima resulta de 2' 25". Pues el ángulo comprendido entre la recta DF y la recta trazada desde F hasta la Luna se obtiene tanto restando el ángulo EDF de la anomalía media de la Luna, como añadiendo la distancia de la Luna al Sol a la distancia del apogeo de la Luna hasta el apogeo del Sol. Y como el radio es el seno del ángulo así hallado, así son también 2' 25" a la segunda ecuación, que ha de sumarse si aquella suma fuese menor que el semicírculo y restarse si fuese mayor. Así se obtendrá su longitud en las sicigias mismas de los astros.

Puesto que la atmósfera de la Tierra hasta una altura de 35 o de 40 millas refracta la luz del Sol, y al refractarla la dispersa por la sombra de la Tierra, y al dispersarla en los límites de la sombra dilata a la sombra, al diámetro de la sombra resultante de la paralaje, añado un minuto en los eclipses de la Luna, o acaso un minuto y un tercio.

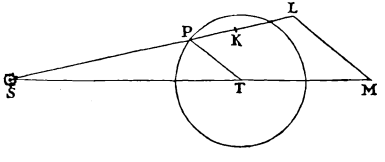
Pero la teoría de la Luna debe examinarse y establecerse mediante los fenómenos, primero en las sicigias, después en las cuadraturas y por último en los octantes. Y quien aborde esta tarea no sufrirá inconvenientes al utilizar los movimientos medios del Sol y de la Luna para el tiempo del Real Observatorio de Greenwich el último día de diciembre del año 1700, calendario antiguo, a saber: el movimiento medio del Sol ♑ 20° 43' 40" y su apogeo ♋ 7° 44' 30" y el movimiento medio de la Luna ♒ 15°21'00", y su apogeo ☌ 8° 20' 00", y del nodo ascendente ☊ 27' 24' 20"', y la diferencia de meridianos entre este observatorio y el Real de París es de Oh. 9m. 20sg., pero el

movimiento medio de la Luna y de su apogeo no se tienen todavía con suficiente exactitud.

PROPOSICIÓN XXXVI. PROBLEMA XVII

Hallar la fuerza del Sol para mover el mar.

La fuerza ML del Sol, o PT, en las cuadraturas lunares, a la hora de perturbar los movimientos lunares, era respecto a la fuerza de la gravedad entre nosotros (por la proposición XXV de este libro) como 1 a 638092,6. Y la fuerza TM-LM, o 2PK en las sicigias lunares era el doble mayor. Pero estas fuerzas, si descendiéramos a la superficie de la Tierra, disminuirán en razón de las distancias al centro de la Tierra, es decir, en razón de 605 a 1; y, por consiguiente, la fuerza anterior en la superficie de la Tierra es a la fuerza de la gravedad como 1 a 38604600. Con esta fuerza el mar se deprime en los lugares que distan 90 grados del Sol. Con la otra fuerza, que es el doble mayor, se eleva el mar tanto bajo el Sol como en la parte opuesta. La suma de las fuerzas es a la fuerza de la gravedad como 1 a 12868200. Y puesto que la misma fuerza induce el mismo movimiento, tanto si con ella deprime al agua en las regiones que distan 90 grados del Sol, como si la eleva en las regiones bajo el Sol u opuestas a él, esta suma será la fuerza total del Sol para agitar el mar; y tendrá el mismo efecto que si toda ella elevase el mar en las regiones bajo el Sol y opuestas al Sol, y en cambio no actuase en absoluto en las regiones que distan 90 grados del Sol.



Ésta es la fuerza del Sol para mover el mar en un lugar dado cualquiera, cuando el Sol se halla, tanto en el vértice del lugar, como a su distancia media de la Tierra. En otras posiciones del Sol su fuerza para mover el mar es como el seno verso del doble de la altura del Sol sobre el horizonte del lugar directamente, e inversamente como el cubo de la distancia del Sol a la Tierra.

COROLARIO. Puesto que la fuerza centrífuga de las partes de la Tierra originada por el movimiento terrestre diario, que es a la fuerza de la gravedad como 1 a 289, haga que la altura del agua en el ecuador supere la altitud de la misma sobre los polos en 85472 pies parisinos, como se vio más arriba en la proposición XIX, la fuerza solar de que hemos tratado, al ser a la fuerza de la gravedad como 1 a 12868200 y, por tanto, a la susodicha fuerza centrífuga como 289 a 12868200 , o sea, como 1 a 44527, hará que la altura del agua en las regiones bajo el Sol y sus opuestas supere a la altura de la misma en los lugares que distan 90 grados del Sol en solamente un pie parisino y once pulgadas con $\frac{1}{10}$ de pulgada. Pues ésta es la cantidad que, respecto a 85472 pies, es como 1 a 44527.

PROPOSICIÓN XXXVII. PROBLEMA XVIII

Hallar la fuerza de la Luna para mover el mar.

La fuerza de la Luna para mover el mar hay que inferirla de su proporción respecto a la fuerza del Sol, y esta proporción hay que inferirla de la proporción de los movimientos del mar generados por estas fuerzas. Antes de la desembocadura del río Avon, en la tercera milla más abajo de Bristol, en primavera y otoño el ascenso total del agua en la conjunción y en la oposición de los astros, según la observación de Samuel Sturmy, es de unos 45 pies, mientras que en las cuadraturas es tan sólo de 25. La altura primera es debida a la suma de las fuerzas, y la segunda a su diferencia. Por consiguiente, sean S y L las fuerzas del Sol y de la Luna situados sobre el ecuador y a distancias medias de la Tierra, y L + S será a L – S como 45 a 25, o como 9 a 5.

La subida del mar en el puerto de Plymouth según observación de Samuel Colepress alcanza unos dieciséis pies de altura media, y en primavera y otoño la altura de la marea en las sicigias puede superar a su altura en las cuadraturas en siete u ocho pies más. Si la diferencia máxima de estas alturas fuese de nueve pies, L + S será a L – S como $20\frac{1}{2}$ a $11\frac{1}{2}$, o como 41 a 23. Proporción que coincide bastante bien con la anterior. Por la magnitud de las mareas en el puerto de Bristol, parecen más fiables las observaciones de Sturmy, y por ello nos atendremos a la proporción de 9 a 5 hasta que haya constancia de algo más seguro.

Por lo demás, debido a los movimientos de reciprocación de las aguas, las máximas mareas no coinciden con las sicigias de los astros sino que son las terceras postsicigias, como se ha dicho, o son inmediatas al tercer paso de la Luna por el meridiano del lugar después de las sicigias, o mejor (como observa Sturmy), son las terceras después del día de novilunio o plenilunio, o también más o menos doce horas después del novilunio o plenilunio, y por ello vienen a incidir más o menos en la hora cuarenta y tres desde el novilunio o plenilunio. En el puerto susodicho vienen a ocurrir unas siete horas después del paso de la Luna por el meridiano del lugar; y, por tanto, siguen inmediatamente este paso, cuando la Luna dista del Sol, o de la oposición del Sol, más o menos dieciocho o diecinueve grados hacia adelante. Verano e invierno son de gran importancia, no en los mismos solsticios, sino cuando el Sol dista de los solsticios una décima parte del curso entero, es decir, unos 36 o 37 grados. E igualmente, la máxima subida del mar se origina por el paso de la Luna por el meridiano del lugar, cuando la Luna dista del Sol casi una décima parte del movimiento total de marea a marea. Sea esa distancia más o menos de $18\frac{1}{2}$ grados. Y la fuerza del Sol a esta distancia de la Luna de las sicigias y de las cuadraturas será menor para aumentar o disminuir el movimiento del mar debido a la fuerza lunar que en las propias sicigias y cuadraturas en la razón del radio al seno del complemento del doble de esa distancia o sea del ángulo de 37 grados, es decir, en razón de 10000000 a 7986355. Y por lo mismo, en la proporción de más arriba hay que escribir 0,7986355S en lugar de S.

Pero también hay que disminuir la fuerza de la Luna en las cuadraturas, debido a la declinación lunar del ecuador. Pues en las cuadraturas, o más bien en el grado $182\frac{1}{2}$ después de las cuadraturas, tiene una declinación aproximada de 23° 13'. Y la fuerza para mover el mar del astro en declinación ecuatorial disminuye en razón cuadrada del seno del complemento de la declinación muy aproximadamente. Y, por tanto, la fuerza de la

Luna en estas cuadraturas es tan sólo de 0,8570327L. Por lo tanto, L + 0,79863555 es a 0,8570327L – 0,79863555 como 9 a 5.

Además los diámetros de la órbita en que debería moverse la Luna sin excentricidad son entre sí como 69 a 70; y por ello la distancia de la Luna a la Tierra en las sicigias es a su distancia en las cuadraturas como 69 a 70, en iguales restantes condiciones. Y sus distancias en el grado $18\frac{1}{2}$ desde las sicigias cuando se genera la marea máxima, y en el grado $18\frac{1}{2}$ desde las cuadraturas, cuando se genera la marea mínima, son a su distancia media como 69,098747 y 69,897345 a $69\frac{1}{2}$. Pero las fuerzas de la Luna para mover el mar están en razón inversa del cubo de las distancias, y por ello las susodichas fuerzas en la máxima y mínima de estas distancias son a la fuerza en la distancia media como 0,9830427 y 1,017522 a 1. De donde resulta que 1,017522L + 0,7986355S es a 0.9830427 × 0,8570327L – 0,7986355S como 9 a 5. Y S a L como 1 a 4,4815. De suerte que siendo la fuerza del Sol a la de la gravedad como 1 a 12868200, la fuerza de la Luna será a dicha fuerza de la gravedad como 1 a 2871400.

Corolario 1. Dado que el agua bajo la acción de la fuerza del Sol sube a una altura de un pie, once pulgadas y $\frac{1}{30}$ de pulgada, la Luna con la propia fuerza hará que ascienda hasta una altura de ocho pies y $7\frac{5}{22}$ pulgadas, y con ambas fuerzas juntas hasta una altura de $10\frac{1}{2}$ pies, y cuando la Luna está en el perigeo hasta $12\frac{1}{2}$ pies y más, sobre todo cuando el viento colabora con su empuje. Semejante fuerza es bastante para provocar todos los movimientos del mar, y responde adecuada mente a la cantidad de movimiento. Pues en los mares que se extienden ampliamente de oriente a occidente, como en el Pacífico y en las zonas extra-tropicales de los mares Atlántico *y* Etiópico, el agua suele alcanzar alturas de seis, nueve, doce o quince pies. Pero en el mar Pacífico, más profundo y más extenso, se asegura que las mareas son mayores que en el Atlántico y en el Etiópico. Y es que para que la marea sea más alta, la anchura del mar de este a oeste no debe ser menor de noventa grados. En el mar Etiópico la subida del agua entre los trópicos es menor que en las zonas templadas debido a la estrechez del mar entre África y la América austral. En el medio del mar el agua no puede ascender, salvo que descienda a la vez en las dos orillas oriental y occidental, pese a que en nuestros estrechos mares haya de descender por veces alternas en dichas costas. Por esta razón el flujo y reflujo, en las islas muy distantes de las costas, suele ser muy pequeño. En los puertos en los que el agua se ve obligada a llenar y vaciar alternativamente las cuencas pasando con gran ímpetu por estrechos y poco profundos canales, los flujos y reflujos han de ser por fuerza mayores, como en Plymouth y en el puente de Chepstow, en Inglaterra; en el Mont S. Michele o en la ciudad de Avranches en Normandía, en Cambaya y Pegu en la India oriental. En dichos lugares el mar, entrando y saliendo con gran velocidad, tanto inunda los litorales como deja millas enteras de arenales. Y el ímpetu de las entradas y de las salidas de agua no cesa hasta que el agua sube o desciende 30, 40, y hasta 50 pies, o más. Y lo mismo ocurre con los estrechos largos y poco profundos, como el de Magallanes o los que rodean Inglaterra. Las mareas, en semejantes puertos y estrechos por la fuerza de los accesos y recesos aumentan en gran medida. Mientras que en las costas con descenso rápido hacia un mar profundo y abierto, en las cuales el agua sin fuerza en la llegada y en el retroceso puede subir y bajar libremente, la magnitud de la marea responde a las fuerzas del Sol y de la Luna.

Corolario 2. Dado que la fuerza de la Luna para mover el mar es a la fuerza de la gravedad como 1 a 2871400, es evidente que dicha fuerza es mucho menor que la que

es perceptible mediante experimentos con péndulos o cualesquiera otros estáticos o hidrostáticos. Únicamente dicha fuerza muestra un efecto sensible en las mareas.

COROLARIO 3. Toda vez que la fuerza de la Luna para mover el mar es a la correspondiente fuerza del Sol como 4,4815 a 1, y dichas fuerzas (por el corolario 14 de la proposición LXVI del libro primero) son como las densidades de los cuerpos de la Luna y del Sol y el cubo de los diámetros aparentes conjuntamente; la densidad de la Luna será a la densidad del Sol directamente como 4,4815 a 1 e inversamente como el cubo del diámetro de la Luna al cubo del diámetro del Sol: esto es (siendo los diámetros medios aparentes de la Luna y del Sol de 31', $16\frac{1}{2}$" y de 32', 12"), como 4891 a 1000. Pero la densidad del Sol era a la densidad de la Tierra como 1000 a 4000; y, por tanto, la densidad de la Luna es a la densidad de la Tierra como 4891 a 4000, o como 11 a 9. Luego el cuerpo de la Luna es más denso y terroso que nuestra Tierra.

COROLARIO 4. Y puesto que el verdadero diámetro de la Luna obtenido de las observaciones astronómicas es al verdadero diámetro de la Tierra como 100 a 365, la masa de la Luna será a la masa de la Tierra como 1 a 39,788.

COROLARIO 5. Y la gravedad aceleratriz en la superficie de la Luna será casi un triplo menor que la gravedad aceleratriz en la superficie de la Tierra.

COROLARIO 6. Y la distancia del centro de la Luna al centro de la Tierra será a la distancia del centro de la Luna al centro común de gravedad de la Tierra y la Luna como 40,788 a 39,788.

COROLARIO 7. Y la distancia media del centro de la Luna al centro de la Tierra en los octantes de la Luna será aproximada mente de 603 semidiámetros máximos de la Tierra. Porque el semidiámetro máximo de la Tierra era de 19658600 pies parisinos, y la distancia media entre centros de Luna y Tierra consta de $60\frac{2}{3}$ de estos mismos semidiámetros y es igual a 1187379440 pies. Esta distancia (por el corolario anterior) es a la distancia del centro de la Luna al centro común de gravedad de la Tierra y la Luna como 40,788 a 39,788: por lo tanto, la distancia última es de 1158268534 pies. Y puesto que la Luna gira respecto a las fijas en 27 días, 7 horas y $43\frac{2}{3}$ minutos, el seno verso del ángulo descrito por la Luna en un minuto es de 12752341 para un radio de 1000.000000.000000. Y el radio es a este seno verso como 1158268534 pies son a 14,7706353 pies. Por consiguiente, la Luna, cayendo hacia la Tierra con la fuerza con la que es retenida en órbita describirá en el tiempo de un minuto 14,770.6353 pies. Y aumentando dicha fuerza en una razón como $1784\frac{29}{40}$ a $177\frac{29}{40}$ se tendrá la fuerza total de gravedad en la órbita de la Luna, por el corolario de la proposición III. Y cayendo la Luna con esta fuerza describirá en el tiempo de un minuto 14,8538067 pies. Y a esa distancia de la Luna al centro de la Tierra, esto es, a la distancia de 197896573 pies del centro de la Tierra, un grave cayendo en el tiempo de un segundo describe también 14,8538067 pies. Por lo cual a la distancia de 19615800 pies, que son el semidiámetro medio de la Tierra, un grave cayendo describirá 15,11175 pies, o sea, 15 pies, 1 pulgada y $4\frac{4}{11}$ líneas. Este será el descenso de los cuerpos a la latitud de 45 grados. Y según la tabla precedente expuesta en la proposición XX, el descenso será algo mayor en la latitud de París, con un exceso de casi $\frac{2}{9}$ de línea. Pues según este cálculo los graves en la latitud de París cayendo en el vacío describirán en un segundo casi 15 pies parisinos, 1 pulgada y $43\frac{25}{33}$ líneas. Y si la gravedad disminuyese, suprimiendo la fuerza centrífuga debida en esa latitud a la rotación diaria de la Tierra, los graves cayendo allí en el tiempo de un segundo describirán 15 pies, 1 pulgada y $1\frac{1}{2}$ líneas. Y ya más arriba, en las proposiciones IV y XIX, se ha mostrado que en la latitud de París los graves caen con esta velocidad.

COROLARIO 8. La distancia media entre los centros de la Tierra y la Luna en las sicigias de la Luna es de 60 semidiámetros máximos terrestres, restada una treinteava parte del semidiámetro aproximadamente. Pero en las cuadraturas de la Luna las distancias medias entre los dichos centros es de $60\frac{5}{6}$ semidiámetros terrestres. Pues estas dos distancias son a las distancias medias de la Luna en los octantes como 69 y 70 a $69\frac{1}{2}$, por la proposición XXVIII.

COROLARIO 9. La distancia media del centro de la Tierra al de la Luna en las sicigias de la Luna es de 60,1 semidiámetros medios terrestres. Y en las cuadraturas de la Luna la distancia media entre esos mismos centros es de 61 semidiámetros terrestres menos un treinteavo de semidiámetro.

COROLARIO 10. En las sicigias de la Luna su paralaje horizontal media a latitudes de 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90 grados es de 57' 20"; 57' 16"; 57' 14"; 57 '12"; 57' 10"; 57 '8"; 57' 4", respectivamente.

No he tenido en cuenta en estos cálculos la atracción magnética de la Tierra, cuya cantidad es ciertamente muy pequeña y se desconoce. Pero si alguna vez se llegase a conocer esta atracción, y las medidas en grados sobre los meridianos, las longitudes de los péndulos isócronos en los distintos paralelos, las leyes del movimiento del mar, la paralaje lunar junto con los diámetros aparentes del Sol y de la Luna pudieran ser determinados con mayor exactitud sobre la base de los fenómenos, se podrían repetir estos cálculos con mayor precisión.

PROPOSICIÓN XXXVIII. PROBLEMA XIX

Hallar la figura del cuerpo lunar.

Si el cuerpo lunar fuese fluido como lo es nuestro mar, la fuerza de la Tierra para elevar dicho fluido tanto en las partes más cercanas como en las más lejanas sería a la fuerza de la Luna, por la cual nuestro mar es elevado en las partes que están bajo ella y en las opuestas, como la gravedad aceleratriz de la Luna hacia la Tierra es a la gravedad aceleratriz de la Tierra hacia la Luna, y el diámetro de la Luna al diámetro de la Tierra conjuntamente; es decir, como 39,788 a 1 y 100 a 365 conjuntamente, o como 1081 a 100. Por lo cual, dado que la fuerza lunar eleva nuestro mar hasta $8\frac{1}{2}$ pies, la fuerza terrestre elevaría el fluido lunar hasta 93 pies. En consecuencia, la figura lunar sería un esferoide, cuyo diámetro mayor prolongado pasaría por el centro de la Tierra, y superaría a los diámetros perpendiculares con un exceso de 186 pies. Por tanto, ésa es la figura que posee la Luna, y debió adoptarla desde el principio. Q.E.I.

COROLARIO. Y esto hace que la misma cara de la Luna esté siempre vuelta hacia la Tierra. Y el cuerpo lunar no podría permanecer en otra posición, sino que oscilando retornaría siempre a esta posición. Sin embargo, las oscilaciones, debido a la pequeñez de las fuerzas que las provocan, serían muy lentas, hasta el punto de que la cara de la Luna que debería mirar siempre hacia la Tierra podría mirar hacia el otro foco de la órbita lunar (por lo dicho en la proposición XVII), sin que se apartase al instante de dicha posición y se volviese hacia la Tierra.

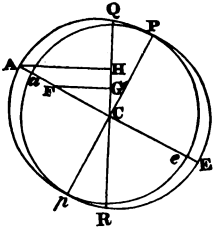
LEMA I

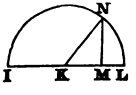
Si APEp representa a la Tierra uniformemente densa, trazada con centro en C y polos P, p, y ecuador AE, y si con centro en C se imagina que trazamos una esfera Pape de radio CP; y sea QR un plano sobre el cual incide normalmente una recta trazada desde el centro del Sol al centro de la Tierra, mientras que cada partícula de toda la Tierra exterior PapAPepE que sobresale de la esfera descrita del modo dicho trata de alejarse hacia un lado y otro del plano QR, y los impulsos de cada una de las partículas es como su distancia al plano, digo, primero que la fuerza y eficacia totales de todas las partículas situadas en el círculo AE del ecuador y uniformemente dispuestas en anillo alrededor del globo en orden a hacer rotar a la Tierra en torno a su centro es a toda la fuerza y eficacia de otras tantas partículas situadas en el punto A sobre el ecuador, punto máximamente distante del plano QR, y en orden a producir un movimiento circular de la Tierra similar y en torno a su centro, como uno a dos. Y el susodicho movimiento circular tendrá lugar en torno a un eje situado en la sección común del ecuador y el plano QR.

Pues, con centro en K y semidiámetro IL trácese el semicírculo INLK. Imagínese que la semicircunferencia INL se divide en innumerables partes iguales, y desciendan sobre el diámetro IL desde cada parte N los senos NM. En tal caso, la suma de los cuadrados de todos los senos NM será igual a la suma de los cuadrados de los senos KM, y una y otra suma juntas será igual a la suma de los cuadrados de otros tantos semidiámetros KN; y, por consiguiente, la suma de todos los cuadrados NM será la mitad de la suma de los cuadrados de otros tantos semidiámetros KN.

Ahora divídase el perímetro del círculo AE en otras tantas partículas iguales y desde cada una de ellas F se hace descender sobre el plano QR la perpendicular FG, y lo mismo desde el punto A la perpendicular AH. Y la fuerza con que la partícula F se aleja del plano QR será como la susodicha perpendicular FG, por hipótesis, y dicha fuerza multiplicada por la distancia CG será la eficacia de la partícula F en orden a hacer girar a la Tierra en torno a su eje. Y por lo mismo, la eficacia de la partícula en el punto F será a la eficacia de la partícula en el punto A como FG × GC a AH × HC, es decir, como FC^2 a AC^2; y por tanto, la eficacia entera de todas las partículas en sus lugares F será a la eficacia de otras tantas partículas en el lugar A como la suma de todos los FC^2 a la suma de otros tantos AC^2, es decir (por lo ya demostrado), como uno a dos. Q.E.D.

Y toda vez que las partículas actúan apartándose perpendicularmente del plano QR, y esto igualmente a uno y otro lado del plano, harán girar a la circunferencia del círculo ecuatorial y a la Tierra anexa a él en torno a un eje situado tanto sobre dicho plano QR como sobre el plano del ecuador.

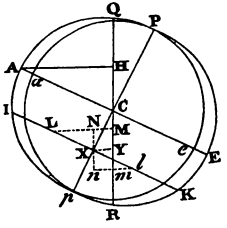




LEMA II

Con los mismos supuestos, digo, en segundo lugar, que la fuerza y eficacia totales de todas las partículas situadas por todas partes fuera de la esfera, en orden a hacer girar a la Tierra en torno al mismo eje es a la fuerza total de las mismas partículas, uniformemente dispuestas alrededor del círculo ecuatorial en forma de anillo y en orden a mover a la Tierra con un movimiento circular semejante, como dos a cinco.

Pues sea IK un círculo menor cualquiera paralelo la ecuador AE, y sean L, *l* dos partículas cualesquiera iguales situadas en dicho círculo fuera del globo P*ape*. Y si sobre el plano QR, que es perpendicular a un radio trazado la Sol, se trazan las perpendiculares LM, *lm*, las fuerzas totales con que tales partículas huyen del plano QR serán proporcionales a dichas perpendiculares LM, *lm*. Trácese entonces la línea L*l* paralela al plano P*ape* y biséquese en X, y por el punto X trácese N*n* paralela al plano QR y que encuentre a las perpendiculares LM, *lm* en N y *n*, y sobre el plano QR hágase caer la perpendicular XY. Y las fuerzas opuestas de las partículas L y *l* en orden a hacer girar a la Tierra en direcciones opuestas son como LM × MC y *lm* × *m*C, es decir, como LN × MC + NM × MC y *ln* × *m*C – *nm* × *m*C, o sea, LN × MC + NM × MC y LN × *m*C – NM × *m*C, y la diferencia entre ambas, LN × M*m* – NM × (MC + *m*C), es la fuerza de ambas partículas juntas para mover la Tierra en giro. La parte positiva de esta diferencia LN × M*m*, o sea, 2LN × NX es a la fuerza de dos partículas de igual magnitud, 2AH × HC, situadas en A, como LX^2 a AC^2. Y la parte negativa, NM × (MC + *m*C), o sea, 2XY × CY es a la fuerza de las mismas partículas situadas en A, 2AH × HC, como CX^2 a AC^2. Y por ello, la diferencia de las partes, es decir, la fuerza de las dos partículas L y *l* tomadas conjuntamente para hacer girar a la Tierra es a la fuerza de dos partículas iguales a ellas y situadas en el punto A en orden a hacer girar igualmente a la Tierra como $LX^2 - CX^2$ a AC^2. Pero si la circunferencia IK del círculo IK se divide en innumerables partículas iguales L, todos los LX^2 serán a otros tantos IX^2 como 1 a 2 (por el lema I) y a otras tantas AC^2 como IX^2 a $2AC^2$; y todas las CX^2 a otras tantas AC^2 como $2CX^2$ a $2AC^2$. Por lo tanto, las fuerzas reunidas de todas las partículas alrededor del círculo IK son a las fuerzas reunidas de otras tantas partículas en el punto A como $IX^2 - 2CX^2$ a $2AC^2$, y por lo mismo (por el Lema I) son respecto a las fuerzas reunidas de otras tantas partículas en torno al círculo AE como $IX^2 - 2CX^2$ a AC^2.



Pero si ahora se divide el diámetro P*p* de la esfera en innumerables partes iguales sobre las que se sitúan otros tantos círculos IK, la materia en el perímetro de un círculo cualquiera IK será como IX^2: y por lo mismo, la fuerza de dicha materia para mover la Tierra en giro será como IX^2 por $IX^2 - CX^2$. Y la fuerza de esa misma materia si se hallase en el perímetro del círculo AE sería como $IX^2 \times AC^2$. Y, por tanto, la fuerza de todas las partículas de toda la materia, situada fuera del globo en los perímetros de todos los círculos, es a la fuerza de otras tantas partículas situadas en el perímetro del círculo máximo AE, como todos los $IX^2 \times (IX^2 - 2CX^2)$ a otros tantos $IX^2 \times AC^2$, es decir,

como todas las $AC^2 - CX^2$ por $AC^2 - 3CX^2$ a otras tantas AC^2, es decir, como todas las $AC^2 - CX^2$ por $AC^2 - 3CX^2$ a otras tantas $AC^2 - CX^2$ por AC^2, esto es, como todas las $AC^4 - 4AC^2 X\ CX^2 + 3CX^4$ a otras tantas $AC^4 - AC^2 \times CX^2$, es decir, como toda la cantidad fluyente cuya fluxión es $AC^4 - 4AC^2 \times CX^2 + 3CX^4$, a toda la cantidad fluyente cuya fluxión es $AC^4 - AC^2 \times CX^2$; y, en consecuencia, por el método de las fluxiones, como $AC^4 \times CX - \frac{4}{3}C^2 \times CX^3 + \frac{3}{5}X^5$ es a $AC^4 \times CX - \frac{1}{3}AC^2 \times CX^3$, o sea, si en lugar de CX se escribe todo Cp o AC, como $\frac{4}{15}AC^5$ a $\frac{2}{3}AC^5$, lo que es como dos a cinco. Q.E.D.

LEMA III

Con los mismos supuestos, digo, en tercer lugar, que el movimiento de toda la Tierra en torno al eje antedicho, resultante de los movimientos de todas las partículas, será al movimiento del anillo susodicho en torno al mismo eje en una razón compuesta de la razón de la materia en la Tierra a la materia en el anillo y de la razón de tres cuadrados del cuadrante de cualquier círculo a dos cuadrados de su diámetro; es decir, en razón de la materia a la materia y del número 925275 al número 1000000.

Pues el movimiento de un cilindro que gira en torno a su eje inmóvil es al movimiento de la esfera inscrita que gira a la vez, como cuatro cuadrados iguales cualesquiera son a tres de los círculos inscritos en ellos: y el movimiento del cilindro es al movimiento de un anillo muy delgado que rodease el lugar común de contacto, como el doble de la materia en el cilindro al triple de la materia en el anillo; y este movimiento del anillo, continuado uniformemente en torno al eje del cilindro, es al movimiento uniforme de éste en torno a su propio diámetro, realizado en el mismo tiempo periódico, como la circunferencia del círculo al doble del diámetro.

HIPÓTESIS II

Si suprimiendo todo el resto de la Tierra, el anillo predicho, sólo en derredor de la Tierra, girase en torno al Sol con movimiento anual, mientras que en torno a su propio eje, inclinado éste sobre el plano de la eclíptica con un ángulo de $23\frac{1}{2}$ grados, girase también con movimiento diario: el movimiento de los puntos equinocciales sería el mismo, tanto si el susodicho anillo fuera fluido, como si estuviese constituido de materia firme y rígida.

PROPOSICIÓN XXXIX. PROBLEMA XX

Hallar la precesión de los equinoccios.

El movimiento medio horario de los nodos de la Luna en una órbita circular, cuando los nodos están en cuadraturas, era de 16" 35"' 16"'' 36''', y su mitad 8" 17"' 38"'' 18''', es (por las razones dadas antes) el movimiento medio horario de los nodos en dicha ór-

bita. Y el año sidéreo entero sea de 20° 11' 46". Puesto que en semejante órbita los nodos de la Luna completarían cada año los 20° 11' 46" hacia adelante, y si hubiese varias lunas, los movimientos de los nodos de cada una (por el corolario 16 de la proposición LXVI del libro primero) serían como los tiempos periódicos, si la Luna en el tiempo de un día sidéreo girase junto a la superficie de la Tierra, el movimiento anual de los nodos sería a 20° 11' 46" como el día sidéreo de 23h. 56' al tiempo periódico de la Luna de 27d. 7h. 43'; es decir, como 1436 a 39343. E igual es la razón de los nodos de un anillo de lunas rodeando a la Tierra, tanto si dichas lunas no se tocan, como si fueran líquidas y formasen un anillo continuo, o si ese anillo fuese rígido y se hiciese inflexible.

Supongamos, pues, que dicho anillo es igual, en cantidad de materia, a toda la Tierra P*ap*AP*ep*E que sobresale de la esfera P*ape* (véase la figura del lema II); y puesto que dicha esfera es a la dicha Tierra que sobresale como aC^2 a $AC^2 - aC^2$, esto es (al ser PC semidiámetro menor de la Tierra o también *a*C al semidiámetro mayor AC como 229 a 230), como 52441 a 459; si este anillo ciñese a la Tierra por el ecuador y ambos girasen a la vez en torno al diámetro del anillo, el movimiento del anillo sería al movimiento de la esfera interior (por el lema III de éste) como 459 a 52441 y 1000000 a 925275 conjuntamente, es decir, como 4590 a 485223; y, por tanto, el movimiento del anillo sería a la suma del movimiento del anillo y del movimiento del globo como 4590 a 489813. De donde, si el anillo se adhiriese al globo y comunicase a éste el movimiento con el cual regresan sus nodos o puntos equinocciales, el movimiento restante en el anillo será a su movimiento anterior como 4590 a 489813; y por lo mismo, el movimiento de los puntos equinocciales disminuirá en la misma razón. Por consiguiente, el movimiento anual de los puntos equinocciales del cuerpo compuesto del anillo y del globo será al movimiento de 20° 11' 46" como 1436 a 39343 y 4590 a 489813 conjuntamente, es decir, como 100 a 292369. Pero las fuerzas por las cuales retroceden los nodos de las lunas (como se ha expuesto antes) y, por tanto, también retroceden los puntos equinocciales (esto es, las fuerzas 3IT, en la figura de la proposición XXX) son en cada partícula como las distancias de cada una de esas partículas al plano QR, y con esas fuerzas huyen las partículas del plano; y por ello (por el lema II), si la materia del anillo se distribuyera por toda la superficie del globo al modo de la figura P*ap*AP*ep*E para dar lugar a la parte sobresaliente de la Tierra, toda la fuerza y eficacia de todas las partículas para hacer girar a la Tierra en torno de un diámetro ecuatorial y, por tanto, para mover los puntos equinocciales, resultará menor que antes, y ello en razón de 2 a 5. Y por eso el regreso anual de los equinoccios sería ahora respecto a 20° 11' 46", como 10 a 73092; y, por tanto. resultaría de 9" 56"' 50""

Además, este movimiento, debido a la inclinación del plano ecuatorial hacia el plano de la eclíptica, debe ser disminuido, y esto en la razón del seno de 91706 (que es el seno del complemento de $23\frac{1}{2}$ grados) al radio 100000. Con lo cual el movimiento, resultará ahora de 9" 7"' 20"". Ésta es la precesión anual de los equinoccios debida a la fuerza del Sol.

Pero la fuerza de la Luna para mover el mar era a la del Sol como 4,4815 a 1 aproximadamente. Y la fuerza de la Luna para mover los equinoccios es a la del Sol en la misma proporción. Y de aquí resulta que la precesión anual de los equinoccios debida a la fuerza de la Luna sea de 40" 52"' 52"", y la precesión de los equinoccios total anual debida a ambas fuerzas es de 50" 00"' 12"". Este movimiento concuerda con los fenómenos. Pues la precesión de los equinoccios según las observaciones astronómicas es de cincuenta segundos al año más o menos.

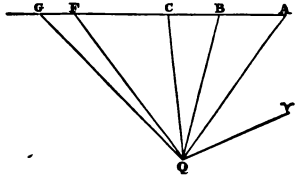
Si la altura de la Tierra en el ecuador superase a la altura en los polos en más de $17\frac{1}{6}$ millas, la materia terrestre sería más rara en la circunferencia que en el centro, y la precesión de los equinoccios debería aumentar debido a dicha altura, mientras debería disminuir debido a la rareza.

Ya hemos descrito el sistema del Sol, la Tierra, la Luna y los planetas; resta sólo añadir algunas cosas sobre los cometas.

LEMA IV

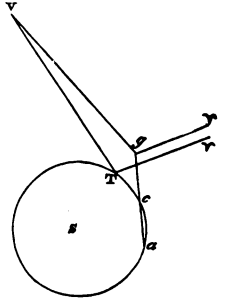
Los cometas están más arriba de la Luna y circulan por las regiones planetarias.

Al igual que la falta de paralaje diurna alejó a los cometas fuera y más allá de las regiones sublunares, de igual modo por la paralaje anual se llega a la convicción de su descenso a las regiones planetarias. Pues los cometas, que avanzan según el orden de los signos zodiacales, son todos al final de su aparición o muy lentos o retrógrados cuando la Tierra se halla entre ellos y el Sol; y mucho más veloces si la Tierra se halla en oposición. Y por el contrario, los que caminan contra el orden de los signos son más veloces al final de su aparición si la Tierra se halla entre ellos y El Sol; pero son mucho más lentos y hasta retrógrados si la Tierra se halla en las partes opuestas. Esto sucede sobre todo por el diferente movimiento de la Tierra según su sitio, como ocurre con los planetas, que según el movimiento de la Tierra vaya en la misma o contraria dirección, ahora parecen retrógrados, después muy lentos y otras veces muy rápidos. Si la Tierra marcha en la misma dirección del cometa y es transportado por un movimiento angular en torno al Sol tan veloz que hace que una recta que pase por la Tierra y por el cometa siempre converja en las regiones ulteriores al cometa, éste, visto desde la Tierra, aparecerá siempre retrógrado por su movimiento más lento; pero si la Tierra es transportada con movimiento más lento el movimiento del cometa (descontado el movimiento de la Tierra) resulta por lo menos más lento. Pero cuando la Tierra camina en dirección contraria, el cometa parece por ello más veloz. La distancia del cometa, en cambio, se obtiene a partir de la aceleración, de la retardación o del movimiento retrógrado del modo siguiente.



Sean ♈ QA, ♈ QB, ♈ QC, tres longitudes del cometa observadas al principio del movimiento y sea ♈ QF la última longitud observada, cuando el cometa deja de verse. Trácese la recta ABC, cuyas partes AB, BC están situadas entre las rectas QA y QB, QB y QC, y son además entre sí como los tiempos comprendidos entre las tres primeras observaciones. Prolónguese AC hasta G, de modo que AG sea a AB como el tiempo comprendido entre la primera y la última observación es al tiempo entre la primera y la segunda, y únanse QG. Y si el cometa se moviese en línea recta y la Tierra o estuviese en reposo o avanzase con movimiento uniforme también en línea recta, el ángulo ♈ QC sería la longitud del cometa en el momento de la última observación. Pues el án-

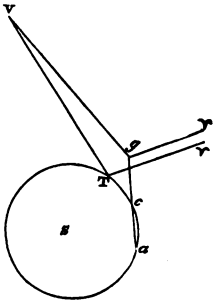
gulo FQG, que es la diferencia de longitudes, se debe a la desigualdad de los movimientos del cometa y de la Tierra. Pero este ángulo, si la Tierra y el cometa se mueven en sentidos contrarios, se suma al ángulo ♈ QG, y de este modo convierte al movimiento aparente del cometa en más rápido; pero si el cometa marcha hacia la misma dirección que la Tierra, se resta de dicho ángulo y convierte con ello al movimiento del cometa o en más lento o, incluso, en retrógrado, como ya he explicado. Surge, pues, este ángulo principalmente del movimiento de la Tierra, y por ello ha de considerarse con toda razón como la paralaje del cometa, dejando de lado tal vez algún incremento o decremento del mismo que pueda deberse a algún movimiento desigual del cometa en su propia órbita. Mas la distancia del cometa se infiere de dicha paralaje como sigue. Represente S al Sol, *ac*T a la eclíptica, *a* el lugar de la Tierra en la primera observación, *c* el lugar de la Tierra en la observación tercera, T el lugar de la Tierra en la observación última, y T♈ una línea recta trazada al principio de Aries. Tómese al ángulo ♈ TV igual al ángulo T QF, es decir, igual a la longitud del cometa cuando la Tierra se halla en T. Únanse *ac* y prolónguese hasta *g* de modo que *ag* sea a *ac* como AG a AC, y *g* será el lugar que ocuparía la Tierra en el momento de la última observación con un movimiento uniformemente continuo por la recta *ac*. Por ello, si se traza *g*♈ paralela a T♈ y se toma al ángulo ♈*g*V igual al ángulo ♈ QG, dicho ángulo ♈ *g*V será igual a la longitud del cometa visto desde el punto *g*; y el ángulo TV*g* será la paralaje debida a la traslación de la Tierra desde el punto *g* hasta el punto T: y, por consiguiente, V será el lugar del cometa en el plano de la eclíptica. Pero este punto V suele hallarse más bajo que la órbita de Júpiter.



Y lo mismo se infiere de la curvatura de la trayectoria de los cometas. Estos cuerpos se desplazan por círculos máximos prácticamente, cuando su movimiento es más rápido; pero al final de su curso, cuando la parte de movimiento aparente debida a la paralaje está en mayor proporción al movimiento aparente, se separan de dichos círculos, y siempre que la Tierra se mueve hacia una dirección, ellos se desvían hacia otra. Semejante deflexión se debe sobre todo a la paralaje, en cuanto que responde al movimiento de la Tierra; y su notable magnitud, según mis cálculos, sitúa a los cometas en el momento de desaparecer bastante por debajo de Júpiter. De donde se sigue que en los perigeos y perihelios, cuando están más cerca, descienden muchas veces más abajo de la órbita de Marte y de los planetas inferiores.

También se confirma la proximidad de los cometas por la luz de sus cabezas. Pues el brillo de un cuerpo celeste iluminado por el Sol y que se va alejando hacia lo remoto del cielo disminuye en razón de la cuarta potencia de la distancia: a saber, en razón cuadrada por el aumento de la distancia del cuerpo al Sol y en otra razón cuadrada por la disminución del diámetro aparente. De donde, si se da la cantidad de la luz y el diámetro aparente de un cometa se tendrá dada también la distancia, diciendo que su distancia será a la distancia de un planeta, directamente como la razón de un diámetro a otro e inversamente como la razón de la raíz cuadrada de la luz de uno a la raíz cuadrada de la luz del otro. Así, el diámetro mínimo de la cabellera del cometa de 1682,

observado por Flamsteed con un telescopio de 16 pies y medido con micrómetro era de 2' 0"; pero el núcleo o estrella central de la cabeza apenas ocupaba una décima parte de esa latitud, de suerte que su diámetro sólo era de 11" o 12". Pero en luz y claridad de su cabeza superaba a la cabeza del cometa de 1680, y competía con las estrellas de primera y segunda magnitud. Supongamos que Saturno, con su anillo, fuese cuatro veces más brillante: y puesto que la luz del anillo casi iguala a la luz del globo interior y el diámetro aparente del globo viene a ser de 21" aproximadamente, la luz, por tanto, del globo y del anillo juntas igualarán a la luz de un globo que fuese de 30" de diámetro: la distancia del cometa será a la distancia de Saturno como 1 a $\sqrt{4}$ inversamente y como 12" a 30" directamente, es decir, como 24 a 30 o como 4 a 5. Además, el cometa del año 1665, como lo atestigua Hewelcke, superaba en brillo a casi todas las estrellas fijas, incluso al mismo Saturno, quizá porque su color era mucho más vivo. Resultaba este cometa mucho más luminoso que el aparecido a finales del año anterior y que era comparado con las estrellas de primera magnitud. La anchura de la cabeza era casi de 6', pero el núcleo, comparado con los planetas mediante el telescopio era claramente menor que Júpiter y ora se juzgaba menor que el cuerpo interior de Saturno, ora igual a dicho cuerpo. Por consiguiente, al ser el diámetro de la cabeza de los cometas muy raramente superior a 8' o 12' y el diámetro del núcleo o estrella central ser sólo una décima o decimoquinta parte del diámetro de la cabeza, es evidente que estas estrellas son a lo sumo de la misma magnitud aparente que los planetas. Por lo cual, dado que su luz se pueda comparar a veces con la de Saturno, y hasta alguna vez superarla, está claro que todos los cometas en los perihelios se han de situar más abajo de Saturno o no muy por encima. Y se equivocan por completo quienes los alejan hasta las regiones de las fijas: pues con semejante solución no deberían ser iluminados por nuestro Sol más de lo que nuestros planetas lo son por las estrellas fijas.



Hemos tratado de estas cosas sin tener en cuenta el oscurecimiento de los cometas debido a ese humo abundante y espeso que rodea a la cabeza, apareciendo ésta siempre como velada por una nube. Pues cuanto más oscuro se torna el cuerpo debido a dicha nube, tanto más necesario es que esté más cerca del Sol para que la cantidad de luz que refleja emule a los planetas. Por ello es muy verosímil que los cometas desciendan bastante por debajo de la órbita de Saturno, como hemos observado por la paralaje. Y esto mismo se confirma magníficamente por las colas. Éstas, o se originan por la reflexión producida por el humo esparcido por el éter, o se originan de la luz de la cabeza. En el primer caso hay que disminuir la distancia de los cometas, para que el humo que sale continuamente de la cabeza no se halle propagado por espacios demasiado amplios y con una velocidad increíble. En el segundo caso hay que atribuir toda la luz, tanto de la cola como de la cabellera, al núcleo de la cabeza. Ahora bien, si imaginamos toda esa luz reunida y encerrada dentro del disco del núcleo con certeza, siempre que emita una cola máxima y luminosa, superará con mucho al brillo de Júpiter. Pues con un diámetro aparente menor emite más luz y, por ende, será mucho más iluminado por el Sol, con lo que estará también mucho más cerca del mismo Sol. E incluso, por este argumento, deben

situarse bajo la órbita de Venus las cabezas que se ocultan bajo el Sol y que, a veces, emiten colas enormes y muy brillantes a modo de tizones encendidos. Pues toda esa luz, si se supone reunida en la estrella, superaría a la propia Venus, por no decir a muchas Venus.

Y lo mismo, finalmente, se sigue de la luz de las cabezas que crece al alejarse los cometas desde la Tierra hacia el Sol y decrece al apartarse del Sol hacia la Tierra. De modo que el último cometa del año 1665 (según las observaciones de Hewelcke) desde el momento de su aparición perdía continuamente movimiento aparente y por ello ya había pasado de su perigeo; pero el brillo de su cabeza crecía no menos de día en día, hasta que el cometa dejó de verse cubierto por los rayos solares. El cometa de 1683 (observado por el mismo Hewelcke) a fines del mes de julio, al aparecer por primera vez, se movía muy lentamente, recorriendo en su órbita unos 40 o 45 minutos al día. Desde esas fechas su movimiento diario aumentó continuamente hasta el 4 de septiembre, en que alcanzó casi 5 grados. Luego durante todo este tiempo el cometa se acercaba a la Tierra. Cosa que también se infiere del diámetro de la cabeza medido con micrómetro: toda vez que Hewelcke lo fijó el 6 de agosto en tan sólo 6' 5", incluida la cabellera, mientras que en 2 de septiembre era de 9' 7". Por consiguiente, la cabeza al principio aparecía mucho menor que al final del movimiento, mientras que, sin embargo, al principio, en las proximidades del Sol, era mucho más luminosa que hacia el final, como dice el mismo Hewelcke. Por lo tanto, durante todo este tiempo, debido a su alejamiento del Sol, iba decreciendo en luminosidad, pese a su acercamiento hacia la Tierra. El cometa de 1618, hacia el mes de diciembre, y éste de 1680, hacia finales del mismo mes, se movían muy rápidamente, y por lo mismo estaban entonces en los perigeos. Pero el máximo resplandor de sus cabezas aconteció casi dos semanas antes, cuando acababan de salir de los rayos solares; mientras que el máximo resplandor de las colas un poco antes, en la mayor proximidad al Sol. La cabeza del cometa primero, según las observaciones de Cysat de 1 de diciembre (ahora ya en el perigeo) con poca menos magnitud, había decrecido mucho en brillo o nitidez luminosa. El 7 de enero, Kepler, inseguro ya de la cabeza del cometa, puso fin a la observación. El 12 de diciembre vio y observó Flamsteed la cabeza del segundo cometa a una distancia de nueve grados del Sol; cosa apenas concebible para una estrella de tercera magnitud. El 15 y 17 se presentó como una estrella de tercera magnitud, aunque disminuido su brillo por las nubes que brillaban junto al Sol poniente. El 26 de diciembre, moviéndose muy rápidamente, y casi hallándose en el perigeo, brillaba menos que la estrella de la boca de Pegaso, de tercera magnitud. El 3 de enero parecía una estrella de cuarta magnitud, el 9 de enero, de quinta magnitud, el 13 de enero desapareció por el resplandor de la Luna creciente. El 25 de enero apenas igualaba a las estrellas de séptima magnitud. Si a un lado y otro del perigeo se toman tiempos iguales, las cabezas, que en dichos tiempos se hallan en regiones distantes, deberían brillar igual por sus distancias iguales de la Tierra, y brillaban sin embargo máximamente hacia el lado del Sol mientras que hacia la otra parte del perigeo se desvanecían. Por tanto, por la gran diferencia de luz en uno y otro lugar, se infiere la gran proximidad del Sol y del cometa en el primer lugar. Pues la luz de los cometas suele ser regular, y parece máxima cuando las cabezas se mueven muy velozmente y se hallan, por tanto, en los perigeos; salvo en la medida en que es mayor en las cercanías del Sol.

COROLARIO 1. Por consiguiente, los cometas brillan con la luz que reflejan del Sol.

COROLARIO 2. También de lo dicho se sigue el motivo por el que los cometas son tan frecuentes en la región del Sol. Si se viesen en las regiones de más allá de Saturno, de-

berían aparecer frecuentemente en las regiones opuestas al Sol. Pues los que anduviesen por estos lugares serían más próximas a la Tierra y, en cambio, el Sol ocultaría a los demás interponiéndose ante ellos. Pero al repasar la historia de los cometas encuentro que se han visto cuatro o cinco veces más hacia el lado del hemisferio solar que hacia el opuesto, además de otros, sin duda no pocos, obscurecidos por la luz del Sol. Pero además, al descender hacia nuestras regiones ni emiten colas, ni son iluminados por el Sol lo bastante para que puedan ser observados a simple vista antes de que se hallen más cerca que el mismo Júpiter. Pero la mayor parte del espacio descrito con tan corto radio en torno al Sol cae del lado de la Tierra que mira hacia el Sol, y los cometas, en dicha mayor parte y como mucho más próximos al Sol, suelen ser iluminados en mayor grado.

COROLARIO 3. Con ello también es evidente que los cielos se hallan desprovistos de resistencia. Pues los cometas, que siguen trayectorias oblicuas y a veces contrarias al curso de los planetas, se mueven libremente en todas direcciones, y conservan sus movimientos por tiempo muy largo, incluso contra el curso de los planetas. Si no me engaño, son una especie de planetas y retornan en órbita con un movimiento perpetuo. Pues la afirmación de algunos autores de que se trata de meteoros, basando su argumento en los cambios continuos de las cabezas, parece carecer de fundamento. Las cabezas de los cometas están rodeadas de enormes atmósferas, y las atmósferas más bajas deben ser más densas. De donde, las nubes no son los mismos cuerpos de los cometas en los que se observan dichos cambios. Así también la Tierra, vista desde los planetas, brillará sin duda con la luz de sus nubes, mientras que el cuerpo sólido apenas será visible bajo las nubes. También los cinturones de Júpiter se forman en las nubes de aquel planeta y cambian entre sí de lugar, dejando apenas verse el cuerpo sólido de Júpiter a través de ellas. Mucho más los cuerpos de los cometas habrán de esconderse bajo sus atmósferas más grandes y más densas.

PROPOSICIÓN XL. TEOREMA XX

Los cometas se mueven en secciones cónicas que tienen los focos en el centro del Sol, y con radios trazados al Sol describen áreas proporcionales a los tiempos.

Es evidente por el corolario 1 de la proposición XIII del libro primero comparado con las proposiciones VIII, XII y XIII del libro tercero.

COROLARIO 1. De aquí que, si los cometas giran en órbita, las órbitas serán elipses, y los tiempos periódicos serán a los tiempos periódicos de los planetas en razón de la potencia $\frac{2}{3}$ de los ejes principales. Y por ello los cometas que hacen la mayor parte de su recorrido en regiones ultra planetarias y describen por ello órbitas con ejes mayores giran con mayor lentitud. De suerte que si el eje de la órbita de un cometa es cuatro veces mayor que el eje de la órbita de Saturno, el tiempo de revolución del cometa será al tiempo de revolución de Saturno, es decir, a 30 años, como $4\sqrt{4}$ (o sea, 8) a 1, y, por tanto, será de 240 años.

COROLARIO 2. Pero las órbitas serán tan próximas a parábolas que en su lugar pueden utilizarse parábolas sin errores sensibles.

COROLARIO 3. Y, por lo mismo (por el corolario 7 de la proposición XVI del libro primero), la velocidad de todo cometa será a la velocidad de un planeta cualquiera que

gire en círculo en torno al Sol como la raíz cuadrada de la doble distancia del planeta al centro del Sol a la distancia del cometa al centro del Sol muy aproximadamente. Supongamos que el radio del Orbe Máximo, o sea, que el semidiámetro máximo de la elipse en que gira la Tierra tiene 100000000 partes: la Tierra con su movimiento diario medio describirá 1720212 de estas partes, y con su movimiento horario 71675$\frac{1}{2}$ partes. Por tanto, un cometa a la misma distancia que la Tierra del Sol, con una velocidad que fuese a la velocidad de la Tierra como $\sqrt{2}$ a 1, describirá con su movimiento diario 2432747 partes, y con su movimiento horario 101364$\frac{1}{2}$ partes. Pero a distancias mayores o menores, tanto el movimiento diario como el horario será respecto a este movimiento diario y horario inversamente como la raíz cuadrada de las distancias, y, por tanto, está dado.

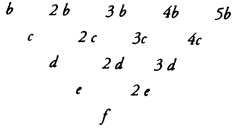
COROLARIO 4. Por consiguiente, si el «latus rectum» de la parábola es cuatro veces mayor que el radio del Orbe Máximo, y el cuadrado de dicho radio se supone que es de 100000000 partes, el área que el cometa describe cada día con un radio trazado al Sol será de 1216373$\frac{1}{3}$ partes, y en cada hora dicha área será de 5068$\frac{1}{2}$ partes. Pero si el «latus rectum» fuera mayor o menor en una razón cualquiera, el área diaria y horaria será mayor o menor en razón de la raíz cuadrada de esa razón.

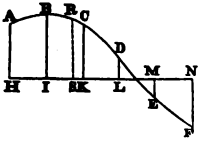
LEMA V

Hallar una línea curva de especie parabólica que pase por cuantos puntos dados se quiera.

Sean tales puntos A, B, C, D, E, F, etc., y desde ellos hasta una recta cualquiera de posición dada HN háganse descender otras tantas perpendiculares, AH, BI, CK, DL, EM, FN.

CASO 1. Si los intervalos HI, IK, KL, etc., entre los puntos H, I, K, L, M, N, son iguales, tomemos las primeras diferencias de las perpendiculares AH, BI, CK, etc., como b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, etc., las segundas como c, $2c$, $3c$, $4c$, etc., las terceras como d, $2d$, $3d$, etc., esto es, de modo que AH − BI = b, BI − CK = $2b$, CK − DL = $3b$, DL + EM = $4b$, − EM + FN = $5b$, etc., entonces, $b - 2b = c$, etc., hasta llegar así a la última diferencia que aquí es f.





Elevando después una perpendicular cualquiera RS que sería una ordenada aplicada a la curva que se busca: con el fin de hallar su longitud supongamos que los intervalos HI, IK, KL, LM, etc., son unidades, y escribe AH = a, − HS = p, $\frac{1}{2}p \times$ − IS = q, $\frac{1}{3}q \times$ SK = r, $\frac{1}{4}r \times$ + SL = s, $\frac{1}{5}s \times$ + SM = t, siguiendo así hasta la penúltima perpendicular

que es ME y anteponiendo los signos negativos a los términos HS, IS, etc., situados hacia el lado A del punto S, y los signos positivos a los términos SK, SL, etc., que están situados hacia el otro lado del punto S. Y si los signos están bien respetados, será RS = $a + bp + cq + dr + es + ft$, etc.

CASO 2. Pero si los intervalos HI, IK, etc., entre los puntos H, I, K, L, etc., fuesen desiguales, toma a b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, como primeras diferencias de las perpendiculares AH, BI, CK, etc., separadas por los intervalos entre perpendiculares; y a c, $2c$, $3c$, $4c$, etc., como segundas diferencias separadas por cada dos intervalos, y a d, $2d$, $3d$, etc., como terceras diferencias separadas por intervalos de tres en tres, a e, $2e$, etc., como cuartas diferencias divididas por los intervalos de cuatro en cuatro, y así sucesivamente; es decir, de modo que $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, etc., después $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$, etc. y luego $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$, etc. Halladas las diferencias, escribe AH = a, – HS = p, $p \times -$ IS = q, $q \times +$SK = r, $r \times +$SL = s, $s \times +$SM = t; siguiendo así hasta la penúltima perpendicular ME, la ordenada RS será igual a la suma $a + bp + cq + dr + es + ft$, etc.

COROLARIO. De aquí que las áreas de todas las curvas puedan calcularse muy aproximadamente. Pues si se hallan unos puntos de la curva a cuadrar, y se imagina que por esos puntos pasa una parábola, el área de esa parábola será la misma que la de la curva a cuadrar muy aproximadamente. Y una parábola se puede cuadrar siempre geométricamente por métodos bien conocidos.

LEMA VI

A partir de algunos lugares observados de un cometa, hallar su lugar en un momento cualquiera intermedio dado.

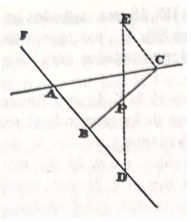
Sean HI, IK, KL, LM los tiempos entre observaciones (en la figura anterior), sean HA, IB, KC, LD, ME cinco longitudes observadas del cometa, HS el tiempo dado entre la observación primera y la longitud buscada. Y si por los puntos A, B, C, D, E, se supone trazada la curva regular ABCDE, y por el lema anterior se halla su ordenada RS, será RS la longitud buscada.

Con el mismo método sobre la base de cinco latitudes observadas se halla la latitud en un momento dado.

Si las diferencias de longitudes observadas son pequeñas, tales como 4 o 5 grados solamente, bastarán tres o cuatro observaciones para hallar las nuevas longitudes o latitudes. Pero si las diferencias son mayores, por ejemplo de 10 o 20 grados, habrá que disponer de cinco observaciones.

LEMA VII

Por un punto dado P trazar una recta BC cuyas partes PB, PC, cortadas por dos rectas AB, AC de posición dada, se hallen entre sí en una razón dada.

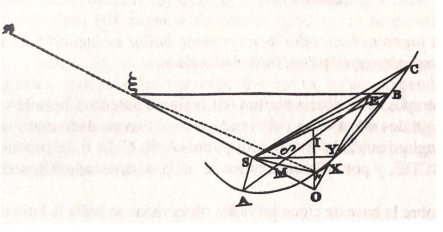


Desde dicho punto P hasta AB una cualquiera de las dos rectas trácese otra recta cualquiera PD, y prolónguese ésta hacia la otra recta AC hasta E, de modo que PE sea a PD en la dicha razón dada. Sea EC paralela a la recta AD; y si se traza CPB, entonces PC será a PB como PE a PD. Q.E.F.

LEMA VIII

Sea ABC una parábola con foco en S. Con la cuerda AC bisecada en I sepárese el segmento ABCI, cuyo diámetro es IM y cuyo vértice es μ. Sobre la prolongación de Iμ tómese MO igual a la mitad de la propia Iμ. Únase OS y prolónguese ésta hasta ξ de modo que Sξ sea igual a 2SO. Y si el cometa B se mueve por el arco CBA, y se traza ξB secante de AC en E: digo que el punto E separará de la cuerda AC el segmento AE muy aproximadamente proporcional al tiempo.

Pues únase EO cortando al arco parabólico ABC en Y, y trácese μX tangente a dicho arco en el vértice μ y que se encuentre con la línea EO en X; y el área curvilínea AEXμA será al área curvilínea ACYμA como AE a AC. Por lo tanto, dado que el triángulo ASE es al triángulo ASC en esa misma razón, el área total ASEXμA será al área total ASCYμA como AE a AC. Pero como ξO es a SO como 3 a 1, y EO a XO en la misma razón, SX será paralela a EB, y por tanto, si se une BX, el triángulo SEB será igual al triángulo XEB. Por lo cual, si al área ASEXμA se le añade el triángulo EXB, y de la suma se resta el triángulo SEB, el área ASBXμ. A permanecerá igual al área ASEXμA, y por lo mismo seguirá siendo al área ASCYμA como AE a AC. Pero el área ASBYμA es muy aproximadamente igual al área ASBXμA, y el área ASBYμA es al área ASCYμA como el tiempo del arco descrito AB al tiempo del arco total descrito AC. Y por tanto, AE es a AC en la razón de los tiempos muy aproximadamente. Q.E.D.



Corolario. Cuando el punto B cae en el vértice μ de la parábola, AE está a AC exactamente en la razón de los tiempos.

ESCOLIO

Si unimos μξ cortando a AC en δ, y sobre ella se toma ξn de tal modo que sea a μB como 27MI a 16Mμ, trazando Bn, ésta cortará a la cuerda AC en razón de los tiempos más exactamente que antes. Pero el punto *n* debe estar más allá del punto ξ, si el punto B

dista más del vértice principal de la parábola que el punto μ; y debe estar más acá si dista menos de dicho vértice.

LEMA IX

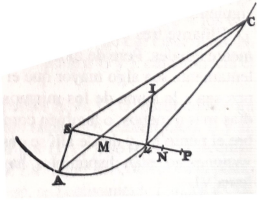
Las rectas $I\mu$ y μM y la longitud $\frac{AIC}{AS\mu}$ son iguales entre sí.

Pues $4S\mu$ es el «latus rectum» de la parábola correspondiente al vértice μ.

LEMA X

Si $S\mu$ se prolonga hasta N y P de modo que μN sea la tercera parte de μI, y SP sea a SN como SN a $S\mu$, un cometa, en el tiempo en que describe el arco $A\mu C$ y desplazándose con una velocidad que sea siempre igual a la que posee a la altura SP, describirá una longitud igual a la cuerda AC.

Pues si un cometa, en el mencionado tiempo y con la velocidad que tiene en μ, avanza uniformemente sobre una recta tangente a la parábola en μ, el área que describiría con un radio trazado al punto S sería igual al área parabólica $ASC\mu$. Por consiguiente, el contenido bajo la longitud descrita en la tangente y bajo la longitud $S\mu$ sería al contenido bajo las longitudes AC y SM, como el área $ASC\mu$ al triángulo ASC, es decir, como SN a SM. Por lo cual, AC es a la longitud descrita en la tangente como $S\mu$ a SN. Pero al ser la velocidad del cometa a la altura SP (por el corolario 6 de la proposición XVI del libro primero) respecto a su velocidad a la altura $S\mu$ inversamente como la raíz cuadrada de SP a $S\mu$, esto es, como la razón de Sp a SN, la longitud descrita con esa velocidad y en los mismos tiempos será a la longitud descrita en la tangente como $S\mu$ a SN. Por consiguiente, dado que AC y la longitud descrita con esta nueva velocidad se hallan en la misma razón respecto a la longitud descrita en la tangente, son iguales entre sí. Q.E.D.

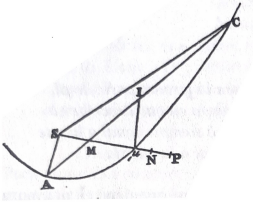


COROLARIO. Luego un cometa con la velocidad que tiene a la altura $S\mu + \frac{2}{3}I\mu$ recorrerá en el mismo tiempo la cuerda AC, muy aproximadamente.

LEMA XI

Si un cometa privado de todo movimiento se dejare caer hacia el Sol desde la altura SN, o $S\mu + \frac{2}{3}I\mu$, y fuese urgido hacia el Sol siempre uniformemente por la misma fuerza que le urgía al principio; el tal cometa, en la mitad de tiempo en el que describía en su órbita el arco AC, describirá ahora en su descenso un espacio igual a la longitud $I\mu$.

Pues el cometa, en el tiempo en que describa el arco parabólico AC, en ese mismo tiempo y con la misma velocidad que tiene a la altura SP (por el lema anterior) describirá la cuerda AC y, por tanto (por el corolario 7 de la proposición XVI del libro primero), en el mismo tiempo, girando con la fuerza de su gravedad en un círculo, cuyo diámetro fuese SP, describiría un arco cuya longitud sería a la cuerda AC del arco parabólico, como la raíz cuadrada de uno a la de dos. Y, por consiguiente, con el peso que tiene hacia el Sol a la altura SO y cayendo hacia el Sol desde esa altura, describirá en la mitad de dicho tiempo (por el corolario 9 de la proposición IV del libro primero) un espacio igual al cuadrado de la semicuerda dividido por el cuádruplo de la altura SP, es decir, el espacio $\frac{AI^2}{4SP}$. Ahora bien, como el peso del cometa hacia el Sol a la altura SN es al peso del mismo hacia el Sol a la altura SP como SP a Sμ, el cometa con el peso que tiene a la altura SN, en el mismo tiempo, cayendo hacia el Sol, describirá el 2 espacio $\frac{AI^2}{4S\mu}$, es decir, un espacio igual a la longitud Iμ o Mμ. Q.E.D.



PROPOSICIÓN XLI. PROBLEMA XXI

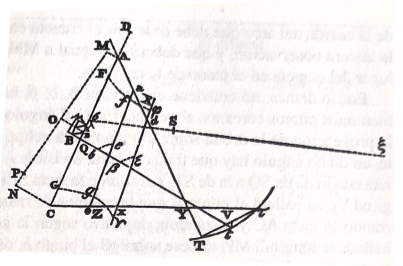
Determinar la trayectoria de un cometa que se mueve en una parábola a partir de tres observaciones dadas.

He abordado este problema verdaderamente difícil de muchas formas y propuse en el libro primero algunos problemas relativos a su resolución. Más tarde se me ocurrió la siguiente solución un poco más sencilla.

Elíjanse tres observaciones separadas entre sí por espacios de tiempo aproximadamente iguales. Pero de modo que el intervalo de tiempo en que el cometa se mueve más lentamente sea algo mayor que el otro, quizá de modo que la diferencia entre los tiempos sea a la suma de los mismos como la suma de los dichos tiempos a seiscientos días más o menos; o también como si el punto E (en la figura del lema VIII) cayese sobre el punto M, y desde allí se desplazase hacia I más bien que hacia A. Si tales observaciones no están disponibles, hay que hallar un nuevo lugar del cometa por medio del lema VI.

Representen S al Sol, T, t, τ tres lugares de la Tierra sobre el Orbe Máximo, TA, tB, τC, tres longitudes observadas del cometa, V el tiempo entre la primera y la segunda observación, W el tiempo entre la segunda y la tercera observación, X la longitud que el cometa puede alcanzar a describir en todo el tiempo dicho con la velocidad que tiene a la distancia media de la Tierra al Sol, y que tendrá que hallarse (por el corolario 3 de la proposición XL del libro tercero), y tV una perpendicular sobre la cuerda Tτ. Sobre la longitud media observada tB tómese un lugar cualquiera B como lugar del cometa en el plano de la eclíptica y desde él trácese hasta el Sol S la línea BE que sea a la sagita tV como el producto de SB por St^2 es al cubo de la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos, lados son SB y la tangente de la latitud del cometa en la segunda observación a

un radio *t*B. Trácese por el punto E (por el lema VII) la recta AEC, cuyas partes AE y EC terminan en las rectas TA y τC y deben ser entre sí como los tiempos V y W: y entonces A y C serán los lugares del cometa en la primera y tercera observación sobre el plano de la eclíptica muy aproximadamente, siempre que B sea su lugar de la segunda observación asumido correctamente.



Sobre AC, bisecada en I, elévese la perpendicular I*i*. Trácese por el punto B la línea invisible B*i* paralela a la propia AC. Únase la línea invisible S*i* secante de AC en λ complétese el paralelogramo $i\mathrm{I}\lambda\mu$. Tómese la igual a $3\mathrm{I}\lambda$, y por el Sol S trácese la línea también oculta $\sigma\xi$ igual a $3\mathrm{S}\sigma + 3i\lambda$. Y ahora, borrando las letras A, E, C, I, tracemos desde el punto B hacia el punto ξ una nueva línea invisible BE, que sea a la primera BE en razón cuadrada de la distancia BS a la cantidad $\mathrm{S}\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. De nuevo trácese por el punto E la recta AEC en la misma proporción que antes, o sea, de modo que sus partes AE y EC estén entre sí como los tiempos V y W entre observaciones. Y A y C serán los lugares del cometa más exactamente.

Sobre AC, bisecada en I, elévense las perpendiculares AM, CN, IO; de las cuales AM y CN sean tangentes de las latitudes en las observaciones primera y tercera con radios TA y τC. Únase MN cortando a 10 en O. Constrúyase el rectángulo $i\mathrm{I}\lambda\mu$, como antes. Sobre la prolongación de IA tómese ID igual a $\mathrm{S}\mu + \frac{2}{3}i\lambda$. Después, sobre MN hacia N tómese MP, que sea respecto a la longitud X hallada antes, como la raíz cuadrada de la distancia media de la Tierra al Sol (o semidiámetro del Orbe Magno) a la distancia OD. Si el punto P cae en el punto N, serán A, B, C, los tres lugares del cometa por los que debe circular su órbita en el plano de la eclíptica. Pero si el punto P no cae en el punto N, sobre la recta AC tómese CG igual a NP de modo que los puntos G y P caigan hacia el mismo lado de la recta NC.

Con el mismo método con el que se hallaron los puntos E, A, C, G, partiendo de un punto B supuesto, hállense, partiendo de otros puntos supuestos cualesquiera *b* y β, unos nuevos puntos *e*, *a*, *c*, *g* y ε, α, χ, γ. Después, si por G, *g*, γ, se traza la circunferencia del círculo C*g*γ, secante de la recta τC en Z, será Z el lugar del cometa en el plano de la eclíptica. Y si sobre AC, *ac*, $\alpha\chi$ se toman AF, *af*, $\alpha\phi$, respectivamente iguales a CG, *cg*, $\chi\gamma$ y por los puntos F, *f*, ϕ, se traza la circunferencia del círculo F*f*ϕ secante en X de la recta AT, será el punto X otro lugar del cometa en el plano de la eclíptica. En los puntos X y Z elévense tangentes de las latitudes del cometa con radios TX y *t*Z; y se tendrán dos lugares del cometa en su propia órbita. Finalmente (por la proposición XIX del libro primero), con foco en S trácese por dichos dos lugares una parábola y ésta será la trayectoria del cometa. Q.E.I.

La demostración de esta construcción se sigue de los lemas: toda vez que la recta AC es cortada en E en razón de los tiempos, por el lema VII, como se exige por el lema VIII: y BE, por el lema XI, sea la parte de la recta BS o Bξ que yace en el plano de la eclíptica entre el arco ABC y la cuerda AEC; y MP (por el corolario del lema X) es la longitud

de la cuerda del arco que debe describir el cometa en su órbita propia entre la primera y la tercera observación, y que debería ser igual a MN, siempre que B fuere el verdadero lugar del cometa en el plano de la eclíptica.

Por lo demás, no conviene elegir para B, *b*, *β*, unos puntos cualesquiera, sino más bien unos puntos cercanos al verdadero. Si el ángulo AQ*t*, en el cual corta a la recta *t*B la proyección de la órbita sobre el plano de la eclíptica, se conociese aproximadamente, en dicho ángulo hay que trazar la recta invisible AC, la cual ha de ser a $\frac{4}{5}$Tτ como la raíz cuadrada de SQ a la de ST. Y trazando la recta SEB, cuya parte EB sea igual a la longitud V*t*, se hallará el punto B que habríamos de manejar la primera vez. Después, borrando la recta AC y trazándola de nuevo según la precedente construcción y además hallada la longitud MP, tómese sobre *t*B el punto *b*, de modo tal que, si TA y τC son secantes entre sí en Y, la distancia Y*b* sea a la distancia YB en una razón compuesta de la razón de MP a MN y de la razón de la raíz cuadrada de SB a la de S*b*. Y con el mismo método habrá de hallarse el tercer punto *β*, y, si es preciso, repetir por tercera vez la operación. Pero con este método, bastarán dos operaciones como mucho. Pues si la distancia B*b* resultase muy pequeña, una vez hallados los puntos *F*, *f*, y *G*, *g*, trazando las rectas F*f* y G*g* cortarán a TA y τC en los puntos buscados X y Z.

EJEMPLO

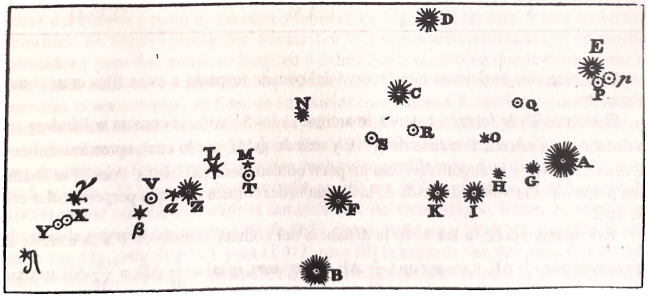
Propóngase el cometa del año 1680. Su movimiento, observado por Flamsteed y calculado a partir de las observaciones y corregido por Halley a partir de las mismas observaciones, ofrece la siguiente tabla.

	Tiempo			*El cometa*	
	Aparente	*Verdadero*	*Longitud del Sol*	*Longitud*	*Latitud norte*
	h m	h m s	° ' "	° ' "	° ' "
1680, *dic.* 12	4,46	4,46,00	♐ 1,51,23	♐ 6,32,30	8,28,00
21	6,32½	6,36,59	11,06,44	♒ 5,08,12	21,42,13
24	6,12	6,17,52	14,09,26	18,49,23	25,23, 5
26	5,14	5,20,44	16,09,22	28,24,13	27,00,52
29	7,55	8,03,02	19,19,43	♓ 13,10,41	28,09,58
30	8,02	8,10,26	20,21,09	17,38,20	28,11,53
1681, *ene.* 5	5,51	6,01,38	26,22,18	♈ 8,48,53	26,15, 7
9	6,49	7,00,53	♒ 0,29,02	18,44,04	24,11,56
10	5,54	6,06,10	1,27,43	20,40,50	23,43,52
13	6,56	7,08,55	4,33,20	25,59,48	22,17,28
25	7,44	7,58,42	16,45,36	♉ 9,35,00	17,56,30
30	8,07	8,21,53	21,49,58	13,19,51	16,42,18
feb. 2	6,20	6,34,51	24,46,59	15,13,53	16,04, 1
5	6,50	7,04,41	27,49,51	16,59,51	15,27, 3

A estas observaciones añádanse algunas nuestras.

	Tiempo aparente	*El cometa*	
		Longitud	*Latitud norte*
	h m	° ' "	° ' "
1681, *feb.* 25	8,30	♉ 26,18,35	12,46,46
27	8,15	27,04,30	12,36,12
mar. 1	11,0	27,52,42	12,23,40
2	8,0	28,12,48	12,19,38
5	11,30	29,18, 0	12,03,16
7	9,30	♊ 0,04,	11,57, 0
9	8,30	0,43, 4	11,45,52

Estas observaciones fueron hechas con un telescopio de siete pies y con micrómetro e hilos colocados en el foco del telescopio; mediante dichos instrumentos determinamos tanto las posiciones de las fijas entre ellas como las posiciones del cometa respecto a las fijas. Represente A la estrella de cuarta magnitud del talón izquierdo de Perseo (Bayer, *o*), B la estrella de tercera magnitud siguiente en el pie izquierdo (Bayer, *ζ*), y C la estrella de sexta magnitud (Bayer, *η*) en el talón del mismo pie, E, F, G, H, I, K,



L, M, N, O, Z, α, β, γ, δ, las otras estrellas menores del mismo pie. Y sean *p*, P, Q, R, S, T, V, X, los lugares del cometa en las observaciones descritas más arriba; y siendo la distancia AB de $80\frac{7}{12}$ partes, AC era de $52\frac{1}{4}$, BC de $58\frac{5}{6}$, AD de $57\frac{5}{12}$, BD de $82\frac{6}{11}$, CD de $23\frac{2}{3}$, AE de $29\frac{4}{7}$, CE de $57\frac{1}{2}$, DE de $49\frac{11}{12}$, AI de $27\frac{7}{12}$, BI de $52\frac{1}{6}$, CI de $36\frac{7}{12}$, DI de $53\frac{5}{11}$, AK de $38\frac{2}{3}$, BK de 43, CK de $31\frac{5}{9}$, FK de 29, FB de 23, FC de $36\frac{1}{4}$, AH de $18\frac{6}{7}$, DH de $50\frac{7}{8}$, BN de $46\frac{5}{12}$, CN de $31\frac{1}{3}$, BL de $45\frac{5}{12}$, NL de $31\frac{5}{7}$. HO era a HI como 7 a 6 y prolongada pasaba por entre las estrellas D y E, de suerte que la distancia de la estrella D desde esa recta resultará de $\frac{1}{6}$CD. LM era a LN como 2 a 9 y, prolongada, pasaba por la estrella H. Con éstas se determinaban las posiciones de las fijas entre ellas.

Más tarde Pound, de entre los nuestros, ha observado de nuevo las posiciones de estas fijas entre ellas y consignó en la siguiente tabla sus longitudes y latitudes.

Estrellas fijas	*Longitudes*	*Latitud norte*
	° ' "	° ' "
A	26,41,50	12, 8,36
B	28,40,23	12,17,54
C	27,58,30	12,40,25
E	26,27,17	12,52, 7
F	28,28,37	11,52,22
G	26,56,08	12, 4,58
H	27,11,45	12, 2, 1
I	27,25, 2	11,53,26
K	27,42, 7	11,53,26
L	29,33,34	12, 7,48
M	29,18,54	12, 7,20
N	28,48,29	12,31, 9
Z	29,44,48	11,57,13
α	29,52, 3	11,55,48
β	0, 8,23	11,48,56
γ	0,40,10	11,55,18
δ	1, 3,20	11,30,42

Pues bien, las posiciones que observé del cometa respecto a estas fijas eran como sigue.

El viernes 25 de febrero, calendario antiguo, a las $8\frac{1}{2}$ p.m., el cometa hallándose en *p* distaba de la estrella E menos de $\frac{3}{13}$ AE y más de $\frac{3}{14}$AE, por lo cual, aproximadamente distaba $\frac{3}{14}$ AE; y el ángulo A*p*E era un poco obtuso, pero casi recto. Pues si se abatía una perpendicular sobre *p*E desde A, la distancia del cometa de dicha perpendicular era de $\frac{1}{5}$pE.

Esa misma noche, a las $9\frac{1}{2}$ h. la distancia del cometa situado en P a la estrella E era mayor que $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$AE, y menor que $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ AE. y por tanto, igual a $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ AE, o $\frac{8}{39}$AE aproximadamente. Pues la distancia del cometa desde la perpendicular trazada desde la estrella A sobre la recta PE era de $\frac{4}{5}$PE.

El domingo 27 de febrero a las $8\frac{1}{4}$ p.m. estando el cometa en Q distaba de la estrella O una distancia igual a la de las estrellas O y H, y la recta QO, prolongada, pasaba entre las estrellas K y B. No pude, debido a las nubes, determinar más exactamente la posición de dicha recta.

El martes 1 de marzo a las 11 p.m., con el cometa en R, se hallaba situado exactamente entre las estrellas K y C, y la parte CR de la recta CRK era algo mayor que $\frac{1}{3}$CK, y un poco menor que $\frac{1}{3}$CK + $\frac{1}{16}$CR y, por tanto, igual a $\frac{1}{3}$ CK + $\frac{1}{16}$CR, o también $\frac{16}{45}$CK.

El miércoles 2 de marzo, a las 8 p.m., con el cometa en S la distancia a la estrella C era de $\frac{4}{9}$FC aproximadamente. La distancia de la estrella F a la prolongación de la rec-

ta CS era de $\frac{1}{24}$FC; y la distancia de la estrella B de dicha recta era cinco veces mayor que la distancia de la estrella F. Asimismo, la prolongación de la recta NS pasaba entre las estrellas H y 1, pasando cinco o seis veces más cerca de H que de 1.

El sábado 5 de marzo, a las $11\frac{1}{2}$ p.m., con el cometa en T, la recta MT era igual a $\frac{1}{2}$ML, y la prolongación de la recta LT pasaba entre B y F, cuatro o cinco veces más cerca de F que de B, separando de BF una quinta o sexta parte de la misma hacia F. Y la prolongación de MT pasaba por fuera del espacio BF hacia el lado de la estrella B, cuatro veces más cerca de B que de F. M era una estrella muy pequeña que apenas se divisaba por el telescopio, y L era una estrella mayor, como de octava magnitud.

El lunes 7 de marzo, a las $9\frac{1}{2}$ p.m., con el cometa en V, la prolongación de la recta Vα pasaba entre B y F, segregando hacia F $\frac{1}{10}$ de BF, y era respecto a la recta Vβ como 5 a 4. Y la distancia del cometa de la recta $\alpha\beta$ era $\frac{1}{2}$Vβ.

El miércoles 9 de marzo, a las $8\frac{1}{2}$ p.m., con el cometa en X, la recta γX era igual a $\frac{1}{4}\gamma\delta$, y la perpendicular trazada desde la estrella δ a la recta γX era $\frac{2}{5}\gamma\delta$.

Esa misma noche, a las 12, con el cometa en Y, la recta γY era igual a $\frac{5}{16}\gamma\delta$, o un poco menor, quizá $\frac{5}{16}\gamma\delta$, y la perpendicular trazada desde la estrella δ hasta la recta γY era igual a $\frac{1}{6}\gamma\delta$ o $\frac{1}{7}\gamma\delta$ muy aproximadamente. Pero por la cercanía al horizonte apenas se podía ver el cometa, ni tampoco su lugar se podía determinar con tanta precisión como en las observaciones anteriores.

Con base en estas observaciones mediante la construcción de figuras y mediante cálculos obtuve las longitudes y latitudes del cometa, y nuestro Pound corrigió los lugares del cometa a partir de las correcciones de los lugares de las fijas, y más arriba hemos dado los lugares corregidos. Me serví de un micrómetro construido con no mucha delicadeza, pero los errores de longitud y latitud (en la medida en que se deban a nuestras observaciones) escasamente superan un minuto. Por otra parte, el cometa (según nuestras observaciones) al final de su movimiento empezó a desviarse notablemente hacia el norte desde el paralelo en que había estado desde finales del mes de febrero.

Pero ahora vayamos a la determinación de la órbita del cometa; de las observaciones descritas hasta aquí seleccioné tres, realizadas por Flamsteed en diciembre 21, enero 5, y enero 25. A partir de ellas hallé que S*t* era 9842,1 partes y V*t* 455 partes de 10000 en que estuviera dividido el semidiámetro del Orbe Magno. Entonces, suponiendo para la primera operación a *t*B de 5657 partes, hallé para SB 9747, para BE la primera vez 412, para Sμ 9503, para iλ 413: para BE la segunda vez 421, para OD 10186, para X 8528,4, MP 8450, MN 8475, NP 25. De donde, obtuve para la segunda operación *tb* 5640. Y mediante esta operación hallé por fin las distancias TX 4775 y *t*Z 11322. Definiendo la órbita con estos datos, hallé sus nodos, el descendiente en ♋ y el ascendente en ♈ 1° 53'; la inclinación de su plano respecto al de la eclíptica de 61° $20\frac{1}{13}$; su vértice (o perihelio del cometa) distaba del nodo 8° 38', y se hallaba en ♐, 27° 43' latitud sur; mientras su «latus rectum» era de 236,8 y el área descrita cada día con un radio trazado al Sol era de 93585, suponiendo el cuadrado del semidiámetro del Orbe Magno de 100000000; y el cometa caminó por esta órbita siguiendo el orden de los signos y se halló en el vértice de la órbita o perihelio el 8 de diciembre a las Oh. 4' p.m. Todo esto lo determiné mediante escala de partes iguales y cuerdas de ángulos obtenidas de la tabla de senos naturales gráficamente, construyendo un dibujo lo bastante grande como para que el semidiámetro del Orbe Máximo (de 10000 partes) fuese casi igual a 163 pulgadas de pie inglés.

Finalmente, para cerciorarme de si el cometa se movía por una órbita así hallada, deduje mediante operaciones, en parte aritméticas y en parte gráficas, los lugares del cometa en dicha órbita en los momentos de algunas observaciones, como se pueden ver en la tabla siguiente.

	El cometa						
	Dist. al Sol	*Long. calc.*	*Latit. calc.*	*Long. observ.*	*Latit. observ.*	*Difer. de long.*	*Difer. de latit.*
Dic. 12	2792	6° 32'	8° 18½	6' 31½	8° 26	+1	−7½
29	8403	13,13⅔	28,00	13,11¾	28,10 1/12	+2	−10 1/12
Feb. 5	16669	17,00	15,29⅔	16,59⅞	15,27⅖	+0	+2¼
Mar. 5	21737	29,19¾	12, 4	29,20⅞	12,03½	−1	+1½

Pero, más tarde, nuestro Halley determinó mediante cálculo aritmético la órbita con mayor exactitud que la permitida por las descripciones de líneas; y en verdad vino a mantener el lugar de los nodos en ♋ y ♌ 1° 53', la inclinación del plano de la órbita respecto a la eclíptica de 61° 20½' y el momento del perihelio del cometa en diciembre, 8d. 0h. 4': por otra parte, la distancia del perihelio al nodo ascendente al medirla halló que era de 9° 20', y el «latus rectum» de la parábola de 2430 partes, siendo la distancia media de la Tierra al Sol de 100000 partes. A partir de estos datos, haciendo un cálculo aritmético muy exacto, calculó los lugares del cometa en los momentos de la observación como muestra la tabla de la página siguiente.

También apareció este cometa en el mes de noviembre precedente y fue observado en Coburgo de Sajonia por Gottfried Kirch los días cuatro, seis, y once de dicho mes, calendario antiguo; y de las posiciones del mismo respecto a las estrellas fijas cercanas, posiciones observadas con bastante exactitud gracias a un telescopio a veces de dos pies y a veces de diez, junto con la diferencia de diez grados entre Coburgo y Londres y los lugares de las fijas observados por nuestro Pound, determinó nuestro Halley los lugares del cometa como sigue.

Nov. 3d. 17h. 2', en el tiempo aparente de Londres, el cometa estaba en ☊ 29° 51' con latitud boreal 1° 17'45".

Nov. 5d. 15h. 58', el cometa estaba en ♍ 3° 23' con latitud boreal 1° 6'.

Nov. 10d. 16h. 31', el cometa distaba igual de las estrellas de Leo σ y τ de Bayer, pero aún no alcanzaba la línea que une a ambas estrellas, aunque distaba poco de ella. En el catálogo de estrellas de Flamsteed α estaba entonces ♍ 14° 15', con latitud boreal de 1° 41', casi, mientras τ estaba ♍ 17° 3½', con una latitud austral de 0° 34'. El punto medio entre estas estrellas ♍ 15° 39¼' con latitud boreal de 0° 33½'. Sea la distancia del cometa a la susodicha línea de 10' o 12' aproximadamente, y la diferencia de las longitudes del cometa y de dicho punto medio será de 7', y las diferencias de latitudes de casi 7½. Y, por ende, el cometa estaba en ♍ 15° 32', con una latitud boreal de casi 26'.

La observación primera de la situación del cometa hasta algunas fijas menores fue más que suficientemente exacta. También la segunda fue, suficientemente exacta. En la

El cometa

Tiempo verdadero	*Distancia al Sol*	*Longitud calculada*	*Latitud calculada*	*Errores de Longitud*	*Latitud*
d h m		° ' "	° ' "	' "	' "
Dic. 12,04,46	28028	♐ 6,29,25	8,26,00	–3,05	–2,00
21,06,37	61076	♒ 5,06,30	21,43,20	–1,42	+1,07
24,06,18	70008	18,48,20	25,22,40	–1,03	–0,25
26,05,20	75576	28,22,45	27,01,36	–1,28	+0,44
29,08,03	84021	♓ 13,12,40	28,10,10	+1,59	+0,12
30,08,10	86661	17,40,05	28,11,20	+1,45	–0,33
Ene. 5,06,1½	101440	♈ 8,49,49	26,15,15	+0,56	+0,08
9,07,00	110959	18,44,36	24,12,54	+0,32	+0,58
20,06,06	113162	20,41,00	23,44,10	+0,10	+0,18
13,07,09	120000	26,00,21	22,17,30	+0,33	+0,02
25,07,59	145370	♉ 9,33,40	17,57,55	–1,20	+1,25
30,08,22	155303	13,17,41	16,42,07	–2,10	–0,11
Feb. 2,06,35	160951	15,11,11	16,04,15	–2,42	+0,14
5,07,4½	166686	16,58,55	15,29,13	–0,41	+2,00
25,08,41	202570	26,15,46	12,48,00	–2,49	+1,10
Mar. 5,11,39	216205	29,18,35	12,05,40	+0,35	+2,14

tercera, que fue menos exacta, pudo ser el error de menos de seis o siete minutos, y escasamente mayor. La longitud, en la primera observación, que fue la más exacta de todas, estaba calculada en la susodicha órbita parabólica en ☊ 29° 30' 22", y latitud boreal de 1° 25' 7", y su distancia al Sol de 115546.

Mas he aquí que Halley, dándose cuenta de que un gran cometa había aparecido cuatro veces con intervalo de 575 años, a saber, el mes de septiembre posterior a la muerte de Julio César, el año de Jesucristo, 531, siendo cónsules Lampadio y Oreste, el año de Cristo 1106 en el mes de febrero y a fines del año 1680, y ello con una cola larga y brillante (salvo el de la muerte de César en el que por la mala posición de la Tierra la cola brilló menos), se propuso hallar una órbita elíptica cuyo eje mayor fuera de 1382957 partes, siendo la distancia media de la Tierra al Sol de 10000 partes, órbita en la cual hubiera podido girar de hecho el cometa en 575 años. Y situando el nodo ascendente en ♋ 2° 2', la inclinación del plano de la órbita respecto al de la eclíptica en 61° 6' 48", el perihelio del cometa en dicho plano en ♐ 22° 44' 25", el momento exacto del perihelio en diciembre 7d. 23h. 9', la distancia del perihelio al nodo ascendente en el plano de la eclíptica en 9° 17' 35", y el eje conjugado en 1848,2, calculó el movimiento del cometa en esta órbita elíptica. Sus lugares, tanto los derivados de las observaciones como los resultantes de los cálculos, aparecen en la tabla de la página siguiente.

Las observaciones de este cometa desde el principio al final concuerdan con el movimiento del cometa en la órbita recién descrita no menos que suelen concordar los movimientos de los planetas con sus respectivas teorías, y al concordar vienen a probar

Tiempo verdadero	*Longitud observada*	*Longitud N observada*	*Longitud calculada*	*Latitud calculada*	*Errores de longitud*	*Errores de latitud*
d h m	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	′ ″
Nov. 3.16.47	♌ 29.51. 0	1,17,45	♌ 29,51,22	1,17,32N	+0,22	–0,13
5.15.37	♍ 3,23, 0	1, 6, 0	♍ 3,24,32	1, 6, 9	+1,32	+0, 9
10.16.18	15,32, 0	0,27, 0	15,33, 2	0,25, 7	+1, 2	–1,53
16.17. 0			♎ 8,16,45	0,53, 7S		
18.21.34			18,52,15	1,26,54		
20.17, 0			28,10,36	1,53,35		
23.17, 5			♏ 13,22,42	2,29, 0		
Dic. 12. 4.46	♐ 6,32,30	8,28, 0	♐ 6,31,20	8,29, 6N	–1,10	+1, 6
21, 6,37	♒ 5, 8,12	2,42,13	♒ 5, 6,14	21,44,42	–1,58	+2,29
24, 6,18	18,49,23	25,23, 5	18,47,30	25,23,35	–1,53	+0,30
26, 5,21	28,24,13	27, 0,52	28,21,42	27, 2, 1	–2,31	+1, 9
29, 8, 3	♓ 13,10,41	28, 9,58	♓ 13,11,14	28,10,38	+0,33	+0,40
30, 8,10	17,38,00	28,11,53	17,38,27	28,11,37	+0, 7	–0,16
Ene. 5, 6, 12½	♈ 8,48,53	26,15, 7	♈ 8,48,51	26,14,57	–0, 2	–0,10
9, 7, 1	18,44, 4	24,11,56	18,43,51	24,12,17	–0,13	+0,21
10, 6, 6	20,40,50	23,43,32	20,40,23	23,43,25	–0,27	–0, 7
13, 7, 9	25,59,48	22,17,28	26, 0, 8	22,16,32	+0,20	–0,56
25, 7,59	♉ 9,35, 0	17,56,30	♉ 9,34,11	17,56, 6	–0,49	–0,24
30, 8,22	13,19,51	16,42,18	13,18,28	16,40, 5	–1,23	–2,13
Feb. 2, 6,35	15,13,53	16, 4, 1	15,11,59	16, 2,17	–1,54	–1,54
5, 7, 4½	16,59, 6	15,27, 3	16,59,17	15,27, 0	+0,11	–0, 3
25, 8,41	26,18,35	12,46,46	26,16,59	12,45,22	–1,36	–1,24
Mar. 1,11,10	27,52,42	12,23,40	27,51,47	12,22,28	–0,55	–1,12
5,11,39	29,18, 0	12, 3,16	29,20,11	12, 2,50	+2,11	–0,26
9, 8,38	♊ 0,43, 4	11,45,52	♊ 0,42,43	11,45,35	–0,21	–0,17

que se trata de uno y el mismo cometa que apareció en todo ese tiempo y cuya órbita fue correctamente establecida aquí.

En la tabla de la página anterior omitimos las observaciones de los días 16, 18, 20 y 23 de noviembre por ser menos precisas. Pero también en esos días el cometa fue observado. Efectivamente, Ponthio y sus compañeros, el 17 de noviembre (calendario antiguo) en Roma a las 6h. de la mañana, es decir, a las 5h. 10' de Londres, con hilos tirados a las estrellas fijas, observaron el cometa en ☊ 8° 30' con latitud sur de 0° 40'. Aparecen sus observaciones en un tratado que publicó Ponthio sobre este cometa. Cellio, que estaba presente y comunicó a Cassini por carta sus observaciones, vio el cometa a esa hora en ☊ 8'30' con latitud austral de 0° 30'. A la misma hora Gallet en Avignon (es decir, a las 5h. 42' de la mañana de Londres) vio el cometa en ☊ 8 grados sin latitud. Aunque el cometa, por la teoría, estaba ahora en ☊ 8° 16' 45" con latitud austral de 0° 53' 7".

El 18 de noviembre a las 6h. 30' de la mañana en Roma (es decir, a las 5h. 40' de Londres) Ponthio vio el cometa en ☊ 13° 30' con latitud austral de 1° 20'. Cellio en ☊ 13° 30', con latitud austral de 1° 00'. Gallet, por su parte, en Avignon a las 5,30' vio al cometa en ☊ 13° 00' con latitud austral de 1° 00'. Y el R. P. Ango, en el Colegio de La Fleche, en Francia, a las 5 de la mañana (es decir, a las 5,9' en Londres) vio el cometa en medio de dos pequeñas estrellas, una de las cuales es la central de tres en línea recta de la mano austral de Virgo, Bayer ψ, y la otra es la última del ala, Bayer θ. Por lo cual el cometa estaba entonces en ☊ 12° 46' con latitud austral de 50'. El mismo día, en Boston en Nueva Inglaterra, a $42\frac{1}{2}$ grados de latitud a las cinco de la mañana (es decir, a las 9h. 44' de la mañana de Londres) fue visto el cometa cerca de ☊ 14 grados con latitud austral de 1° 30', como me ha hecho saber el ilustre Halley.

El 19 de noviembre, a las $42\frac{1}{2}$ de la mañana en Cambridge, el cometa (observado por cierto joven) distaba de Spica ♍ casi 2 grados hacia el noroeste. Pero Spica se encontraba en ☊ 19° 23' 47" con latitud austral de 2° 1' 59". El mismo día en Boston, Nueva Inglaterra, a las 5h. a.m. el cometa distaba de Spica ♍ 1 grado, siendo la diferencia de latitudes 40'. El mismo día en Jamaica, el cometa distaba de Spica casi 1 grado. El mismo día el señor Arthur Storer en el río Patuxent, junto a Hunting-Creek, en Maryland en los confines de *V*irginia, a $38\frac{1}{2}$ grados de latitud y a las cinco de la mañana (esto es, a las 10h. de Londres) vio el cometa sobre Spica ♍ y casi junto con ella, siendo la distancia entre ellos de casi $\frac{3}{4}$ de grado. Y comparando estas observaciones entre sí infiero que a las 9h. 44' de Londres el cometa estaba en ☊ 18° 50' con latitud austral de casi 1° 25'. Y el cometa según la teoría estaba ahora en ☊ 18° 52' 15", con latitud austral de 1° 26' 54".

El 20 de noviembre, Montenari, profesor de astronomía en Padua, a las seis de la mañana en *V*enecia (es decir, a las 5h. 10' en Londres) vio al cometa en ☊ 23 grados con latitud austral de 1° 30'. El mismo día en Boston, el cometa distaba de Spica ♍ 4 grados de longitud a oriente y, por tanto, estaba en ☊ 23° 24' aproximadamente.

El 21 de noviembre, Ponthio y sus colegas a las $7\frac{1}{4}$ de la mañana observaron el cometa en ☊ 27° 50' con latitud austral 1° 16'. Cellio en ☊ 28 grados. Ango a las cinco de la mañana en ☊ 27° 45'. Montenari en ☊ 27° 51. El mismo día en la isla de Jamaica se vio cerca del principio de Escorpio, y tuvo casi la misma latitud que Spica de Virgo, es decir, 2° 2'. El mismo día a las cinco de la mañana en Ballasore en la India Oriental (es decir, a las 11h. 20' de la noche precedente en Londres) se tomó una distancia del cometa de Spica ♍ de 7° 33' hacia oriente. Se hallaba en línea recta entre Spica y Libra, y, por ende, se hallaba en ☊ 26° 58', con latitud austral de casi 1° 11'; y

después de las 5h. 40' (hacia las cinco de la mañana de Londres) estaba en ♎ 28° 12' con latitud sur de 1° 16'. Según la teoría, el cometa se hallaba en ese momento en ♎ 28° 10' 36", con latitud austral de 1° 53' 35".

El 22 de noviembre el cometa fue visto por Montenari en ♍ 2° 33'. En Boston, en Nueva Inglaterra, apareció en ♏ 3 grados casi y con la misma latitud prácticamente que antes, esto es, 1° 30'. El mismo día a las cinco de la mañana en Ballasore se observaba el cometa en ♏ 1° 50'; y, por tanto, a las cinco de la mañana en Londres el cometa estaba en ♏ 3° 5' aproximadamente. El mismo día en Londres, a las $6\frac{1}{2}$ de la mañana, nuestro Hooke vio el cometa en ♏ 3° 30' aproximadamente, y esto en una línea recta que pasa por Spica de Virgo y Corazón de Leo, si bien no exactamente, sino separándose un poquito hacia el norte. Montenari también observó que la línea trazada desde el cometa a Spica ese día y los siguientes pasaba por el lado sur de Corazón de Leo, mediando un muy pequeño espacio entre Corazón de Leo y esa línea. La línea recta que pasa por Corazón de Leo y Spica de Virgo cortó a la eclíptica en ♏ 3° 46', con un ángulo de 2° 51'. Y si el cometa hubiese estado en esa línea en ♏ 3 grados, su latitud hubiera sido de 2° 26'. Pero como el cometa, de acuerdo con Hooke y Montenari, distaba un poco de esa línea hacia el norte, su latitud fue un poco menor. El día 20, por la observación de Montenari, su latitud era sensiblemente igual a la de Spica ♍ y era de casi 1° 30', y de acuerdo con Hooke, Montenari y Ango, aumentaba continuamente y, por tanto, ahora era sensiblemente mayor que 1° 30'. Entre los límites establecidos de 2° 26' y 1° 30', la latitud con un valor medio estaría aproximadamente en 1° 58'. La cola del cometa, de acuerdo con Hooke y Montenari se dirigía hacia Spica ♍, declinando un tanto de dicha estrella, según Hooke hacia el sur, según Montenari hacia el norte; por ello la declinación apenas fue sensible, y siendo la cola casi paralela al ecuador, se apartaba un tanto de la oposición del Sol hacia el norte.

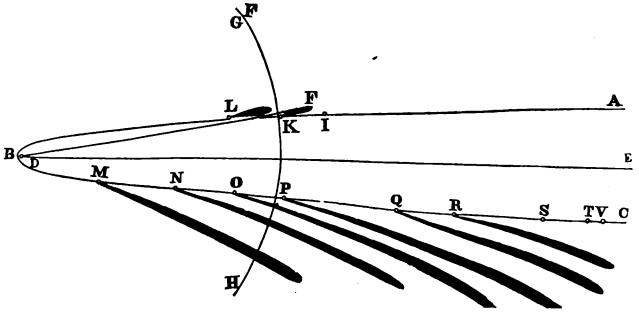
El 23 de noviembre, calendario antiguo, a las cinco de la mañana en Nuremberg (es decir, a las $4\frac{1}{2}$ en Londres) el señor Zimmerman vio el cometa en ♏ 8° 8', con latitud austral 2° 31', tomando sus distancias de las estrellas fijas.

El 24 de noviembre, antes de la salida del Sol Montenari vio el cometa en ♏ 12° 52' al lado norte de la recta que pasa por Corazón de Leo y Spica de Virgo, y por tanto, la latitud era algo menor que 2° 38'. Como hemos dicho esta latitud, de acuerdo con las observaciones de Montenari, Ango y Hooke, aumentaba continuamente; por tanto, ahora era algo mayor que 1° 58'; y, por tanto, puede establecerse sin mayor error en un valor medio de 2° 18'. Ponthio y Gallet, pretenden que a estas alturas ya había decrecido la latitud, mientras Cellio y el observador de Nueva Inglaterra retienen casi el mismo valor, a saber, un grado o un grado y medio. Más inexactas son las observaciones de Ponthio y Gallet, sobre todo las que realizaban tomando acimuts y alturas, como las de Gallet; mejores resultan las realizadas por las posiciones del cometa respecto a las fijas por Montenari, Hooke, Ango y el observador de Nueva Inglaterra y a veces por Ponthio y Cellio. El mismo día a las cinco de la mañana en Ballasore el cometa se veía en ♏ 11° 45'; y, por tanto, a las cinco de la mañana en Londres estaba casi en ♏ 13 grados. Pero, por la teoría, el cometa estaba ahora en ♏ 13° 22' 42".

El 25 de noviembre, antes de la salida del Sol, Montenari vio al cometa casi en ♏ $17\frac{3}{4}°$. Y Cellio observó en ese momento que el cometa estaba en línea recta entre la estrella brillante del fémur derecho de Virgo y el plato austral de Libra, y esta recta corta la trayectoria del cometa en ♏ 18° 36'. En cambio, por la teoría, el cometa ahora estaba en casi ♏ $18\frac{1}{3}°$.

Por consiguiente, estas observaciones concuerdan con la teoría, en la medida en que concuerdan entre ellas, y, al concordar, prueban que fue uno y el mismo el cometa que se vio durante todo el tiempo desde el día 4 de noviembre hasta el día 9 de marzo. La trayectoria de este cometa cortó dos veces el plano de la eclíptica y, por lo tanto, no fue rectilínea. Cortó a la eclíptica no en partes opuestas del cielo, sino al final de Virgo y al principio de Capricornio, con un intervalo de casi 98 grados; y por lo mismo, el curso del cometa se desviaba mucho del Círculo Máximo. Pues en el mes de noviembre su curso declinaba de la eclíptica al menos 3 grados al sur y, después, en el mes de diciembre se apartaba de la eclíptica hacia el norte en 29 grados, declinando, como observó Montenari, las dos partes de la órbita con las cuales el cometa tendía hacia el Sol y se apartaba del mismo, con un ángulo aparente de más de treinta grados. Este cometa caminaba a lo largo de nueve signos, a saber, desde el último grado de Leo al principio de Géminis, a partir del signo de Leo por el que pasaba antes de empezar a ser visto; y no existe ninguna otra teoría por la cual un cometa recorra tan gran porción del cielo con un movimiento regular. Su movimiento fue muy desigual. Pues en torno al día 20 de noviembre recorrió casi 5 grados cada día; después, con un movimiento retardado, entre el 26 de noviembre y el 12 de diciembre, en un tiempo de $15\frac{1}{2}$, sólo recorrió 40 grados: después con movimiento de nuevo acelerado, recorrió casi 15 grados cada día, antes de que el movimiento empezase de nuevo a retardarse. Y la teoría que mejor responde a un movimiento tan desigual a través de la mayor parte del cielo y que obedece las mismas leyes que la teoría de los planetas y concuerda exactamente con las observaciones astronómicas más exactas, no puede no ser verdadera.

Por lo demás, me ha parecido oportuno representar en el dibujo anexo, dibujadas sobre el plano de la trayectoria, tanto la trayectoria descrita por el cometa como la cola



verdadera que proyectó en cada uno de los lugares: en él, ABC representa la trayectoria del cometa, D el Sol, DE el eje de la trayectoria, DF la línea de los nodos, GH la intersección de la trayectoria y de la esfera del Orbe Máximo, I el lugar del cometa el 4 de noviembre de 1680, K su lugar el 11 de noviembre, L el lugar del 19 de noviembre, M el lugar del 12 de diciembre, N el lugar del 21 de diciembre, O el lugar del 29 de diciembre, P el lugar del 5 de enero siguiente, Q el lugar del 25 de enero, R el lugar del

5 de febrero, S el lugar del 25 de febrero, T el lugar del 5 de marzo y V el lugar del 9 de marzo. Para definir la cola hice las observaciones siguientes.

El 4 y 6 de noviembre la cola aún no apareció. El 11 de noviembre empezándose a ver ya la cola, no parecía mayor de medio grado de larga con un telescopio de diez pies. El 17 de noviembre, Ponthio observó una cola de más de 15 grados de largo. El 18 de noviembre se veía en Nueva Inglaterra una cola de más de 30 grados de largo, directamente opuesta al Sol y se alargaba hasta la estrella σ, que se hallaba entonces en ♍ 9° 54'. El 19 de noviembre en Maryland se vio una cola de 15 o 20 grados de largo. El 10 de diciembre (observador, Flamsteed) la cola pasaba por medio de la distancia entre la cola de la serpiente de Ofiuco y la estrella δ del ala sur de Águila, y terminaba cerca de las estrellas A, ω, b, de las tablas de Bayer. Por consiguiente, el final estaba ♐ $19\frac{1}{2}$° con una latitud boreal de casi $34\frac{1}{4}$ °. El 11 de diciembre la cola subía hasta casi la cabeza de Sagitario (Bayer α, β) acabando en ♐ 26° 43', con una latitud boreal de 38° 34'. El 12 de diciembre la cola pasaba por medio de Sagitario, no sobrepasando mucho, acabando en ♒ 4 grados con una latitud boreal de casi $42\frac{1}{2}$°. Entiéndase esto de la longitud de la cola más brillante. Pues con luz más oscura, quizá en un cielo más transparente, la cola fue observada en Roma el 12 de diciembre a las 5h. 40' (observador Ponthio) extendiéndose hasta 10 grados por encima de la cola del Cisne; y partiendo desde esta estrella hacia el noroeste su borde sobresalía 45'. En estos días, por tanto, la cola era de ancha 3 grados, en el lado de arriba y, por consiguiente, su centro distaba de dicha estrella 2° 15' hacia el sur, y el extremo superior se hallaba en ♓ 22 grados con una latitud boreal de 61 grados. Y de aquí que la cola era de casi 70 grados de largo, el 21 de diciembre. Subía casi hasta la silla de Casiopea, distando igualmente de β y de Schedir, manteniendo una distancia igual de una y otra a la distancia mutua entre ellas, acabando, por tanto, en ♈ 24 grados con una latitud de $47\frac{1}{2}$°. El 29 de diciembre la cola tocaba a Scheat situada a la izquierda, y el intervalo de las dos estrellas del pie boreal de Andrómeda lo cubría exactamente, y era de 54 grados de larga; por lo tanto, acababa en ♉ 19 grados, con una latitud de 35 grados. El 5 de enero, la cola tocó la estrella π del pecho de Andrómeda en el lado derecho, y a la estrella μ del cinturón en el lado izquierdo; y (según mis observaciones) era de 40 grados de larga; estaba curvada y su lado convexo miraba al sur. Formaba con un círculo que pasase por el Sol y la cabeza del cometa un ángulo de 4 grados junto a la cabeza del cometa; pero hacia el otro extremo se inclinaba hacia dicho círculo en un ángulo de 10 o 11 grados y la cuerda de la cola con dicho círculo contenían un ángulo de 8 grados. El 13 de enero, la cola, con una luz bastante perceptible, terminaba entre Alamech y Algol, y con luz muy débil se acababa en la zona de la estrella κ del costado de Perseo. La distancia del final de la cola hasta el círculo que pasaba por el Sol y el cometa era de 3° 50', y la inclinación de la cuerda de la cola hacia dicho círculo era de $8\frac{1}{2}$°. En 25 y 26 de enero, la cola con luz muy tenue se alargaba hasta una longitud de 6 o 7 grados; y las dos noches siguientes con un cielo muy sereno, con luz muy tenue y apenas perceptible alcanzaba una longitud de 12 grados y poco más. Su eje se dirigía a la estrella brillante del hombro oriental del Auriga, con toda exactitud, y por ello declinaba de la oposición al Sol hacia el norte en un ángulo de 10 grados. Finalmente, el 10 de febrero, con instrumentos oculares observé una cola de 2 grados de longitud. Pues la antedicha luz tenue con gafas no se veía. Pero Ponthio, el 7 de febrero, escribe que vio la coló de 12 grados de longitud. El 25 de febrero y siguientes el cometa se vio sin cola.

A quien considere la órbita recién descrita y medite en los fenómenos restantes de este cometa no le costará mucho concluir que los cuerpos de los cometas son sólidos,

compactos, fijos y duraderos, al modo de los cuerpos de los planetas. Pues si nada más fuesen que vapores o exhalaciones de la Tierra, del Sol o los planetas, este cometa, a su paso por las inmediaciones del Sol, debió disiparse al instante. Pues el calor del Sol es como la densidad de los rayos, es decir, como el inverso del cuadrado de la distancia del lugar hasta el Sol. Y por lo mismo, como la distancia del cometa hasta el centro del Sol el día 8 de diciembre, cuando se encontraba en el perihelio, era a la distancia de la Tierra al centro del Sol casi como 6 a 1000, el calor del Sol junto al cometa en ese momento era al calor del Sol estival entre nosotros como 1000000 a 36, o como 28000 a 1. Pero el calor del agua en ebullición es casi tres veces mayor que el calor que alcanza la tierra seca al calor del verano, como he comprobado: y el calor del hierro candente (si no es mala mi conjetura) es tres veces mayor o cuatro que el del agua en ebullición; y por eso el calor que la arena seca en la superficie del cometa al pasar éste por el perihelio recibió de los rayos solares sería unas 2000 veces mayor que el calor del hierro candente. Con semejante calor los vapores y las exhalaciones, así como toda materia volátil, deberían consumirse y disiparse al instante.

Por consiguiente, el cometa en su perihelio recibió del Sol un enorme calor, y puede conservar dicho calor por mucho tiempo. Pues un globo de hierro candente de una pulgada de diámetro apenas pierde todo su calor en el espacio de una hora expuesto al aire. Pero un globo mayor conservará el calor más tiempo en razón del diámetro, toda vez que la superficie (en cuya proporción se refrigera por contacto con el aire ambiente) es menor en dicha razón respecto a la cantidad de materia caliente contenida. Por lo cual, un globo de hierro candente igual a esta Tierra, es decir, de 40000000 de pies de ancho, más o menos, tardaría en enfriarse otros tantos días, o unos 50000 años. Pero sospecho que la duración del calor, por causas desconocidas, aumenta en razón menor que la del diámetro: y quisiera que se investigase la verdadera razón mediante experimentos.

Por lo demás, hay que notar que el cometa en el mes de diciembre, cuando se había calentado al Sol hasta ese punto, emitía una cola mucho mayor y más brillante que antes, en noviembre, cuando aún no había alcanzado el perihelio. Y generalmente todas las colas máximas y resplandecientes salen de los cometas inmediatamente después de su paso por la región solar. El calentamiento del cometa comporta, por tanto, el crecimiento de la cola. Y de ello me parece inferir que la cola no es otra cosa que un vapor sumamente tenue que emite la cabeza o núcleo del cometa debido a su calor.

Por otra parte, sobre las colas de los cometas tres son las opiniones; o bien que son resplandor del Sol que se propaga a través de la cabeza transparente de los cometas, o bien que se originan de la refracción de la luz en su camino desde la cabeza del cometa hasta la Tierra, o bien, finalmente, que son una nube o vapor que surge constantemente de la cabeza del cometa y se aleja hacia las partes opuestas al Sol. La primera opinión es propia de quienes aún no se han adentrado en la ciencia de la óptica. Pues el resplandor del Sol en una habitación oscura no se ve más que en la medida en que la luz es reflejada por partículas de polvo y de humo suspendidas siempre en el aire: y por lo mismo es más brillante en un aire más lleno de humos gruesos, y hiere con más fuerza a la vista; en un aire más enrarecido es mucho más tenue y se percibe con mayor dificultad: de suerte que en los cielos sin materia reflectante ninguna reflexión es posible. La luz no se ve en tanto en que está en el resplandor, sino en tanto en que de allí es reflejada hacia nuestros ojos. Pues la visión no ocurre más que por los rayos que inciden sobre los ojos. Por lo tanto se requiere alguna materia en la región de la cola, a no ser

que el cielo entero brille uniformemente iluminado por la luz del Sol. La segunda opinión se ve acosada por múltiples dificultades. Las colas jamás tienen varios colores: cosa que suele acompañar inseparablemente a las refracciones. La luz de las fijas y de los planetas transmitida hasta nosotros con perfecta distinción demuestra que el medio celeste no goza de ningún poder de refracción. Pues que los egipcios vieran algunas veces, como se dice, estrellas fijas con cola, esto, además de ser muy raro, debe achacarse a una refracción fortuita de las nubes. Pues la radiación y los destellos de las fijas deben achacarse a refracciones bien de los ojos, bien del aire en movimiento, toda vez que desaparecen tan pronto como se arriman los ojos al telescopio. El temblor del aire y de los vapores que ascienden hace que los rayos se descoloquen de vez en cuando del estrecho espacio de la pupila, mientras no ocurre en el espacio más ancho del objetivo del telescopio. De aquí que el centelleo tenga lugar en el primer caso y no en el segundo, y que cese en este segundo caso muestra la regular transmisión de la luz por los cielos sin ninguna refracción sensible. Si alguien sostiene que las colas de los cometas no suelen verse cuando su luz no es suficientemente fuerte porque entonces los rayos secundarios no tienen fuerzas bastantes para herir a los ojos, y por esa razón no se ven las colas de las fijas, se ha de tener presente que la luz de las fijas puede aumentarse con los telescopios más de cien veces, y ni entonces se ven colas. Y la luz de los planetas es más abundante, pero colas ninguna; mientras los cometas frecuentemente tienen larguísimas colas, cuando las cabezas tienen luz muy tenue y velada. Y así, el cometa de 1680, en diciembre, cuando la luz de su cabeza apenas igualaba a la de las estrellas de segunda magnitud, emitía una cola de notable resplandor y una longitud de 40, 50, 60 o 70 y más grados. Más tarde, en enero 27 y 28, la cabeza parecía una estrella de séptima magnitud, mientras la cola, con una luz bastante tenue, aunque suficientemente sensible, alcanzaba una longitud de 6 o 7 grados, y con una luz muy difusa que apenas sí se podía ver, alcanzaba hasta 12 grados o más: como se ha dicho antes. Pero el 9 y 10 de febrero, cuando la cabeza había dejado de verse a simple vista, he visto la cola de dos grados de largo con el telescopio. Además, si la cola se originase de la refracción de materia celeste y se inclinase de la oposición al Sol de acuerdo con la figura de los cielos, tal inclinación, en las mismas regiones del cielo, debería ocurrir siempre hacia la misma dirección. Pero el cometa de 1680, el 28 de diciembre a las $8\frac{1}{2}$ p.m. en Londres, se hallaba en ♓ 8° 41' con una latitud boreal de 28° 6', estando el Sol en ♑ 18° 26'. Y el cometa de 1577 el 29 de diciembre se hallaba en ♓ 8° 41' con una latitud boreal de 28° 40', estando también el Sol en ♑ 18° 26' aproximadamente. En ambos casos la Tierra se hallaba en el mismo lugar y el cometa aparecía en el mismo sitio del cielo, pero en el primer caso la cola del cometa (según observaciones mías y de otros) declinaba de la oposición del Sol con un ángulo de $4\frac{1}{2}$ grados hacia el norte; en el segundo caso, en cambio (según las observaciones de Tycho) la declinación era de 21 grados hacia el sur. Descartada, por tanto, la refracción de los cielos, sólo queda derivar los fenómenos de las colas de alguna materia que refleja la luz.

Que las colas se originan de las cabezas y ascienden hacia las regiones opuestas al Sol se confirma por las leyes que observan. Como, por ejemplo, que situadas en los planos de las órbitas de los cometas que pasan por el Sol, se desvían de la oposición del Sol siempre hacia aquellas partes que, al avanzar, van dejando atrás las cabezas en dichas órbitas. Que para un espectador situado en esos planos aparecen en las partes directamente opuestas al Sol; pero al separarse de esos planos el espectador nota enseguida la desviación, y poco a poco aparece mayor. Que la desviación, con las demás condicio-

nes iguales, es menor cuando la cola es más oblicua respecto a la órbita del cometa, lo mismo que cuando la cabeza del cometa se acerca más al Sol; sobre todo si el ángulo de la desviación se toma junto a la cabeza del cometa. Además de que las colas que no se desvían aparecen rectas, mientras que las que se desvían aparecen curvadas. Que la curvatura es mayor cuando la desviación es mayor, y más sensible, en igualdad de circunstancias, cuando la cola es más larga: pues, en las muy cortas, la curvatura difícilmente se distingue. Que el ángulo de desvío es menor junto a la cabeza del cometa, y mayor junto al extremo opuesto de la cola, y, por tanto, que la cola con su lado convexo mira a las partes de las que se desvía, las cuales están en la recta infinita, trazada desde la cabeza del cometa al Sol. Y que las colas que son más largas y extensas y brillan con luz más viva son algo más resplandecientes por el lado convexo y perfiladas algo menos imprecisamente que por el lado cóncavo. Por consiguiente, los fenómenos de las colas dependen del movimiento de la cabeza y no de la región del cielo en que se ve la cabeza; y por lo mismo, no ocurren por la refracción de los cielos, sino que se originan de la cabeza que proporciona materia. Pues al igual que en nuestro aire el humo de un cuerpo cualquiera ardiendo se dirige hacia arriba, y esto perpendicularmente si el cuerpo está en reposo o bien oblicuamente si el cuerpo se mueve hacia un lado, del mismo modo en los cielos, donde los cuerpos gravitan hacia el Sol, los humos y vapores deben ascender desde el Sol (como ya se ha dicho) y dirigirse hacia arriba o en dirección recta si los cuerpos humeantes están en reposo; o bien oblicuamente, si el cuerpo avanzando continuamente va dejando siempre atrás los lugares hacia los cuales habían ascendido las partes superiores del vapor. Y la oblicuidad esa siempre será menor cuando más veloz sea el ascenso del vapor: o sea, en las proximidades del Sol y junto al cuerpo fumante. Pero por la diversidad de oblicuidad se curvará la columna de vapor: y debido a que en el lado anterior de la columna el vapor es algo más reciente, por eso mismo es allí también algo más denso y por ello refleja una luz más abundante a la vez que se perfila con un límite menos impreciso. Sobre los movimientos súbitos e inciertos de las colas o sobre sus figuras irregulares, descritos a veces por algunos, nada añado aquí, por cuanto que pudieran deberse a movimientos y cambios de nuestro aire o a movimientos de las nubes que oscurecen en parte las colas, o quizá a partes de la vía láctea que pudieran confundirse con las colas en tránsito por ella y contemplarse como partes de las mismas.

A partir de la rareza de nuestro aire se comprende que de las atmósferas de los cometas puedan surgir vapores suficientes para llenar tan enormes espacios. Pues el aire junto a la superficie de la Tierra ocupa un espacio casi 850 veces mayor que el mismo peso de agua, y por tanto, una columna cilíndrica de aire de 850 pies de alto pesa igual que una columna de agua de un pie y de la misma anchura. Y una columna de aire que llegue hasta la cima de la atmósfera iguala con su peso a una columna de agua que tenga 33 pies de alto aproximadamente; y por ello, si se quitase de toda la columna aérea la parte inferior de 850 pies de alto, la parte restante superior igualaría con su peso a una columna de agua de 32 pies de alto. Y a partir de ello (por una regla confirmada mediante muchos experimentos, de que la compresión del aire es como el peso del aire sobrepuesto, y de que la gravedad es inversamente como el cuadrado de la distancia de los lugares al centro de la Tierra), calculando de acuerdo con el corolario de la proposición XXII del libro segundo, he hallado que el aire, si se sube hasta una altura desde la superficie terrestre de un semidiámetro de la Tierra, tendrá una rareza mayor con mucho que entre nosotros, en una razón mayor que la que existe entre todo el espacio bajo

la órbita de Saturno y un globo descrito con un diámetro de una pulgada. Y por lo mismo, un globo de nuestro aire de una pulgada de ancho, con la rareza que tendría a la altura de un semidiámetro terrestre, llenaría todas las regiones de los planetas hasta la esfera de Saturno y más allá. Por consiguiente, puesto que el aire a más altura todavía se enrarece mucho más, y la cabellera o atmósfera de un cometa surgiendo desde su centro, sea casi diez veces más alta que la superficie del núcleo, y después la cola todavía ascienda mucho más arriba, la cola deberá ser sumamente enrarecida. Y aunque, por ser mucho más gruesa la atmósfera de los cometas y por la enorme gravitación de los cuerpos hacia el Sol y de las partículas de aire y vapor entre ellas, pudiera ocurrir que el aire en los espacios celestes y en las colas de los cometas no se enrarezca tanto, no obstante, una muy pequeña cantidad de aire y de vapor basta y sobra para todos estos fenómenos de las colas, como se ve por los dichos cálculos. Pues hasta por los astros que se traslucen a través de ellas se puede colegir la gran rarefacción de las colas. La atmósfera terrestre, con un grosor de unas pocas millas, iluminada por la luz del Sol oscurece a todos los astros y hasta casi extingue a la propia Luna; mientras tanto, a través del inmenso grosor de las colas iluminadas igualmente por la luz del Sol se perciben hasta los menores astros sin detrimento de la claridad. Y no suele ser mayor el brillo de muchas colas que el de nuestro aire reflejando la luz del Sol en un rayo, de una o dos pulgadas de ancho dentro de un cuarto oscuro.

En cuánto tiempo asciende el vapor desde la cabeza hasta el extremo de la cola casi puede conocerse trazando una recta desde el extremo de la cola hasta el Sol y anotando el punto en que dicha recta corta a la trayectoria. Pues el vapor al final de la cola, si sube en línea recta desde el Sol, comenzó a ascender en el momento en que la cabeza se hallaba en el punto de la intersección. Pero el vapor no asciende en línea recta desde el Sol, sino que, reteniendo el movimiento que tenía el cometa antes de su ascenso, y componiéndolo con el movimiento de su propio ascenso, asciende oblicuamente. Por lo cual sería mejor solución del problema que dicha recta secante de la trayectoria fuera paralela a la longitud de la cola, o mejor (por el movimiento curvilíneo del cometa) que sea divergente de la línea de la cola. De este modo hallé que el vapor que se hallaba en el extremo de la cola el 25 de enero había comenzado a ascender de la cabeza el día 11 de diciembre anterior, y por lo mismo había consumido en su ascenso completo más de 45 días. Pero la cola entera que apareció el día 10 de diciembre había ascendido en los dos días que habían sido consumidos por el perihelio del cometa. Por lo tanto, en las proximidades del Sol, el vapor al principio ascendía muy rápidamente, y después con un movimiento continuamente retardado por su gravedad continuaba ascendiendo, y al ascender aumentaba la longitud de la cola, mientras la cola, cuando apareció, constaba casi de todo el vapor que había ascendido durante el perihelio; y el primer vapor que ascendió y dio lugar al extremo de la cola no se disipó hasta que, por su exagerada distancia tanto del Sol iluminante como de nuestros ojos, dejó de verse. Por eso también, las colas de otros cometas, que son más cortas, no ascienden con un movimiento rápido y continuo desde las cabezas y desaparecen enseguida, sino que son columnas permanentes de vapores y exhalaciones propagadas desde la cabeza con un movimiento muy lento de muchos días, las cuales, al participar de aquellos movimientos de la cabeza que recibieron en el inicio continúan moviéndose por los cielos a la vez que las cabezas. Y esto de nuevo permite inferir que los espacios están desprovistos de fuerza de resistencia, por cuanto que en ellos no sólo los cuerpos sólidos de los planetas y de los cometas, sino también los vapores sumamente enrarecidos de las colas llevan

a cabo con toda libertad sus rapidísimos movimientos y los conservan durante largo tiempo.

Atribuye Kepler el ascenso de las colas desde las atmósferas de las cabezas así como su dirección hacia las partes opuestas al Sol a la acción de los rayos de luz que arrastran con ellos a la materia de las colas. Y no parece lejos de la razón el que un aura tan sumamente tenue y en unos espacios completamente libres cediera a la acción de los rayos, pese a que en nuestras regiones sumamente entorpecidas las materias gruesas no puedan ser desplazadas por los rayos del Sol. Piensa otro que pueden darse partículas tanto leves como graves, y que la materia de las colas levita y por su levitación asciende desde el Sol. Pero puesto que la gravedad de los cuerpos terrestres es como la cantidad de materia en ellos y, por tanto, manteniendo la cantidad de materia, no pueda aumentar ni disminuir, sospecho que el ascenso sea debido más bien a la rarefacción de la materia de las colas. El humo asciende por la chimenea gracias al impulso del aire en el que flota. Dicho aire, enrarecido por el calor asciende al disminuir su gravedad específica y arrastra consigo al humo contenido en él. ¿Por qué no podrían ascender de igual modo desde el Sol las colas de los cometas? Pues los rayos del Sol no agitan los medios que atraviesan a no ser en la reflexión y la refracción. Las partículas reflectantes calentadas por esa acción calientan el aura etérea en que se hallan inmersas. Esta se enrarece por el calor que le ha sido comunicado, y por la disminución, debida al enrarecimiento, de su gravedad específica con la cual tendía primero hacia el Sol, ascenderá y arrastrará consigo a las partículas reflectantes de las que se compone la cola; también conduce al ascenso de los vapores el hecho de que éstos giran en torno al Sol y con esta acción tratan de apartarse del Sol, mientras la atmósfera del Sol o reposa, al igual que la materia celeste, de modo total o bien gira más lentamente con el solo movimiento que hubiese recibido de la rotación solar. Éstas son las causas del ascenso de las colas en las proximidades del Sol, cuando las órbitas son más curvas y los cometas se hallan dentro de la atmósfera más densa, y por ello más grave, del Sol, y cuando emiten colas de mayor longitud. Pues las colas que nacen entonces, conservando su movimiento y gravitando entre tanto hacia el Sol, se moverán en elipses en torno al Sol al igual que las cabezas, y con ese movimiento siempre acompañarán a las cabezas adhiriéndose a ellas con toda libertad. Pues la gravedad de los vapores hacia el Sol no tendrá mayor eficacia para que las colas se aparten después de las cabezas hacia el Sol, que la gravedad de las cabezas para hacer que éstas se separen de las colas. Con la gravedad común o bien caen a la vez hacia el Sol, o bien son retardadas a la vez en su ascenso; por lo cual dicha gravedad no impide que colas y cabezas alcancen una posición mutua cualquiera, debida a las causas expuestas o a otras cualesquiera y, después, la conserven con toda libertad.

Pero las colas que nacen en los perihelios de los cometas se alejarán a muy distantes regiones junto con sus cabezas, y allí o regresan tras una larga serie de años hasta nosotros junto con ellas o, más bien, enrarecidas se desvanecen allí poco a poco. Pues, luego, cuando las cabezas descienden de nuevo al Sol, unas colas nuevas y minúsculas habrán de propagarse desde las cabezas, y más tarde, en los perihelios de dichos cometas, que llegan a descender hasta la atmósfera del Sol, aumentan enormemente. Pues el vapor, en aquellos espacios completamente libres, se enrarece y dilata continuamente. Por esa razón la cola entera en el extremo superior es mucho más ancha que junto a la cabeza del cometa. Y es razonable pensar que el vapor continuamente dilatado por esa rarificación, acaba por difundirse y dispersarse por todos los cielos, para desde allí

poco a poco ser atraído por su gravedad hacia los planetas y mezclarse con las atmósferas de ellos. Pues de igual modo que necesariamente se requieren los mares para la constitución de esta Tierra, y esto de suerte que de ellos pueda excitar el calor del Sol abundantes y suficientes vapores que, o acumulados en nubes caigan como lluvia y rieguen y nutran a toda la tierra para la germinación de los vegetales, o bien, condensados en las frías cumbres de los montes (como algunos razonablemente sostienen) discurran en fuentes y ríos: así también, para la conservación de los mares y de los humores en los planetas parecen requerirse los cometas, merced a cuyas exhalaciones y a cuyos vapores pueda suplirse y restaurarse cuanto licor se consume por la vegetación y la putrefacción y se convierte en tierra árida. Pues todo lo vegetal crece absolutamente de licores, y después, en su mayor parte, se convierte por putrefacción en tierra árida, y el limo resulta siempre de los licores putrefactos. De aquí que la materia árida terrosa aumente cada día, mientras que los licores, salvo que aumenten por aportes exteriores, deberán decrecer continuamente, hasta que por fin desaparezcan. Por lo demás, sospecho que esa parte de nuestro aire, mínima pero sutilísima y óptima además de necesaria para la vida de todas las cosas, proviene principalmente de los cometas.

Las atmósfera de los cometas, en el descenso de éstos hacia el Sol, desparramándose hacia las colas disminuyen, y (ciertamente hacia el lado que mira al Sol) se hacen más estrechas; y viceversa, en su regreso desde el Sol, cuando ya se desparraman menos hacia las colas, se ensanchan; si es que Hewelcke hizo bien la anotación de sus apariencias. Pues aparecen mínimas cuando las cabezas calentadas por el Sol en tal modo han dado lugar a colas máximas y muy brillantes, y los núcleos están rodeados de humo quizá más denso y negro en las partes inferiores de las atmósferas. Pues todo humo suscitado por un calor muy grande suele ser más grueso y negro. Así la cabeza del cometa al que nos hemos referido, a iguales distancias del Sol y de la Tierra aparecía más oscuro después del perihelio que antes. Pues en el mes de diciembre solía compararse con estrellas de tercera magnitud, mientras en noviembre lo era con estrellas de primera y segunda. Y quienes vieron ambos, describen como más grande al primero. Pues para un cierto joven de Cambridge, el 19 de noviembre, este cometa con su luz un tanto plomiza y opaca igualaba a Spica de Virgo, y brillaba más claramente que después. Y el 20 de noviembre del calendario antiguo, el cometa parecía a Montenari mayor que las estrellas de primera magnitud, siendo la cola de dos grados de longitud. Y el señor Storer, en carta que se halla en mis manos, escribe que la cabeza del cometa en el mes de diciembre cuando emitía la cola máxima y más brillante, era pequeño y en su magnitud visible mucho menor que el cometa que había aparecido en el mes de noviembre antes de la salida del Sol. Conjeturaba que la razón de ello era que la materia de la cabeza al principio era más abundante y que poco a poco se habría consumido.

De igual modo parece que hay que contemplar el hecho de que las cabezas de otros cometas que emitieron colas muy grandes y luminosas, aparecieran muy oscuras y pequeñas. Pues el año 1668, el 5 de marzo, calendario nuevo, a las siete de la tarde el R. P. Valentín Estancel, estando en Brasil, vio un cometa próximo al horizonte hacia el suroeste, con una cabeza mínima y apenas distinguible, pero con una cola sumamente brillante, hasta el punto de que los que se hallaban en el litoral veían con toda facilidad su imagen reflejada en el mar. Ya que era la imagen de una estela brillante de 23 grados de longitud, inclinada desde occidente hacia el sur y casi paralela al horizonte. Pero semejante resplandor solamente duró tres días, decreciendo después notablemente; y mientras decrecía el resplandor aumentó la magnitud de la cola. Y en Portugal también

se dice que llegó a ocupar casi la cuarta parte del cielo (es decir, 45 grados) extendiéndose de occidente a oriente con un gran resplandor; y ni siquiera apareció entera, al hallarse siempre la cabeza circulando bajo el horizonte de estas regiones. Es evidente por el incremento de la cola y la merma del resplandor que la cabeza regresaba desde el Sol, y que estuvo próxima a él al principio, al igual que el cometa de 1680. Y en la *Crónica sajona* se lee también sobre un cometa semejante del año 1106 «cuya estrella era pequeña y oscura» (como el del año 1680) «pero el resplandor que salió de ella era muy luminoso y como una estela ardiente que se dirigía hacia oriente y norte», como refiere también Hewelcke citando al monje Simeón de Durham. Apareció a principios del mes de febrero, al atardecer hacia el suroeste. De aquí y de la posición de la cola se infiere que la cabeza estaba próxima al Sol. Dice Mateo de París que «distaba del Sol casi un codo, emitiendo de sí un gran rayo desde la hora tercia [más exacto sería la sexta] hasta la hora nona». Así era también aquel ardiente cometa descrito por Aristóteles en *Meteoros*, libro I, 6, «cuya cabeza no se vio el primer día debido a que se hallaba ante el Sol o al menos bajo los rayos solares, pero al día siguiente se vio cuanto fue posible. Pues se apartó una mínima distancia del Sol, y enseguida se ocultó. Por causa del excesivo brillo [de la cola] todavía no aparecía el fuego difuso de la cabeza, pero pasado un tiempo [dice Aristóteles], como [la cola] brillase ya menos, se le restituyó su cara [a la cabeza del] al cometa. Extendió su resplandor hasta la tercera parte del cielo [esto es, a 60 grados]. Y apareció en invierno [el año 4 de la Olimpíada 101] y ascendiendo hasta el cinturón de Orión allí desapareció». El cometa del año 1618, que emergió de entre los rayos solares con una enorme cola, parecía igualar y hasta superar a las estrellas de primera magnitud, pero han aparecido no pocos cometas mayores que tenían colas más breves. De ellos algunos dicen que igualaron a Júpiter, otros a Venus o incluso a la Luna.

Hemos dicho que los cometas son una clase de planetas que giran en órbitas muy excéntricas en torno al Sol. Y, al igual que de los planetas sin cola suelen ser menores los que giran en órbitas menores y más cercanas al Sol, así también los cometas, que en sus perihelios se acercan más al Sol, parece razonable que sean mucho menores, para que no lleguen a perturbar demasiado con su atracción al Sol. Omito, pues, la determinación de los diámetros transversales de las órbitas y los tiempos periódicos a partir de la comparación de los cometas que regresan por las mismas órbitas tras largos intervalos de tiempo. Pero mientras tanto, la siguiente proposición puede dar alguna luz en este asunto.

PROPOSICIÓN XLII. PROBLEMA XXII

Corregir la trayectoria hallada de un cometa.

OPERACIÓN 1. Tómese la posición del plano de la trayectoria tal como fue hallada por medio de la proposición anterior; y selecciónense tres lugares del cometa determinados por observaciones cuanto más exactas sea posible, y lo más distantes entre sí; y sea A el tiempo entre la primera y la segunda observación, y B el tiempo entre la segunda y la tercera. Pero conviene que el cometa se halle en alguno de ellos en el perigeo, o por lo menos que no ande muy lejos del perigeo. Hállese mediante operaciones trigonométricas, a partir de esos lugares aparentes, los tres lugares verdaderos del cometa en el plano aquel de la trayectoria que se ha tomado. Después, por los lugares ha-

llados, en torno al Sol o foco, mediante operaciones aritméticas realizadas con ayuda de la proposición XXI del libro primero, trácese una sección cónica, y sean D y E sus áreas, delimitadas por los radios trazados al Sol desde los lugares hallados; a saber, D el área entre la observación primera y segunda, y E el área entre la segunda y la tercera. Y sea T el tiempo total en el que el área entera D + E debe ser descrita con la velocidad del cometa hallada por la proposición XVI del libro primero.

OPERACIÓN 2. Auméntese la longitud de los nodos del plano de la trayectoria, añadiendo a aquella longitud 20' o 30', que llamaremos P, pero conservando la anterior inclinación hacia el plano de la eclíptica. Después, a partir de los tres antedichos lugares observados del cometa, encuéntrense en este nuevo plano tres lugares verdaderos, como antes: después, trácese también una órbita que pase por esos tres lugares, y las áreas de la misma descritas entre observaciones, que sean ahora d y e, al igual que el tiempo entero t, en el que debiera describirse el área entera $d + e$.

OPERACIÓN 3. Manténgase la longitud de los nodos de la primera operación y auméntese la inclinación del plano de la trayectoria hacia el plano de la eclíptica, añadiendo a su inclinación inicial 20' o 30', que denominaremos Q. Después, a partir de los antedichos tres lugares aparentes observados del cometa, encuéntrense tres lugares verdaderos en este plano, y trácense la órbita que pase por esos lugares y las dos áreas comprendidas entre las observaciones y que sean éstas δ y ε, y el tiempo total τ en el cual debiera describirse el área entera $\delta + \varepsilon$.

Ahora sea, C a 1 como A a B, y G a 1 como D a E, y g a 1 como d a e, y γ a 1 como δ a ε; y sea S el tiempo verdadero entre la primera y tercera observación; y observando con cuidado las reglas de los signos + y – hállense los números m y n, de modo que ocurra $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$, y $2T - 2S = mT - mt + nT - n\tau$. Y si en la primera operación I representa la inclinación del plano de la trayectoria hacia el plano de la eclíptica, y K representa la longitud de uno cualquiera de los nodos, $I + nQ$ será la verdadera inclinación del plano de la trayectoria hacia el plano de la eclíptica, mientras $K + mP$ será la verdadera longitud del nodo. Y finalmente, si en la primera operación, en la segunda y en la tercera, las cantidades R, r, y ρ representan los «latera recta» de la trayectoria, mientras las cantidades $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$, representan sus lados transversales, respectivamente: el verdadero «latus rectum» será $R + mr - mR + n\rho - nR$, mientras que el verdadero lado transverso de la trayectoria que describe el cometa será $\frac{1}{L + ml - mL + n\lambda - nL}$. Pero una vez dado el lado transverso también está dado el tiempo periódico del cometa. Q.E.F.

Por lo demás, los tiempos periódicos de los cometas que giran y los lados transversos de las órbitas no se podrán determinar con bastante exactitud, a no ser por la mutua comparación de los cometas que aparecen en tiempos distintos. Si muchos cometas, después de iguales intervalos de tiempo, se encuentra que han descrito la misma órbita habrá que concluir que todos éstos eran uno y el mismo cometa girando en la misma órbita. Y entonces, por los tiempos de las revoluciones, se tendrán dados los lados transversales de las órbitas y a partir de estos lados se determinarán las órbitas elípticas.

A este fin habrá, pues, que calcular las trayectorias de muchos cometas, bajo la hipótesis de que son parabólicas. Pues esta clase de trayectorias concuerdan muy aproximadamente siempre con los fenómenos. Esto se ve claramente, no sólo por la trayectoria parabólica del cometa del año 1680, que antes he comparado con las observaciones,

sino también por la de aquel célebre cometa que apareció los años 1664 y 1665 y fue observado por Hewelcke. Éste calculó, aunque con poca exactitud, sus longitudes y latitudes sobre la base de sus observaciones. Con esas mismas observaciones, nuestro Halley calculó de nuevo los lugares de ese cometa, y así al fin, por los lugares hallados de ese modo, determinó la trayectoria del cometa. Y halló que su nodo ascendente estuvo en ♊ 21° 13' 55", la inclinación de la órbita hacia el plano de la eclíptica de 21° 18' 40", la distancia del perihelio al nodo en la órbita 49° 27' 30". El perihelio en ☊ 8° 40' 30", con latitud heliocéntrica austral de 16° 1' 45" en tiempo igualado de Londres o a las 13h. 8' p.m. de Dantzig, calendario antiguo, y el «latus rectum» de la parábola fue de 410286, para una distancia media de la Tierra al Sol de 100.000. La medida en que los lugares del cometa calculados en esta órbita concuerdan con las observaciones se verá claramente por la tabla de la página siguiente calculada por Halley.

En el mes de febrero de principios del año 1665, la primera estrella de Aries, a la que llamaré en lo sucesivo γ se hallaba en ♈ 28° 30' 15", con una latitud boreal de 7° 8' 58". La segunda de Aries estaba en ♈ 29° 17' 18", con una latitud boreal de 8° 28' 16". Y una estrella de séptima magnitud, que llamaré A, estaba en ♈ 28° 24' 45" con latitud boreal de 8° 28' 33". Y el cometa, el 7 de febrero a las 0h. 7' 30" de París (es decir, el día 7 de febrero a las 0h. 8' 37" de Dantzig), calendario antiguo, formaba con dichas estrellas γ y A un triángulo rectángulo en γ. Y la distancia del cometa a la estrella γ era igual a la distancia entre las estrellas γ y A, esto es, de 1° 20' 26" en el paralelo de la latitud de la estrella γ. Por lo cual, si de la longitud de la estrella γ se resta 1° 20' 26", quedará la longitud del cometa ♈ 27° 9' 49". Auzout, basándose en esta observación suya, situó al cometa en ♈ 27° 0' aproximadamente. Y según el dibujo, con el que Hooke representó su movimiento, el cometa estaba ahora en ♈ 26° 59' 24". Considerando la media entre ambos lo he puesto en ♈ 27° 4' 46". Auzout, por la misma observación, situó la latitud del cometa en 7" y 4' o 5' norte. Más exacto hubiera sido en 7° 3' 29", puesto que la diferencia de latitudes del cometa y de la estrella γ era igual a la diferencia de longitudes de las estrellas γ y A.

El 22 de febrero a las 7h. 30' de Londres, es decir, el 22 de febrero a las 8h. 46' en Dantzig, la distancia del cometa a la estrella A, según las observaciones de Hooke representadas por él mismo en un dibujo, y también según observaciones de Auzout representadas por Petit en otro dibujo, era una quinta parte de la distancia entre la estrella A y la primera de Aries, es decir, 15' 57". Y la distancia del cometa hasta la línea que unía la estrella A con la primera de Aries era una cuarta parte de esa quinta parte, es decir, 4'. Por tanto, el cometa se hallaba en ♈ 28° 29' 46" con latitud norte de 8° 12' 36".

En marzo 1d. 7h. 0', de Londres, esto es, marzo 1d. 8h. 16' de Dantzig, el cometa fue observado cerca de la segunda estrella de Aries, a una distancia entre ellos que era a la distancia entre la primera y la segunda de Aries, esto es, a 1° 33' como 4 a 45 según Hooke, y como 2 a 23 según Gottignies. Por lo que la distancia del cometa a la segunda de Aries era de 8' 16" según Hooke, *o* de 8' 5" según Gottignies, *o* la media de 8' 10". Pero el cometa, según Gottignies, ya había rebasado la segunda de Aries en un espacio de casi la cuarta o quinta parte del recorrido de un día, es decir, 1' 35" aproximadamente (con lo que concuerda bien Auzout), o algo menos según Hooke, quizá 1'. Por lo cual si a la longitud de la primera de Aries se añade 1' y a su latitud 8'10", se tendrá la longitud del cometa en ♈ 1° 29' 18" y la latitud en 8° 36' 26" norte.

En marzo 7d. 7h. 30' de París (es decir, marzo, 7d. 8h. 37' de Dantzig) según las observaciones de Auzout la distancia del cometa de la segunda de Aries era igual a la dis-

Tabla de Halley

Tiempo aparente en Dantzig (s.a.)	*Distancias del cometa observadas desde*		*Lugares observados*		*Lugares calculados en la órbita*
Diciembre		° ' "		° ' "	° ' "
d h m	El corazón de León	46,24,20	Long.	☌ 7,01,00	7, 1,29
3. 18. 29½	La punta de Virgo	22,52,10	Lat. S.	21,39, 0	21,38,50
4. 18. 1½	El corazón de León	46, 2,45	Long.	☌ 6,15, 0	☌ 6,16, 5
	La punta de Virgo	23,52,40	Lat. S.	22,24, 0	22,24, 0
7, 17, 48	El corazón de León	44,48, 0	Long.	☌ 3, 6, 0	☌ 3, 7,33
	La punta de Virgo	27,56,40	Lat. S.	25,22, 0	25,21,40
17 14 13	El corazón de León	53,15,15	Long.	☊ 2,56, 0	☊ 2,56, 0
	El hombro derecho de Orión	45,43,30	Lat. S.	49,25, 0	49,25, 0
19, 9, 25	Proción	35,13,50	Long.	♊ 28,40,30	♊ 28,43, 0
	La estrella brillante de la mandíbula de Ballena	52,56, 0	Lat. S.	45,48, 0	45,46, 0
20, 9, 53½	Proción	40,49, 0	Long.	♊ 13,03, 0	♊ 13, 5, 0
	La estrella brillante de la mandíbula de Ballena	40,04, 0	Lat. S.	39,54, 0	39.53 0
21, 9, 9½	El hombro derecho de Orión	26,21,25	Long.	♊ 2,16, 0	♊ 2,18,30
	La estrella brillante de la mandíbula de Ballena	29,28, 0	Lat. S.	33,41, 0	33,39,40
22, 9, 0	El hombro derecho de Orión	29,47, 0	Long.	♉ 24,24, 0	♉ 24,27, 0
	La estrella brillante de la mandíbula de Ballena	20,29,30	Lat. S.	27,45, 0	27,46, 0
26, 7, 58	La estrella brillante de Aries	23,20, 0	Long.	♉ 9, 0, 0	♉ 9, 2,28
	Aldebarán	26,44, 0	Lat. S.	12,36, 0	12,34,13
27, 6, 45	La estrella brillante de Aries	20,45, 0	Long.	♉ 7, 5,40	♉ 7, 8,45
	Aldebarán	28,10, 0	Lat. S.	10,23, 0	10,23,13
28, 7, 39	La estrella brillante de Aries	18,29, 0	Long.	♉ 5,24,45	♉ 5,27,52
	Palilicium	29,37, 0	Lat. S.	8,22,50	8,23,37
31, 6, 45	El cinturón de Andrómeda	30,48,10	Long.	♉ 2, 7,40	♉ 2, 8,20
	Palilicium	32,53,30	Lat. S.	4,13, 0	4,16,25
Enero 1665	El cinturón de Andrómeda	23,11, 0	Long.	♈ 28,24,47	♈ 28,24, 0
7, 7, 37½	Palilicium	37,12,25	Lat. N.	0,54, 0	0,53, 0

(continuación)

Tiempo aparente en Dantzig (s.a.)	*Distancias del cometa observadas desde*		*Lugares observados*		*Lugares calculados en la órbita*
13, 7, 0	La cabeza de Andrómeda	28, 7,10	Long.	♈ 27, 6,54	♈ 27, 6,39
	Palilicium	38,55,20	Lat. N.	3, 6,50	3, 7,40
24, 7, 29	El cinturón de Andrómeda	20,32,15	Long.	♈ 26,29,15	♈ 26,28,50
	Palilicium	40, 5, 0	Lat. N.	5,25,50	5,26, 0
Febrero			Long.	♈ 27, 4,46	♈ 27,24,55
7, 8, 37			Lat. N.	7, 3,29	7, 3,15
22, 8, 46			Long.	♈ 28,29,46	♈ 28,29,58
			Lat. N.	8,12,36	8,10,25
Marzo			Long.	♈ 29,18,15	♈ 29,18,20
1, 8, 16			Lat. N.	8,36,26	7,36,12
7, 8, 37			Long.	♉ 0, 2,48	♉ 0, 2,42
			Lat. N.	8,56,30	8,56,56

tancia de la segunda de Aries a la estrella A, esto es, 52' 29". Y la diferencia de longitudes del cometa y de la segunda de Aries era de 45' o 46' o quizá la media de 45' 30". Por lo cual el cometa se hallaba en ♉ 0° 2' 48". Del dibujo de las observaciones de Azout, construido por Petit, Hewelcke dedujo la latitud del cometa en 8° 54'. Pero el dibujante curvó irregularmente el camino del cometa hacia el final de su movimiento, y en el dibujo de las observaciones de Azout construido por Hewelcke, éste corrigió la curvatura irregular, y así hizo que la latitud del cometa fuera de 8° 55'30". Y corrigiendo la irregularidad un poco más, la latitud vendría a resultar de 8° 56' o quizá 8° 57'.

Este cometa fue visto también el 9 de marzo, y entonces debió situarse en ♉ 0° 18', con latitud boreal de 9° $3\frac{1}{2}$' aproximadamente.

Este cometa fue visible durante tres meses y recorrió casi seis signos, y en un día se desplazó casi veinte grados. Su curso se desvió del Círculo Máximo, curvándose notablemente hacia el norte; y su movimiento al final, de retrógrado pasó a directo. Y no obstante un curso tan insólito, la teoría de principio a fin no vino a concordar menos con las observaciones de lo que suelen concordar las teorías de los planetas con las observaciones, como verá quien examine la tabla. Sin embargo, hay que restar casi dos minutos primeros, cuando el cometa fue más veloz; cosa que se puede hacer restando doce minutos segundos del ángulo entre el nodo ascendente y el perihelio, o estableciendo dicho ángulo en 49° 27' 18". La paralaje anual de uno y otro cometa (éste y el anteriormente mencionado) fue grande, y por ello se demuestra el movimiento anual de la Tierra en el Orbe Magno.

Se confirma también la teoría por el movimiento del cometa que apareció el año 1683. Este fue retrógrado, en una órbita cuyo plano casi formaba ángulo recto con el

plano de la eclíptica. Su nodo ascendente (por cálculos de Halley) estaba en ♍ 23° 23'; la inclinación de la órbita hacia la eclíptica era de 83° 11'; el perihelio en ♊ 25° 29' 30"; la distancia del perihelio al Sol de 56020, para un radio del Orbe Magno de 100000, y el momento del perihelio el día 2 de julio a las 3h. 50'. Los lugares del cometa en esta órbita calculados por Halley y comparados con los observados por Flamsteed, se muestran en la tabla de la página siguiente.

También se confirma la teoría por el movimiento del cometa retrógrado que apareció el año 1682. Su nodo ascendente (calculado por Halley) se hallaba en ♉ 21° 16' 30". La inclinación de la órbita hacia el plano de la eclíptica era de 17° 56' 0". El perihelio en ♒ 2° 52' 50". La distancia del perihelio al Sol de 58328 para un radio del Orbe Magno de 100000. Y el tiempo igualado del perihelio el 4 de septiembre a las 7h. 39'. Pero los lugares calculados, a partir de las observaciones de Flamsteed, comparados con los calculados mediante la teoría se muestran en la tabla siguiente. (Véase la página 1.014.)

Y también se confirma la teoría por el movimiento retrógrado del cometa que apareció el año 1723. Su nodo ascendente (calculado por Bradley, profesor Saviliano de astronomía en Oxford) estaba en ♈ 14° 16'. La inclinación de la órbita hacia el plano de la eclíptica de 49° 59'. El perihelio en ♉ 12° 15' 20". La distancia del perihelio al Sol de 998651, para un radio del Orbe Magno de 1000000, y el tiempo igualado del perihelio el 16 de septiembre a las 16h. 10'. Y los lugares del cometa en esta órbita calculados por Bradley, comparados con los observados por él mismo, por su tío Pound y por Halley se muestran en la tabla siguiente. (Véase la página 1.015.)

Con estos ejemplos queda harto claro que los movimientos de los cometas se ponen de manifiesto mediante la teoría recién expuesta con no menor exactitud que la conseguida por las teorías de los movimientos de los planetas. Y, por lo tanto, las órbitas de los cometas pueden ser calculadas mediante esta teoría, igual que conocer, por fin, el tiempo periódico de un cometa que gira en una órbita cualquiera, y se conocerán entonces los lados transversales de las órbitas elípticas al igual que las alturas de los afelios.

El cometa retrógrado que apareció el año 1607 describió una órbita cuyo nodo ascendente (calculado por Halley) estaba en ♉ 20° 21; la inclinación del plano de la órbita hacia el plano de la eclíptica era de 17° 2'; el perihelio en ♒ 2° 16'; y la distancia del perihelio al Sol era de 58680 para un radio del Orbe Magno de 100000. Y el cometa estaba en el perihelio el 16 de octubre a las 3h. 50'. Concuerda muy aproximadamente esta órbita con la órbita del cometa que apareció en 1682. Si estos dos cometas fueran uno y el mismo, este cometa giraría en un período de 75 años, y el eje mayor de dicha órbita será al eje mayor del Orbe Magno como la raíz cúbica de 75 × 75 a 1, o como 1778 a 100 aproximadamente. Y la distancia del afelio de este cometa al Sol será a la distancia media de la Tierra al Sol como 35 a 1 aproximadamente. Conociendo estas cosas no será muy difícil determinar la órbita elíptica de este cometa. Y esto será así si resulta que después de un espacio de 75 años el cometa regresara de nuevo por la misma órbita. Los demás cometas parece que giran en períodos más largos y ascienden más arriba.

Por lo demás, los cometas, debido a su gran número, y a la gran distancia de los afelios hasta el Sol así como a su gran permanencia en los afelios, deben sufrir perturbaciones no pequeñas entre ellos por causa de las gravedades y aumentar unas veces o disminuir otras, tanto sus excentricidades como sus tiempos periódicos. Por consi-

1683 *Tiempo ecuatorial*	*Lugar del Sol*	*Longitud calculada del cometa*	*Latitud norte calculada*	*Longitud observada del cometa*	*Latitud norte observada*	*Diferencia longitud*	*Diferencia latitud*
d h m	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	' "	' "
Jul. 13,12,55	♌ 1, 2,30	♋ 13, 5,42	29,28,13	♋ 13, 6,42	29,28,20	+1, 0	+0, 7
15,11,15	2,53,12	11,37,48	29,34, 0	11,39,43	29,34,50	+1,55	+0,50
17,10,20	4,45,45	10, 7, 6	29,33,30	10, 8,40	29,34, 0	+1,34	+0,30
23,13,40	10,38,21	5,10,27	28,51,42	5,11,30	28,50,28	+1, 3	–1,14
25,14, 5	12,35,28	3,27,53	24,24,47	3,27, 0	28,23,40	–0,53	–1, 7
31, 9,42	18, 9,22	♊ 27,55, 3	26,22,52	♊ 27,54,24	26,22,25	–0,39	–0,27
31,14,55	18,21,53	27,41, 7	26,16,57	27,41, 8	26,14,50	+0, 1	–2, 7
Ag. 2,14,56	20,17,16	25,29,32	25,16,19	25,28,46	25,17,28	–0,46	+1, 9
4,10,49	22, 2,50	23,18,20	24,10,49	23,16,55	24,12,19	–1,25	+1,30
6,10, 9	23,56,45	20,42,23	22,47, 5	20,40,32	22,49,05	–1,51	+2, 0
9,10,26	26,50,52	16, 7,57	20, 6,36	16, 5,55	20, 6,10	+2, 2	–0,27
15,14, 1	♍ 2,47,13	3,30,48	11,37,33	3,26,18	11,32, 1	–4,30	–5,32
16,15,10	3,48, 2	0,43, 7	9,34,16	0,41,55	9,34,13	–1,12	–0, 3
18,15,44	5,45,33	♉ 24,52,53	5,11,15 Sur	♉ 24,49, 5	5, 9,11 Sur	–3,48	–2, 4
22,14,44	9,35,49	11, 7,14	5,16,58	11, 7,12	5,16,58	–0, 2	–0, 3
23,15,52	10,36,48	7, 2,18	8,17,09	7, 1,17	8,16,41	–1, 1	–0,28
26,16, 2	13,31,10	♈ 24,45,31	16,38, 0	♈ 24,44, 0	16,38,20	–1,31	+0,20

1682 *Tiempo ap.*	*Lugar del Sol*	*Longitud calculada del cometa*	*Latitud norte calculada*	*Longitud observada del cometa*	*Latitud norte observada*	*Diferencia longitud*	*Diferencia latitud*
d h m	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	' "	' "
Ag. 19,16,38	♍ 7, 0, 7	♌ 18,14,28	25,50, 7	♌ 18,14,40	25,49,55	–0,12	+0,12
20,15,38	7,55,52	24,46,23	26,14,42	24,46,22	26,12,52	+0, 1	+1,50
21, 8,21	8,36,14	29,37,15	26,20, 3	29,38, 2	26,17,37	–0,47	+2,26
22, 8, 8	9,33,55	♍ 6,29,53	26, 8,42	♍ 6,30, 3	26, 7,12	–0,10	+1,30
29, 8,20	16,22,40	♎ 12,37,54	18,37,47	♎ 12,37,49	18,34, 5	+0, 5	+3,42
30, 7,45	17,19,41	15,36, 1	17,26,43	15,35,18	17,27,17	+0,43	–0,34
Sept. 1, 7,33	19,16, 9	20,30,53	15,13, 0	20,27, 4	15, 9,49	+3,49	+3,11
4, 7,22	22,11,28	25,42, 0	12,23,48	25,40,58	12,22, 0	+1, 2	+1,48
5, 7,32	23,10,29	27, 0,46	14,33,08	26,59,24	11,33,51	+1,22	–0,43
8, 7,16	26, 5,58	29,58,44	9,26,46	29,58,45	9,26,43	–0, 1	+0, 3
9, 7,26	27, 5, 9	♏ 0,44,10	8,49,10	♏ 0,44, 4	8,48,25	+0, 6	+0,45

1723 *Tiempo ecuatorial*	*Longitud observada del cometa*	*Latitud norte observada*	*Longitud calculada del cometa*	*Latitud norte calculada*	*Diferencia longitud*	*Diferencia latitud*
d h m	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	"	"
Oct. 9, 8, 5	♒ 7,22,15	5, 2, 0	♒ 7,21,26	5, 2,47	+49	–47
10, 6,21	6,41,12	7,44,13	6,41,42	7,43,18	–50	+55
12, 7,22	5,39,58	11,55, 0	5,40,19	11,54,55	–21	+05
14, 8,57	4,59,49	14,43,50	5, 0,37	14,44, 1	–48	–11
15, 6,35	4,47,41	15,40,51	4,47,45	15,40,55	– 4	– 4
21, 6,22	4, 2,32	19,41,49	4, 2,21	19,42, 3	+11	–14
22, 6,24	3,59, 2	20, 8,12	3,59,10	20, 8,17	– 8	– 5
25, 8, 2	3,55,29	20,55,18	3,55,11	20,55, 9	+18	+ 9
29, 8,56	3,56,17	22,20,27	3,56,42	22,20,10	–25	+17
30, 6,20	3,58, 9	22,32,28	3,58,17	22,32,12	– 8	+16
Nov. 5, 5,53	4,16,30	23,38,33	4,16,23	23,38, 7	+ 7	+26
8, 7, 6	4,29,36	24, 4,30	4,29,54	24, 4,40	18	–10
14, 6,20	5, 2,16	24,48,46	5, 2,51	24,48,16	–35	+30
20, 7,45	5,42,20	25,24,45	5,43,13	25,25,17	–53	–32
Dic. 7, 6,45	8, 4,13	26,54,18	8, 3,55	26,53,42	+18	+36

guiente, no hay que esperar que el mismo cometa regrese por la misma órbita y en los mismos tiempos periódicos de modo exacto. Basta con que no sobrevengan mutaciones mayores que las que puedan deberse a las causas susodichas.

Y con esto se da cuenta de por qué los cometas no estén comprendidos en el zodíaco como los planetas, sino que salgan de él y con movimientos variados se dirijan hacia todas las regiones del cielo. Y ello con objeto de que en sus afelios, cuando se mueven muy lentamente, disten entre ellos lo más posible y se atraigan entre ellos cuanto menos. Por esta causa, los cometas que más descienden y, por lo mismo, se mueven en los afelios más lentamente, deberán ascender más.

El cometa que apareció el año 1680 distaba en su perihelio del Sol menos de la sexta parte del diámetro del Sol; y debido a la gran velocidad en esas proximidades y a alguna densidad de la atmósfera solar, debió sufrir alguna resistencia y retardarse un tanto y acercarse más al Sol: y en cada una de las revoluciones acercándose un poco, al fin acabará cayendo en el cuerpo solar. Pero en el afelio, cuando se mueve muy lentamente, puede a veces ser retardado por la atracción de otros cometas y después caer hacia el Sol. También de este modo las estrellas fijas, que poco a poco se extinguen en luz y vapores pueden realimentarse con cometas que caen en ellas, y repuestas con ese nuevo alimento ser tenidas por estrellas nuevas. De esta clase son las estrellas fijas que aparecen de repente y, al principio, brillan enormemente y después poco a poco se desvanecen. Tal fue la estrella de la silla de Casiopea que no vio Cornelio Gemma el 8 de noviembre de 1572 observando esa parte del cielo en una noche diáfana; pero a la noche siguiente (9 de noviembre) la vio más brillante que todas las fijas y apenas de menos luz que Venus. Tycho Brahe la vio el día 11 del mismo mes cuando más brillaba; y a partir de ese momento decreciendo poco a poco la vio desaparecer en el espacio de 16 meses. En el mes de noviembre, recién aparecida, igualaba en brillo a Venus. En diciembre, un tanto disminuida, parecía igualar a Júpiter. El año 1573, en enero, era menor que Júpiter y mayor que Sirio, a la cual ya resultaba igual en febrero y primeros de marzo. En los meses de abril y mayo parecía igual a las estrellas de segunda magnitud, en junio, julio y agosto a las estrellas de tercera magnitud, en septiembre, octubre y noviembre a las de cuarta, en diciembre y en enero de 1574 a las de quinta, en febrero a las de sexta y en marzo desapareció de vista. Al principio su color era claro, blanquecino y brillante y después amarillo, y el año 1573 en marzo rojiza como la de Marte o Aldebarán; en mayo adquirió una palidez blanquecina, como la que vemos en Saturno, color que conservó hasta el fin, pero haciéndose cada vez más oscura. Así fue también la estrella del pie derecho de Serpentario, observada por los discípulos de Kepler el año 1604 el día 30 de septiembre, calendario antiguo, cuando comenzó a aparecer, y observaron que superaba a Júpiter con su luz, siendo así que la noche precedente no se veía. Desde ese momento empezó a decrecer y en el espacio de 15 o 16 meses desapareció de la vista. Por una estrella nueva semejante y extremadamente brillante se dice que se vio impulsado Hiparco para observar las fijas y confeccionar un catálogo. Pero las fijas que aparecen y desaparecen alternativamente y que crecen poco a poco y apenas superan nunca a las de tercera magnitud, parecen ser de otra clase, y al girar muestran alternativamente sus partes oscuras y sus partes luminosas. Pero los vapores que surgen del Sol, de las estrellas fijas y de las colas de los cometas, pueden caer por su gravedad sobre las atmósferas de los planetas y condensarse allí y convertirse en agua y espíritus húmedos y después por calentamiento lento pasar poco a poco a sales, sulfuros, tinturas, limo, barro, arcilla, arena, piedras, corales y otras sustancias terrestres.

ESCOLIO GENERAL

La hipótesis de los vórtices se ve acosada por muchas dificultades. Para que cada planeta, con un radio trazado hasta el Sol, describa áreas proporcionales a los tiempos, los tiempos periódicos de las partes del vórtice deberían estar en razón cuadrada de las distancias al Sol. Para que los tiempos periódicos de los planetas estén en razón de la potencia —de las distancias al Sol, los tiempos periódicos de las partes del vórtice deberían estar en razón de la potencia— de las distancias. Para que los vórtices menores en giro en torno a Saturno, Júpiter y otros planetas se conserven y floten tranquilamente en el vórtice del Sol, los tiempos periódicos de las partes del vórtice solar deben ser iguales. Las revoluciones del Sol y de los planetas en torno a sus ejes, que deberían concordar con los movimientos de los vórtices, discrepan de todas estas proporciones. Los movimientos de los cometas son sumamente regulares y observan las mismas leyes que los movimientos de los planetas, y no pueden explicarse por los vórtices. Los cometas se desplazan con movimientos muy excéntricos hacia todas las partes dedos cielos, cosa que no podría ocurrir si no se suprimen los vórtices.

Los proyectiles, en nuestra atmósfera, sufren únicamente la resistencia del aire. Suprimiendo el aire, como ocurre en el vacío de Boyle, cesa la resistencia, de suerte que una leve pluma y el denso oro caen en este vacío con la misma velocidad. E igual es la cosa en los espacios celestes que están más allá de la atmósfera terrestre. Todos los cuerpos en estos espacios deben moverse con entera libertad; y por lo mismo, los planetas y los cometas deberán girar perpetuamente según las leyes expuestas más arriba en órbitas de especie y posición dadas. Ciertamente perseverarán en sus órbitas por las leyes de la gravedad, pero de ningún modo pudieron por estas leyes adquirir inicialmente la situación regular de las órbitas.

Los seis planetas principales giran en torno al Sol en círculos concéntricos al Sol, con la misma dirección de movimiento y aproximadamente en el mismo plano. Diez lunas giran en torno a la, Tierra, Júpiter y Saturno en círculos concéntricos, con la misma dirección de movimiento, en los planos de las órbitas de los planetas muy aproximadamente. Y todos estos movimientos regulares no tienen un origen debido a causas mecánicas; toda vez que los cometas circulan en órbitas muy excéntricas libremente y en todas direcciones del firmamento. Con este tipo de movimiento los cometas pasan rápida y fácilmente por las órbitas de los planetas, y en sus afelios, cuando sus movimientos son más lentos y se detienen por más tiempo, distan entre ellos inmensamente, para que sea mínima la atracción mutua. Tan elegante combinación de Sol, planetas y cometas sólo pudo tener origen en la inteligencia y poder de un ente inteligente y poderoso. Y si las estrellas fijas fueren centros de sistemas semejantes, todos ellos construidos con un esquema similar, estarán sometidos al dominio de Uno: sobre todo si la luz de las fijas es de la misma naturaleza que la luz del Sol y todos los sistemas emiten luz hacia todos mutuamente. Y para que los sistemas de las fijas no caigan por la gravedad uno sobre otro, él los habría colocado a inmensas distancias uno de otro.

Él lo rige todo, no como alma del mundo, sino como dueño de todos. Y por su dominio, suele ser llamado señor dios «παντοκράτωρ». Pues dios es una palabra relativa y está en relación con los siervos: y deidad es la dominación de dios, no sobre su propio cuerpo, como creen aquellos para quienes dios es el alma del mundo, sino sobre los siervos. Dios sumo es un ente eterno, infinito, absolutamente perfecto: pero un ente cualquiera perfecto sin dominio no es dios señor. Pues decimos, dios mío, dios vuestro,

dios de Israel, dios de dioses, y señor de señores; pero no decimos eterno mío, eterno vuestro, eterno de Israel, eterno de dioses; no decimos infinito mío, o perfecto mío. Estas denominaciones no tienen relación con los siervos. La voz dios[1] significa con frecuencia dueño: pero todo dueño no es dios. La dominación de un ente espiritual constituye un dios, la verdadera al verdadero, la suma al sumo, la ficticia al ficticio. Y de la verdadera dominación se sigue que un dios verdadero es vivo, inteligente y poderoso; de las demás perfecciones que es sumo o sumamente perfecto. Es eterno e infinito, omnipotente y omnisciente, es decir, dura desde la eternidad hasta la eternidad y está presente desde el principio hasta el infinito: lo rige todo; lo conoce todo, lo que sucede y lo que puede suceder. No es la eternidad y la infinitud, sino eterno e infinito; no es la duración y el espacio, sino que dura y está presente. Dura siempre y está presente en todo lugar, y existiendo siempre y en todo lugar, constituye a la duración y al espacio. Puesto que cada partícula de espacio existe *siempre*, y cada momento indivisible de duración está en *algún lugar*, ciertamente el constructor y señor de todas las cosas no será *nunca, ningún lugar*. Toda alma siente en distintos tiempos y en diversos órganos de los sentidos y de los movimientos y es la misma persona indivisible. Las partes se dan sucesivamente en la duración, coexistentes en el espacio, pero ni unas ni otras en la persona humana o en su principio pensante; y mucho menos en la sustancia pensante de dios. Todo hombre, en tanto que cosa sentiente, es uno y el mismo hombre durante su vida en todos y cada uno de los órganos de sus sentidos. Dios es uno y el mismo dios siempre y en todo lugar. Es omnipotente no sólo *virtualmente*, sino *sustancialmente*: pues lo virtual no puede subsistir sin la sustancia. En él[2] se hallan contenidas y se mueven todas las cosas, pero sin mutua interferencia. Dios nada sufre por el movimiento de los cuerpos: éstos no experimentan resistencia alguna por la omnipresencia de dios. Está reconocido que un dios sumo existe necesariamente: y con la misma necesidad existe *siempre* y en *todo lugar*. De donde también es todo él semejante a sí mismo, todo ojo, todo oído, todo cerebro, todo brazo, todo fuerza de sentir, de entender, de actuar, pero en modo alguno a la manera humana, o a la manera corporal, sino de una manera totalmente desconocida para nosotros. Como el ciego no tiene idea de los colores, de igual modo nosotros no tenemos idea de los modos con los que dios sapientísimo siente y entiende todas las cosas. Absolutamente desprovisto de todo cuerpo y figura corporal, no puede por ello ser visto ni oído, ni tocado, ni debe ser venerado bajo forma de cosa corpórea alguna. Tenemos ideas de sus atributos, pero qué sea la sustancia de alguna cosa lo ignoramos por completo. Solamente vemos las formas y colores de los cuerpos, sólo oímos los sonidos, sólo tocamos las superficies externas, olemos los meros olores y gustamos los sabores: pero las sustancias interiores no las conocemos con nin-

1. El doctor Pocock deriva la palabra latina «Deus» del árabe «du» (en el caso oblícuo «di»), que significa «Señor». Y los mismos príncipes son llamados dioses, Salmos LXXXII, ver. 6, y Juan X.45. Y Moisés es presentado como dios a su hermano Aarón, y como un dios al faraón (Éxodo IV, 16, y VII, 1). Y en el mismo sentido las almas de los príncipes fallecidos eran llamadas antiguamente dioses, por los paganos, pero falsamente, transformados por su afán de dominio.

2. Ésta era la opinión de los antiguos. Así, Pitágoras, en Cicer. *De Nat. Deor.*, lib. I, Tales, Anaxágoras, Virgilio, *Georg.*, lib. IV, ver. 721, y Eneida, lib. VI, ver. 721. Filón, al comienzo de libro I de las alegorías, *Aratus*, al comienzo de su «Phaenom». También los autores sagrados; como san Pablo, Hechos, XVII, 27, 28, san Juan, Evang. XIV.2. Moisés, en Deut. IV.39, y X.14. David, Salmos, CXXIX,7, 8, 9. Salomón, I Reyes, VIII.27. Job. XXII.12, 13, 14. Jeremías, XXIII.23, 24. Los idólatras suponían que el Sol, la Luna y las estrellas, las almas de los hombres, y otras partes del mundo eran partes del Dios Supremo y, por lo tanto, debían ser adoradas, pero erróneamente.

gún sentido, ni con ninguna acción refleja; mucho menos tenemos una idea de la sustancia de dios. A éste le conocemos tan sólo por sus propiedades y atributos y por las sapientísimas y óptimas estructuras y causas finales de las cosas y le admiramos por las perfecciones, pero le veneramos y damos culto por el dominio. Pero le damos culto como siervos, y un dios sin dominio, providencia y causas finales no es nada más que hado y naturaleza. De la ciega necesidad metafísica, que es también la misma siempre y en todo lugar, no surge ninguna variación de las cosas. Toda la variedad de cosas, establecidas según los lugares y los tiempos, solamente pudo originarse de las ideas y voluntad de un ente necesariamente existente. Se dice alegóricamente que dios ve, oye, habla, ríe, ama, tiene odio, desea, da, recibe, se alegra, está airado, lucha, fabrica, funda, construye. Pues todo discurso sobre dios se produce mediante alguna semejanza a partir de las cosas humanas, ciertamente no perfecta, pero algo semejante. Esto respecto a dios de quien, efectivamente, corresponde hablar en filosofía natural a partir de los fenómenos.

Hasta aquí he expuesto los fenómenos de los cielos y de nuestro mar por la fuerza de la gravedad, pero todavía no he asignado causa a la gravedad. Efectivamente esta fuerza surge de alguna causa que penetra hasta los centros del Sol y de los planetas sin disminución de la fuerza; y la cual actúa, no según la cantidad de las *superficies* de las partículas hacia las cuales actúa (como suelen hacer las causas mecánicas), sino según la cantidad de materia *sólida*; *y* cuya acción se extiende por todas partes hasta distancias inmensas, decreciendo siempre como el cuadrado de las distancias. La gravedad hacia el Sol se compone de las gravedades hacia cada una de las partículas del Sol, y separándose del Sol decrece exactamente en razón del cuadrado de las distancias hasta más allá de la órbita de Saturno, como se evidencia por el reposo de los afelios de los planetas, y hasta los últimos afelios de los cometas, si semejantes afelios están en reposo. Pero no he podido todavía deducir a partir de los fenómenos la razón de estas propiedades de la gravedad y yo no imagino hipótesis. Pues lo que no se deduce de los fenómenos, ha de ser llamado hipótesis; *y* las hipótesis, bien metafísicas, bien físicas, o de cualidades ocultas, o mecánicas, no tienen lugar dentro de la *Filosofía experimental*. En esta filosofía las proposiciones se deducen de los fenómenos, y se convierten en generales por inducción. Así, la impenetrabilidad, la movilidad, el ímpetu de los cuerpos y las leyes de los movimientos y de la gravedad, llegaron a ser esclarecidas. Y bastante es que la gravedad exista de hecho y actúe según las leyes expuestas por nosotros y sea suficiente para todos los movimientos de los cuerpos celestes y de nuestro mar.

Bien podríamos ahora añadir algo de cierto espíritu sutilísimo que atraviesa todos los cuerpos gruesos y permanece latente en ellos; por cuya fuerza y acciones las partículas de los cuerpos se atraen entre ellas a las mínimas distancias y una vez que están contiguas permanecen unidas; y los cuerpos eléctricos actúan a distancias mayores, tanto repeliendo como atrayendo a los corpúsculos vecinos; y la luz se emite, se refleja, se refracta e inflexiona y calienta a los cuerpos; y toda sensación es excitada, y los miembros de los animales se mueven a voluntad, a saber, mediante las vibraciones de ese espíritu propagadas por los filamentos sólidos de los nervios desde los órganos externos de los sentidos hasta el cerebro y desde el cerebro hacia los músculos. Pero esto no puede exponerse en pocas palabras; y tampoco está disponible un número suficiente de experimentos mediante los cuales deben determinarse y mostrarse exactamente las leyes de las acciones de este espíritu.

FIN DE LOS PRINCIPIOS MATEMÁTICOS

Albert Einstein

(1879-1955)

VIDA Y OBRA

No siempre los genios son reconocidos de inmediato. Aunque Albert Einstein llegaría a ser el mayor físico teórico que jamás haya existido, cuando iba a la escuela elemental, en Alemania, su maestro le dijo a su padre: «Nunca hará nada de provecho». Cuando tenía unos veinte años, pese a haberse graduado en la Escuela Politécnica Federal de Zurich como profesor de matemáticas y física, no logró encontrar un puesto decente en la enseñanza, de manera que abandonó la esperanza de obtener una plaza en la universidad y buscó trabajo temporal en Berna. Con la ayuda del padre de un compañero de escuela, Einstein consiguió un empleo de inspector en la oficina suiza de patentes. Trabajaba seis días a la semana y ganaba 600 dólares al año. Así fue como se ganaba la vida mientras seguía su doctorado en física por la Universidad de Zurich.

En 1903, Einstein se casó con su novia serbia Mileva Maric y la pareja se trasladó a un piso de una sola habitación en Berna. Dos años después, nació su primer hijo, Hans Albert. Los años que rodearon el nacimiento de Hans fueron probablemente la época más feliz en la vida de Einstein. Tiempo después, los vecinos recordaban al joven padre empujando distraído el cochecito del niño por las calles de Berna y cómo, de vez en cuando, se agachaba hacia el cochecito y tomaba unos papeles para garabatear unas notas. Es probable que el cuaderno del cochecito contuviera algunas de las fórmulas y ecuaciones que condujeron a la teoría de la relatividad y al desarrollo de la bomba atómica.

Durante estos primeros años en la oficina de patentes, Einstein dedicó la mayor parte de su tiempo libre al estudio de la física teórica. Escribió una serie de cuatro artículos científicos fundamentales que establecieron algunas de las ideas más decisivas de la larga historia hacia la comprensión del universo. El espacio y el tiempo nunca más volverían a ser vistos como se habían visto antes. Su trabajo le valió el Premio Nobel de Física de 1921 y una enorme popularidad.

Cuando indagaba el funcionamiento del universo, Einstein tenía destellos de inspiración demasiado profundos para ser expresados con palabras. «Aquellos pensamientos no venían en una formulación verbal», se dice que Einstein comentó en cierta oca-

sión. «Rara vez pienso en palabras. El pensamiento llega, y sólo después puedo intentar expresarlo con palabras.»

Al final, Einstein se estableció en Estados Unidos, donde defendió públicamente causas como el sionismo y el desarme nuclear, sin abandonar nunca su pasión por la física. Hasta el mismo momento de su muerte, en 1955, anduvo en pos de una teoría unificada de campos que conectara los fenómenos de la gravitación y del electromagnetismo en un conjunto de ecuaciones. Constituye un homenaje a la visión de Einstein de que los físicos de hoy sigan buscando una gran unificación de las teorías físicas. Einstein revolucionó el pensamiento científico del siglo XX y más allá.

Albert Einstein nació en Ulm, en el antiguo estado alemán de Wüettemberg, el 14 de marzo de 1879, y creció en Munich. Fue el único hijo de Hermann Einstein y Pauline Koch. Su padre y su tío poseían un negocio de electrotécnica. La familia consideró que Albert era lento en el aprendizaje, porque le costó hablar (ahora se cree que quizás era disléxico). Se cuenta que cuando Hermann preguntó al maestro de escuela qué profesión podría convenirle más a Albert, el hombre replicó: «Tanto da. Nunca hará nada de provecho».

Einstein no brilló en la escuela. No le gustaban los reglamentos y sufría por ser uno de los pocos niños judíos de un centro católico. Esta experiencia de personaje solitario se repetiría varias veces a lo largo de su vida.

Uno de los primeros amores de Einstein fue la ciencia. Recordaba cómo a los cinco años su padre le mostró una brújula de bolsillo, y cuánto le maravilló que la aguja siempre apuntara hacia el norte, aunque se hiciera girar la caja. En aquel momento, evocaba Einstein, «sentí que detrás de las cosas debía de haber algo profundamente escondido».

Otro de sus primeros amores fue la música. Hacia los seis años empezó a estudiar violín. Aunque no tenía una aptitud natural para ello, cuando al cabo de varios años reconoció la estructura matemática de la música, el violín se convirtió en una pasión que duraría toda su vida —aunque su talento nunca llegó a la altura de su entusiasmo.

Cuando Einstein tenía diez años, su familia lo matriculó en el Luitpold Gymnasium, donde, según sus biógrafos, desarrolló una profunda aversión al autoritarismo. Este rasgo le resultó útil a lo largo de su vida científica, ya que sus hábitos de escepticismo le ayudaron a poner en duda supuestos científicos muy arraigados.

En 1895, Einstein intentó evitarse la escuela de enseñanza media pasando un examen de ingreso a la Escuela Politécnica Federal de Zurich, donde esperaba seguir la carrera de ingeniería eléctrica. He aquí lo que escribió sobre sus ambiciones en aquella época:

> Si tuviera la suerte de superar el examen, iría a Zurich. Pasaría allí cuatro años estudiando matemáticas y física. Me imagino como profesor en estas ramas de las ciencias naturales, especialmente de sus aspectos teóricos. He aquí las razones que me inspiraron este plan. Por encima de todo, está mi disposición al pensamiento abstracto y matemático y mi falta de imaginación y de habilidades prácticas.

Einstein suspendió la parte artística del examen, por lo cual le fue denegada la admisión a la Politécnica. Su familia le envió a la escuela secundaria a Aarau, en Suiza, esperando que así tendría una segunda oportunidad de ingresar en la escuela de Zurich. Así fue, y Einstein se graduó en la Politécnica en 1900. Fue en aquella época cuando se enamoró de Mileva Maric, que en 1901 dio a luz, antes de casarse, a su primera hija,

llamada Lieserl. Poco se sabe de Lieserl con seguridad, pero parece que nació con ciertas deformidades o que se puso muy enferma desde pequeña, que fue dada en adopción, y que murió cuando contaba apenas dos años de edad. Einstein y Maric se casaron en 1903.

El año en que nació Hans, 1905, fue un año milagroso para Einstein. En cierta manera, consiguió combinar las exigencias de la paternidad y un empleo a tiempo completo, y aun así logró publicar cuatro artículos científicos decisivos, todo ello sin beneficiarse de los recursos que un contrato académico le hubiera proporcionado.

En la primavera de dicho año, Einstein envió tres artículos a la revista alemana *Annalen der Physik*. Los tres aparecieron juntos en el volumen 17 de la revista. Einstein calificó el primer artículo, sobre el cuanto de luz, como «muy revolucionario». En él examinó el fenómeno del cuanto (la unidad fundamental de energía) descubierto por el físico alemán Max Planck. Einstein explicó el efecto fotoeléctrico, en el que cada electrón emitido se libera con una determinada cantidad de energía. Éste es el efecto cuántico, que establece que la energía es emitida en cantidades fijas que pueden ser expresadas como múltiplos enteros de una cantidad. Dicha teoría constituyó la base de la gran aventura de la mecánica cuántica. Einstein sugirió que la luz podía ser considerada como una colección de partículas de energía independientes, pero, curiosamente, no ofreció ningún dato experimental, sino que se limitó a argumentar teóricamente la existencia de estos «cuantos de luz» por razones estéticas.

Al principio, los físicos se resistieron a aceptar la teoría de Einstein, que se apartaba demasiado de las ideas científicas aceptadas en aquel tiempo, e iba más allá de lo que Planck había descubierto. Fue este primer artículo titulado «Sobre un punto de vista heurístico sobre la producción y la transformación de la luz» —y no sus trabajos en relatividad— el que le valió el Premio Nobel de Física de 1921.

En su segundo artículo, «Sobre una nueva determinación de las dimensiones moleculares» —que escribió como tesis doctoral— y en el tercero, «Sobre el movimiento de pequeñas partículas suspendidas en líquidos en reposo requerido por la teoría cinético-molecular del calor», Einstein propuso un método para determinar el tamaño y el movimiento de los átomos. También explicó el movimiento browniano, un fenómeno descrito por el botánico británico Robert Brown en sus estudios del movimiento errático del polen suspendido en un fluido. Einstein pensó que este movimiento estaba causado por impactos entre los átomos y las partículas. En aquella época, la simple existencia de los átomos era todavía un tema de debate científico, por lo cual no se puede subestimar la importancia de estos dos artículos, con los cuales Einstein confirmó la teoría atómica de la materia.

En el último de sus artículos de 1905, titulado «Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento», Einstein presentó la que sería conocida como teoría especial de la relatividad. El artículo, completamente teórico, sin notas ni bibliografía, se lee más como un ensayo que como una comunicación científica. Einstein escribió su tratado de nueve mil palabras en tan sólo cinco semanas, lo que no es obstáculo para que los historiadores de la ciencia lo consideren tan amplio y revolucionario como los *Principia* de Isaac Newton.

Lo que Newton había hecho con la comprensión de la gravitación, lo hizo Einstein con nuestra visión del tiempo y del espacio, destronando en el proceso la concepción newtoniana del tiempo. Newton había declarado que «el tiempo absoluto, verdadero y matemático, por sí mismo y por su propia naturaleza, fluye uniformemente sin relación

alguna con nada externo». Einstein sostuvo que todos los observadores deberían medir la misma velocidad de la luz, independientemente de la velocidad con que se estuvieran moviendo. También afirmó que la masa de un objeto no es constante, sino que aumenta con la velocidad del objeto. Experimentos posteriores demostraron que una pequeña partícula de materia, al ser acelerada hasta el 86 por ciento de la velocidad de la luz, tiene el doble de masa que en reposo.

Otra consecuencia de la relatividad es que la relación entre energía y masa puede ser expresada matemáticamente, algo que Einstein hizo en su famosa ecuación $E = mc^2$. Esta expresión —la energía es equivalente a la masa multiplicada por el cuadrado de la velocidad de la luz— reveló a los físicos que incluso minúsculas cantidades de materia tienen el potencial de liberar enormes cantidades de energía. Convertir completamente en energía tan sólo una parte de la masa de unos pocos átomos podría producir, por lo tanto, una explosión colosal. Esta hipótesis hizo que la ecuación de Einstein, de aspecto tan modesto, llevara a los científicos a considerar las consecuencias de romper el átomo (fisión nuclear) y, bajo la presión de los gobiernos, a desarrollar la bomba atómica. En 1909, Einstein fue nombrado profesor de física teórica en la universidad de Zurich, y tres años después cumplió su ambición de regresar a la Escuela Politécnica Federal como profesor. Se sucedieron otros nombramientos y cargos académicos importantes. Mientras tanto, siguió trabajando en su teoría de la gravitación así como en su teoría general de la relatividad. Pero mientras su categoría profesional iba en aumento, su matrimonio y su salud empezaron a deteriorarse. Él y Mileva iniciaron el proceso de divorcio en 1914, año en que aceptó una cátedra en la Universidad de Berlín. Cuando después cayó enfermo, su prima Elsa se ocupó de él, y hacia 1919 se casaron.

Si la teoría especial de la relatividad modificó radicalmente los conceptos de tiempo y de masa, la teoría general de la relatividad cambió el concepto de espacio. Newton había escrito que «el espacio absoluto, por su propia naturaleza, sin ninguna relación con algo externo, permanece siempre igual e inmutable». El espacio newtoniano es euclídeo, infinito e ilimitado, y su estructura geométrica es completamente independiente de la materia que lo ocupa. En él, todos los cuerpos gravitan el uno hacia el otro, sin tener efecto alguno sobre la estructura del espacio. En flagrante contraste, la teoría general de la relatividad de Einstein afirma que la masa gravitatoria no tan sólo actúa sobre los demás cuerpos, sino que también influye en la estructura del espacio. Si la masa de un cuerpo es suficientemente grande, hace que el espacio circundante se deforme y que, en dicha región, parezca que la luz se curve.

En 1919, sir Arthur Eddington buscó evidencias para poner a prueba la teoría general de la relatividad. Para ello, organizó dos expediciones, una a Brasil y otra a África Occidental, para observar si la luz de las estrellas se desviaba al pasar cerca de un cuerpo de gran masa —el sol— durante el eclipse solar total del 29 de mayo de 1919. En circunstancias normales, estas observaciones resultan imposibles, ya que la débil luz de las estrellas lejanas queda completamente anegada en la luminosidad del día, pero durante un eclipse esta luz sería visible durante unos instantes.

En septiembre, Einstein recibió un telegrama de Hendrik Lorentz, un gran físico y buen amigo suyo, que decía: «Eddington encontró desplazamiento de las estrellas en el borde del sol. Mediciones preliminares han dado entre nueve décimas de segundo y el doble de este valor». Los datos de Eddington eran compatibles con el desplazamiento predicho por la teoría general de la relatividad. Las fotografías de Brasil tomadas durante el eclipse parecían mostrar la luz de estrellas conocidas en una posición diferente a la

de su posición nocturna, cuando su luz no pasaba cerca del sol. La teoría general de la relatividad había sido confirmada, cambiando para siempre el curso de la física. Años más tarde, cuando un estudiante le preguntó cómo habría reaccionado si la teoría hubiera sido refutada, Einstein replicó: «Lo hubiera sentido por Dios. La teoría es correcta».

La confirmación de la relatividad general dio a Einstein una celebridad mundial. En 1921, fue elegido miembro de la British Royal Society. Premios y doctorados honoris causa le fueron saludando en cada ciudad que visitaba. En 1927, empezó a desarrollar los fundamentos de la mecánica cuántica con el físico danés Niels Bohr, mientras seguía en pos de su sueño de una teoría unificada de campos. Sus viajes a Estados Unidos dieron lugar a su nombramiento en 1932 como profesor de matemáticas y de física teórica en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, en Nueva Jersey.

Un año más tarde se estableció de forma permanente en Princeton, después de que el Partido Nazi en el poder en Alemania promoviera una campaña contra la «ciencia judía». La casa de Einstein fue confiscada y le fue retirada la ciudadanía alemana así como sus cargos en las universidades germanas. Hasta entonces, Einstein se había considerado pacifista, pero cuando Hitler convirtió Alemania en una potencia militar, Einstein empezó a creer que el uso de la fuerza contra Alemania estaba justificado. En 1939, al comenzar la segunda guerra mundial, Einstein empezó a temer que los alemanes pudieran estar desarrollando la capacidad de construir una bomba atómica —una bomba que su propia investigación había hecho posible y por la cual sentía, por tanto, cierta responsabilidad—. Envió una carta al presidente Franklin D. Roosevelt avisándole de esta posibilidad, y urgiéndole a que Estados Unidos emprendiera investigaciones nucleares. La carta, redactada por su amigo y colega Leo Szilard, proporcionó el ímpetu para planear y llevar a cabo el Proyecto Manhattan, que produjo las primeras armas nucleares del mundo. En 1944, Einstein puso a subasta una copia manuscrita de su artículo de 1905 sobre la relatividad especial y donó lo que se obtuvo —seis millones de dólares— para los esfuerzos aliados en la guerra.

Tras la guerra, Einstein continuó implicado en causas y objetivos que le preocupaban. En noviembre de 1952, habiendo mostrado durante muchos años un decidido apoyo al sionismo, le pidieron que aceptara la presidencia de Israel, una petición que declinó respetuosamente, aduciendo que no era la persona adecuada para este cargo. En abril de 1955, tan sólo una semana antes de su muerte, Einstein redactó una carta al filósofo Bertrand Russell en la cual le daba su conformidad para firmar con su nombre un manifiesto urgiendo a todas las naciones a abandonar las armas nucleares.

Einstein murió de un ataque al corazón el 18 de abril de 1955. A lo largo de su vida, intentó comprender los misterios del cosmos sondeándolo con el pensamiento más que confiando en los sentidos. «La verdad de una teoría está en la mente», declaró en cierta ocasión, «no en los ojos.»

EL PRINCIPIO DE LA RELATIVIDAD

SOBRE LA ELECTRODINÁMICA DE CUERPOS EN MOVIMIENTO*

Es bien sabido que, cuando se aplica a cuerpos en movimiento, la electrodinámica de Maxwell tal como hoy se entiende normalmente conduce a asimetrías que no parecen ser inherentes a los fenómenos. Tomemos, por ejemplo, la interacción electrodinámica entre un imán y un conductor. Aquí los fenómenos observables dependen sólo del movimiento relativo del conductor y el imán, mientras que la visión habitual traza una nítida distinción entre los dos casos, en donde o bien uno u otro de los dos cuerpos está en movimiento. Pues, en efecto, si el imán está en movimiento y el conductor está en reposo, en la vecindad del imán aparece un campo electromagnético con una energía definida que produce una corriente dondequiera que haya localizados elementos del conductor. Pero si el imán está en reposo mientras que el conductor está en movimiento, no hay ningún campo eléctrico en la vecindad del imán, sino más bien una fuerza electromotriz en el conductor a la que no corresponde ninguna energía per se, sino que, suponiendo una igualdad del movimiento relativo en los dos casos, da lugar a corrientes eléctricas de la misma magnitud y el mismo curso que las producidas por las fuerzas eléctricas en el primer caso.

Ejemplos de este tipo, junto con los infructuosos intentos de detectar un movimiento de la Tierra con relación al «medio lumínico», llevan a la conjetura de que ni los fenómenos de la mecánica, ni tampoco los de la electrodinámica tienen propiedades que correspondan al concepto de reposo absoluto. Más bien, las mismas leyes de la electrodinámica y la óptica serán válidas para todos los sistemas de coordenadas en los que rigen las ecuaciones de la mecánica, como ya se ha demostrado para cantidades de primer orden.** Elevaremos esta conjetura (cuyo contenido será denominado en adelante «el principio de relatividad») al estatus de un postulado e introduciremos también otro postulado, que es sólo aparentemente incompatible con él, a saber, que la luz se propaga

* «Elektrodynamik bewegter körper», *Annalen der Physik*, 17, 1905.

** La precedente memoria de Lorentz no era conocida en aquel tiempo por el autor.

siempre en el espacio vacío con una velocidad definida V que es independiente del estado de movimiento del cuerpo emisor. Estos dos postulados bastan para conseguir una electrodinámica de cuerpos en movimiento simple y consistente basada en la teoría de Maxwell para cuerpos en reposo. La introducción de un «éter lumínico» se mostrará superflua, puesto que la idea que se va a desarrollar aquí no requerirá un «espacio en reposo absoluto» dotado de propiedades especiales, ni asigna un vector velocidad a un punto del espacio vacío donde están teniendo lugar procesos electromagnéticos.

Como toda la electrodinámica, la teoría que va a desarrollarse aquí está basada en la cinemática de un cuerpo rígido, puesto que las afirmaciones de una teoría semejante tienen que ver con las relaciones entre cuerpos rígidos (sistemas de coordenadas), relojes y procesos electromagnéticos. Una consideración insuficiente de esta circunstancia está en la raíz de las dificultades con las que debe enfrentarse actualmente la electrodinámica de los cuerpos en movimiento.

A. PARTE CINEMÁTICA

1. Definición de simultaneidad

Consideremos un sistema de coordenadas en el que son válidas las ecuaciones mecánicas de Newton.* Para distinguir nominalmente dicho sistema de aquellos que van a introducirse más tarde, y para hacer esta presentación más precisa, le llamaremos «sistema de reposo».

Si una partícula está en reposo con respecto a este sistema de coordenadas, su posición relativa al último puede determinarse por medio de varas de medir rígidas utilizando los métodos de la geometría euclidiana y expresarse en coordenadas cartesianas.

Si queremos describir el *movimiento* de una partícula, damos los valores de sus coordenadas como funciones del tiempo. Sin embargo, debemos tener en cuenta que una descripción matemática de este tipo sólo tiene sentido físico si tenemos ya claro lo que entendemos aquí por «tiempo». Debemos tener en cuenta que todos nuestros juicios que implican al tiempo son siempre juicios sobre *sucesos simultáneos*. Si, por ejemplo, yo digo que «el tren llega aquí a las 7 en punto», eso significa, más o menos, «la manecilla pequeña de mi reloj apuntando a las 7 y la llegada del tren son sucesos simultáneos».[1]

Podría parecer que todas las dificultades implicadas en la definición de «tiempo» podrían superarse si sustituyo «posición de la manecilla pequeña de mi reloj» por «tiempo». Semejante definición es suficiente si va a definirse un tiempo exclusivamente para el lugar en el que está localizado el reloj; pero la definición ya no es satisfactoria cuando tienen que enlazarse temporalmente series de sucesos que ocurren en localizaciones diferentes, o —lo que es equivalente— cuando hay que evaluar temporalmente sucesos que ocurren en lugares remotos del reloj.

Por supuesto, podríamos contentarnos con evaluar el tiempo de los sucesos estacionando en el origen de las coordenadas a un observador con un reloj; este observador

* Es decir, en primera aproximación.

1. No discutiremos aquí la inexactitud que acecha tras el concepto de simultaneidad de dos acontecimiento que se producen aproximadamente en el mismo lugar, que sólo puede ser eliminada por abstracción.

asigna a cada suceso a evaluar la posición correspondiente de las manecillas del reloj cuando a través del espacio vacío le llega una señal luminosa procedente de dicho suceso. Sin embargo, sabemos por experiencia que una coordinación semejante tiene el inconveniente de que no es independiente de la posición del observador con el reloj. Llegamos a un arreglo más práctico mediante el siguiente argumento.

Si existe un reloj en el punto A en el espacio, entonces un observador situado en A puede evaluar el tiempo de los sucesos en la inmediata vecindad de A hallando las posiciones de las manecillas del reloj que son simultáneas con dichos sucesos. Si existe otro reloj en el punto B que se asemeja en todos los aspectos al que hay en A, entonces el tiempo de los sucesos en la inmediata vecindad de B puede ser evaluado por un observador en B. Pero no es posible comparar el tiempo de un suceso en A con uno en B sin una estipulación adicional. Hasta aquí hemos definido sólo un «tiempo-A» y un «tiempo-B», pero no un «tiempo» común para A y B. El último puede ahora determinarse estableciendo *por definición* que el «tiempo» requerido por la luz para viajar de A a B es igual al «tiempo» que requiere para viajar de B a A. En efecto, supongamos que un rayo de luz parte de A hacia B en un «tiempo-A» t_A, es reflejado desde B hacia A en un «tiempo-B» t_B, y llega de nuevo a A en un «tiempo-A» t'_A. Los dos relojes son síncronos por definición si

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Suponemos que es posible que esta definición de sincronicidad esté libre de contradicciones, y que lo esté para puntos en número arbitrario; y por consiguiente son válidas en general las relaciones siguientes:

1. Si el reloj en B marcha de forma síncrona con el reloj en A, el reloj en A marcha de forma síncrona con el reloj en B.
2. Si el reloj en A marcha de forma síncrona con el reloj en B así como con el reloj en C, entonces los relojes en B y C también marchan de forma síncrona uno con relación al otro.

Por medio de ciertos experimentos (mentales) físicos hemos establecido lo que debe entenderse por relojes síncronos en reposo relativo y situados en diferentes lugares, y con ello hemos llegado obviamente a definiciones de «síncrono» y «tiempo». El «tiempo» de un suceso es la lectura obtenida simultáneamente de un reloj en reposo situado en el lugar del suceso, que para todas las determinaciones temporales marcha de forma síncrona con un reloj especificado en reposo, y por supuesto con el reloj especificado.

Basados en la experiencia, estipulamos además que la cantidad

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

es una constante universal (la velocidad de la luz en el espacio vacío).

Es esencial que hayamos definido el tiempo por medio de relojes en reposo en el sistema de reposo; puesto que el tiempo recién definido está relacionado con el sistema en reposo, le llamaremos «el tiempo del sistema de reposo».

2. Sobre la relatividad de longitudes y tiempos

Las consideraciones siguientes están basadas en el principio de relatividad y el principio de constancia de la velocidad de la luz. Definimos estos dos principios como sigue:

1. Si los dos sistemas de coordenadas están en movimiento relativo de traslación paralela uniforme, las leyes de acuerdo con las cuales cambian los estados de un sistema físico no dependen de con cuál de los dos sistemas están relacionados dichos cambios.
2. Todo rayo luminoso se mueve en el sistema de coordenadas «de reposo» con una velocidad fija V, independientemente de si este rayo luminoso sea emitido por un cuerpo en reposo o en movimiento. Por lo tanto,

$$\text{velocidad} = \frac{\text{recorrido de la luz}}{\text{intervalo de tiempo}}$$

donde «intervalo de tiempo» debería entenderse en el sentido de la definición dada en la sección 1.

Tomemos una vara rígida en reposo; sea l su longitud, medida por una vara de medir que está también en reposo. Imaginemos ahora que se coloca el eje de la vara a lo largo del eje X del sistema de coordenadas en reposo, y que la vara es puesta entonces en movimiento de traslación paralela uniforme (con velocidad v) a lo largo del eje X en la dirección de las x crecientes. Preguntamos sobre la longitud de la vara de medir, que imaginamos debe establecerse por las dos operaciones siguientes:

a) El observador se mueve junto con la mencionada vara de medir y la vara rígida a ser medida, y mide la longitud de esta vara tendiendo la vara de medir de la misma manera que si la vara a ser medida, el observador y la vara de medir estuvieran en reposo.
b) Utilizando relojes en reposo y síncronos en el sistema de reposo como se esbozó en la sección 1, el observador determina en qué puntos del sistema de reposo están situados el principio y el final de la vara a ser medida en algún tiempo t dado. La distancia entre estos dos puntos, medida con la vara utilizada antes —pero no en reposo— es también una longitud que podemos llamar la «longitud de la vara».

De acuerdo con el principio de relatividad, la longitud determinada por la operación (a), que llamaremos «la longitud de la vara en el sistema en movimiento», debe ser igual a la longitud l de la vara en reposo.

La longitud determinada utilizando la operación (b), que llamaremos «la longitud de la vara (en movimiento) en el sistema de reposo», será determinada sobre la base de nuestros dos principios, y encontraremos que difiere de l.

La cinemática actual supone implícitamente que las longitudes determinadas por las dos operaciones anteriores son exactamente iguales entre sí, o, en otras palabras, que en el tiempo t un cuerpo rígido en movimiento es totalmente reemplazable, en cuanto a su geometría, por el *mismo* cuerpo cuando está *en reposo* en una posición concreta.

Además, imaginamos los dos extremos (A y B) de la vara provistos de relojes que son síncronos con los relojes del sistema de reposo, i. e., cuyas lecturas corresponden siem-

pre al «tiempo del sistema de reposo» en las localizaciones que los relojes resultan ocupar; por lo tanto, estos relojes son «síncronos en el sistema de reposo».

Imaginemos además que cada reloj tiene un observador que se mueve con él, y que estos observadores aplican a los dos relojes el criterio para el ritmo síncrono de dos relojes formulado en la sección 1. Sea un rayo de luz que parte de A en el tiempo t_A, es reflejado en B en el tiempo t_B, y llega de nuevo a A en el tiempo t'_A.* Teniendo en cuenta el principio de relatividad de la velocidad de la luz, encontramos que

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}$$

y

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

donde r_{AB} denota la longitud de la vara en movimiento, medida en el sistema de reposo. Los observadores que se mueven conjuntamente con la vara encontrarían así que los dos relojes no marchan de forma síncrona, mientras que los observadores en el sistema de reposo les dirían que están marchando de forma síncrona.

Vemos así que no podemos atribuir significado absoluto al concepto de simultaneidad; en su lugar, dos sucesos que son simultáneos cuando son observados desde algún sistema de coordenadas concreto ya no pueden considerarse simultáneos cuando son observados desde un sistema que está en movimiento relativo a dicho sistema.

3. Teoría de las transformaciones de coordenadas y tiempo desde el sistema de reposo a un sistema en movimiento de traslación uniforme relativo a aquél

Sean dos sistemas de coordenadas en el espacio en «reposo», i. e., dos sistemas de tres líneas rectas materiales rígidas mutuamente perpendiculares con origen en un punto. Sean coincidentes los ejes X de los dos sistemas, y sean sus ejes Y y Z respectivamente paralelos. Cada sistema estará provisto de una vara de medir rígida y un número de relojes, y sean exactamente iguales las dos varas de medir y todos los relojes de los dos sistemas.

Ahora, pongamos el origen de uno de los dos sistemas, digamos k, en un estado de movimiento con velocidad (constante) v en la dirección de las x crecientes del otro sistema (K), que permanece en reposo; e impartamos esta nueva velocidad a los ejes coordenados de k, su correspondiente vara de medir y sus relojes. A cada tiempo t del sistema de reposo K corresponde una localización definida de los ejes del sistema en movimiento. Por razones de simetría tenemos justificación para suponer que el movimiento de k puede ser tal que en el tiempo t («t» siempre denota un tiempo del sistema de reposo) los ejes del sistema en movimiento son paralelos a los ejes del sistema de reposo.

Imaginemos ahora el espacio a ser medido tanto desde el sistema de reposo K, utilizando la vara de medir en reposo, como desde el sistema k, utilizando la vara de

* «Tiempo» denota aquí «tiempo del sistema estacionario» y también «posición de las agujas del reloj en movimiento situado en el lugar que se está considerando».

medir en movimiento junto con él, y que de este modo se obtienen las coordenadas x, y, z y ξ, η, ζ, respectivamente. Además, por medio de los relojes en reposo en el sistema de reposo, y utilizando rayos luminosos como se describe en la sección 1, determinamos el tiempo t del sistema de reposo para todos los puntos donde hay relojes. De manera similar, aplicando de nuevo el método de señales luminosas descrito en la sección 1, determinamos el tiempo τ del sistema en movimiento para todos los puntos de este sistema en movimiento en los que hay relojes en reposo relativo a este sistema.

A cada conjunto de valores x, y, z, t que determina por completo el lugar y tiempo de un suceso en el sistema de reposo le corresponde un conjunto de valores ξ, η, ζ, τ que fija el suceso relativo al sistema k. y el problema a resolver ahora es encontrar el sistema de ecuaciones que conecta dichas cantidades.

En primer lugar, es evidente que estas ecuaciones deben ser lineales debido a las propiedades de homogeneidad que atribuimos al espacio y el tiempo.

Si hacemos $x' = x - vt$, entonces es evidente que a un punto en reposo en el sistema k le pertenece un conjunto de valores x', y, z definido e independiente del tiempo. Determinamos primero τ como una función de x', y, z y t. Para esto, debemos expresar en ecuaciones que τ es de hecho el agregado de lecturas de relojes en reposo en el sistema k, sincronizados de acuerdo con la regla dada en la sección 1.

Supongamos que en el instante τ_0, se envía un rayo luminoso a lo largo del eje X desde el origen del sistema k a x', y que éste rayo es reflejado en el instante τ_1, desde allí hacia el origen, adonde llega en el instante τ_2: entonces debemos tener

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1,$$

o, incluyendo los argumentos de la función τ y aplicando el principio de la constancia de la velocidad de la luz en el sistema de reposo,

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0, 0, 0, t) + \tau\left(0, 0, 0, \left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V-v}\right\}\right)\right] =$$

$$= \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v}\right).$$

De esto obtenemos, haciendo x infinitesimalmente pequeño,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V-v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t}$$

o

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0$$

Habría que señalar que, en lugar del origen de coordenadas, podríamos haber escogido cualquier otro punto como origen del rayo luminoso, y por consiguiente la ecuación recién obtenida es válida para todos los valores de x', y, z.

Un razonamiento análogo —aplicado a los ejes H y Z— da, recordando que la luz se propaga siempre a lo largo de estos ejes con la velocidad $\sqrt{V^2 - v^2}$ cuando se observa desde el sistema de reposo,

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$$

Estas ecuaciones dan, puesto que τ es una función *lineal,*

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x'\right)$$

donde a es una función $\varphi(v)$ todavía desconocida, y donde suponemos por brevedad que en el origen de k tenemos $t = 0$ cuando $\tau = 0$.

Utilizando este resultado, podemos determinar fácilmente las cantidades ξ, η, ζ si expresamos en ecuaciones que (como exige el principio de la constancia de la velocidad de la luz en unión con el principio de relatividad) la luz se propaga también con velocidad V cuando se mide en el sistema en movimiento. Para un rayo luminoso emitido en el instante $\tau = 0$ en la dirección de las ξ crecientes, tenemos

$$\xi = V\tau,$$

o

$$\xi = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x'\right).$$

Pero medido en el sistema de reposo, el rayo luminoso se propaga con velocidad $V - v$ relativa al origen de k, de modo que

$$\frac{x'}{V - v} = t.$$

Sustituyendo este valor de t en la ecuación para ξ, obtenemos

$$\xi = a \frac{V^2}{V^2 - v^2} x'.$$

Análogamente, considerando rayos luminosos que se mueven a lo largo de los otros dos ejes, obtenemos

$$\eta = V\tau = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x'\right),$$

donde

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t, \qquad x' = 0,$$

por lo tanto

$$\eta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} y$$

y

$$\zeta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} z.$$

Si sustituimos el valor para x', obtenemos

$$\tau = \varphi(v)\beta \left(t - \frac{v}{V^2}x\right).$$

$$\xi = \varphi(v)\beta\,(x - vt),$$

$$\eta = \varphi(v)y,$$

$$\zeta = \varphi(v)z,$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

y φ es una función de v desconocida por el momento. Si no se hace ninguna hipótesis con respecto a la posición inicial del sistema en movimiento y el punto cero de τ, entonces debe sumarse una constante a los segundos miembros de estas ecuaciones.

Ahora tenemos que demostrar que, medido en el sistema en movimiento, todo rayo luminoso se propaga con la velocidad V si así lo hace, como hemos supuesto, en el sistema de reposo; pues no hemos demostrado todavía que el principio de la constancia de la velocidad de la luz es compatible con el principio de relatividad.

Supongamos que en el tiempo $t = \tau = 0$ se emite una onda esférica desde el origen de coordenadas, que en dicho instante es común a ambos sistemas, y que esta onda se propaga en el sistema K con velocidad V. Por lo tanto, si (x, y, z) es un punto alcanzado por esta onda, tenemos

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2t^2.$$

Transformamos esta ecuación utilizando nuestras ecuaciones de transformación y, tras un sencillo cálculo, obtenemos

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2\tau^2.$$

Así pues, nuestra onda es también una onda esférica con velocidad de propagación V cuando se observa en el sistema en movimiento. Esto demuestra que nuestros dos principios fundamentales son compatibles.*

Las ecuaciones de transformación que hemos obtenido contienen también una función desconocida φ de v, que queremos determinar ahora.

Para esto introducimos un tercer sistema de coordenadas K' que, con relación al sistema k, está en movimiento de traslación paralelo al eje Ξ, y tal que su origen se mueve a lo largo del eje Ξ con velocidad $-v$. Sean coincidentes los tres orígenes de coordenadas en el tiempo $t = 0$, y sea el tiempo t' del sistema K igual a cero en $t = x = y = z = 0$. Denotamos por x', y', z' las coordenadas medidas en el sistema K', y por una doble aplicación de nuestras ecuaciones de transformación, obtenemos

$$\begin{aligned}
t' &= \varphi(-v)\,\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} &&= \varphi(v)\,\varphi(-v)\,t,\\
x' &= \varphi(-v)\,\beta(-v)\,\{\xi + v\tau\} &&= \varphi(v)\,\varphi(-v)\,x,\\
y' &= \varphi(-v)\,\eta &&= \varphi(v)\,\varphi(-v)\,y,\\
z' &= \varphi(-v)\,\zeta &&= \varphi(v)\,\varphi(-v)\,z,
\end{aligned}$$

Puesto que las relaciones entre x', y', z' y x, y, z no contienen el tiempo t, los sistemas K y K' no están en reposo relativo mutuo, y es evidente que la transformación de K a K' debe ser la transformación de identidad. Por lo tanto,

$$\varphi(v)\,\varphi(-v) = 1.$$

Exploremos ahora el significado de $\varphi(v)$. Nos centraremos en la porción del eje-H del sistema k que yace entre $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ y $\xi = 0$, $\eta = 1$, $\zeta = 0$. Esta porción del eje-H es una vara que, con relación al sistema K, se mueve perpendicularmente a su eje con una velocidad v y cuyos extremos tienen coordenadas en K:

$$x_1 = vt, \qquad y_1 = \frac{1}{\varphi(v)}, \qquad z_1 = 0$$

y

$$x_2 = vt, \qquad y_2 = 0, \qquad z_2 = 0$$

La longitud de la vara, medida en K es así $1/\varphi(v)$; esto nos da el significado de la función φ. Por razones de simetría, es ahora evidente que la longitud de una vara medida en el sistema de reposo y que se mueve perpendicularmente a su eje sólo puede depender de su velocidad y no de la dirección y sentido de su movimiento. Así pues, la longitud de la vara en movimiento medida en el sistema de reposo no cambia si se reemplaza v por $-v$. De esto concluimos

* Las ecuaciones de la transformación de Lorentz pueden ser deducidas de manera más sencilla directamente a partir de la condición de que en virtud de ellas la relación $x^2 + y^2 + z^2 = v^2 t^2$ tienen como consecuencia $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2$.

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)},$$

o

$$\varphi(v) = \varphi(-v)$$

De esta relación y la encontrada antes se sigue $\varphi(v) = 1$, de modo que las ecuaciones de transformación obtenidas se convierten en

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$

$$\xi = \beta(x - vt),$$

$$\eta = y,$$

$$\zeta = z,$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

4. El significado físico de las ecuaciones obtenidas en lo que concierne a cuerpos rígidos y relojes en movimiento

Consideremos una esfera rígida* de radio R que está en reposo relativo al sistema en movimiento k y cuyo centro yace en el origen de k. La ecuación de la superficie de esta esfera, que se mueve con velocidad v relativa a k, es

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

Expresada en términos de x, y, z la ecuación de esta superficie en el tiempo $t = 0$ es

$$\frac{x^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Un cuerpo rígido que tiene una forma esférica cuando se mide en reposo, tiene, cuando se mide en movimiento —considerado desde el sistema de reposo— la forma de un elipsoide de revolución con ejes

$$R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},\ R,\ R.$$

* Es decir, un cuerpo que presenta forma esférica cuando es examinado en reposo.

Así pues, mientras que las dimensiones Y y Z de la esfera (y, por lo tanto, también de todo cuerpo rígido, cualquiera que sea su forma) no parecen ser alteradas por el movimiento, la dimensión X parece estar contraída en la fracción $1 : \sqrt{1-(v/V)^2}$, de modo que cuanto mayor es el valor de v, mayor es la contracción. Para $v = V$ todos los objetos en movimiento considerados desde el sistema de «reposo» se contraen en estructuras planas. Para velocidades superlumínicas nuestras consideraciones dejan de tener significado; como veremos a partir de consideraciones posteriores, en nuestra teoría la velocidad de la luz representa físicamente el papel de velocidades infinitamente grandes.

Es evidente que los mismos resultados se aplican a cuerpos en reposo en el sistema de «reposo» cuando se consideran desde un sistema en movimiento uniforme.

Imaginemos además que uno de los relojes que puede indicar el tiempo t cuando está en reposo relativo al sistema de reposo y el tiempo τ cuando está en reposo relativo al sistema en movimiento, se coloca en el origen de k y se pone en marcha de tal forma que indica el tiempo τ. ¿Cuál es el ritmo de este reloj cuando se considera desde el sistema de reposo?

Las cantidades x, t y τ que hacen referencia a la posición de dicho reloj satisfacen obviamente las ecuaciones:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$$

y

$$x = vt.$$

Así pues, tenemos

$$\tau = \tau\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)$$

de lo que se sigue que la lectura del reloj considerado desde el sistema de reposo se retrasa cada segundo en $\left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)$ segundos, o, salvo cantidades de cuarto orden y superiores, en $\frac{1}{2}(v/V)^2$ segundos.

Esto da lugar a la siguiente consecuencia peculiar: si en los puntos A y B de K hay relojes en reposo que, considerados desde el sistema de reposo, marchan de forma síncrona, y si el reloj de A es transportado a B a lo largo de la línea que los conecta con velocidad v, entonces a la llegada de dicho reloj a B los dos relojes ya no marcharán de forma síncrona; en su lugar, el reloj que ha sido transportado de A a B se habrá retrasado $\frac{1}{2}tv^2/V^2$ segundos (salvo cantidades de cuarto orden y superiores) respecto al reloj que ha estado en B desde el principio, donde t es el tiempo necesario para que el reloj viaje de A a B.

Vemos así que este resultado es válido incluso cuando el reloj se mueve de A a B a lo largo de cualquier línea poligonal arbitraria, e incluso cuando los puntos A y B coinciden.

Si suponemos que el resultado demostrado para una línea poligonal es también válido para una línea continuamente curvada, entonces llegamos al siguiente resultado: Si existen en A dos relojes que marchan de forma síncrona, y uno de ellos se lleva a lo largo de una curva cerrada con velocidad constante hasta que haya vuelto a A, lo que necesita, digamos, t segundos, entonces, a su llegada a A se habrá retrasado $\frac{1}{2}t(v/V)^2$ respecto al reloj que no se ha movido. De esto concluimos que un reloj de volantes[1] situado en el ecuador debe, en circunstancias por lo demás iguales, marchar ligeramente más lento que un reloj absolutamente idéntico situado en uno de los polos terrestres.

5. El teorema de adición de velocidades

En el sistema k en movimiento con velocidad v a lo largo del eje X del sistema K, sea un punto que se mueve de acuerdo con las ecuaciones

$$\xi = w_\xi \tau,$$
$$\eta = w_\eta \tau,$$
$$\zeta = 0.$$

donde w_ξ y w_η denotan constantes.

Buscamos el movimiento del punto relativo al sistema K. Introduciendo las cantidades x, y, z, t en las ecuaciones de movimiento del punto por medio de las ecuaciones de transformación deducidas en la sección 3, obtenemos

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}}\, t,$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}}\, w_\eta t,$$

$$z = 0.$$

Así pues, de acuerdo con nuestra teoría, la suma vectorial de velocidades sólo es válida en primera aproximación. Sea

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$
$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2,$$

1. No un reloj de péndulo, que es físicamente un sistema del que la Tierra forma parte. Este caso debe ser excluido.

y

$$\alpha = \arctan \frac{w_y}{w_x},$$

α debe considerarse entonces como el ángulo entre las velocidades v y w. Después de un cálculo sencillo obtenemos

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha) - \left(\frac{vw\,sin\,\alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{vw\cos\alpha}{V^2}}.$$

Vale la pena señalar que v y w entran en la expresión para la velocidad resultante de una forma simétrica. Si w tiene también la dirección del eje X (eje Ξ), obtenemos

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}.$$

Se sigue de esta ecuación que la composición de dos velocidades que son menores que V da siempre como resultado una velocidad que es menor que v. Pues si hacemos $v = V - \kappa$, y $w = V - \lambda$, donde κ y λ son positivas y menores que V, entonces

$$U = V\,\frac{2V - \kappa - \lambda}{2V - \kappa - \lambda + \frac{\kappa\lambda}{V}} < V.$$

Se sigue también que la velocidad de la luz V no puede alterarse al componerla con una «velocidad sublumínica». Pues en este caso obtenemos

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V.$$

En el caso en que v y w tienen la misma dirección, la fórmula para U podría haberse obtenido también componiendo dos transformaciones de acuerdo con la sección 3. Si además de los sistemas K y k, que aparecen en la sección 3, introducimos un tercer sistema de coordenadas K', que se mueve paralelo a k y cuyo origen se mueve con velocidad w a lo largo del eje Ξ, obtenemos ecuaciones entre las cantidades x, y, z, t y las correspondientes cantidades de k' que sólo difieren de las encontradas en la sección 3 en que «v» es reemplazada por la cantidad

$$\frac{V + w}{1 + \frac{vw}{V^2}};$$

en que «v» es reemplazada por la cantidad de esto vemos que tales transformaciones paralelas constituyen un grupo —como debe ser en realidad.

Hemos deducido ahora las leyes requeridas de la cinemática correspondiente a nuestros dos principios, y procedemos a su aplicación a la electrodinámica.

B. PARTE ELECTRODINÁMICA

6. Transformación de las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío. Sobre la naturaleza de las fuerzas electromotrices debidas al movimiento en un campo magnético

Sean las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío válidas para el sistema de reposo K, de modo que tenemos

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

donde (X, Y, Z) denota el vector fuerza eléctrica y (L, M, N) el vector fuerza magnética.

Si aplicamos a estas ecuaciones las transformaciones deducidas en la sección 3, para relacionar los procesos electromagnéticos con el sistema de coordenadas en movimiento con velocidad v allí introducido, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \xi},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \xi},$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

El principio de relatividad requiere que las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío sean válidas también en el sistema k si son válidas en el sistema K, i. e., que los vectores de las fuerzas eléctrica y magnética —(X', Y', Z') y (L', M', N')— del sistema en movimiento k, que están definidos en dicho sistema por sus efectos ponderomotrices sobre cargas eléctricas y magnéticas, respectivamente, satisfagan las ecuaciones

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial \tau} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}.$$

Obviamente, los dos sistemas de ecuaciones encontrados para el sistema k deben expresar exactamente lo mismo, puesto que ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el sistema K. Además, puesto que las ecuaciones para ambos sistemas están en acuerdo aparte de los símbolos que representan a los vectores, se sigue que las funciones que figuran en los sistemas de ecuaciones en lugares correspondientes deben coincidir salvo un factor $\psi(v)$, común a todas las funciones de uno de los sistemas de ecuaciones e independiente de ξ, η, ζ y τ, aunque posiblemente dependiente de v. Así pues, tenemos las relaciones:

$$X' = \psi(v) X, \qquad L' = \psi(v) L$$

$$Y' = \psi(v)\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \qquad M' = \psi(v)\beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right),$$

$$Z' = \psi(v)\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right), \qquad N' = \psi(v)\beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right).$$

Si ahora invertimos este sistema de ecuaciones, resolviendo primero las ecuaciones recién obtenidas, y aplicando en segundo lugar a las ecuaciones la transformación inversa (desde k a K), que está caracterizada por la velocidad $-v$, obtenemos, teniendo en cuenta que ambos sistemas de ecuaciones así obtenidos deben ser idénticos,

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1.$$

Además, se sigue por razones de simetría* que

$$\varphi(v) = \varphi(v);$$

* Si, por ejemplo, X = Y = Z = L = M = O, i N ≠ O, entonces, por razones de simetría, es claro que cuando V cambia de signo sin que cambie de signo su valor numérico, Y' también debe cambiar de signo sin que cambie su valor numérico.

de modo que

$$\varphi(v) = 1.$$

y nuestras ecuaciones toman la forma

$$X' = X, \qquad L' = L,$$

$$Y' = \beta\,(Y - \frac{v}{V}N), \qquad M' = \beta\,(M + \frac{v}{V}Z),$$

$$Z' = \beta\,(Z - \frac{v}{V}M), \qquad N' = \beta\,(N - \frac{v}{V}Y).$$

Para interpretar estas ecuaciones, apuntemos los siguientes comentarios: imaginemos una carga eléctrica puntual, cuya magnitud medida en el sistema de reposo es la «unidad», i. e., que cuando está en reposo en el sistema de reposo ejerce una fuerza de 1 dina sobre una carga igual situada a una distancia de 1 cm. De acuerdo con el principio de relatividad, esta carga eléctrica es también de magnitud «unidad» si se mide en el sistema en movimiento. Si esta carga eléctrica está en reposo relativo al sistema de reposo, entonces, por definición el vector (X, Y, Z) iguala a la fuerza que actúa sobre ella. Si, por el contrario, esta carga actuante está en reposo relativo al sistema en movimiento (al menos en el instante relevante), entonces la fuerza que actúa sobre ella medida en el sistema en movimiento es igual al vector (X', Y', Z'). Por lo tanto, las tres primeras de las ecuaciones anteriores pueden expresarse en palabras de las dos formas siguientes:

1. Si una carga eléctrica puntual unidad se mueve en un campo electromagnético, sobre ella actúa, además de la fuerza eléctrica, una «fuerza electromotriz» que, despreciando términos multiplicados por las potencias segunda y superiores de v/V, es igual al producto vectorial de la velocidad de la carga y la fuerza magnética, dividido por la velocidad de la luz. (Antiguo modo de expresión.)
2. Si una carga eléctrica puntual unidad se mueve en un campo electromagnético, la fuerza que actúa sobre ella iguala a la fuerza eléctrica en la localización de la carga unidad que se obtiene transformando el campo a un sistema de coordenadas en reposo relativo a la carga unidad. (Nuevo modo de expresión.)

Comentarios análogos son válidos para las «fuerzas magnetomotrices». Podemos ver que en la teoría aquí desarrollada, la fuerza electromotriz sólo representa el papel de un concepto auxiliar, que debe su introducción a la circunstancia de que las fuerzas eléctrica y magnética no tienen una existencia independiente del estado de movimiento del sistema de coordenadas.

Es además evidente que la asimetría en el tratamiento de las corrientes producidas por el movimiento relativo de un imán y un conductor, mencionada en la introducción, desaparece. Más aún, dejan de tener sentido las cuestiones acerca de la «sede» de las fuerzas electromotrices electrodinámicas (máquinas unipolares).

7. Teoría del principio de Doppler y de la aberración

Sea una fuente de ondas electromagnéticas en el sistema K y muy lejos del origen de coordenadas; en una región del espacio que contiene el origen de coordenadas, dichas ondas están representadas con precisión suficiente por las ecuaciones

$$\begin{aligned} X &= X_0 \sin \Phi, & L &= L_0 \sin \Phi, \\ Y &= Y_0 \sin \Phi, & M &= M_0 \sin \Phi, \\ Z &= Z_0 \sin \Phi, & N &= N_0 \sin \Phi, \end{aligned} \qquad \Phi = \omega \left(t - \frac{ay + by + cz}{V} \right).$$

Aquí (X_0, Y_0, Z_0) y (L_0, M_0, N_0) son los vectores que determinan la amplitud del tren de ondas, y a, b, c son los cosenos directores de la normal a las ondas.

Queremos saber el carácter de dichas ondas cuando son investigadas por un observador en reposo en el sistema en movimiento. Aplicando las ecuaciones de transformación para las fuerzas eléctrica y magnética encontradas en la sección 6 y aquéllas para las coordenadas y el tiempo encontradas en la sección 3, obtenemos inmediatamente:

$$\begin{aligned} X' &= X_0 \sin \Phi', & L' &= L_0 \sin \Phi', \\ Y' &= \beta \left(Y_0 - \frac{v}{V} N_0 \right) \sin \Phi', & M' &= \beta \left(M_0 + \frac{v}{V} Z_0 \right) \sin \Phi', \\ Z' &= \beta \left(Z_0 + \frac{v}{V} M_0 \right) \sin \Phi', & N' &= \beta \left(N_0 - \frac{v}{V} Y_0 \right) \sin \Phi', \end{aligned}$$

$$\Phi' = \omega' \left(\tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V} \right),$$

donde hemos hecho

$$\omega' = \omega\beta \left(1 + a \frac{v}{V} \right),$$

$$a' = \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a \frac{v}{V}},$$

$$b' = \frac{b}{\beta \left(1 - a \frac{v}{V} \right)},$$

$$c' = \frac{c}{\beta \left(1 - a \frac{v}{V} \right)}.$$

De la ecuación para ω' se sigue que si un observador se mueve con velocidad v relativa a una fuente de luz de frecuencia ν infinitamente lejana, de tal modo que la línea de unión «fuente de luz-observador» forma un ángulo φ con la velocidad del observador, siendo esta velocidad relativa a un sistema de coordenadas en reposo relativo a la

fuente de luz, entonces ν', la frecuencia de la luz percibida por el observador viene dada por la ecuación

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos\varphi \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

Éste es el principio de Doppler para velocidades arbitrarias. Para $\varphi = 0$, la ecuación toma la forma sencilla

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Vemos que, contrariamente a la concepción habitual, cuando $v = -\infty$, entonces $\nu = \infty$.

Si φ' denota el ángulo entre la normal a la onda (la dirección del rayo) en el sistema en movimiento y la línea de unión «fuente de luz observador», toma la forma

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Esta ecuación expresa la ley de aberración en su forma más general. Si $\varphi = \pi/2$, la ecuación toma la forma simple

$$\cos\varphi' = -\frac{v}{V}.$$

Aún tenemos que encontrar la amplitud de las ondas tal como aparece en el sistema en movimiento. Si A y A' denotan la amplitud de la fuerza eléctrica y magnética en el sistema en reposo y el sistema en movimiento, respectivamente, obtenemos

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{V}\cos\varphi\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

que para $\varphi = 0$ toma la forma más simple:

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}.$$

Se sigue de estos resultados que, para un observador que se aproxima a una fuente luminosa a velocidad V, dicha fuente debería aparecer de intensidad infinita.

8. Transformación de la energía de rayos luminosos. Teoría de la presión de radiación ejercida sobre espejos perfectos

Puesto que $A^2/8\pi$ es igual a la energía luminosa por unidad de volumen, de acuerdo con el principio de relatividad tenemos que considerar $A'^2/8\pi$ como la energía luminosa en el sistema en movimiento. Por lo tanto A'^2/A^2 sería la razón entre la energía de un complejo luminoso dado «medido en movimiento» y «medido en reposo» si el volumen de un complejo luminoso fuera el mismo medido en K y en k. Sin embargo, éste no es el caso. Si a, b, c son los cosenos directores de la normal a la onda luminosa en el sistema de reposo, entonces ninguna energía atraviesa los elementos de superficie de la superficie esférica

$$(x - V\,at)^2 + (y - V\,bt)^2 + (z - V\,ct)^2 = R^2$$

que se mueve con la velocidad de la luz; podemos decir por consiguiente que dicha superficie encierra permanentemente el mismo complejo luminoso. Investiguemos la cantidad de energía encerrada por dicha superficie considerada desde el sistema k, i. e., la energía del complejo luminoso relativa al sistema k.

Considerada en el sistema en movimiento, la superficie esférica es una superficie elipsoidal cuya ecuación en el instante $\tau = 0$ es

$$\left(\beta\xi - a\beta\,\frac{v}{V}\,\xi\right)^2 + \left(\beta\eta - b\beta\,\frac{v}{V}\,\xi\right)^2 + \left(\zeta - c\beta\,\frac{v}{V\xi}\right)^2 = R^2.$$

Si S denota el volumen de la esfera y S' el del elipsoide, entonces un simple cálculo muestra que

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Si llamamos E a la energía de la luz encerrada por esta superficie cuando es medida en el sistema de reposo y E' cuando es medida en el sistema en movimiento, obtenemos

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi}\,S'}{\frac{A^2}{8\pi}\,S} = \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

que, para $\varphi = 0$, se simplifica en

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Es digno de mención que la energía y la frecuencia de un complejo luminoso varían con el estado de movimiento del observador de acuerdo con la misma ley.

Sea el plano de coordenadas $\xi = 0$ una superficie completamente reflectante en la que se reflejan las ondas planas consideradas en la sección 7. Investiguemos la presión de luz ejercida sobre la superficie reflectante, y la dirección, frecuencia e intensidad de la luz después de la reflexión.

Sea la luz incidente definida por las cantidades A, $\cos\varphi$ y ν (relativas al sistema K). Consideradas desde k, las cantidades correspondientes son

$$A' = A\,\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1-\frac{v}{V}\cos\varphi},$$

$$\nu' = \nu\,\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

Refiriendo los procesos al sistema k, obtenemos para la luz reflejada

$$A'' = A',$$
$$\cos\varphi'' = -\cos\varphi',$$
$$\nu'' = \nu'.$$

Finalmente, transformando de nuevo al sistema de reposo K, obtenemos para la luz reflejada

$$A''' = A''\,\frac{1+\frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A\,\frac{1-2\frac{v}{V}\cos\varphi+\left(\frac{v}{V}\right)^2}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\cos\varphi''' = \frac{\cos\varphi'' + \frac{v}{V}}{1+\frac{v}{V}\cos\varphi''} = -\frac{\left(1+\left(\frac{v}{V}\right)^2\right)\cos\varphi - 2\,\frac{v}{V}}{1-2\,\frac{v}{V}\cos\varphi+\left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\nu''' = \nu'' \frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = \nu \frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

La energía (medida en el sistema de reposo) que incide sobre una superficie unidad del espejo por unidad de tiempo es obviamente $A^2/8\pi\,(V\cos\varphi - v)$. La energía que deja una superficie unidad del espejo por unidad de tiempo es $A''^2/8\pi\,(-V\cos\varphi''' + v)$. De acuerdo con el principio de la conservación de la energía, la diferencia entre estas dos expresiones es el trabajo realizado por la presión de luz por unidad de tiempo. Igualando este trabajo a $P \cdot v$, donde P es la presión de luz, obtenemos

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi} \frac{\left(\cos\varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

En primera aproximación, en acuerdo con el experimento y con otras teorías, obtenemos

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\varphi.$$

Todos los problemas de la óptica de cuerpos en movimiento pueden resolverse mediante el método aquí utilizado. El punto esencial es que los campos eléctrico y magnético de la luz que recibe la influencia de un cuerpo en movimiento se transforman a un sistema de coordenadas que está en reposo relativo a dicho cuerpo. De esta manera, todos los problemas de la óptica de cuerpos en movimiento se reducen a una serie de problemas de la óptica de cuerpos en reposo.

9. Transformación de las ecuaciones de Maxwell-Hertz cuando se tienen en cuenta corrientes de convección

Partimos de las ecuaciones

$$\frac{1}{V}\left\{u_x\rho + \frac{\partial X}{\partial t}\right\} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_y\rho + \frac{\partial Y}{\partial t}\right\} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_z\rho + \frac{\partial Z}{\partial t}\right\} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

donde

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

denota 4π veces la densidad de carga, y (u_x, u_y, u_z) el vector velocidad de la carga. Si se conciben las cargas eléctricas ligadas permanentemente a cuerpos rígidos y pequeños (iones, electrones), entonces estas ecuaciones constituyen el fundamento electromagnético de la electrodinámica y la óptica de Lorentz para cuerpos en movimiento.

Si, utilizando las ecuaciones de transformación presentadas en las secciones 3 y 6, transformamos estas ecuaciones, que se suponen válidas en el sistema K, al sistema k, obtenemos las ecuaciones

$$\frac{1}{V}\left\{u_x\rho' + \frac{\partial X'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_y\rho' + \frac{\partial Y'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_z\rho' + \frac{\partial Z'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi},$$

donde

$$\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}} = u_\xi,$$

$$\frac{u_y}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\eta,$$

$$\frac{u_z}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\zeta,$$

y

$$\rho' = \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} = \beta\left(1 - \frac{v u_x}{V^2}\right)\rho.$$

Puesto que —como se sigue del teorema de adición de velocidades (sección 5)— el vector (u_x, u_y, u_z) es en realidad la velocidad de las cargas eléctricas medida en el sistema k, hemos demostrado así que, sobre la base de nuestros principios cinemáticos, el fundamento electrodinámico de la teoría de Lorentz de la electrodinámica de cuerpos en movimiento está en acuerdo con el principio de relatividad.

Permítaseme también añadir brevemente que la siguiente proposición importante puede ser deducida fácilmente a partir de las ecuaciones que hemos obtenido. Si un cuerpo eléctricamente cargado se mueve arbitrariamente en el espacio sin alterar su carga cuando se observa desde un sistema de coordenadas que se mueve con el cuerpo, entonces su carga también permanece constante cuando se observa desde el sistema «de reposo» K.

10. Dinámica del electrón (lentamente acelerado)

Sea una partícula eléctricamente cargada con carga e (en adelante llamada un «electrón») que se mueve en un campo electromagnético; sobre su ley de movimiento hacemos solamente la siguiente hipótesis:

Si el electrón está en reposo en un instante particular, su movimiento durante el siguiente instante de tiempo tendrá lugar de acuerdo con las ecuaciones

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = \epsilon X,$$

$$\mu \frac{d^2y}{dt^2} = \epsilon Y,$$

$$\mu \frac{d^2z}{dt^2} = \epsilon Z,$$

donde x, y, z denotan las coordenadas del electrón y μ su masa, siempre que el electrón se mueva lentamente.

Además, sea v la velocidad del electrón en un cierto instante. Investiguemos la ley de movimiento del electrón durante el instante de tiempo inmediatamente posterior.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer, y así lo haremos, que el electrón está en el origen de coordenadas y se mueve con velocidad v a lo largo del eje X del sistema K en el momento que nos interesa. Es entonces obvio que en el momento dado ($t = 0$), el electrón está en reposo relativo a un sistema de coordenadas k que se mueve con velocidad constante v paralelo al eje X.

A partir de la hipótesis anterior, combinada con el principio de relatividad, es evidente que, considerado desde el sistema k, el electrón se moverá durante el período de tiempo inmediatamente siguiente (para pequeños valores de t) de acuerdo con las ecuaciones

$$\mu \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \epsilon X',$$

$$\mu \frac{d^2\eta}{d\tau^2} = \epsilon Y',$$

$$\mu \frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \epsilon Z',$$

donde todos los símbolos $\xi, \eta, \zeta, \tau, X', Y', Z'$ se refieren al sistema k. Si estipulamos también que, para $t = x = y = z = 0$, también será válido $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$, entonces son aplicables las ecuaciones de transformación de las secciones 3 y 6, de modo que obtenemos

$$\tau = \beta \left(t - \frac{v}{V^2} x \right), \qquad X' = x,$$

$$\xi = \beta(x - vt), \qquad Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right),$$

$$\eta = y,$$

$$\zeta = z, \qquad Z' = \beta\left(Z - \frac{v}{V}M\right).$$

Con ayuda de estas ecuaciones transformamos las ecuaciones de movimiento anteriores desde el sistema k al sistema K, obteniendo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\epsilon}{\mu}\frac{1}{\beta^3}X,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\epsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\epsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}\left(Z + \frac{v}{V}M\right).$$

Siguiendo el enfoque habitual, investiguemos ahora la masa «longitudinal» y «transversal» del electrón en movimiento. Escribamos las ecuaciones (A) en la forma

$$\mu\beta^3\frac{d^2x}{dt^2} = \epsilon X = \epsilon X',$$

$$\mu\beta^2\frac{d^2y}{dt^2} = \epsilon\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) = \epsilon Y',$$

$$\mu\beta^2\frac{d^2z}{dt^2} = \epsilon\beta\left(Z - \frac{v}{V}M\right) = \epsilon Z',$$

y notemos en primer lugar que $\epsilon X'$, $\epsilon Y'$, $\epsilon Z'$ son las componentes de la fuerza ponderomotriz que actúa sobre el electrón, considerado en un sistema en movimiento que, en dicho instante, se está moviendo con la misma velocidad que el electrón. (Esta fuerza podría medirse, por ejemplo, mediante una balanza de resorte en reposo en el último sistema.) Si simplemente llamamos a esta fuerza «la fuerza que actúa sobre el electrón»,* y mantenemos la ecuación

$$\text{Masa} \times \text{Aceleración} = \text{Fuerza},$$

estipulando, además, que las aceleraciones sean medidas en el sistema en reposo K, entonces las ecuaciones anteriores conducen a la definición:

* La definición de fuerza dada aquí no resulta ventajosa, tal como fue demostrado por M. Planck por primera vez. Es más adecuado definir la fuerza de manera que las leyes del momento lineal y la energía adopten su forma más simple.

$$\text{Masa longitudinal} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^3}$$

$$\text{Masa transversal} = \frac{\mu}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Por supuesto, con una definición diferente de fuerza y aceleración obtendríamos valores diferentes para estas masas; esto muestra que debemos proceder con mucha precaución cuando comparemos diversas teorías del movimiento del electrón.

Debería advertirse que estos resultados acerca de la masa son también válidos para puntos materiales ponderables, porque de un punto material ponderable puede hacerse un electrón (en nuestro sentido de la palabra) añadiéndole una carga eléctrica *arbitrariamente pequeña.*

Determinemos ahora la energía cinética de un electrón. Si un electrón parte del origen del sistema K con una velocidad inicial 0 y continúa moviéndose a lo largo del eje X bajo la influencia de una fuerza electrostática X, es evidente que la energía que toma del campo electrostático tiene el valor $\int \epsilon X dx$. Puesto que se supone que el electrón se acelera lentamente, y en consecuencia no puede emitir ninguna energía en forma de radiación, la energía tomada del campo electrostático debe ser igualada a la energía cinética W del electrón. Teniendo en cuenta que la primera de las ecuaciones (A) es válida durante todo el proceso del movimiento, obtenemos

$$W = \int \epsilon X dx = \int_0^v \beta^3 v dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

Así pues, W se hace infinitamente grande cuando $v = V$. Igual que sucede con nuestros resultados anteriores, las velocidades superlumínicas no son posibles.

En virtud del argumento presentado antes, esta expresión para la energía cinética debe ser también válida para masas ponderables.

Enumeremos ahora las propiedades del movimiento del electrón resultante del sistema de ecuaciones (A) que son accesibles al experimento.

1. De la segunda ecuación del sistema (A) se sigue que una fuerza eléctrica Y y una fuerza magnética N tienen un efecto deflector igualmente intenso sobre un electrón que se mueve con velocidad v si $Y = Nv/V$. Vemos así que, utilizando nuestra teoría, es posible determinar la velocidad del electrón a partir del cociente entre la deflexión magnética A_m y la deflexión eléctrica A_e para velocidades arbitrarias, aplicando la ley

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$

Esta relación puede ser comprobada experimentalmente, puesto que la velocidad del electrón también puede medirse directamente, por ejemplo, utilizando campos eléctricos y magnéticos rápidamente oscilantes.

2. A partir de la deducción de la energía cinética de un electrón se sigue que la diferencia de potencial atravesada por el electrón y la velocidad v que adquiere el electrón deben estar relacionadas por la ecuación

$$P = \int X dx = \frac{\mu}{\epsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

3. Calculamos el radio de curvatura R de la trayectoria del electrón si hay presente (como única fuerza deflectante) una fuerza magnética N que actúa perpendicularmente a su velocidad. De la segunda de las ecuaciones (A) obtenemos:

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\epsilon}{\mu} \frac{v}{V} N \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

o

$$R = V^2 \frac{\epsilon}{\mu} \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N}.$$

Estas tres relaciones constituyen una expresión completa de las leyes según las cuales, de acuerdo con la teoría aquí presentada, debe moverse el electrón.

Para concluir, permítaseme señalar que mi amigo y colega M. Besso me apoyó incondicionalmente en mi trabajo sobre el problema aquí discutido, y que estoy en deuda con él por varias sugerencias valiosas.

¿DEPENDE LA INERCIA DE UN CUERPO DE SU CONTENIDO DE ENERGÍA?*

Los resultados de una investigación electrodinámica recientemente publicada por mí en esta revista llevan a una conclusión muy interesante, que se deducirá aquí.

Basé dicha investigación en las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío, junto con la expresión de Maxwell para la energía electromagnética del espacio, y también en el siguiente principio:

* «Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?», *Annalen der Physik*, 18, 1905.

Las leyes de acuerdo con las cuales cambian los estados de los sistemas físicos son independientes de cuál de los dos sistemas de coordenadas (supuestos en movimiento paralelo-traslacional uniforme uno con relación al otro) es utilizado para describir dichos cambios (el principio de relatividad).

Sobre esta base,* yo obtuve el siguiente resultado, entre otros (*loc. cit.*, sección 8).

Sea un sistema de ondas de luz planas que tienen energía 1 relativa al sistema de coordenadas (x, y, z); sea φ el ángulo que forma la dirección del rayo (la normal a la onda) con el eje x del sistema. Si introducimos un nuevo sistema de coordenadas (ξ, η, ζ), que está en traslación paralela uniforme con respecto al sistema (x, y, z), y cuyo origen se mueve a lo largo del eje x con velocidad v, entonces esta cantidad de luz —medida en el sistema (ξ, η, ζ)—, tiene la energía

$$l = l \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

donde V denota la velocidad de la luz. Haremos uso de este resultado en lo que sigue.

Sea un cuerpo en reposo en el sistema (x, y, z) cuya energía, relativa al sistema (x, y, z), es E_0. Sea H_0 la energía del cuerpo, relativa al sistema (ξ, η, ζ), que se mueve con velocidad v como antes.

Supongamos que este cuerpo emite ondas planas de luz de energía $L/2$, medida con relación a (x, y, z), en una dirección que forma un ángulo φ con el eje x, y al mismo tiempo emite una cantidad igual de luz en la dirección opuesta. El cuerpo permanece en reposo con respecto al sistema (x, y, z) durante este proceso. Este proceso debe satisfacer el principio de conservación de la energía, y debe ser cierto (de acuerdo con el principio de relatividad) con respecto a ambos sistemas de coordenadas. Si E_1 y H_1 denotan la energía del cuerpo después de la emisión de la luz, medida con relación al sistema (x, y, z) y el sistema (ξ, η, ζ), respectivamente, obtenemos, utilizando la relación indicada arriba,

$$E_0 = E_1 + \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right]$$

$$H_0 = H_1 + \left[\frac{L}{2} \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} + \frac{L}{2} \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}\right]$$

$$= H_1 + \frac{L}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

* El principio de la constancia de la velocidad de la luz está contenido, naturalmente, en las ecuaciones de Maxwell.

Restando, obtenemos de estas ecuaciones

$$(H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right\}.$$

Las dos diferencias de la forma $H - E$ que aparecen en la expresión tienen significados físicos simples. H y E son los valores de la energía del mismo cuerpo respecto a los dos sistemas de coordenadas en movimiento relativo, estando el cuerpo en reposo en uno de los sistemas, el sistema (x, y, z). Por lo tanto, es evidente que la diferencia $H - E$ sólo puede diferir de la energía cinética del cuerpo K con respecto al otro sistema, el sistema (ξ, η, ζ), en una constante aditiva C, que depende de la elección de las constantes aditivas arbitrarias en las energías H y E. Podemos así establecer

$$H_0 - E_0 = K_0 + C,$$
$$H_1 - E_1 = K_1 + C,$$

puesto que C no cambia durante la emisión de luz. De modo que obtenemos

$$K_0 - K_1 = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right\}.$$

La energía cinética del cuerpo con respecto a (ξ, η, ζ) disminuye como resultado de la emisión de la luz en una cantidad que es independiente de las propiedades del cuerpo. Además, la diferencia $K_0 - K_1$ depende de la velocidad de la misma forma que lo hace la energía cinética de un electrón *(loc. cit.* Sección 10).

Despreciando magnitudes de cuarto orden y superiores, podemos obtener

$$K_0 - K_1 = \frac{L}{V^2} + \frac{v^2}{2}.$$

A partir de esta ecuación se concluye inmediatamente:

Si un cuerpo emite la energía L en forma de radiación, su masa disminuye en L/V^2. Aquí, obviamente, no es esencial que la energía tomada del cuerpo se convierta en energía radiante, de modo que nos vemos llevados a la conclusión más general:

La masa de un cuerpo es una medida de su contenido de energía; si la energía cambia en L, la masa cambia en el mismo sentido en $L/9 \cdot 10^{20}$ si la energía se mide en ergios y la masa en gramos.

No hay que descartar la posibilidad de poner a prueba esta teoría utilizando cuerpos cuyo contenido de energía es variable en alto grado (por ejemplo, sales de radio).

Si la teoría está de acuerdo con los hechos, entonces la radiación transporta inercia entre cuerpos emisores y absorbentes.

SOBRE LA INFLUENCIA DE LA GRAVITACIÓN EN LA PROPAGACIÓN DE LA LUZ*

En una memoria publicada hace cuatro años[1] traté de responder a la pregunta de si la propagación de la luz está influida por la gravitación. Vuelvo a este tema porque mi presentación previa de la cuestión no me satisface; y por una razón más importante, porque ahora veo que una de las consecuencias más importantes de mi primer tratamiento puede ponerse a prueba experimentalmente. En efecto, de la teoría que aquí se expone se sigue que los rayos de luz que pasan cerca del Sol son desviados por el campo gravitatorio de éste, de modo que la distancia angular entre el Sol y una estrella fija que parece próxima a él se incrementa aparentemente en casi un segundo de arco.

En el curso de estas reflexiones se obtienen resultados adicionales en relación a la gravitación. Pero como la exposición de todo el grupo de consideraciones sería bastante difícil de seguir, en las páginas que siguen sólo se ofrecerán algunas reflexiones muy elementales, a partir de las cuales el lector podrá informarse fácilmente acerca de las hipótesis de la teoría y su línea de razonamiento. Las relaciones aquí deducidas, incluso si el fundamento teórico es correcto, son válidas sólo en primera aproximación.

1. Una hipótesis respecto a la naturaleza física del campo gravitatorio

En un campo gravitatorio homogéneo (aceleración de la gravedad γ) sea un sistema de coordenadas estacionario K, orientado de forma que las líneas de fuerza del campo gravitatorio corren en la dirección negativa del eje z. En un espacio libre de gravitación, sea un segundo sistema de coordenadas K', que se mueve con aceleración uniforme (γ) en la dirección positiva del eje z. Para evitar complicaciones innecesarias, de momento no consideramos la teoría de la relatividad sino que consideramos ambos sistemas desde el punto de vista acostumbrado en cinemática, y los movimientos que ocurren en ellos desde la mecánica ordinaria.

Con respecto a K, así como con respecto a K', los puntos materiales que están sujetos a la acción de otros puntos materiales, se mueven de acuerdo con las ecuaciones

$$\frac{d^2 x_v}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y_v}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z_v}{dt^2} = -\gamma.$$

Para el sistema acelerado K' esto se sigue directamente del principio de Galileo; pero para el sistema K, en reposo en un campo gravitatorio homogéneo, se sigue a partir de la experiencia de que todos los cuerpos en un campo semejante son igual y uniformemente acelerados. Esta experiencia, la de la caída igual de todos los cuerpos en el campo gravitatorio, es una de las más universales que ha ofrecido la observación de la naturaleza; pero a pesar de eso la ley no ha encontrado ningún lugar en el fundamento de nuestro edificio del universo físico.

* «Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes», *Annalen der Physik*, 35, 1911.

1. A. Einstein, *Jahrbuch für Radioakt und Elektronik*, 4, 1907.

Pero llegamos a una interpretación muy satisfactoria de esta ley de experiencia, si suponemos que los sistemas K y K' son exactamente equivalentes desde el punto de vista físico; es decir, si suponemos que podemos considerar igualmente bien que el sistema K está en un espacio libre de campos gravitatorios si al mismo tiempo consideramos K uniformemente acelerado. Esta hipótesis de equivalencia física exacta hace imposible que hablemos de la *aceleración absoluta* del sistema de referencia, de la misma forma que la teoría de la relatividad habitual nos prohíbe hablar de la *velocidad absoluta* de un sistema;[1] y hace que la caída igual de todos los cuerpos en un campo gravitatorio parezca una norma.

Mientras nos limitemos a procesos puramente mecánicos en el dominio donde es válida la mecánica de Newton, estamos seguros de la equivalencia de los sistemas K y K'. Pero esta concepción nuestra no tendrá ninguna significación más profunda a menos que los sistemas K y K' sean equivalentes con respecto a todos los procesos físicos, es decir, a menos que las leyes de la naturaleza con respecto a K estén en completo acuerdo con las leyes con respecto a K'. Suponiendo que es así, llegamos a un principio que, si es realmente verdadero, tiene gran importancia heurística, pues por consideración teórica de los procesos que tienen lugar con respecto a un sistema de referencia con aceleración uniforme, obtenemos información acerca del curso de los procesos en un campo gravitatorio homogéneo. Ahora mostraremos, en primer lugar, desde el punto de vista de la teoría de la relatividad ordinaria, qué grado de probabilidad es inherente a nuestra hipótesis.

2. Sobre la gravitación de la energía

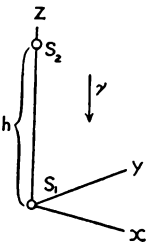
Un resultado de la teoría de la relatividad es que la masa inerte de un cuerpo aumenta con la energía que contiene; si el aumento de energía equivale a E, el aumento en la masa inerte es igual a E/c^2, donde c denota la velocidad de la luz. Ahora bien, ¿hay un aumento de masa gravitatoria correspondiente a este aumento de masa inerte? Si no lo hay, entonces un cuerpo caería en el campo gravitatorio con aceleración variable según la energía que contuviera. Ya no podría mantenerse ese resultado altamente satisfactorio de la teoría de la relatividad por el que la ley de conservación de la masa se fusiona en la ley de conservación de la energía, porque nos veríamos obligados a abandonar la ley de conservación de la masa en su forma antigua para la masa inerte, y mantenerla para la masa gravitatoria.

Pero esto debe considerarse muy improbable. Por otra parte, la teoría de la relatividad habitual no nos proporciona ningún argumento a partir del cual inferir que el peso de un cuerpo depende de la energía contenida en el mismo. Pero demostraremos que nuestra hipótesis de la equivalencia de los sistemas K y K' nos da la gravitación de la energía como una consecuencia necesaria.

Sean dos sistemas materiales S_1 y S_2, provistos de instrumentos de medida, situados en el eje z de K a la distancia h uno de otro,[2] de modo que el potencial gravitatorio en

1. Por supuesto, no podemos reemplazar cualquier campo gravitatorio *arbitrario* por un estado de movimiento del sistema sin un campo gravitatorio, como tampoco, por una transformación de relatividad, podemos transformar en reposo cualquier tipo de movimiento de todos los puntos de un medio.

2. Las dimensiones de S_1 y S_2 se considerun infinitamente pequeñas en comparación con h.



S_2 es mayor que el potencial en S_1 en una cantidad γh. Sea emitida una cantidad definida de energía E desde S_2 hacia S_1. Sean medidas las cantidades de energía en S_1 y S_2 por aparatos que —llevados a una misma posición z en el sistema y comparados allí— serán perfectamente iguales. En cuanto al proceso de esta transmisión de energía por radiación no podemos hacer ninguna afirmación *a priori*, porque no conocemos la influencia del campo gravitatorio sobre la radiación y los instrumentos de medida en S_1 y S_2.

Pero por nuestro postulado de la equivalencia de K y K', en lugar del sistema K en un campo gravitatorio homogéneo, podemos poner el sistema K' libre de gravitación, que se mueve con aceleración uniforme en la dirección de z positivo, y con cuyo eje z están rígidamente conectados los sistemas materiales S_1 y S_2.

Juzgamos el proceso de la transferencia de energía por radiación de S_2 a S_1 desde un sistema K_0, que debe estar libre de aceleración. Supongamos que en el instante en que la energía radiante E_2 es emitida desde S_2 hacia S_1, la velocidad relativa de K' con respecto a K_0 es cero. La radiación llegará a S_1 cuando haya transcurrido un tiempo h/c (en primera aproximación). Pero en este instante la velocidad de S_1 con respecto a K_0 es $\gamma h/c = v$. Por lo tanto, por la teoría de la relatividad ordinaria la radiación que llega a S_1 no posee la energía E_2 sino una energía mayor E_1, que está relacionada con E_2, en primera aproximación, por la ecuación[1]

$$E_1 = E_2\left(1 + \frac{v}{c}\right) = E_2\left(1 + \gamma\frac{h}{c^2}\right). \qquad (1)$$

Por nuestra hipótesis, exactamente la misma relación es válida si el mismo proceso tiene lugar en el sistema K, que no está acelerado pero en donde existe un campo gravitatorio. En este caso podemos reemplazar γh por el potencial Φ del vector gravitación en S_2, si la constante arbitraria de Φ en S_1 se hace igual a cero. Entonces tenemos la ecuación

$$E_1 = E_2 + \frac{E_2}{c^2}\Phi. \qquad (1a)$$

Esta ecuación expresa la ley de energía para el proceso bajo observación. La energía E_1 que llega a S_1 es mayor que la energía S_2, medida por los mismos medios, que fue emitida en S_2, siendo el exceso la energía potencial de la masa E_2/c^2 en el campo gravitatorio. Se prueba así que para el cumplimiento del principio de la energía tenemos que adscribir a la energía E, antes de su emisión en S_2, una energía potencial debida a la gravedad, que corresponde a la masa gravitatoria E/c^2. Nuestra hipótesis de la equivalencia de K y K' elimina así la dificultad mencionada al principio de esta sección y que la teoría de la relatividad ordinaria deja sin resolver.

El significado de este resultado se muestra de manera particularmente clara si consideramos el siguiente ciclo de operaciones:

1. Véase *supra*.

1. La energía E, medida en S_2, es emitida en forma de radiación de S_2 hacia S_1, donde, por el resultado recién obtenido, se absorbe la energía $E(1 + \gamma h / c^2)$, medida en S_1.
2. Se hace descender un cuerpo W de masa M desde S_2 a S_1, haciéndose un trabajo $M\gamma h$ en el proceso.
3. La energía E es transferida desde S_1 al cuerpo W mientras W está en S_1. Cámbiese por ello la masa M de modo que adquiere el valor M'.
4. Sea elevado de nuevo W hasta S_2, haciéndose un trabajo $M'\gamma h$ en este proceso.
5. Sea E transferida de vuelta de W a S_2.

El efecto de este ciclo es simplemente que S_1 ha experimentado el incremento de energía $E\gamma h/c^2$, y que la cantidad de energía $M'\gamma h - M\gamma h$ ha sido transmitida al sistema en forma de trabajo mecánico. Por el principio de la energía, debemos tener

$$E\gamma \frac{h}{c^2} = M'\gamma h - M\gamma h$$

o

$$M' - M = E/c^2 \ldots \qquad (1b)$$

El incremento en la masa *gravitatoria* es así igual a E/c^2, y por consiguiente igual al incremento en masa *inerte* dado por la teoría de la relatividad.

El resultado se desprende aún más directamente de la equivalencia de los sistemas K y K', según la cual la masa gravitatoria respecto de K es exactamente igual a la masa inerte respecto de K'; la energía debe por lo tanto poseer una masa *gravitatoria* que es igual a su masa *inerte*. Si se suspende una masa M_0 de una balanza de resorte en el sistema K', la balanza indicará el peso aparente $M_0\gamma$ debido a la inercia de M_0. Si se transfiere a M_0 la cantidad de energía E, la balanza de resorte, por la ley de inercia de la energía, indicará $(M_0 + E/c^2)\gamma$. Por nuestra hipótesis fundamental, exactamente lo mismo debe ocurrir cuando se repite el experimento en el sistema K, es decir, en el campo gravitatorio.

3. Tiempo y velocidad de la luz en el campo gravitatorio

Si la radiación emitida en el sistema uniformemente acelerado K' en S_2 hacia S_1 tenía la frecuencia ν_2 con relación al reloj en S_2, entonces, a su llegada a S_1 ya no tiene la frecuencia ν_2, con relación a un reloj idéntico en S_1, sino una frecuencia mayor ν_1, tal que en primera aproximación

$$\nu_1 = \nu_2 \left(1 + \gamma \frac{h}{c^2}\right). \qquad (2)$$

En efecto, si introducimos otra vez el sistema de referencia no acelerado K_0, con respecto al cual, en el instante de la emisión de luz, K' no tiene velocidad, entonces S_1, en el instante de llegada de la radiación a S_1, tiene la velocidad $\gamma h/c$ con respecto a K_0, de lo que, por el principio de Doppler, resulta inmediatamente la relación dada.

De acuerdo con nuestra hipótesis de la equivalencia de los sistemas K y K', esta ecuación también es válida para el sistema de coordenadas estacionario K, en donde hay un campo gravitatorio uniforme, si en el mismo tiene lugar la transferencia por radiación tal como se ha descrito. Se sigue, entonces, que un rayo luminoso emitido en S_2 con un potencial gravitatorio definido, y que posee en su emisión la frecuencia ν_2 —comparada con un reloj en S_2— poseerá, a su llegada a S_1, una frecuencia diferente ν_1 —medida por un reloj idéntico en S_1—. Para γh sustituimos el potencial gravitatorio Φ de S_2 —tomando como cero el de S_1— y suponemos que la relación que hemos deducido para el campo gravitatorio homogéneo es también válida para otras formas de campo. Entonces

$$\nu_1 = \nu_2 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{2a}$$

Este resultado (que por nuestra deducción es válido en primera aproximación) permite, en primer lugar, la siguiente aplicación. Sea ν_0 el número de vibración de un generador de luz elemental, medido por un delicado reloj en el mismo lugar. Imaginemos a ambos en un lugar en la superficie del Sol (donde esta localizado nuestro S_2). De la luz allí emitida, una porción alcanza la Tierra (S_1), donde medimos la frecuencia de la luz que llega con un reloj U que se parece en todo al recién mencionado. Entonces por (2a)

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right),$$

donde Φ es la diferencia (negativa) de potencial gravitatorio entre la superficie del Sol y la Tierra. Así pues, de acuerdo con nuestra idea, las líneas espectrales de la luz solar deben estar algo desplazadas hacia el rojo, comparadas con las correspondientes líneas espectrales de las fuentes de luz terrestres, en la cantidad relativa

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = -\frac{\Phi}{c^2} = 2{,}10^{-6}.$$

Si se conocieran exactamente las condiciones en las que aparecen las bandas solares, este desplazamiento sería susceptible de ser medido. Pero dado que otras influencias (presión, temperatura) afectan a la posición de los centros de las líneas espectrales, es difícil descubrir si realmente existe la influencia inferida del potencial gravitatorio.[1]

En una consideración superficial la ecuación (2), respectivamente la (2a), parece afirmar un absurdo. Si existe transmisión constante de luz de S_2 a S_1, ¿cómo puede llegar a S_1 cualquier otro número de períodos por segundo distinto del emitido en S_2? Pero la respuesta es sencilla. No podemos considerar ν_2 o, respectivamente ν_1, simplemente como frecuencias (como número de períodos por segundo) puesto que aún no hemos determinado el tiempo en el sistema K. Lo que denota ν_2 es el número de períodos con

1. L. F. Jewell (*Journ. de Phys.*, 6, 1897, p. 84) y especialmente C. Fabry y H. Boisson (*Comptes Rendus*, 148, 1909, pp. 688-690) han encontrado realmente tales desplazamientos de las líneas espectrales finas hacia el extremo rojo del espectro, del orden de magnitud aquí calculado, pero lo han atribuido a un efecto de la presión en la capa absorbente.

referencia a la unidad de tiempo del reloj U en S_2, mientras que ν_1 denota el número de períodos por segundo con referencia al reloj idéntico en S_1. Nada nos obliga a suponer que haya que considerar que los relojes U en potenciales gravitatorios diferentes marchan al mismo ritmo. Por el contrario, debemos ciertamente definir el tiempo en K de tal manera que el número de crestas y vientres de onda entre S_2 y S_1 sea independiente del valor absoluto del tiempo; pues el proceso bajo observación es por naturaleza estacionario. Si no satisficiéramos esta condición llegaríamos a una definición de tiempo por aplicación de la cual el tiempo se fusionaría explícitamente en las leyes de la naturaleza, y esto ciertamente sería poco natural y poco práctico. Por consiguiente, los dos relojes en S_1 y S_2 no dan ambos el «tiempo» correctamente. Si medimos el tiempo en S_1 con el reloj U, entonces debemos medir el tiempo en S_2 con un reloj que marcha $1 + \Phi/c^2$ veces más lentamente que el reloj U cuando se compara con U en uno y el mismo lugar. Pues cuando se mide por dicho reloj, la frecuencia del rayo de luz antes considerado es en su emisión en S_2

$$\nu_2\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right),$$

y por consiguiente es, por (2a), igual a la frecuencia ν_1 del mismo rayo de luz a su llegada a S_1.

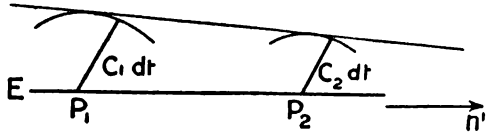
Esto tiene una consecuencia de fundamental importancia para nuestra teoría. Pues si medimos la velocidad de la luz en diferentes lugares en el sistema acelerado y libre de gravitación K', empleando relojes U de idéntica constitución, obtenemos la misma magnitud en todos estos lugares. Lo mismo es válido, por nuestra hipótesis fundamental, también para el sistema K. Pero por lo que se acaba de decir, debemos utilizar relojes de diferente constitución para medir el tiempo en lugares con diferente potencial gravitatorio. Para medir el tiempo en un lugar que, con respecto al origen de coordenadas, tiene el potencial gravitatorio Φ debemos emplear un reloj que —cuando se lleva al origen de coordenadas— va $(1 + \Phi/c^2)$ veces más lento que el reloj utilizado para medir el tiempo en el origen de coordenadas. Si llamamos c_0 a la velocidad de la luz en el origen de coordenadas, entonces la velocidad de la luz c en un lugar con el potencial gravitatorio Φ estará dada por la relación

$$c = c_0\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{3}$$

El principio de constancia de la velocidad de la luz es válido según esta teoría en una forma diferente de la que normalmente subyace a la teoría de la relatividad ordinaria.

4. Curvatura de rayos luminosos en el campo gravitatorio

A partir de la proposición que se acaba de demostrar, que la velocidad de la luz en el campo gravitatorio es función del lugar, podemos inferir fácilmente, por medio del principio de Huyghens, que los rayos luminosos que se propagan a través de un campo gravitatorio sufren una desviación. En efecto, sea E un frente de onda de una onda luminosa plana en el instante t, y sean P_1 y P_2 dos puntos en dicho plano a distancia unidad uno de otro.



P_1 y P_2 están en el plano del papel, que se escoge de modo que el coeficiente diferencial de Φ, tomado en la dirección de la normal al plano, se anula, y por consiguiente también lo hace el de c. Obtenemos el correspondiente frente de onda en el instante $t + dt$, o, más bien, su línea de intersección con el plano del papel, describiendo círculos alrededor de los puntos P_1 y P_2 con radios $c_1 dt$ y $c_2 dt$, respectivamente; donde c_1 y c_2 denotan la velocidad de la luz en los puntos P_1 y P_2, respectivamente, y trazando la tangente a dichos círculos. El ángulo en que se desvía el rayo de luz en el camino cdt es por consiguiente

$$(c_1 - c_2)\, dt = -\frac{\partial c}{\partial n'}\, dt,$$

si medimos el ángulo positivamente cuando el rayo se curva hacia el lado de n' creciente. El ángulo de desviación por unidad de camino del rayo luminoso es por lo tanto

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial n'}, \text{ o por (3)} -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial n'}.$$

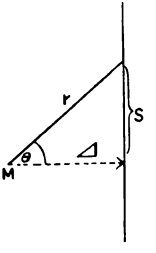
Finalmente, obtenemos para la desviación que experimenta un rayo luminoso hacia el lado n' en cualquier trayectoria (s) la expresión

$$a = -\frac{1}{c^2}\int \frac{\partial \Phi}{\partial n'}\, ds. \qquad (4)$$

Podríamos haber obtenido el mismo resultado directamente considerando la propagación de un rayo luminoso en el sistema uniformemente acelerado K', y trasladando el resultado al sistema K, y de allí al caso de un campo gravitatorio de cualquier forma.

Por la ecuación (4) un rayo de luz que pasa junto a un cuerpo celeste sufre una desviación hacia el lado del potencial gravitatorio decreciente, es decir, el lado dirigido hacia el cuerpo celeste, de magnitud

$$a = -\frac{1}{c^2}\int_{\theta=\frac{1}{2}\pi}^{\theta=\frac{1}{2}\pi} \frac{kM}{r^2}\cos\theta\, ds = 2\,\frac{kM}{r^2\,\Delta}.$$



donde k denota la constante de gravitación, M la masa del cuerpo celeste, Δ la distancia del rayo al centro del cuerpo. En consecuencia, un rayo de luz que pasa junto al Sol sufre una desviación de $4{,}10^{-6} = 0{,}83$ segundos de arco. La distancia angular de la estrella al centro del Sol parece estar aumentada

en esta cantidad. Puesto que las estrellas fijas en regiones del cielo próximas al Sol son visibles durante los eclipses totales de Sol, esta consecuencia de la teoría puede compararse con la experiencia. Con el planeta Júpiter el desplazamiento esperado llega a aproximadamente 1/100 de la cantidad dada. Sería deseable que los astrónomos asumieran la cuestión aquí planteada. Pues, aparte de cualquier teoría, está la cuestión de si es posible detectar con los equipos actualmente disponibles una influencia de los campos gravitatorios en la propagación de la luz.

EL FUNDAMENTO DE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD GENERAL*

A. CONSIDERACIONES FUNDAMENTALES SOBRE EL POSTULADO DE RELATIVIDAD

1. Observaciones sobre la teoría de la relatividad especial

La teoría de la relatividad especial se basa en el siguiente postulado, que también es satisfecho por la mecánica de Galileo y Newton.

Si se escoge un sistema de coordenadas K con relación al cual son válidas las leyes físicas en su forma más simple, las *mismas* leyes son también válidas con relación a cualquier otro sistema de coordenadas K' que se mueve con movimiento de traslación uniforme con respecto a K. Llamamos a este postulado el «principio de relatividad especial». La palabra «especial» quiere dar a entender que el principio está restringido al caso en que K' tiene un movimiento de traslación uniforme con respecto a K, pero que la equivalencia de K' y K no se extiende al caso de movimiento no uniforme de K' con respecto a K.

Así pues, la teoría de la relatividad especial no se aparta de la mecánica clásica por el postulado de relatividad, sino por el postulado de la constancia de la velocidad de la luz *in vacuo*, a partir del cual, en combinación con el principio de relatividad especial, se sigue, en la forma bien conocida, la relatividad de la simultaneidad, la transformación lorentziana y las leyes relacionadas para el comportamiento de cuerpos y relojes en movimiento.

La modificación a la que la teoría de la relatividad especial ha sometido a la teoría del espacio y el tiempo es realmente de largo alcance, pero hay un punto importante que ha permanecido inalterado. Pues la leyes de la geometría, incluso según la teoría de la relatividad especial, tienen que ser interpretadas directamente como leyes relacionadas con las posibles posiciones relativas de cuerpos sólidos en reposo; y, de una manera más general, las leyes de la cinemática deben interpretarse como leyes que describen las relaciones de medida de cuerpos y relojes. A dos puntos materiales seleccionados de un cuerpo rígido estacionario corresponde siempre una distancia de longitud bien definida, que es independiente de la localización y orientación del cuerpo, y es también independiente del tiempo. A dos posiciones seleccionadas de las manecillas de un reloj

* «Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie», *Annalen der Physik*, 49, 1916.

en reposo con respecto a un sistema de referencia privilegiado, corresponde siempre un intervalo de tiempo de longitud definida, que es independiente del lugar y el tiempo. Pronto veremos que la teoría de la relatividad especial no puede adherirse a esta interpretación física sencilla del espacio y el tiempo.

2. La necesidad de una extensión del postulado de relatividad

En mecánica clásica, y no menos en la teoría de la relatividad especial, existe un defecto epistemológico inherente que fue señalado claramente, quizá por primera vez, por Ernst Mach. Lo discutiremos mediante el siguiente ejemplo: dos cuerpos fluidos del mismo tamaño y naturaleza se mantienen libremente en el espacio a una distancia tan grande uno de otro y de todas las demás masas que sólo hay que tener en cuenta aquellas fuerzas gravitatorias que aparecen a partir de la interacción de diferentes partes del mismo cuerpo. Sea invariable la distancia entre los dos cuerpos, y supongamos que en ninguno de los dos cuerpos hay movimientos relativos de unas partes con respecto a otras. Pero supongamos que una de las dos masas, juzgada por un observador en reposo con respecto a la otra masa, rota con velocidad angular constante alrededor de la línea que une ambas masas. Éste es un movimiento relativo verificable de los dos cuerpos. Imaginemos ahora que cada uno de los cuerpos ha sido examinado por medio de instrumentos de medida en reposo con respecto al mismo, y que se muestra que la superficie de S_1 es una esfera y la de S_2 es un elipsoide de revolución. Acto seguido planteamos la pregunta: ¿cuál es la razón de esta diferencia entre los dos cuerpos? Ninguna respuesta puede admitirse como epistemológica satisfactoria,[1] a menos que la razón dada sea un *hecho de experiencia observable*. La ley de causalidad no tiene el significado de un enunciado acerca del mundo de la experiencia, excepto cuando *hechos observables* aparecen en última instancia como causas y efectos.

La mecánica newtoniana no da una respuesta satisfactoria a esta pregunta. Se pronuncia como sigue: las leyes de la mecánica se aplican al espacio R_1, con respecto al cual el cuerpo S_1 está en reposo, pero no al espacio R_2 con respecto al cual el cuerpo S_2 está en reposo. Pero el espacio privilegiado R_1 de Galileo, así introducido, es una causa meramente *facticia*, y no algo que pueda ser observado. Es evidente, por lo tanto, que la mecánica de Newton no satisface realmente el requisito de causalidad en el caso bajo consideración, sino que lo hace sólo aparentemente, puesto que hace a la causa facticia R_1 responsable de la diferencia observable en los cuerpos S_1 y S_2.

La única respuesta satisfactoria debe ser que el sistema físico consistente en S_1 y S_2 no revela dentro de sí mismo ninguna causa imaginable a la que pueda remitirse el diferente comportamiento de S_1 y S_2. Por consiguiente, la causa debe estar *fuera* de este sistema. Tenemos que asumir que las leyes generales de movimiento, que en particular determinan las formas de S_1 y S_2, deben ser tales que el comportamiento mecánico de S_1 y S_2 está condicionado en parte, y en aspectos muy esenciales, por masas distantes que no han sido incluidas en el sistema bajo consideración. Estas masas distantes y sus movimientos con respecto a S_1 y S_2 deben considerarse entonces como la sede de las causas (que deben ser susceptibles de observación) del diferente comportamiento de

1. Por supuesto, una respuesta puede ser satisfactoria desde el punto de vista de la epistemología, y pese a todo ser físicamente errónea si está en conflicto con otras experiencias.

nuestros dos cuerpos S_1 y S_2. Ellas asumen el papel de la causa facticia R_1. De todos los espacios imaginables R_1, R_2, etc., en cualquier tipo de movimiento relativo mutuo, no existe ninguno que podamos considerar privilegiado *a priori* sin reavivar la objeción epistemológica antes mencionada. *Las leyes de la física deben ser de tal naturaleza que se aplican a sistemas de referencia en cualquier tipo de movimiento.* Por este camino llegamos a una extensión del postulado de relatividad.

Además de este poderoso argumento de la teoría del conocimiento, existe un hecho físico bien conocido en favor de una extensión de la teoría de la relatividad. Sea K un sistema de referencia galileano, i. e. un sistema con respecto al cual (al menos en la región tetradimensional en consideración) una masa, suficientemente distante de otras masas, se mueve con movimiento uniforme en línea recta. Sea K', un segundo sistema de referencia que se mueve con respecto a K con traslación *uniformemente acelerada*. Entonces, con respecto a K', una masa suficientemente distante de otras masas tendría un movimiento acelerado tal que la magnitud y dirección de su aceleración son independientes de la composición material y estado físico de la masa.

¿Permite esto a un observador en reposo con respecto a K' inferir que él está en un sistema de referencia «realmente» acelerado? La respuesta es negativa; pues la relación antes mencionada de masas libremente movibles respecto a K' puede interpretarse igualmente bien de la siguiente manera. El sistema de referencia K' no está acelerado, pero el territorio espacio-temporal en cuestión está bajo el dominio de un campo gravitatorio que genera el movimiento acelerado de los cuerpos con respecto a K'.

Esta visión se hace posible para nosotros por la enseñanza de la experiencia acerca de la existencia de un campo de fuerzas, a saber, el campo gravitatorio, que posee la extraordinaria propiedad de impartir la misma aceleración a todos los cuerpos.[1] El comportamiento mecánico de los cuerpos con respecto a K' es el mismo que se presenta a la experiencia en el caso de sistemas que solemos considerar como «estacionarios» o como «privilegiados». Por consiguiente, desde el punto de vista físico, se sugiere inmediatamente la hipótesis de que los sistemas K y K' deben ser ambos considerados con igual derecho como «estacionarios», es decir, tienen el mismo título como sistemas de referencia para la descripción física de los fenómenos.

Se verá a partir de estas reflexiones que al seguir la teoría de la relatividad general nos veremos llevados a una teoría de la gravitación, puesto que podemos «producir» un campo gravitatorio cambiando meramente el sistema de coordenadas. También será obvio que el principio de la constancia de la velocidad de la luz *in vacuo* debe ser modificado, puesto que fácilmente reconocemos que la trayectoria de un rayo luminoso con respecto a K' debe ser en general curvilínea, si con respecto a K la luz se propaga en línea recta con una velocidad constante definida.

3. El continuo espacio-temporal. Requisito de covariancia general para las ecuaciones que expresan las leyes generales de la naturaleza

En mecánica clásica, así como en la teoría de la relatividad especial, las coordenadas de espacio y tiempo tienen un significado físico directo. Decir que un suceso tiene x_1

1. Eötvös ha demostrado experimentalmente que el campo gravitatorio tiene esta propiedad con gran exactitud.

como coordenada X_1 significa que la proyección del suceso sobre el eje de X_1, determinada por reglas de medir rígidas y de acuerdo con las reglas de la geometría euclidiana, se obtiene colocando una regla de medir dada (la unidad de longitud) x_1 veces a partir del origen de coordenadas a lo largo del eje de X_1. Decir que un suceso puntual tiene $x_4 = t$ como coordenada X_4 significa que un reloj estándar, construido para medir el tiempo con un período unidad definido, y que es estacionario con respecto al sistema de coordenadas y prácticamente coincidente en el espacio con el suceso puntual,[1] habrá medido $x_4 = t$ períodos en la ocurrencia del suceso.

Esta idea del espacio y el tiempo ha estado siempre en la mente de los físicos, incluso si, como regla, no han sido conscientes de ella. Está claro a partir del papel que estos conceptos desempeñan en las medidas físicas; también debe subyacer a las reflexiones del lector sobre la sección precedente (2) para conectar cualquier significado con lo que allí ha leído. Pero ahora demostraremos que debemos dejarla de lado y reemplazarla por una visión más general para poder completar el postulado de relatividad general, si la teoría de la relatividad especial se aplica al caso especial de ausencia de un campo gravitatorio.

En un espacio que está libre de campos gravitatorios introducimos un sistema de referencia galileano K (x, y, z, t), y también un sistema de coordenadas K' (x', y', z', t') en rotación uniforme con respecto a K. Consideramos que los orígenes de ambos sistemas así como sus ejes Z coinciden en todo momento. Demostraremos que para una medida espacio-temporal en el sistema K' no puede mantenerse la definición anterior del significado físico de longitudes y tiempos. Por razones de simetría es evidente que un círculo alrededor del origen en el plano X, Y de K puede considerarse al mismo tiempo como un círculo en el plano X', Y' de K'. Supongamos que la circunferencia y el diámetro de este círculo han sido medidos con una medida unidad infinitamente pequeña comparada con el radio, y que tenemos el cociente de ambos resultados. Si este experimento se realizara con una regla de medir en reposo con respecto al sistema galileano K, el cociente sería π. Con una regla de medir en reposo con respecto a K', el cociente sería mayor que π. Esto se entiende inmediatamente si concebimos el proceso global de medir desde el sistema «estacionario» K, y tenemos en consideración que la regla de medir aplicada a la periferia sufre una contracción lorentziana, mientras que la aplicada a lo largo del radio no la sufre. Por lo tanto, la geometría euclidiana no se aplica a K'. La noción de coordenadas definida más arriba, que presupone la validez de la geometría euclidiana, deja de ser válida por consiguiente en relación al sistema K'. Así, también, somos incapaces de introducir un tiempo correspondiente a los requisitos físicos en K', indicado por relojes en reposo con respecto a K'. Para convencernos de esta imposibilidad, imaginemos dos relojes de idéntica constitución colocados uno en el origen de coordenadas y el otro en la circunferencia del círculo, y ambos concebidos desde el sistema «estacionario» K. Por un resultado familiar de la teoría de la relatividad especial, el reloj en la circunferencia —juzgado desde K— marcha más lento que el otro, porque el primero está en movimiento y el último en reposo. Un observador en el origen común de coordenadas, capaz de observar el reloj en la circunferencia por medio de luz, vería por consiguiente que se retrasa respecto al reloj que tiene ante él. Puesto que él no

1. Suponemos la posibilidad de verificar la «simultaneidad» de sucesos inmediatamente próximos en el espacio, o —por hablar con más precisión— para inmediata proximidad o coincidencia en el espacio-tiempo, sin dar una definición de este concepto fundamental.

estará preparado para admitir que la velocidad de la luz a lo largo del camino en cuestión dependa explícitamente del tiempo, interpretará sus observaciones como algo que demuestra que el reloj en la circunferencia «realmente» marcha más lento que el reloj en el origen. Por lo tanto, se verá obligado a definir el tiempo de tal manera que la marcha de un reloj depende de dónde pueda estar el reloj.

Por consiguiente, llegamos a este resultado: en la teoría de la relatividad general, el espacio y el tiempo no pueden definirse de manera tal que las diferencias de las coordenadas espaciales puedan medirse directamente por la regla de medir unidad, ni las diferencias en la coordenada temporal por un reloj estándar.

El método empleado hasta ahora para tender coordenadas en el continuo espacio-temporal de una manera definida deja así de ser válido, y parece que no haya otra forma que nos permitiera adaptar sistemas de coordenadas al universo tetradimensional, de modo que pudiéramos esperar de su aplicación una formulación particularmente simple de las leyes de la naturaleza. De modo que no hay nada sino considerar todos los sistemas de coordenadas imaginables, en principio, como igualmente adecuados para la descripción de la naturaleza. Esto viene a exigir que:

Las leyes generales de la naturaleza deben expresarse por ecuaciones que sean válidas para todos los sistemas de coordenadas. Es decir, sean covariantes con respecto a cualesquiera sustituciones (generalmente covariantes).

Es evidente que una teoría física que satisfaga este postulado también será adecuada para el postulado de relatividad general. Pues la suma de todas las sustituciones incluye, en cualquier caso, a aquellas que corresponden a todos los movimientos relativos de sistemas de coordenadas tridimensionales. Que este requisito de covariancia general, que despoja al espacio y el tiempo del último residuo de objetividad física, es un requisito general, se verá a partir de la siguiente reflexión. Todas nuestras verificaciones espacio-temporales equivalen invariablemente a una determinación de coincidencias espacio-temporales. Si, por ejemplo, los sucesos consistieran meramente en el movimiento de puntos materiales, entonces nada sería observable en definitiva salvo los encuentros de dos o más de dichos puntos. Además, los resultados de nuestras medidas no son nada más que verificaciones de tales encuentros de los puntos materiales de nuestros instrumentos de medida con otros puntos materiales, coincidencias entre las manecillas de un reloj y puntos en la esfera de un reloj, y sucesos puntuales observados que suceden en el mismo lugar y al mismo tiempo.

La introducción de un sistema de referencia no tiene otro propósito que facilitar la descripción de la totalidad de tales coincidencias. Asignamos al universo cuatro variables espacio-temporales x_1, x_2, x_3, x_4, de tal manera que para todo suceso puntual existe un correspondiente sistema de valores de las variables x_1.... x_4. A dos sucesos puntuales coincidentes corresponde un sistema de valores de las variables x_1 ... x_4, i. e. la coincidencia se caracteriza por la identidad de las coordenadas. Si, en lugar de las variables x_1 ... x_4, introducimos funciones de ellas, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, como un nuevo sistema de coordenadas, de modo que los sistemas de valores se hacen corresponder uno a otro sin ambigüedad, la igualdad de las cuatro coordenadas en el nuevo sistema servirá también como una expresión de la coincidencia espacio-temporal de los dos sucesos puntuales. Puesto que toda nuestra experiencia física puede reducirse en última instancia a tales coincidencias, no hay ninguna razón inmediata para preferir ciertos sistemas de coordenadas a otros. Es decir, llegamos al requisito de covariancia general.

4. La relación de las cuatro coordenadas con la medida en el espacio y el tiempo

No es mi propósito en esta discusión presentar la teoría de la relatividad general como un sistema tan sencillo y lógico como sea posible, y con el mínimo número de axiomas; sino que mi principal objetivo es desarrollar esta teoría de tal manera que el lector sienta que el camino en el que hemos entrado es el natural desde un punto de vista psicológico, y que las hipótesis subyacentes parecerán tener el máximo grado de seguridad posible. Con este objetivo a la vista garanticemos ahora que:

Para regiones tetradimensionales infinitamente pequeñas es apropiada la teoría de la relatividad en el sentido restringido, si las coordenadas se escogen adecuadamente.

Para este fin debemos escoger la aceleración del sistema de coordenadas («local») infinitamente pequeño de modo que no haya ningún campo gravitatorio; esto es posible para una región infinitamente pequeña. Sean X_1, X_2, X_3, las coordenadas espaciales, y X_4 la correspondiente coordenada temporal medida en la unidad apropiada.[1] Si se imagina dada una regla rígida como unidad de medida, las coordenadas, con una orientación dada del sistema de coordenadas, tienen un significado físico directo en el sentido de la teoría de la relatividad especial. Por la teoría de la relatividad especial la expresión

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \tag{1}$$

tiene entonces un valor que es independiente de la orientación del sistema de coordenadas local, y que se puede determinar mediante medidas de espacio y tiempo. Llamamos *ds* a la magnitud del elemento de línea perteneciente a puntos del continuo tetradimensional infinitamente próximos. Siguiendo a Minkowski, si el *ds* perteneciente a los elementos $dX_1 \ldots dX_4$ es positivo, le llamamos de tipo tiempo; si es negativo, le llamamos de tipo espacio.

Al «elemento de línea» en cuestión, o a los dos sucesos puntuales infinitamente próximos, corresponderán también diferenciales definidas $dx_1 \ldots dx_4$ de las coordenadas tetradimensionales de cualquier sistema de referencia escogido. Si este sistema, así como el sistema «local», está dado para la región en consideración, las dX_ν podrán representarse aquí por expresiones homogéneas lineales definidas de las dx_σ:

$$dX_\nu = \sum_\sigma a_{\nu\sigma}\, dx_\sigma . \tag{2}$$

Insertando estas expresiones en (1), obtenemos

$$ds^2 = \sum_{\sigma\tau} g_{\sigma\tau}\, dx_\sigma\, dx_\tau . \tag{3}$$

donde las $g_{\sigma\tau}$ serán funciones de las x_σ. Éstas ya no pueden ser dependientes de la orientación y el estado de movimiento del sistema de coordenadas «local», pues ds^2 es una magnitud que se puede establecer por medidas de regla-y-reloj de sucesos puntuales infinitamente próximos en el espacio-tiempo, y definida independientemente de cualquier

1. La unidad de tiempo debe escogerse de modo que la velocidad de la luz *in vacuo* medida en el sistema de coordenadas «local» sea igual a la unidad.

elección de coordenadas concreta. Las $g_{\sigma\tau}$ deben escogerse aquí de modo que $g_{\sigma\tau} = g_{\tau\sigma}$; la suma se extiende sobre todos los valores de σ y τ, de modo que la suma consta de 4×4 términos, de los cuales 12 se agrupan en pares iguales.

El caso de la teoría de la relatividad ordinaria aparece a partir del caso aquí considerado, si es posible escoger, por razón de las relaciones particulares de las $g_{\sigma\tau}$ en una región finita, el sistema de referencia en la región finita de tal manera que las $g_{\sigma\tau}$ toman los valores constantes

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}\right\} \qquad (4)$$

Encontraremos en adelante que la elección de tales coordenadas no es posible, en general, para una región finita.

De las consideraciones desarrolladas en los enunciados 2 y 3 se sigue que las cantidades $g_{\tau\sigma}$ deben considerarse desde el punto de vista físico como las cantidades que describen el campo gravitatorio en relación con el sistema de referencia escogido. Pues si ahora suponemos que la teoría de la relatividad especial se aplica a una cierta región tetradimensional con las coordenadas adecuadamente escogidas, entonces las $g_{\mu\nu}$ tienen los valores dados en (4). Un punto material libre se mueve entonces, con respecto a este sistema, con movimiento uniforme en línea recta. Entonces, si introducimos nuevas coordenadas espacio-temporales x_1, x_2, x_3, x_4 por medio de cualquier sustitución que escojamos, las $g_{\mu\nu}$ en este nuevo sistema ya no serán constantes, sino funciones del espacio y el tiempo. Al mismo tiempo, el movimiento del punto lateral libre se presentará en las nuevas coordenadas como un movimiento no-uniforme curvilíneo, y la ley de este movimiento será independiente de la naturaleza de la partícula que se mueve. Por consiguiente, interpretaremos este movimiento como un movimiento bajo la influencia de un campo gravitatorio. Encontramos así la presencia de un campo gravitatorio conectada con una variabilidad espacio-temporal de las $g_{\sigma\tau}$. Así también, en el caso general, cuando ya no podemos mediante una adecuada elección de coordenadas aplicar la teoría de la relatividad especial a una región finita, nos atendremos a la idea de que las $g_{\sigma\tau}$ describen el campo gravitatorio.

Por lo tanto, según la teoría de la relatividad general la gravitación ocupa una posición excepcional con respecto a otras fuerzas, en particular las fuerzas electromagnéticas, puesto que las diez funciones $g_{\sigma\tau}$ que representan al campo gravitatorio definen al mismo tiempo las propiedades métricas del espacio medido.

B. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS PARA LA FORMULACIÓN DE ECUACIONES GENERALMENTE COVARIANTES

Habiendo visto en lo que precede que el postulado de relatividad general conduce al requisito de que las ecuaciones de la física sean covariantes frente a cualquier sustitución de las coordenadas $x_1 \ldots x_4$, tenemos que considerar cómo pueden encontrarse tales ecuaciones generalmente covariantes. Ahora nos dirigimos hacia esta tarea puramente matemática, y encontraremos que en su solución juega un papel fundamental el invariante

ds dado en la ecuación (3), que, tomándolo prestado de la teoría de superficies de Gauss, hemos llamado el «elemento de línea».

La idea fundamental de esta teoría general de covariantes es la siguiente: Definamos ciertos objetos («tensores») con respecto a cualquier sistema de coordenadas mediante un número de funciones de las coordenadas, llamadas «componentes» del tensor. Existen entonces ciertas reglas mediante las cuales pueden calcularse dichas componentes para un nuevo sistema de coordenadas, si se conocen para el sistema de coordenadas original. Estos objetos, en lo sucesivo llamados tensores, están además caracterizados por el hecho de que las ecuaciones de transformación para sus componentes son lineales y homogéneas. En consecuencia, todas las componentes en el nuevo sistema se anulan si todas se anulan en el sistema original. Si, por lo tanto, una ley de la naturaleza se expresa igualando a cero todas las componentes de un tensor, dicha ley es generalmente covariante. Examinando las leyes de formación de tensores adquirimos los medios de formular leyes generalmente covariantes.

5. Cuadrivectores contravariantes y covariantes

Cuadrivectores contravariantes. El elemento de línea está definido por las cuatro «componentes» dx_ν, para los que la ley de transformación se expresa por la ecuación

$$dx'_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} dx_\nu. \tag{5}$$

Las dx'_σ se expresan como funciones lineales y homogéneas de las dx_ν. De aquí podemos considerar estas diferenciales de coordenadas como las componentes de un «tensor» del tipo particular que llamamos cuadrivector contravariante. Cualquier objeto que está definido con relación al sistema de coordenadas por cuatro cantidades A^ν, y que se transforma por la misma ley

$$A'^\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} A^\nu, \tag{5a}$$

se llama también un cuadrivector contravariante. De (5a) se sigue inmediatamente que las sumas $(A^\sigma \pm B^\sigma)$ son también componentes de un cuadrivector, si A^σ y B^σ lo son. Relaciones correspondientes válidas para todos los «tensores» deben introducirse posteriormente. (Regla para la adición y sustracción de tensores).

Cuadrivectores covariantes. Llamamos a cuatro cantidades A_ν componentes de un cuadrivector covariante si para cualquier elección arbitraria del cuadrivector contravariante B^ν

$$\sum_\nu A_\nu B^\nu = \text{Invariante}. \tag{6}$$

La ley de transformación de un cuadrivector covariante se sigue de esta definición. En efecto, si sustituimos B^ν en el segundo miembro de la ecuación

$$\sum_\nu A'_\sigma B'^\sigma = \sum_\nu A_\nu B_\nu$$

por la expresión resultante de la inversión de (5a),

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} B'^{\sigma},$$

obtenemos

$$\sum_{\sigma} B'^{\sigma} \sum_{\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} A_{\nu} = \sum_{\sigma} B'^{\sigma} A'_{\sigma}.$$

Puesto que esta ecuación es verdadera para valores arbitrarios de las B'^{σ}, se sigue que la ley de transformación es

$$A'_{\sigma} = \sum_{\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} A_{\nu}. \tag{7}$$

Nota sobre una forma simplificada de escribir las expresiones. Una ojeada a las ecuaciones de esta sección muestra que siempre hay una suma con respecto a los índices que aparecen dos veces bajo un signo de suma (e. g. el índice ν en (5)), y sólo con respecto a índices que aparecen dos veces. Por lo tanto, es posible, sin pérdida de claridad, omitir el signo de suma. En su lugar introducimos el siguiente convenio: si un índice aparece dos veces en un término de una expresión, siempre debe sumarse sobre el mismo a menos que se afirme expresamente lo contrario.

La diferencia entre cuadrivectores covariantes y contravariantes reside en la ley de transformación ((7) o (5) respectivamente). Ambas forma son tensores en el sentido del comentario general anterior. Ahí reside su importancia. Siguiendo a Ricci y Levi-Civita denotamos el carácter contravariante colocando el índice arriba, y el carácter covariante colocándolo abajo.

6. Tensores de segundo rango y superiores

Tensores contravariantes. Si formamos los dieciséis productos $A^{\mu\nu}$ de las componentes A^{μ} y B^{ν} de dos cuadrivectores contravariantes

$$A^{\mu\nu} = A^{\mu} B^{\nu}. \tag{8}$$

entonces por (8) y (5a) $A^{\mu\nu}$ satisface la ley de transformación

$$A'^{\sigma\tau} = \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\nu}} A^{\mu\nu}. \tag{9}$$

Llamamos tensor contravariente de segundo rango a un objeto que está descrito con relación a cualquier sistema de referencia por dieciséis cantidades que satisfacen la ley de transformación (9). No todos los tensores semejantes pueden formarse de acuerdo con (8) a partir de dos cuadrivectores, pero se demuestra fácilmente que cualesquiera dieciséis $A^{\mu\nu}$ dados pueden representarse como sumas de los $A^{\mu}B^{\nu}$ de cuatro pares de cuadrivectores adecuadamente seleccionados. De aquí podemos probar casi todas las

leyes que se aplican al tensor de segundo rango definido por (9) de la forma más simple demostrándolas para los tensores especiales del tipo (8).

Tensores contravariantes de cualquier rango. Es evidente que, en línea con (8) y (9), también pueden definirse tensores contravariantes de tercer rango y superiores con 4^3 componentes, y así sucesivamente. De la misma forma, se sigue de (8) y (9) que el cuadrivector contravariante puede tomarse en este sentido como un tensor contravariante de primer rango.

Tensores covariantes. Por otra parte, si tomamos los dieciséis productos $A_{\mu\nu}$ de dos cuadrivectores covariantes A_μ y B_ν

$$A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu, \tag{10}$$

la ley de transformación para éstos es

$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x'_\tau} A_{\mu\nu}. \tag{11}$$

Esta ley de transformación define el tensor covariante de segundo rango. Todos nuestros comentarios previos sobre tensores contravariantes se aplican igualmente a tensores covariantes.

NOTA. Es conveniente tratar los escalares (o invariantes) como tensores contravariantes o tensores covariantes de rango cero.

Tensores mixtos. También podemos definir un tensor de segundo rango del tipo

$$A^\nu_\mu = A_\mu B^\nu. \tag{12}$$

que es covariante con respecto al índice μ y contravariante con respecto al índice ν. Su ley de transformación es

$$A'^\tau_\sigma = \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} A^\nu_\mu. \tag{13}$$

Naturalmente, existen tensores mixtos con cualquier número de índices de carácter covariante y cualquier número de índices de carácter contravariante. Los tensores covariantes y contravariantes pueden considerarse como casos especiales de tensores mixtos.

Tensores simétricos. Un tensor contravariante, o un tensor covariante, de segundo rango o superior se llama simétrico si dos componentes, que se obtienen una de otra por el intercambio de dos índices, son iguales. El tensor $A^{\mu\nu}$, o el tensor $A_{\mu\nu}$, son así simétricos si para cualquier combinación de los índices μ, ν,

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}, \tag{14}$$

o respectivamente,

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}. \tag{14a}$$

Hay que demostrar que la simetría así definida es una propiedad independiente del sistema de referencia. De hecho, se sigue de (9), cuando se tiene en cuenta (14), que

$$A'^{\sigma\tau} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} A^{\nu\mu} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\mu} A^{\mu\nu} = A'^{\tau\sigma}.$$

La penúltima ecuación depende del intercambio de los índices de suma μ y ν, i. e. meramente de un cambio de notación.

Tensores antisimétricos. Un tensor contravariante o un tensor covariante de segundo, tercero o cuarto rango se llama antisimétrico si dos componentes, que se obtienen una de otra por el intercambio de dos índices, son iguales y de signo opuesto. El tensor $A^{\mu\nu}$, o el tensor $A_{\mu\nu}$, es, por lo tanto, antisimétrico si siempre

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}, \tag{15}$$

o respectivamente,

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}. \tag{15a}$$

De las dieciséis componentes $A^{\mu\nu}$, las cuatro componentes $A^{\mu\mu}$ se anulan; el resto son iguales y de signo opuesto por pares, de modo que existen sólo seis componentes numéricamente diferentes (un seis-vector). Análogamente vemos que el tensor antisimétrico de tercer rango $A^{\mu\nu\sigma}$ tiene sólo cuatro componentes numéricamente diferentes, mientras que el tensor antisimétrico $A^{\mu\nu\sigma\tau}$ tiene sólo una. No existen tensores antisimétricos de rango mayor que el cuarto en un continuo de cuatro dimensiones.

7. Producto de tensores

Producto exterior de tensores. A partir de las componentes de un tensor de rango n y de un tensor de rango m, obtenemos las componentes de un tensor de rango $n + m$ multiplicando cada componente de un tensor por cada componente del otro. Así, por ejemplo, los tensores T aparecen a partir de los tensores A y B de diferentes tipos

$$T_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu} B_\sigma,$$

$$T^{\mu\nu\sigma\tau} = A^{\mu\nu} B^{\sigma\tau},$$

$$T^{\sigma\tau}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} B^{\sigma\nu}.$$

La demostración del carácter tensorial de T está dada directamente por las representaciones (8), (10), (12), o por las leyes de transformación (9), (11), (13). Las propias ecuaciones (8), (10), (12) son ejemplos de producto exterior de tensores de primer rango.

«Contracción» de un tensor mixto. A partir de cualquier tensor mixto podemos formar un tensor cuyo rango es menor en dos unidades, igualando un índice de carácter covariante con uno de carácter contravariante, y sumando con respecto a dicho índice

(«contracción»). Así, por ejemplo, a partir del tensor mixto de cuarto rango $A^{\rho\tau}_{\mu\nu}$, obtenemos el tensor mixto de segundo rango

$$A^{\tau}_{\nu} = A^{\mu\tau}_{\mu\nu} \left(= \sum_{\mu} A^{\mu\tau}_{\mu\nu} \right),$$

y a partir de éste, por una segunda contracción, el tensor de rango cero

$$A = A^{\nu}_{\nu} = A^{\mu\nu}_{\mu\nu}.$$

La demostración de que el resultado de la contracción posee realmente el carácter tensorial está dada o bien o por la representación de un tensor de acuerdo con la generalización de (12) en combinación con (6), o bien por la generalización de (13).

Productos interior y mixto de tensores. Éstos consisten en una combinación de producto exterior con contracción.

Ejemplos. A partir del tensor covariante de segundo rango $A_{\mu\nu}$ y el tensor contravariante de primer rango B^{σ} formamos por producto exterior el tensor mixto

$$D^{\sigma}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} B^{\sigma}.$$

Por contracción con respecto a los índices ν y σ, obtenemos el cuadrivector covariante

$$D_{\mu} = D^{\nu}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} B^{\nu}.$$

Llamamos a esto el producto interno de los tensores $A_{\mu\nu}$ y B^{σ}. Análogamente, a partir de los tensores $A_{\mu\nu}$ y $B^{\sigma\tau}$, formamos por producto exterior y doble contracción el producto interior $A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$. Por producto exterior y una contracción, obtenemos a partir de $A_{\mu\nu}$ y $B^{\sigma\tau}$ el tensor mixto de segundo rango $D^{\tau}_{\mu} = A_{\mu\nu} B^{\nu\tau}$. Esta operación puede caracterizarse apropiadamente como una operación mixta, siendo «exterior» con respecto a los índices μ y τ, e «interior» con respecto a los índices ν y σ.

Ahora demostramos una proposición que suele ser útil como evidencia del carácter tensorial. A partir de lo que se acaba de explicar, $A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$ es un escalar si $A_{\mu\nu}$ y $B^{\sigma\tau}$ son tensores. Pero también podemos hacer la siguiente afirmación: si $A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$ es un escalar *para cualquier elección del tensor* $B^{\mu\nu}$, entonces $A_{\mu\nu}$ tiene carácter tensorial. En efecto, por hipótesis, para cualquier sustitución

$$A'_{\sigma\tau} B'^{\sigma\tau} = A'_{\mu\nu} B^{\mu\nu}.$$

pero por una inversión de (9)

$$B^{\mu\nu} = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}} B'^{\sigma\tau}.$$

Esto, insertado en la ecuación anterior, da

$$\left(A'_{\sigma\tau} - \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}} A_{\mu\nu} \right) B'^{\sigma\tau} = 0.$$

Esto sólo puede satisfacerse para valores arbitrarios $B^{\sigma\tau}$ si se anula el paréntesis. El resultado se sigue entonces por la ecuación (11). Esta regla se aplica correspondientemente a tensores de cualquier rango y carácter, y la demostración es análoga en todos los casos.

La regla también puede demostrarse de esta forma: si B^{μ} y C^{ν} son vectores cualesquiera, y si, para todos los valores de éstos, el producto interior $A_{\mu\nu} B^{\mu} C^{\nu}$ es un escalar, entonces $A_{\mu\nu}$ es un tensor covariante. Esta última proposición también es válida incluso si sólo es correcta la afirmación más especial: que con cualquier elección del cuadrivector B^{μ}, el producto interior $A_{\mu\nu} B^{\mu} C^{\nu}$ es un escalar, si además se sabe que $A_{\mu\nu}$ satisface la condición de simetría $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$. En efecto, por el método dado antes demostramos el carácter tensorial de $(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$, y de esto se sigue el carácter tensorial de $A_{\mu\nu}$ debido a la simetría. Esto también puede generalizarse fácilmente al caso de tensores covariantes y contravariantes de cualquier rango.

Finalmente, a partir de lo que se ha demostrado se sigue la siguiente ley que también puede generalizarse para tensores cualesquiera: si para cualquier elección del cuadrivector B^{ν} las cantidades $A_{\mu\nu} B^{\nu}$ forman un tensor de primer rango, entonces $A_{\mu\nu}$ es un tensor de segundo rango. En efecto, si C^{μ} es cualquier cuadrivector, entonces, debido al carácter tensorial de $A_{\mu\nu} B^{\nu}$, el producto interior $A_{\mu\nu} B^{\nu} C^{\mu}$ es un escalar para cualquier elección de los dos cuadrivectores B^{ν} y C^{μ}. De lo cual se sigue la proposición.

8. Algunos aspectos del tensor fundamental $g_{\mu\nu}$

El tensor fundamental covariante. En la expresión invariante para el cuadrado del elemento de línea

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu},$$

la parte que desempeñan las dx_{μ} es la de un vector contravariante que puede escogerse a voluntad. Puesto que además $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, de las consideraciones de la sección precedente se sigue que $g_{\mu\nu}$ es un tensor covariante de segundo rango. Le llamamos «tensor fundamental». En lo que sigue deducimos algunas propiedades de este tensor que, es cierto, se aplican a cualquier vector de segundo rango. Pero puesto que el tensor fundamental desempeña un papel especial en nuestra teoría, que tiene su base física en el efecto peculiar de la gravitación, sucede que las relaciones que se van a desarrollar son de importancia para nosotros sólo en el caso del tensor fundamental.

El tensor fundamental contravariante. Si en el determinante formado por los elementos $g_{\mu\nu}$ tomamos el cofactor de cada uno de los $g_{\mu\nu}$ y lo dividimos por el determinante $g = |g_{\mu\nu}|$, obtenemos ciertas cantidades $g^{\mu\nu} (= g^{\nu\mu})$ que, como demostraremos, forman un tensor contravariante.

Por una conocida propiedad de los determinantes

$$g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta^{\nu}_{\mu}, \tag{16}$$

donde el símbolo δ^{ν}_{μ} denota 1 o 0, según $\mu = \nu$ o $\mu \neq \nu$.

En lugar de la expresión anterior para ds^2 podemos escribir

$$g_{\mu\sigma} \delta^{\sigma}_{\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}$$

o, por (16)

$$g_{\mu\sigma}\, g_{\nu\tau}\, g^{\sigma\tau}\, dx_\mu\, dx_\nu .$$

Pero, por las reglas del producto de la sección precedente, las cantidades

$$d\xi_\sigma = g_{\mu\sigma}\, dx_\mu$$

forman un cuadrivector covariante, y de hecho un vector arbitrario, puesto que las dx_μ son arbitrarias. Introduciendo esto en nuestra expresión obtenemos

$$ds^2 = g^{\sigma\tau}\, d\xi_\sigma\, d\xi_\tau .$$

Puesto que esto, con la elección arbitraria del vector $d\xi_\sigma$ es un escalar, y $g^{\sigma\tau}$ por definición es simétrico en los índices σ y τ, se sigue de los resultados de la sección precedente que $g^{\sigma\tau}$ es un tensor contravariante.

Se sigue además de (16) que δ^ν_μ es también un tensor, al que podemos llamar el tensor fundamental mixto.

El determinante del tensor fundamental. Por la regla de multiplicación de determinantes

$$\left|g_{\mu\alpha}\, g^{\alpha\nu}\right| = \left|g_{\mu\alpha}\right| \times \left|g^{\alpha\nu}\right| .$$

Por otra parte

$$\left|g_{\mu\alpha}\, g^{\alpha\nu}\right| = \left|\delta^\nu_\mu\right| = 1.$$

Se sigue por consiguiente que

$$\left|g_{\mu\nu}\right| \times \left|g^{\mu\nu}\right| = 1. \qquad (17)$$

El volumen escalar. Buscamos primero la ley de transformación del determinante $g = \left|g_{\mu\nu}\right|$. De acuerdo con (11)

$$g' = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x}{\partial x'_\tau}\, g_{\mu\nu} \right| .$$

De aquí, por una doble aplicación de la regla para la multiplicación de determinantes se sigue que

$$g' = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right| \cdot \left|\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}\right| \cdot \left|g_{\mu\nu}\right| = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right|^2 g ,$$

o

$$\sqrt{g'} = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right| \sqrt{g} .$$

Por otra parte, la ley de transformación del elemento de volumen

$$d\tau' = \int dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

es, de acuerdo con el teorema de Jacobi

$$d\tau' = \left|\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\right| d\tau.$$

Multiplicando las dos últimas ecuaciones obtenemos

$$\sqrt{g'}\, d\tau' = \sqrt{g}\, d\tau. \tag{18}$$

En lugar de $\sqrt{g}$, en lo que sigue introducimos la cantidad $\sqrt{-g}$, que es siempre real debido al carácter hiperbólico del continuo espacio-temporal. El invariante $\sqrt{-g}\, d\tau$ es igual a la magnitud del elemento de volumen tetradimensional en el sistema de referencia «local», medido con reglas rígidas y relojes en el sentido de la teoría de la relatividad especial.

Nota sobre el carácter del continuo espacio-temporal. Nuestra hipótesis de que la teoría de la relatividad especial siempre puede aplicarse a una región infinitamente pequeña, implica que ds^2 siempre puede expresarse de acuerdo con (1) por medio de cantidades reales $dX_1 \ldots dX_4$. Si denotamos por dt_0 el elemento de volumen «natural» dX_1, dX_2, dX_3, dX_4, entonces

$$d\tau_0 = \sqrt{-g}\, d\tau. \tag{18a}$$

Si $\sqrt{-g}$ fuera a anularse en un punto del continuo tetradimensional, ello significaría que en este punto un volumen «natural» infinitamente pequeño correspondería a un volumen finito en las coordenadas. Supongamos que nunca es así. Entonces g no puede cambiar de signo. Supondremos que en el sentido de la teoría de la relatividad especial, g tiene siempre un valor negativo finito. Ésta es una hipótesis respecto a la naturaleza física del continuo en consideración, y al mismo tiempo un convenio sobre la elección de coordenadas.

Pero si $-g$ es siempre finito y positivo, es natural establecer la elección de coordenadas *a posteriori* de tal manera que esta cantidad sea siempre igual a la unidad. Veremos más adelante que mediante una restricción semejante de la elección de coordenadas es posible conseguir una simplificación importante de las leyes de la naturaleza.

En lugar de (18), tenemos entonces simplemente $d\tau' = d\tau$, de lo cual, en vista del teorema de Jacobi, se sigue que

$$\left|\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\right| = 1. \tag{19}$$

Así pues, con esta elección de coordenadas, sólo son permisibles sustituciones para las que el determinante es la unidad.

Pero sería erróneo creer que este paso indica un abandono parcial del postulado de relatividad general. No preguntamos: «¿Cuáles son las leyes de la naturaleza que son

covariantes frente a todas las sustituciones para las que el determinante es la unidad?», sino que nuestra pregunta es: «¿Cuáles son las leyes de la naturaleza generalmente covariantes?». Hasta que no las hayamos formulado no podemos simplificar su expresión mediante una elección particular del sistema de referencia.

La formación de nuevos tensores por medio del tensor fundamental. El producto interior, exterior y mixto de un tensor por el tensor fundamental da tensores de diferente carácter y rango. Por ejemplo,

$$A^{\mu} = g^{\mu\sigma} A_{\sigma},$$
$$A = g_{\mu\nu} A^{\mu\nu}.$$

Pueden señalarse especialmente las siguientes formas:

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\alpha\beta},$$
$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} A^{\alpha\beta}.$$

(los «complementos» de tensores covariantes y contravariantes respectivamente), y

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}.$$

Llamamos $B_{\mu\nu}$ al tensor reducido asociado con $A_{\mu\nu}$. Análogamente,

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}.$$

Puede notarse que $g^{\mu\nu}$ no es entonces otra cosa que el complemento de $g_{\mu\nu}$, puesto que

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} \delta^{\nu}_{\alpha} = g^{\mu\nu}.$$

9. La ecuación de la línea geodésica. El movimiento de una partícula

Puesto que el elemento de línea *ds* está definido independientemente del sistema de coordenadas, la línea trazada entre dos punto P y P' del continuo tetradimensional de tal manera que $\int ds$ es estacionario —una línea geodésica— tiene un significado que también es independiente de la elección de coordenadas. Su ecuación es

$$\delta \left\{ \int_{P_1}^{P_2} ds \right\} = 0. \qquad (20)$$

Realizando la variación de la manera habitual, obtenemos a partir de esta ecuación cuatro ecuaciones diferenciales que definen la línea geodésica; esta operación se insertará por compleción. Sea λ una función de las coordenadas x_{ν}, y defina ésta una familia de superficies que intersectan a la línea geodésica requerida así como a todas las líneas en la inmediata vecindad de ella que pasan por los puntos P y P'. Cualquiera de esta líneas puede suponerse entonces dada expresando sus coordenadas x_{ν} como funciones de

λ. Indiquemos con el símbolo δ la transición de un punto de la geodésica requerida al punto correspondiente a la misma λ en una línea vecina. Entonces para (20) podemos sustituir

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta w d\lambda = 0 \\ &w^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{20a}$$

Pero puesto que

$$\delta w = \frac{1}{w} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda} \delta x_\sigma + g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \delta \left(\frac{dx_\nu}{d\lambda} \right) \right\},$$

y

$$\delta \left(\frac{dx_\nu}{d\lambda} \right) = \frac{d}{d\lambda} (\delta x_\nu),$$

obtenemos a partir de (20a), tras una integración parcial,

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \kappa_\sigma \delta x_\sigma d\lambda = 0,$$

donde

$$\kappa_\sigma = \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{g_{\mu\nu}}{w} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \right\} - \frac{1}{2w} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda}. \tag{20b}$$

Puesto que los valores de δx_σ son arbitrarios, se sigue de ello que

$$\kappa_\sigma = 0 \tag{20c}$$

son las ecuaciones de la línea geodésica.

Si ds no se anula a lo largo de la línea geodésica podemos escoger la «longitud del arco» s, medida a lo largo de la línea geodésica, como parámetro λ. Entonces $w = 1$, y en lugar de (20c) obtenemos

$$g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\nu}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0$$

o, por un mero cambio de notación,

$$g_{\alpha\sigma} \frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} + [\mu\nu, \sigma] \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0, \tag{20d}$$

donde, siguiendo a Christoffel, hemos escrito

$$[\mu\nu, \sigma] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right). \tag{21}$$

Finalmente, si multiplicamos (20d) por $g^{\sigma\tau}$ (producto exterior con respecto a τ, interior con respecto a σ), obtenemos las ecuaciones de la línea geodésica en la forma

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} + \{\mu\nu, \tau\} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0, \tag{22}$$

donde, siguiendo a Christoffel, hemos hecho

$$\{\mu\nu, \tau\} = g^{\tau\alpha} [\mu\nu, \alpha]. \tag{23}$$

10. La formación de tensores por diferenciación

Con la ayuda de la ecuación de la línea geodésica podemos ahora deducir fácilmente las leyes mediante las cuales pueden formarse nuevos tensores a partir de los viejos por diferenciación. Por este medio somos capaces de formular por primera vez ecuaciones diferenciales generalmente covariantes. Alcanzamos este objetivo por aplicación repetida de la siguiente ley simple:

Si en nuestro continuo tenemos una curva dada, cuyos puntos están especificados por la distancia de arco s medida a partir de un punto fijo sobre la curva, y si, además, ϕ es una función invariante del espacio, entonces $d\phi/ds$ también un invariante. La demostración descansa en esto, que ds es un invariante tanto como $d\phi$.

Puesto que

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} \frac{dx_\mu}{ds},$$

y por consiguiente

$$\psi = \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} \frac{dx_\mu}{ds}$$

es también un invariante, y un invariante para todas las curvas que parten de un punto del continuo, es decir, para cualquier elección del vector dx_μ. De aquí se sigue inmediatamente que

$$A_\mu = \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} \tag{24}$$

es un cuadrivector covariante: el «gradiente» de ϕ.

De acuerdo con nuestra regla, el cociente de diferenciales

$$\chi = \frac{\partial\psi}{\partial s}$$

tomado sobre una curva es análogamente un invariante. Insertando el valor de ψ, obtenemos en primer lugar

$$\chi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \frac{d^2 x_\mu}{ds^2}.$$

La existencia de un tensor no puede deducirse inmediatamente a partir de esto. Pero si podemos tomar la curva a lo largo de la cual hemos diferenciado como una geodésica, obtenemos al sustituir d^2x_ν/ds^2 a partir de (22),

$$\chi = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \{\mu\nu, \tau\} \frac{\partial \phi}{\partial x_\tau} \right) \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}.$$

Puesto que podemos intercambiar el orden de las diferenciaciones, y puesto que por (23) y (21) $\{\mu\nu, \tau\}$ es simétrico en μ y ν, se sigue que la expresión entre paréntesis es simétrica en μ y ν. Puesto que una línea geodésica puede trazarse en cualquier dirección a partir de un punto del continuo, y por consiguiente dx_μ/ds es un cuadrivector con la razón de sus componentes arbitraria, se sigue de los resultados del enunciado 7 que

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \{\mu\nu, \tau\} \frac{\partial \phi}{\partial x_\tau} \qquad (25)$$

es un tensor covariante de segundo rango. Por lo tanto, hemos llegado a este resultado: a partir del tensor covariante de primer rango

$$A_\mu = \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}$$

podemos formar, por diferenciación, un tensor covariante de segundo rango

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \{\mu\nu, \tau\} A_\tau. \qquad (26)$$

Llamamos al tensor $A_{\mu\nu}$ la «extensión» (derivada covariante) del tensor A_μ. En primer lugar podemos demostrar inmediatamente que la operación conduce a un tensor, incluso si el vector A_μ no puede representarse como un gradiente. Para verlo, observamos en primer lugar que

$$\psi = \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}$$

es un vector covariante, si ψ y ϕ son escalares. La suma de cuatro de estos términos

$$S_\mu = \psi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_\mu} + . + . + \psi^{(4)} \frac{\partial \phi^{(4)}}{\partial x_\mu}$$

es también un vector covariante, si $\psi^{(1)}$, $\phi^{(1)}$.... $\psi^{(4)}$, $\phi^{(4)}$ son escalares. Pero es evidente que cualquier vector covariante puede representarse en la forma S_μ. Pues, si A_μ es un

vector cuyas componentes son cualesquiera funciones dadas de las x_ν, sólo tenemos que poner (en términos del sistema de coordenadas seleccionado)

$$\psi^{(1)} = A_1, \quad \phi^{(1)} = x_1,$$
$$\psi^{(2)} = A_2, \quad \phi^{(2)} = x_2,$$
$$\psi^{(3)} = A_3, \quad \phi^{(3)} = x_3,$$
$$\psi^{(4)} = A_4, \quad \phi^{(4)} = x_4,$$

para asegurar que S_μ será igual a A_μ.

Por consiguiente, para demostrar que $A_{\mu\nu}$ es un tensor si se inserta *cualquier* vector covariante en el segundo miembro de A_μ, sólo tenemos que demostrar que esto es así para el vector S_μ. Pero para este último propósito es suficiente, como nos enseña si damos una ojeada al segundo miembro de (26), ofrecer la demostración para el caso

$$A_\mu = \psi \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}.$$

Ahora el segundo miembro de (25) multiplicado por ψ,

$$\psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \{\mu\nu, \tau\} \psi \frac{\partial \phi}{\partial x_\tau},$$

es un tensor. Análogamente

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu},$$

siendo el producto exterior de dos vectores, es un tensor. Mediante suma, se sigue el carácter tensorial de

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}\right) - \{\mu\nu, \tau\}\left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_\tau}\right).$$

Como mostrará una ojeada a (26), esto completa la demostración para el vector

$$\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu},$$

y en consecuencia, a partir de lo que ya se ha demostrado, para cualquier vector A_μ.

Mediante la extensión del vector, podemos definir fácilmente la «extensión» de un tensor covariante de cualquier rango. Esta operación es una generalización de la extensión de un vector. Nos restringimos al caso de un tensor de segundo rango, puesto que esto basta para dar una idea clara de la ley de formación.

Como ya se ha observado, cualquier tensor covariante de segundo rango puede representarse[1] como suma de tensores del tipo $A_\mu B_\nu$. Por lo tanto, será suficiente con deducir la expresión para la extensión de un tensor de este tipo especial. Por (26) las expresiones

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma} - \{\sigma\mu, \tau\} A_\tau,$$

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\sigma} - \{\sigma\nu, \tau\} B_\tau,$$

son tensores. Por producto exterior de la primera por B_ν, y de la segunda por A_μ, obtenemos en cada caso un tensor de tercer rango. Sumándolos, tenemos el tensor de tercer rango

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \{\sigma\nu, \tau\} A_{\tau\nu} - \{\sigma\nu, \tau\} A_{\mu\tau}, \tag{27}$$

donde hemos puesto $A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$. Puesto que el segundo miembro de (27) es lineal y homogéneo en las $A_{\mu\nu}$ y sus primeras derivadas, esta ley de formación lleva a un tensor, no sólo en el caso de un tensor del tipo $A_\mu B_\nu$ sino también en el caso de una suma de tales tensores, i. e., en el caso de cualquier tensor covariante de segundo rango. Llamamos a $A_{\mu\nu\sigma}$ la extensión del tensor $A_{\mu\nu}$.

Es evidente que (26) y (24) conciernen sólo a casos especiales de extensión (la extensión de los tensores de rango uno y cero respectivamente).

En general, todas las leyes especiales de formación de tensores están incluidas en (27) en combinación con el producto de tensores.

11. Algunos casos de especial importancia

El tensor fundamental. Demostraremos primero algunos lemas que serán útiles en lo sucesivo. Por la regla para la diferenciación de determinantes

$$dg = g^{\mu\nu} g dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} g dg^{\mu\nu}. \tag{28}$$

El último miembro se obtiene del penúltimo si se tiene en cuenta que $g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu$ de modo que $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$, y en consecuencia

$$g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} g dg_{\mu\nu} = 0.$$

1. Mediante producto exterior del vector con componentes arbitrarias $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$ por el vector con componentes 1, 0, 0, 0, producimos un tensor con componentes

A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Mediante la suma de cuatro tensores de este tipo, obtenemos el tensor $A_{\mu\nu}$ con cualesquiera componentes asignadas.

De (28) se sigue que

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma}=\frac{1}{2}\frac{\partial\log(-g)}{\partial x_\sigma}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}=-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}. \tag{29}$$

Además, de $g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma}=\delta^\nu_\mu$, se sigue por diferenciación que

$$\left.\begin{aligned} g_{\mu\sigma}\,dg^{\mu\sigma}&=-g^{\nu\sigma}\,dg_{\mu\sigma}\\ g_{\mu\sigma}\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\lambda}&=-g^{\nu\sigma}\,d\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\lambda}\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

De éstos, por producto mixto por $g^{\sigma\tau}$ y $g_{\nu\lambda}$ respectivamente, y un cambio de notación para los índices, tenemos

$$\left.\begin{aligned} dg^{\mu\nu}&=-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\,dg^{\alpha\beta}\\ \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}&=-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

y

$$\left.\begin{aligned} dg_{\mu\nu}&=-g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\,dg^{\alpha\beta}\\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}&=-g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

La relación (31) admite una transformación, de la que también haremos uso con frecuencia. De (21)

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}=[\alpha\sigma,\beta]+[\beta\sigma,\alpha]. \tag{33}$$

Insertando esto en la segunda fórmula de (31), obtenemos, en vista de (23)

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}=-g^{\mu\tau}\{\tau\sigma,\nu\}-g^{\nu\tau}\{\tau\sigma,\mu\}. \tag{34}$$

Sustituyendo el segundo miembro de (34) en (29) tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma}=\{\mu\sigma,\mu\}. \tag{29a}$$

La «divergencia» de un vector contravariante. Si tomamos el producto interior de (26) por el tensor fundamental contravariante $g^{\mu\nu}$, el segundo miembro, después de una transformación del primer término, toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} = (g^{\mu\nu} A_\mu) - A_\mu \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right) g^{\mu\nu} A_\tau.$$

De acuerdo con (31) y (29), el último término de esta expresión puede escribirse

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\nu}}{\partial x_\nu} A_\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\mu}}{\partial x_\mu} A_\tau + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} g^{\tau\alpha} A_\tau.$$

Puesto que los símbolos de los índices de suma son mudos, los primeros dos términos de esta expresión cancelan el segundo de la expresión inmediatamente anterior. Si entonces escribimos $g^{\mu\nu}A_\mu = A^\nu$, de modo que A^ν, como A_μ, es un vector arbitrario, obtenemos finalmente

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\, A^\nu\right). \tag{35}$$

Este escalar es la divergencia del vector contravariante A^ν.

El «rotacional» de un vector covariante. El segundo término en (26) es simétrico en los índices μ y ν. Por lo tanto $A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}$ es un tensor antisimétrico construido de forma particularmente simple. Obtenemos

$$B_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{36}$$

Extensión antisimétrica de un seis-vector. Aplicando (27) a un tensor antisimétrico de segundo rango $A_{\mu\nu}$, formando además las dos ecuaciones que aparecen mediante permutaciones cíclicas de los índices y sumando estas tres ecuaciones, obtenemos el tensor de tercer rango

$$B_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu\sigma} + A_{\nu\sigma\mu} + A_{\sigma\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}, \tag{37}$$

que es fácil probar que es antisimétrico.

La divergencia de un seis-vector. Tomando el producto mixto de (27) por $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}$, obtenemos también un tensor. El primer término del segundo miembro de (27) puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\mu\nu}) - g^{\mu\alpha}\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma} A_{\mu\nu} - g^{\nu\beta}\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma} A_{\mu\nu}.$$

Si escribimos $A'^{\alpha\beta}_{\sigma}$ para $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} A_{\mu\nu\sigma}$ y $A^{\alpha\beta}$ para $g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\mu\nu}$, y en el primer término transformado sustituimos

$$\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma} \text{ y } \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}$$

por sus valores dados por (34), resulta del segundo miembro de (27) una expresión consistente en siete términos, cuatro de los cuales se cancelan, y queda

$$A_{\sigma}^{\alpha\beta} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}} + \{\sigma\gamma, \alpha\} A^{\gamma\beta} + \{\sigma\gamma, \beta\} A^{\alpha\gamma}. \tag{38}$$

Ésta es la expresión para la extensión de un tensor contravariante de segundo rango, y también pueden formarse expresiones correspondientes para la extensión de tensores contravariantes de rango superior e inferior.

Notemos que de forma análoga también podemos formar la extensión de un tensor mixto:

$$A_{\mu\sigma}^{\alpha} = \frac{\partial A_{\mu}^{\alpha}}{\partial x_{\sigma}} - \{\sigma\mu, \tau\} A_{\tau}^{\alpha} + \{\sigma\tau, \mu\} A_{\mu}^{\tau}. \tag{39}$$

Contrayendo (38) con respecto a los índices β y σ (producto interior por δ_{μ}^{σ}), obtenemos el vector

$$A^{\alpha} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} + \{\beta\gamma, \beta\} A^{\alpha\gamma} + \{\beta\gamma, \alpha\} A^{\gamma\beta}.$$

Debido a la simetría de $\{\beta\gamma, \alpha\}$ con respecto a los índices β y γ, el tercer término del segundo miembro se anula, si $A^{\alpha\beta}$ es, como supondremos, un tensor antisimétrico. El segundo término admite ser transformado de acuerdo con (29a). Así obtenemos

$$A^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\, A^{\alpha\beta}\right)}{\partial x_{\beta}}. \tag{40}$$

Ésta es la expresión para la divergencia de un seis-vector contravariante.

La divergencia de un tensor mixto de segundo rango. Contrayendo (39) con respecto a los índices a y s, y teniendo en consideración (29a), obtenemos

$$\sqrt{-g}\, A_{\mu} = \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\, A_{\mu}^{\sigma}\right)}{\partial x_{\sigma}} + \{\sigma\mu, \tau\} \sqrt{-g}\, A_{\tau}^{\sigma}. \tag{41}$$

Si introducimos en el último término el tensor contravariante $A^{\rho\sigma} = g^{\rho\tau} A_{\tau}^{\sigma}$, toma la forma

$$-[\sigma\mu, \rho] \sqrt{-g}\, A^{\rho\sigma}.$$

Si, además, el tensor $A^{\rho\sigma}$ es simétrico, esto se reduce a

$$-\frac{1}{2} \sqrt{-g} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}} A^{\rho\sigma}.$$

Si en lugar de $A^{\rho\sigma}$ hubiéramos introducido el tensor covariante $A_{\rho\sigma} = g_{\rho\alpha}\, g_{\sigma\beta}\, A^{\alpha\beta}$, que es también simétrico, el último término, en virtud de (31), tomaría la forma

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}\,A_{\rho\sigma}.$$

En el caso de simetría en cuestión, (41) puede por lo tanto ser reemplazado por las dos formas

$$\sqrt{-g}\,A_\mu = \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,A^\sigma_\mu\right)}{\partial x_\sigma} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}\,\sqrt{-g}\,A^{\rho\sigma}, \tag{41a}$$

$$\sqrt{-g}\,A_\mu = \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,A^\sigma_\mu\right)}{\partial x_\sigma} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}\,\sqrt{-g}\,A^{\rho\sigma} \tag{41b}$$

que tenemos que emplear más adelante.

12. El tensor de Riemann-Christoffel

Buscamos ahora el tensor que puede obtenerse a partir del tensor fundamental solamente, por diferenciación. A primera vista, la solución parece obvia. Coloquemos el tensor fundamental de las $g_{\mu\nu}$ en (27) en lugar de cualquier tensor dado $A_{\mu\nu}$, y así tenemos un nuevo tensor, a saber, la extensión del tensor fundamental. Pero fácilmente nos convencemos de que esta extensión es idénticamente nula. Alcanzamos nuestro objetivo, sin embargo, de la siguiente manera. En (27) colocamos

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \{\mu\nu, \rho\}\,A_\rho,$$

i. e. la extensión del cuadrivector A_μ. Entonces (nombrando los índices de forma algo diferente) tenemos el tensor de tercer rango

$$A_{\mu\sigma\tau} = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma\,\partial x_\tau} + \{\mu\sigma, \rho\}\,\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\tau} - \{\mu\tau, \rho\}\,\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} - \{\sigma\tau, \rho\}\,\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho} +$$

$$+\left[-\frac{\partial}{\partial x_\tau}\{\mu\sigma, \rho\} + \{\mu\tau, \alpha\}\{\alpha\sigma, \rho\} + \{\sigma\tau, \alpha\}\{\alpha\mu, \rho\}\right]A_\rho.$$

Esta expresión sugiere formar el tensor $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$. Pues, si lo hacemos, los términos siguientes de la expresión para $A_{\mu\sigma\tau}$ cancelan a los de $A_{\mu\tau\sigma}$, el primero, el cuarto y el miembro correspondiente al último término entre paréntesis cuadrados; puesto que todos estos son simétricos en σ y τ. Lo mismo es válido para la suma del segundo y tercer términos. Así obtenemos

$$A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma} = B^\rho_{\mu\sigma\tau}\,A_\rho, \tag{42}$$

donde

$$B^{\rho}_{\mu\sigma\tau} = \frac{\partial}{\partial x_\tau}\{\mu\sigma, \rho\} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\tau, \rho\} - \{\mu\sigma, \alpha\}\{\alpha\tau, \rho\} + \{\mu\tau, \alpha\}\{\alpha\sigma, \rho\}. \quad (43)$$

La característica esencial del resultado es que en el segundo miembro de (42) las A_ρ aparecen solas, sin sus derivadas. Del carácter tensorial de $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$ junto con el hecho de que A_ρ es un vector arbitrario, se sigue, por el enunciado 7, que $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ es un tensor (el tensor de Riemann-Christoffel).

La importancia matemática de este vector es la siguiente: Si el continuo es de naturaleza tal que existe un sistema de coordenadas con referencia al cual las $g_{\mu\nu}$ son constantes, entonces todas las $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ se anulan. Si escogemos cualquier nuevo sistema de coordenadas en lugar de las originales, las $g_{\mu\nu}$ allí referidas no serán constantes, pero a consecuencia de su carácter tensorial las componentes transformadas de $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ seguirán siendo nulas en el nuevo sistema. Así, la anulación del tensor de Riemann es una condición necesaria para que, por una elección apropiada del sistema de referencia, las $g_{\mu\nu}$ puedan ser constantes. En nuestro problema esto corresponde al caso en el que,[1] con una elección adecuada del sistema de referencia, la teoría de la relatividad especial es válida para una región finita del continuo.

Contrayendo (43) con respecto a los índices τ y ρ obtenemos el tensor covariante de segundo rango

$$G_{\mu\nu} = B^{\rho}_{\mu\nu\rho} = R_{\mu\nu} + S_{\mu\nu},$$

donde

$$\left.\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\{\mu\nu, \alpha\} + \{\mu\alpha, \beta\}\{\nu\beta, \alpha\} \\ S_{\mu\nu} &= \frac{\partial^2 \log\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \{\mu\nu, \alpha\}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Nota sobre la elección de coordenadas. Ya se ha observado en el enunciado 8, en conexión con la ecuación (18a), que la elección de las coordenadas puede hacerse ventajosamente de modo que $\sqrt{-g} = 1$. Una ojeada a las ecuaciones obtenidas en las dos últimas secciones muestra que con tal elección las leyes de formación de tensores experimentan una importante simplificación. Esto se aplica en particular a $G_{\mu\nu}$, el tensor que acabamos de desarrollar, que desempeña un papel fundamental en la teoría a establecer. Pues esta particularización de la elección de coordenadas produce la anulación de $S_{\mu\nu}$, de modo que el tensor $G_{\mu\nu}$ se reduce a $R_{\mu\nu}$.

Debido a esto, en lo sucesivo daré todas las relaciones en la forma simplificada que trae consigo esta particularización de la elección de coordenadas. Será entonces fácil volver a las ecuaciones *generalmente* covariantes si en un caso especial parece deseable.

1. Los matemáticos han demostrado que ésta es también una condición *suficiente*.

C. TEORÍA DEL CAMPO GRAVITATORIO

13. Ecuaciones de movimiento de un punto material en el campo gravitatorio. Expresión para las componentes de campo de la gravitación

Un cuerpo libremente movible no sometido a fuerzas externas se mueve, según la teoría de la relatividad especial, uniformemente y en línea recta. Éste es también el caso, según la teoría de la relatividad general, para una parte de un espacio tetradimensional en la que el sistema de coordenadas K_0, puede ser, y lo es, escogido de modo que ellas tienen los valores constantes especiales dados en (4).

Si consideramos precisamente este movimiento desde cualquier sistema de coordenadas escogido K_1, el cuerpo, observado desde K_1, se mueve, según las consideraciones de 2, en un campo gravitatorio. La ley de movimiento con respecto a K_1 resulta sin dificultad de las siguiente consideración. Con respecto a K_0 la ley de movimiento corresponde a una línea recta tetradimensional, i. e. a una línea geodésica. Ahora bien, puesto que la línea geodésica está definida independientemente del sistema de referencia, su ecuación será también la ecuación de movimiento del punto material con respecto a K_1. Si hacemos

$$\Gamma^{\tau}_{\mu\nu} = -\{\mu\nu, \tau\} \tag{45}$$

la ecuación de movimiento del punto con respecto a K_1 se convierte en

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{\partial x_\tau} \frac{dx_\nu}{ds}. \tag{46}$$

Planteamos ahora la hipótesis, que se sugiere inmediatamente, de que este sistema de coordenadas covariante define también el movimiento del punto en el campo gravitatorio en el caso en que no hay ningún sistema de referencia K_0 con respecto al cual la teoría de la relatividad especial es válida en una región finita. Tenemos más justificación para esta hipótesis por cuanto (46) contiene sólo derivadas primeras de las $g_{\mu\nu}$, entre las cuales no subsisten relaciones ni siquiera en el caso especial de la existencia de K_0.[1]

Si las $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$ se anulan, entonces el punto se mueve uniformemente en una línea recta. Por lo tanto, estas cantidades condicionan la desviación del movimiento respecto de la uniformidad. Son las componentes del campo gravitatorio.

14. Las ecuaciones de campo de la gravitación en ausencia de materia

En lo sucesivo hacemos una distinción entre «campo gravitatorio» y «materia» de esta manera: denotamos todo salvo el campo gravitatorio como «materia». Por lo tanto, nuestro uso de la palabra incluye no sólo la materia en el sentido ordinario, sino también el campo electromagnético.

1. La relación $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau} = 0$ sólo subsiste, por el enunciado 12, entre las segundas (y primeras) derivadas.

Nuestra próxima tarea es encontrar las ecuaciones de campo de la gravitación en ausencia de materia. Aquí aplicamos de nuevo el método empleado en la sección precedente al formular las ecuaciones de movimiento del punto material. Un caso especial en el que las ecuaciones requeridas deben ser satisfechas en cualquier caso es el de la teoría de la relatividad especial, en el que las $g_{\mu\nu}$ tienen ciertos valores constantes. Sea éste el caso en un cierto espacio finito en relación con un sistema de coordenadas definido K_0. Con respecto a este sistema todas las componentes del tensor de Riemann $B^{\rho}_{\mu\nu\tau}$, definido en (43), se anulan. Para el espacio en consideración se anulan entonces también en cualquier otro sistema de coordenadas.

Así pues, las ecuaciones requeridas del campo gravitatorio libre de materia deben ser satisfechas en cualquier caso si todas las $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ se anulan. Pero esta condición va demasiado lejos. En efecto, es evidente que, e. g., el campo gravitatorio generado por un punto material en su entorno no puede ciertamente ser «eliminado» por ninguna elección del sistema de coordenadas, i. e. no puede transformarse en el caso de $g_{\mu\nu}$ constante.

Esto nos impulsa a exigir para el campo gravitatorio libre de energía que el tensor simétrico $G_{\mu\nu}$, derivado del tensor $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$, se anulará. Así, obtenemos diez ecuaciones para las diez cantidades $g_{\mu\nu}$, que se satisfacen en el caso especial de la anulación de todas la $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$. Con la elección que hemos hecho de un sistema de coordenadas, y teniendo en cuenta (44), las ecuaciones para el campo libre de materia son

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\,\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = 0 \\ &\sqrt{-g} = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Debe señalarse que existe sólo un mínimo de arbitrariedad en la elección de estas ecuaciones. Pues aparte de $G_{\mu\nu}$ no hay ningún tensor de segundo rango que esté formado a partir de las $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas, no contenga derivaciones más altas que la segunda y sea lineal en dichas derivadas.[1]

Estas ecuaciones, que proceden, por el método de las puras matemáticas, del requisito de la teoría de la relatividad general, nos dan, en combinación con las ecuaciones de movimiento (46), en primera aproximación la ley de atracción de Newton, y en segunda aproximación la explicación del movimiento del perihelio del planeta Mercurio descubierto por Leverrier (tal como queda una vez que se han hecho correcciones para la perturbación). En mi opinión, estos hechos deben tomarse como una prueba convincente de la corrección de la teoría.

15. La función hamiltoniana para el campo gravitatorio. Leyes del momento y la energía

Para demostrar que las ecuaciones de campo corresponden a las leyes del momento y la energía, es más conveniente escribirlas en la siguiente forma hamiltoniana:

1. Propiamente hablando, esto sólo puede afirmarse del tensor.

$$G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}\, g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}$$

donde λ es constante. Si, sin embargo, hacemos este tensor = 0, volvemos a las ecuaciones $G_{\mu\nu} = 0$.

$$\delta\left\{\int H\,dt\right\}=0.$$
$$H = g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}$$
$$\sqrt{-g} = 1 \qquad (47a)$$

donde, en la frontera de la región de integración tetradimensional finita que tenemos a la vista, las variaciones se anulan.

Primero tenemos que demostrar que la forma (47a) es equivalente a las ecuaciones (47). Para este fin consideramos H como una función de las $g^{\mu\nu}$ y las $g^{\mu\nu}_{\rho}$ $(= \delta g^{\mu\nu} / \delta x_{\sigma})$

Entonces, en primer lugar

$$\delta H = \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu} + 2\,g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} =$$
$$= \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu} + 2\,\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right).$$

Pero

$$\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right) = -\frac{1}{2}\,\delta\left[g^{\mu\nu}g^{\beta\nu}\left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_{\lambda}}\right)\right].$$

Los términos que aparecen de los dos últimos términos entre paréntesis redondos son de signo diferente, y resultan uno de otro (puesto que la denominación de los índices de suma carece de importancia) a través del intercambio de los índices μ y β. Se cancelan mutuamente en la expresión para δH, porque están multiplicados por la cantidad $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$ que es simétrica respecto a los índices μ y β. Así pues, sólo queda por considerar el primer término entre paréntesis redondos, de modo que, teniendo en cuenta (31), obtenemos

$$\delta H = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta g^{\mu\beta}_{\alpha}.$$

Así pues

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} &= -\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\\ \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}} &= -\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

Realizando la variación en (47a), obtenemos en primer lugar

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = 0, \qquad (47b)$$

que, debido a (48), coincide con (47), como había que demostrar.

Si multiplicamos (47b) por $g^{\mu\nu}_{\sigma}$, entonces, puesto que,

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}{\partial x_{\sigma}}$$

y, en consecuencia,

$$g_\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right)=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g_\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\frac{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha},$$

obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g_\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_\sigma}=0$$

o[1]

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial t_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha}&=0\\ -2\kappa t_\sigma^\alpha&=g_\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}-\delta_\sigma^\alpha \mathrm{H}\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

donde, debido a (48), la segunda ecuación de (47), y (34)

$$\kappa t_\sigma^\alpha=\frac{1}{2}\,\delta_\sigma^\alpha g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\lambda\Gamma_{\nu\lambda}^\beta-g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\Gamma_{\nu\sigma}^\beta. \tag{50}$$

Hay que notar que t_σ^α no es un tensor; por otra parte (49) se aplica a todos los sistemas de coordenadas para los que $\sqrt{-g}=1$. Esta ecuación expresa la ley de conservación del momento y de la energía para el campo gravitatorio. Realmente la integración de esta ecuación sobre un volumen tridimensional V da las cuatro ecuaciones

$$\frac{d}{dx_4}\int t_\sigma^4\,d\mathrm{V}=\int\left(lt_\sigma^1+mt_\sigma^2+nt_\sigma^3\right)d\mathrm{S}, \tag{49a}$$

donde *l, m, n* denotan los cosenos directores de la dirección de la normal interior en el elemento *d*S de la superficie frontera (en el sentido de la geometría euclidiana). Reconocemos en esto la expresión de las leyes de conservación en su forma habitual. A las cantidades t_σ^α las llamamos las «componentes de energía» del campo gravitatorio.

Ahora daré las ecuaciones (47) en una tercera forma, que es particularmente útil para una vívida comprensión de nuestro tema. Multiplicando las ecuaciones de campo (47) por $g^{\nu\sigma}$, éstas se obtienen en la forma «mixta». Notemos que

$$g^{\nu\sigma}\frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\right)-\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha,$$

cuya magnitud, debido a (34), es igual a

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha\right)-g^{\nu\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma\Gamma_{\mu\nu}^\alpha-g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^\nu\Gamma_{\mu\nu}^\alpha,$$

1. La razón para la introducción del factor -2κ se hará evidente más adelante.

o (con símbolos diferentes para los índices de suma)

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\right) - g^{\lambda\delta}\Gamma^\sigma_{\gamma\beta}\Gamma^\beta_{\delta\mu} - g^{\nu\sigma}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.$$

El tercer término de esta expresión se cancela con el que aparece del segundo término de las ecuaciones de campo (47); utilizando la relación (50), el segundo término puede escribirse

$$\kappa\left(t^\sigma_\mu - \frac{1}{2}\,\delta^\sigma_\mu\, t\right)$$

donde $t = t^\alpha_\alpha$. Así pues, en lugar de las ecuaciones (47) obtenemos

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\right) &= -\kappa\left(t^\sigma_\mu - \delta^\sigma_\mu t\right)\\ \sqrt{-g} &= 1\end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

16. La forma general de las ecuaciones de campo de la gravitación

Las ecuaciones de campo para el espacio libre de materia en 15 deben compararse con la ecuación de campo

$$\nabla^2\phi = 0$$

de la teoría de Newton. Exigimos que la ecuación correspondiente a la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi\lambda\rho,$$

donde ρ denota la densidad de materia.

La teoría de la relatividad especial ha llevado a la conclusión de que la masa inerte no es ni más ni menos que energía, que encuentra su completa expresión matemática en un tensor simétrico de segundo rango, el tensor-energía. Así, en la teoría de la relatividad general debemos introducir un correspondiente tensor-energía de materia T^α_σ, que, como las componentes de energía t^α_σ [ecuaciones (49) y (50)] del campo gravitatorio, tendrán carácter mixto, pero pertenecerán a un tensor covariante simétrico.[1]

El sistema de ecuaciones (51) muestra cómo este tensor-energía (correspondiente a la densidad ρ en la ecuación de Poisson) debe introducirse en las ecuaciones de campo de la gravitación. Pues si consideramos un sistema completo (e. g. el sistema solar), la masa total del sistema, y por lo tanto también su acción gravitatoria total, dependerá de la energía total del sistema, y por lo tanto de la energía ponderable junto con la energía

1. $g_{\sigma\tau}T^\tau_\mu = T_{\sigma\tau}$, y $g_{\sigma\beta}T^\mu_\sigma = T^{\sigma\beta}$ deben ser tensores simétricos.

gravitatoria. Esto admitirá ser expresado introduciendo en (51), en lugar de las componentes de energía del campo gravitatorio solo, las sumas $t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma$ de las componentes de energía de materia y de campo gravitatorio. Así, en lugar de (51) obtenemos la ecuación tensorial

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\,\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\right) = -\kappa\left[\left(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma\right) - \frac{1}{2}\,\delta_\mu^\sigma\left(t+T\right)\right] \\ &\sqrt{-g} = 1 \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

donde hemos hecho $T = T_\mu^\mu$ (escalar de Laue). Éstas son las requeridas ecuaciones generales de campo de gravitación en forma mixta. Trabajando hacia atrás a partir de ellas, tenemos en lugar de (47)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\mu\alpha} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,T\right), \\ &\sqrt{-g} = 1 \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Hay que admitir que esta introducción del tensor-energía de materia no está justificada solamente por el postulado de relatividad. Por esta razón la hemos deducido aquí del requisito de que la energía del campo gravitatorio actuará gravitatoriamente de la misma manera que cualquier otro tipo de energía. Pero la razón más fuerte para la elección de estas ecuaciones reside en su consecuencia: que las ecuaciones de conservación del momento y la energía, correspondientes exactamente a las ecuaciones (49) y (49a), son válidas para las componentes de la energía total. Esto se demostrará en 17.

17. Las leyes de conservación en el caso general

La ecuación (52) puede transformarse fácilmente de modo que el segundo termino del segundo miembro se anule. Contraemos (52) con respecto a los índices μ y σ, y después de multiplicar la ecuación resultante por $\frac{1}{2}\,\delta_\mu^\sigma$, la restamos de (52). Esto da

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\,\Gamma^\alpha_{\mu\beta} - \frac{1}{2}\,\delta_\mu^\sigma\,g^{\lambda\beta}\,\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\right) = -\kappa\left(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma\right). \tag{52a}$$

Sobre esta ecuación realizamos la operación $\delta / \delta x_\sigma$. Tenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\,\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\sigma}\left[g^{\sigma\beta}\,g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\lambda}\right)\right].$$

El primero y el tercer término de los paréntesis redondos producen contribuciones que se cancelan mutuamente, como puede verse intercambiando, en la contribución del tercer término, los índices de suma α y σ por una parte, y β y λ por otra. El segundo término puede remodelarse por (31), de modo que tenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(g^{\alpha\beta}\,\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu}. \tag{54}$$

El segundo término del primer miembro de (52a) da en primer lugar

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\mu}\left(g^{\lambda\beta}\,\Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta)}\right)$$

o

$$\frac{1}{4}\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\mu}\left[g^{\lambda\beta}\,g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\lambda}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x_\delta}\right)\right].$$

Con la elección de coordenadas que hemos hecho, el término que se deriva del último término entre paréntesis redondos desaparece debido a (29). Los otros dos pueden combinarse, y juntos, por (31), dan

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu},$$

de modo que considerando (54) tenemos la identidad

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\,\Gamma_{\mu\beta}-\frac{1}{2}\,\delta^{\sigma}_{\mu}\,g^{\lambda\beta}\,\Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta}\right)=0 \tag{55}$$

De (55) y (52a), se sigue que

$$\frac{\partial\left(t^{\sigma}_{\mu}+\mathrm{T}^{\sigma}_{\mu}\right)}{\partial x_\sigma}=0. \tag{56}$$

Así pues, resulta de nuestras ecuaciones de campo de gravitación que se satisfacen las leyes de conservación de momento y energía. Esto puede verse más fácilmente a partir de la consideración que lleva a la ecuación (49a); salvo que aquí, en lugar de las componentes de energía t^{σ} del campo gravitatorio, tenemos que introducir la totalidad de las componentes de energía de materia y campo gravitatorio.

18. Las leyes de momento y energía para materia, como consecuencia de las ecuaciones de campo

Multiplicando (53) por $dg^{\mu\nu}/dx_\sigma$ obtenemos, por el método adoptado en 15, a la vista de la anulación de

$$g_{\mu\nu}\,\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

la ecuación

$$-\frac{\partial t_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu}=0,$$

o, en vista de (56),

$$\frac{\partial T_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu}=0. \tag{57}$$

La comparación con (41b) muestra que, con la elección del sistema de coordenadas que hemos hecho, esta ecuación afirma ni más ni menos que la anulación de la divergencia del tensor-energía material. Físicamente, la aparición del segundo término en el primer miembro muestra que las leyes de conservación de momento y energía no se aplican en sentido estricto para la materia solamente, o que se aplican sólo cuando las $g^{\mu\nu}$ son constantes, i. e. cuando se anulan las intensidades de campo de gravitación. Este segundo término es una expresión para el momento, y para la energía, transferidos por unidad de volumen y unidad de tiempo desde el campo gravitatorio a la materia. Esto se manifiesta aún más claramente reescribiendo (57) en el sentido de (41) como

$$\frac{\partial T_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha}=\Gamma_{\alpha\sigma}^\beta T_\beta^\alpha. \tag{57a}$$

El miembro derecho expresa el efecto energético del campo gravitatorio sobre la materia.

Así pues, las ecuaciones de campo de gravitación contienen cuatro condiciones que gobiernan el curso de los fenómenos materiales. Dan por completo las ecuaciones de los fenómenos materiales, si las últimas pueden caracterizarse por cuatro ecuaciones diferenciales mutuamente independientes.[1]

D. FENÓMENOS MATERIALES

Las herramientas matemáticas desarrolladas en la parte B nos permiten generalizar inmediatamente las leyes físicas de la materia (hidrodinámica, electrodinámica de Maxwell), tal como están formuladas en la teoría de la relatividad especial, de modo que encajen en la teoría de la relatividad general. Cuando se hace así, el principio de relatividad general no nos ofrece una limitación adicional de posibilidades; pero nos familiariza con la influencia del campo gravitatorio sobre todos los procesos, sin que tengamos que introducir ninguna hipótesis nueva.

De aquí resulta que no es necesario introducir hipótesis definidas respecto a la naturaleza física de la materia (en el sentido más restringido). En particular sigue siendo una cuestión abierta si la teoría del campo electromagnético en conjunción con la del campo gravitatorio proporciona o no una base suficiente para la teoría de la materia. El

1. Sobre esta cuestión, véase H. Hilbert, *Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse*, 1915, p. 3.

postulado de relatividad general es incapaz en principio de decirnos nada sobre ello. Debe quedar por ver, durante la elaboración de la teoría, si la teoría electromagnética y la doctrina de la gravitación en colaboración pueden realizar lo que la primera es incapaz de hacer por sí sola.

19. Ecuaciones de Euler para un fluido adiabático sin fricción

Sean p y ρ dos escalares, al primero de los cuales llamamos «presión» y al segundo «densidad» de un fluido; y haya una ecuación que los relaciona. Sea el tensor simétrico contravariante

$$T^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}p + \rho \frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} \tag{58}$$

el tensor-energía contravariante del fluido. A él pertenece el tensor covariante

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}p + g_{\mu\alpha}g_{\mu\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}\rho, \tag{58a}$$

así como el tensor mixto[1]

$$T^\alpha_\sigma = -\delta^\alpha_\sigma p + g_{\sigma\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}\rho. \tag{58b}$$

Insertando el segundo miembro de (58b) en (57a) obtenemos las ecuaciones hidrodinámicas eulerianas de la teoría de la relatividad general. Éstas dan, en teoría, una solución completa al problema de movimiento, puesto que las cuatro ecuaciones (57a), junto con la ecuación dada entre p y ρ, y la ecuación

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 1,$$

son suficientes, estando dadas las $g_{\alpha\beta}$, para definir las seis incógnitas

$$p,\ \rho,\ \frac{dx_\alpha}{ds},\ \frac{dx_2}{ds},\ \frac{dx_3}{ds},\ \frac{dx_4}{ds}.$$

Si se desconocen también las $g_{\mu\nu}$, intervienen las ecuaciones (53). Hay once ecuaciones para definir las diez funciones $g_{\mu\nu}$, de modo que dichas funciones aparecen sobredeterminadas. Debemos recordar, sin embargo, que las ecuaciones (57a) ya están contenidas en las ecuaciones (53), de modo que las últimas representan sólo siete ecuaciones independientes. Hay una buena razón para esta falta de determinación, en cuan-

1. Para un observador que utiliza un sistema de referencia en el sentido de la teoría de la relatividad especial para una región infinitamente pequeña, y que se mueve con éste, la densidad de energía T^4_4 es igual a $\rho - p$. Esto da la definición de ρ. Así pues, ρ no es constante para un fluido incompresible.

to que la amplia libertad de elección de coordenadas hace que el problema quede matemáticamente indeterminado en tal grado que tres de las funciones del espacio pueden ser escogidas a voluntad.[1]

20. Ecuaciones del campo electromagnético de Maxwell para el espacio libre

Sean ϕ_ν las componentes de un vector covariante: el vector potencial electromagnético. A partir de ellas formamos, de acuerdo con (36) las componentes $F_{\rho\sigma}$ del seis-vector covariante del campo electromagnético, de acuerdo con el sistema de ecuaciones

$$F_{\rho\sigma} = \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \phi_\sigma}{\partial x_\rho}. \tag{59}$$

Se sigue de (59) que el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma} = 0 \tag{60}$$

es satisfecho, siendo su miembro izquierdo, por (37), un tensor antisimétrico de tercer rango. El sistema (60) contiene así esencialmente cuatro ecuaciones que se escriben como sigue

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial F_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_4} &= 0 \\ \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{60a}$$

Este sistema corresponde al segundo sistema de ecuaciones de Maxwell. Reconocemos esto inmediatamente haciendo

$$\left.\begin{aligned} F_{23} = H_x, \quad F_{14} = E_x \\ F_{31} = H_y, \quad F_{24} = E_y \\ F_{12} = H_z, \quad F_{34} = E_z \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

1. Sobre el abandono de la elección de coordenadas con $g = -1$, quedan cuatro funciones del espacio con libertad de elección, correspondientes a las cuatro funciones arbitrarias a nuestra disposición en la elección de coordenadas.

Entonces, en lugar de (60a) podemos poner, en la notación usual del análisis vectorial tridimensional

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} &= \operatorname{curl} \mathrm{E} \\ \operatorname{div} \mathrm{H} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{60b}$$

Obtenemos el primer sistema de Maxwell generalizando la forma dada por Minkowski. Introducimos el seis-vector contravariante asociado con $F^{\alpha\beta}$

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}\, F_{\alpha\beta}, \tag{62}$$

y también el vector contravariante J^{μ} de la densidad de corriente eléctrica. Entonces, teniendo en cuenta (40), las siguientes ecuaciones serán invariantes para cualquier sustitución cuyo invariante sea la unidad (en acuerdo con las coordenadas escogidas):

$$\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} F_{\mu\nu} = J^{\mu}. \tag{63}$$

Sean

$$\left.\begin{aligned} F^{23} = H'_{x}, \quad F^{14} = E'_{x} \\ F^{31} = H'_{y}, \quad F^{24} = -E'_{y} \\ F^{12} = H'_{z}, \quad F^{34} = -E'_{z} \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

cuyas cantidades son iguales a las cantidades $H_x \ldots E^z$ en el caso especial de la teoría de la relatividad restringida; si además

$$J^1 - j_x,\ J^2 = j_y,\ J^3 = j_1,\ J^4 = \rho,$$

obtenemos en lugar de (63)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{E}'}{\partial t} + j &= \operatorname{curl} \mathrm{H}' \\ \operatorname{div} \mathrm{E}' &= \rho \end{aligned}\right\} \tag{63a}$$

Las ecuaciones (60), (62) y (63) constituyen así la generalización de las ecuaciones de campo de Maxwell para el espacio libre, con el convenio que hemos establecido con respecto a la elección de coordenadas.

Las componentes-de-energía del campo electromagnético.– Formemos el producto interior

$$K_{\sigma} = F_{\sigma\mu}\, J^{\mu}. \tag{65}$$

Por (61) sus componentes, escritas a la manera tridimensional, son

$$\left.\begin{array}{l} \kappa_1 = \rho E_x + [j \cdot H]_x \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \kappa_4 = -(jE) \end{array}\right\} \tag{65a}$$

κ_σ es un vector covariante cuyas componentes son iguales al momento negativo, o, respectivamente, la energía, que se transfiera desde las masas eléctricas al campo electromagnético por unidad de tiempo y volumen. Si las masas eléctricas son libres, es decir, están bajo la sola influencia del campo electromagnético, el vector covariante κ_σ se anulará.

Para obtener las componentes de energía T_σ^ν del campo electromagnético, sólo tenemos que dar a la ecuación $\kappa_\sigma = 0$ la forma de la ecuación (57). A partir de (63) y (65) tenemos en primer lugar

$$\kappa_\sigma = F_{\sigma\mu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(F_{\sigma\mu} F^{\mu\nu}\right) - F^{\mu\rho} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}.$$

El segundo término del segundo miembro, en virtud de (60), permite la transformación

$$F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\sigma}.$$

cuya última expresión puede, por razones de simetría, escribirse también en la forma

$$-\frac{1}{4}\left[g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial F_{\mu\beta}}{\partial x_\sigma} F_{\mu\nu}\right].$$

Pero para esto podemos hacer

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}\right) + -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\right).$$

El primero de estos términos se escribe de forma más breve

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right);$$

el segundo, una vez llevada a cabo la diferenciación, y tras alguna simplificación, resulta

$$-\frac{1}{2} F^{\mu\tau} F_{\mu\nu} g^{\nu\rho} \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\sigma}.$$

Juntando los tres términos obtenemos la relación

$$\kappa_\sigma = \frac{\partial T_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} T_\tau^\nu, \tag{66}$$

donde

$$T_\sigma^\nu = -F_{\sigma\alpha} F^{\nu\alpha} + \frac{1}{4} \delta_\sigma^\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

La ecuación (66), si se anula κ_σ, es, debido a (30), equivalente a (57) o (57a) respectivamente. Por consiguiente, las T_σ^ν son las componentes de energía del campo electromagnético. Con la ayuda de (61) y (64) es fácil demostrar que estas componentes de energía del campo electromagnético en el caso de la teoría de la relatividad especial dan las bien conocidas expresiones de Maxwell-Poynting.

Ahora hemos deducido las leyes generales que son satisfechas por el campo gravitatorio y la materia, utilizando de manera consistente un sistema de coordenadas para el que $\sqrt{-g} = 1$. Con ello hemos conseguido una considerable simplificación de fórmulas y cálculos, sin dejar de satisfacer el requisito de covariancia general; pues hemos extraído nuestras ecuaciones de ecuaciones generalmente covariantes particularizando el sistema de coordenadas.

Aún queda la cuestión, no carente de interés formal, de si con una definición correspondientemente generalizada de las componentes de energía del campo gravitatorio y la materia, incluso sin particularizar el sistema de coordenadas, es posible formular leyes de conservación en forma de ecuación (56), y ecuaciones de campo de la gravitación de la misma naturaleza que (52) o (52a), de tal manera que a la izquierda tengamos una divergencia (en el sentido ordinario) y a la derecha la suma de las componentes de energía de materia y gravitación. He encontrado que en ambos casos es realmente así. Pero no creo que la comunicación de mis algo extensas reflexiones sobre este tema merezcan la pena, porque después de todo no nos dan nada que sea materialmente nuevo.

21. La teoría de Newton como primera aproximación

Como ya ha sido mencionado más de una vez, la teoría de la relatividad especial como un caso especial de la teoría general se caracteriza porque las $g_{\mu\nu}$ tienen los valores constantes (4). Por lo que ya se ha dicho, esto significa despreciar por completo los efectos de la gravitación. Llegamos a una aproximación más cercana a la realidad considerando el caso en donde las $g_{\mu\nu}$ difieren de los valores de (4) en cantidades que son pequeñas comparadas con 1, y despreciando pequeñas cantidades de segundo orden y superiores. (Primer punto de vista de aproximación).

Hay que suponer, además, que en el territorio espacio-temporal en consideración las $g_{\mu\nu}$ en el infinito espacial, con una elección de coordenadas adecuada, tienden hacia los valores (4); i. e. estamos considerando campos gravitatorios que pueden considerarse generados exclusivamente por materia en la región finita.

Podría pensarse que estas aproximaciones deben llevarnos a la teoría de Newton. Pero para este fin aún necesitamos aproximar las ecuaciones fundamentales desde un segundo punto de vista. Prestemos atención al movimiento de un punto material de acuerdo con las ecuaciones (16). En el caso de la teoría de la relatividad especial las componentes

$$\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}$$

pueden tomar cualquier valor. Esto significa que puede aparecer cualquier velocidad

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2}$$

que sea menor que la velocidad de la luz *in vacuo*. Si nos restringimos al caso que casi exclusivamente se ofrece a nuestra experiencia, de que v sea pequeña comparada con la velocidad de la luz, esto denota que las componentes

$$\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}$$

deben ser tratadas como cantidades pequeñas, mientras que dx_4/ds, a segundo orden de cantidades pequeñas, es igual a 1. (Segundo punto de vista de aproximación).

Notemos ahora que desde el primer punto de vista de aproximación las magnitudes $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$ son todas pequeñas magnitudes de al menos primer orden. Una ojeada a (46) muestra así que en esta ecuación, desde el segundo punto de vista de aproximación, tenemos que considerar solamente términos para los que $\mu = \nu = 4$. Restringiéndonos a términos de orden más bajo obtenemos primero en lugar de (46) las ecuaciones

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = \Gamma^{\tau}_{44},$$

donde hemos hecho $ds = dz_4 = dt$; o con restricción a términos que desde el primer punto de vista de aproximación son de primer orden

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = [44, \tau] \{\tau = 1, 2, 3)$$

$$\frac{d^2x_4}{dt^2} = -[44. 4].$$

Si además suponemos que el campo gravitatorio es un campo cuasi estático, limitándonos al caso en donde el movimiento de la materia que genera el campo gravitatorio es lento (en comparación con la velocidad de propagación de la luz), podemos despreciar en el segundo miembro las derivadas con respecto al tiempo en comparación con las derivadas con respecto a las coordenadas espaciales, de modo que tenemos

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\tau} \quad (\tau = 1, 2, 3). \tag{67}$$

Ésta es la ecuación de movimiento del punto material según la teoría de Newton, en la que $\frac{1}{2}g_{44}$ desempeña el papel del potencial gravitatorio. Lo que es notable en este resultado es que la componente g_{44} del tensor fundamental define por sí sola, en primera aproximación el movimiento del punto material.

Volvamos ahora a las ecuaciones de campo (53). Aquí debemos que tener en cuenta que el tensor-energía de «materia» está definido casi exclusivamente por la densidad

de materia en el sentido más estrecho, i. e. por el segundo término del segundo miembro de (58) [o, respectivamente (58a) o (58b)]. Si formamos la aproximación en cuestión, todas las componentes se anulan con la única excepción de $T_{44} = \rho = T$. En el primer miembro de (53) el segundo término es una cantidad pequeña de segundo orden; el primero da, en la aproximación en cuestión,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[\mu\nu, 1] + \frac{\partial}{\partial x_2}[\mu\nu, 2] + \frac{\partial}{\partial x_3}[\mu\nu, 3] + \frac{\partial}{\partial x_4}[\mu\nu, 4].$$

Para $\mu = \nu = 4$, esto da, con la omisión de los términos derivados con respecto al tiempo

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2}\right) = -\frac{1}{2}\nabla^2 g_{44}.$$

La última de las ecuaciones (53) da así

$$\nabla^2 g_{44} = \kappa\rho. \tag{68}$$

Las ecuaciones (67) y (68) juntas son equivalentes a la ley de gravitación de Newton. Por (67) y (68) la expresión para el potencial gravitatorio se convierte en

$$-\frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\rho d\tau}{r}, \tag{68a}$$

mientras que la teoría de Newton, con la unidad de tiempo que hemos escogido, da

$$-\frac{K}{r^2}\int\frac{\rho d\tau}{r},$$

en donde K denota la constante $6{,}7 \times 10^{-8}$, normalmente llamada constante de gravitación. Por comparación obtenemos

$$\kappa = \frac{8\pi K}{c^2} = 1 \cdot 87 \times 10^{-27}. \tag{69}$$

22. Comportamiento de reglas y relojes en el campo gravitatorio estático. Curvatura de rayos luminosos. Movimiento del perihelio de una órbita planetaria

Para llegar a la teoría de Newton como una primera aproximación tuvimos que calcular solamente una componente, g_{44}, de las diez $g_{\mu\nu}$ del campo gravitatorio, puesto que sólo esta componente entra en la primera aproximación, (67), de la ecuación para el movimiento del punto material en el campo gravitatorio. A partir de esto, sin embargo, es ya evidente que otras componentes de las $g_{\mu\nu}$ deben diferir de los valores dados en (4) en pequeñas cantidades de primer orden. Esto es exigido por la condición $g = -1$.

Para una masa puntual productora de campo en el origen de coordenadas, obtenemos, en primera aproximación, la solución con simetría radial

$$\left.\begin{aligned} g_{\rho\sigma} &= -\delta_{\rho\sigma} - \alpha \frac{x_\rho x_\sigma}{r^3} \quad (\rho, \sigma = 1, 2, 3) \\ g_{\rho 4} &= -\delta_{4\rho} = 0 \qquad (\rho = 1, 2, 3) \\ g_{44} &= 1 - \frac{\alpha}{r} \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

donde $\delta\rho\sigma$ es 1 ó 0, respectivamente, según sea $\rho = \sigma$ ó $\rho \neq \sigma$, y r es la cantidad $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ debido a (68a)

$$\alpha = \frac{\kappa M}{4\pi}, \tag{70a}$$

si M denota la masa productora de campo. Es fácil verificar que las ecuaciones de campo (fuera de la masa) resultan satisfechas en primer orden de pequeñas cantidades.

Examinemos ahora la influencia ejercida por el campo de la masa M sobre las propiedades métricas del espacio. La relación

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu .$$

es válida siempre entre las longitudes «localmente» medidas (4) y tiempos ds por una parte, y las diferencias de coordenadas dx_ν por otra.

Para una unidad de medida de longitud tendida «paralela» al eje de las x, por ejemplo, tendríamos que hacer $ds^2 = -1$; $dx_2 = dx_3 = dx_4 = 0$. Por consiguiente, $-1 = g_{11} dx_1^2$. Si además la unidad de medida reposa sobre el eje de las x, la primera de las ecuaciones (70) da

$$g_{11} = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right).$$

De estas dos relaciones se sigue que, correcta hasta primer orden de pequeñas cantidades,

$$dx = 1 - \frac{\alpha}{2r}. \tag{71}$$

La regla de medir unidad aparece así un poco acortada con relación al sistema de coordenadas por la presencia del campo gravitatorio, si la regla está tendida a lo largo de un radio.

De manera análoga obtenemos la longitud de coordenadas en dirección tangencial si, por ejemplo, hacemos

$$ds^2 = -1;\ dx_1 = dx_3 = dx_4 = 0;\ x_1 = r;\ x_2 = x_3 = 0.$$

El resultado es

$$-1 = g_{22}\, dx_2^2 = -dx_2^2. \tag{71a}$$

Con la posición tangencial, por lo tanto, el campo gravitatorio del punto de masa no tiene influencia sobre la longitud de la regla.

Así pues, la geometría euclidiana no es válida ni siquiera en primera aproximación en el campo gravitatorio, si queremos tomar una y la misma regla independientemente de su lugar y orientación como una realización del mismo intervalo; aunque, por supuesto, una ojeada a (70a) y (69) muestra que las desviaciones que se pueden esperar son demasiado pequeñas para que sea posible advertirlas en medidas de la superficie de la Tierra.

Examinemos también la marcha de un reloj unidad, que está preparado para estar en reposo en un campo gravitatorio estático. Aquí tenemos para un período de reloj $ds = 1$; $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$. Por consiguiente

$$-1 = g_{44}\, dx_4^2;$$

$$dx_4 = \frac{1}{\sqrt{-g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + (g_{44} - 1))}} = 1 - \frac{1}{2}\,(g_{44} - 1)$$

o

$$dx_4 = 1 + \frac{\kappa}{8\pi} \int \rho \frac{d\tau}{r}\,. \tag{72}$$

Así pues, el reloj marcha más despacio si se encuentra en la vecindad de masas ponderables. De esto se sigue que las líneas espectrales de la luz que nos llega desde la superficie de grandes estrellas debe aparecer desplazada hacia el extremo rojo del espectro.[1]

Examinemos ahora el curso de los rayos luminosos en el campo gravitatorio estático. Por la teoría de la relatividad especial la velocidad de la luz viene dada por la ecuación

$$-dx_1^2 - dx_2 - dx_3^2 - dx_4^2 = 0$$

y, por lo tanto, por la teoría de la relatividad general viene dada por la ecuación

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = 0. \tag{73}$$

Si la dirección, i. e. la razón $dx_1 : dx_2 : dx_3$ es dada, la ecuación (73) da las cantidades

$$\frac{dx_1}{dx_4}, \frac{dx_2}{dx_4}, \frac{dx_3}{dx_4}$$

y en consecuencia la velocidad

$$\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2} = \gamma$$

1. Según E. Freundlich, observaciones espectroscópicas de ciertos tipos de estrellas fijas indican la existencia de un efecto de este tipo, pero todavía no se ha realizado un test crucial de esta consecuencia.

definida en el sentido de la geometría euclidiana. Reconocemos fácilmente que el curso de los rayos luminosos debe estar curvado con respecto al sistema de coordenadas, si las $g_{\mu\nu}$ no son constantes. Si n es una dirección perpendicular a la propagación de la luz, el principio de Huyghens muestra que el rayo luminoso, imaginado en el plano (γ, n), tiene la curvatura $-\delta\gamma/\delta n$.

Examinemos la curvatura sufrida por un rayo luminoso que pasa frente a una masa M a una distancia Δ. Si escogemos el sistema de coordenadas de acuerdo con el diagrama que se acompaña, la curvatura total del rayo (calculada positivamente si es cóncava hacia el origen) viene dada con suficiente aproximación por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}\, dx_2,$$

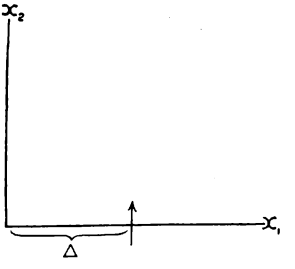
mientras que (73) y (70) dan

$$\gamma = \sqrt{\left(-\frac{g_{44}}{g_{22}}\right)} = 1 + \frac{a}{2r}\left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right).$$

Haciendo el cálculo, esto da

$$B = \frac{2\alpha}{\Delta} = \frac{\kappa M}{2\pi\Delta}. \tag{74}$$

Según esto, un rayo luminoso que pasa cerca del Sol sufre una desviación de 1.7"; y un rayo que pasa cerca del planeta Júpiter sufre una desviación de aproximadamente 0.02".



Si calculamos el campo gravitatorio en un grado de aproximación superior, y con una precisión correspondiente el movimiento orbital de un punto material de masa relativa infinitamente pequeña, encontramos una desviación del siguiente tipo de las leyes de Kepler-Newton del movimiento planetario. La elipse orbital de un planeta experimenta una lenta rotación en la dirección de movimiento, de valor

$$\varepsilon = 24\,\pi^3 \frac{\alpha^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)} \tag{75}$$

por revolución. En esta fórmula a denota el semieje mayor, c la velocidad de la luz en la medida normal, e la excentricidad, T el tiempo de revolución en segundos.[1]

1. Para el cálculo me remito a los artículos originales: A. Einstein, *Sitzungsber. D. Preuss. Akad. Wiss.*, 1915, p.831, y K. Schwarzschild, *ibid.*, 1916, p. 189.

El cálculo da para el planeta Mercurio una rotación de la órbita de 43" por siglo, que corresponde exactamente a la observación astronómica (Leverrier); pues los astrónomos han descubierto en el movimiento del perihelio de este planeta, una vez consideradas las perturbaciones debidas a otros planetas, un residuo inexplicable de esta magnitud.

EL PRINCIPIO DE HAMILTON Y LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD GENERAL*

La teoría de la relatividad general ha sido recientemente expuesta en una forma particularmente clara por H. A. Lorentz y D. Hilbert,[1] quienes han deducido sus ecuaciones a partir de un único principio variacional. Lo mismo se hará en el presente artículo. Pero mi propósito aquí es presentar las conexiones fundamentales de una forma tan clara como sea posible y en términos tan generales como sea permisible desde el punto de vista de la teoría de la relatividad general. En particular, haremos las mínimas hipótesis particularizadoras posibles, en marcado contraste con el tratamiento del tema por parte de Hilbert. Por otra parte, en antítesis con mi más reciente tratamiento del tema, habrá una completa libertad de elección del sistema de coordenadas.

1. El principio variacional y las ecuaciones de campo de la gravitación y la materia

Sea el campo gravitatorio descrito, como es habitual, por el tensor[2] de las $g_{\mu\nu}$ (o las $g^{\mu\nu}$); y sea la materia, incluyendo el campo electromagnético, descrita por cualquier número de funciones espacio-temporales $q_{(\rho)}$. No nos importa cómo puedan estar caracterizadas dichas funciones en la teoría de invariantes. Además, sea $\mathfrak{H}$ una función de las

$$g^{\mu\nu},\ g^{\mu\nu}_{\sigma}\left(=\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right) \text{ y } g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}\left(=\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma\, \partial x_\tau}\right),\ \text{las } q_{(\rho)} \text{ y } q_{(\rho)\alpha}\left(=\frac{\partial q_{(\rho)}}{\partial x_\alpha}\right).$$

El principio variacional

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H} d\tau\right\} = 0 \qquad (1)$$

nos da entonces tantas ecuaciones diferenciales como funciones $g_{\mu\nu}$ y $q_{(\rho)}$ hay que determinar, si las $g^{\mu\nu}$ y $q_{(\rho)}$ se varían independientemente unas de otras, y de tal manera que en los límites de integración las $\delta q_{(\rho)}$, $\delta g^{\mu\nu}$ y $\dfrac{\partial}{dx_\sigma}(\delta g_{\mu\nu})$ se anulan.

* «Hamiltonsches Princip und allgemeine Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akad. Wissenschaften*, 1916.

1. Cuatro artículos de Lorentz en las Publicaciones de la Koninkl. Akad. van Wetensch. Te Amsterdam, 1915 y 1916; D. Hilbert en *Göttingen Nachr.*, 1915, parte 3.

2. No se hace uso por el momento del carácter tensorial de las $g_{\mu\nu}$.

Supondremos ahora que $\mathfrak{H}$ es lineal en las $g_{\sigma\tau}$, y que los coeficientes de las $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$ dependen sólo de las $g^{\mu\nu}$. Podemos entonces sustituir el principio variacional (1) por otro que es más conveniente para nosotros. En efecto, por una integración parcial apropiada obtenemos

$$\int \mathfrak{H} d\tau = \int \mathfrak{H}^* d\tau + \mathrm{F}, \tag{2}$$

donde F denota una integral sobre la frontera del dominio en cuestión, y $\mathfrak{H}^*$ depende sólo de las $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_{\sigma}$, $q_{(\rho)}$, $q_{(\rho)\alpha}$ y ya no de las $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$. A partir de (2) obtenemos, para variaciones tales como las que nos interesan,

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H} d\tau\right\} = \delta\left\{\int \mathfrak{H}^* d\tau\right\}, \tag{3}$$

de modo que podemos reemplazar nuestro principio variacional (1) por la forma más conveniente

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}^* d\tau\right\} = 0. \tag{1a}$$

Efectuando la variación de las $g^{\mu\nu}$ y las $q_{(\rho)}$ obtenemos, como ecuaciones de campo de la gravitación y materia, las ecuaciones[1]

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\sigma}\right) - \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial q_{(\rho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial q_{(\rho)}} = \tag{5}$$

2. Existencia independiente del campo gravitatorio

Si no formulamos ninguna hipótesis restrictiva respecto a la manera en que $\mathfrak{H}$ depende de las $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_{\sigma}$, $q_{(\rho)}$, $q_{(\rho)\sigma}$, las componentes de energía no pueden dividirse en dos partes, una perteneciente al campo gravitatorio y otra a la materia. Para asegurar esta característica de la teoría, formulamos la siguiente hipótesis

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \mathfrak{M}, \tag{6}$$

donde $\mathfrak{G}$ va a depender sólo de las $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_{\sigma}$, y $\mathfrak{M}$ sólo de las $g^{\mu\nu}$, $q_{(\rho)}$, $q_{(\rho)\alpha}$. Las ecuaciones (4), (4a) toman entonces la forma

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{(\rho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{(\rho)}} = 0. \tag{8}$$

1. Por brevedad, los símbolos de suma se omiten en las fórmulas. Siempre hay que sumar sobre los índices que aparecen dos veces en un término. Así, en (4), por ejemplo, $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial i^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right)$ denota el término $\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right)$.

Aquí $\mathfrak{H}^*$ guarda la misma relación con $\mathfrak{H}$ que $\mathfrak{H}^*$ con $\mathfrak{H}$.

Debe notarse cuidadosamente que las ecuaciones (8) ó (5) tendrían que dar paso a otras, si fuéramos a suponer que $\mathfrak{M}$ o $\mathfrak{H}$ son también independientes de las derivadas de las $q_{(\rho)}$ de orden superior al primero. Análogamente, podría imaginarse que las $q_{(\rho)}$ deberían tomarse no mutuamente independientes, sino conectadas por ecuaciones condicionales. Todo esto no tiene importancia para los desarrollos que siguen, pues están basados solamente en las ecuaciones (7), que se han encontrado variando nuestra integral con respecto a las $g^{\mu\nu}$.

3. Propiedades de las ecuaciones de campo de la gravitación condicionadas por la teoría de invariantes

Introducimos ahora la hipótesis de que

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu \tag{9}$$

es un invariante. Ésta determina el carácter transformacional de las $g_{\mu\nu}$. Respecto al carácter transformacional de la $q_{(\rho)}$, que describen la materia, no planteamos ninguna hipótesis. Por otra parte, sean las funciones $H = \dfrac{\mathfrak{H}}{\sqrt{-g}}$ así como $G = \dfrac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$ y $M = \dfrac{\mathfrak{M}}{\sqrt{-g}}$, invariantes respecto a cualesquiera sustituciones y coordenadas espacio-temporales. A partir de estas hipótesis se sigue la covariancia general de las ecuaciones (7) y (8), deducidas del tensor de curvatura de Riemann; porque no hay ningún otro invariante con las propiedades requeridas para G.[1] Por ello $\mathfrak{H}^*$ está también perfectamente determinado, y en consecuencia también lo está el primer miembro de la ecuación de campo (7).[2]

A partir del postulado de relatividad general se siguen ciertas propiedades de la función $\mathfrak{H}^*$ que deduciremos ahora. Para este fin realizamos una transformación infinitesimal de las coordenadas, haciendo

$$x'_\nu = x_\nu = \Delta x_\nu, \tag{10}$$

donde la Δx_ν son funciones arbitrarias e infinitamente pequeñas de las coordenadas, y x'_ν son las coordenadas, en el nuevo sistema, del punto-universo que tiene las coordenadas x_ν en el sistema original. Igual que para las coordenadas, también para cualquier otra magnitud ψ, es válida una ley de transformación del tipo

$$\psi' + \psi + \Delta\psi,$$

donde $\Delta\psi$ debe ser siempre expresable mediante las Δx_ν. De la propiedad de covariancia de las $g^{\mu\nu}$ deducimos fácilmente para las $g^{\mu\nu}$ y las $g^{\mu\nu}_\sigma$ las leyes de transformación

1. Aquí hay que encontrar la razón por la que el postulado de relatividad general conduce a una teoría muy precisa de la gravitación.

2. Efectuando la integración parcial, obtenemos $\mathfrak{H}^* = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} [\{\mu\alpha, \beta\} \{\nu\beta, \alpha\} - \{\mu\nu, \alpha\} \{\alpha\beta, \beta\}]$.

$$\Delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} \frac{\partial(\Delta x_\nu)}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha} \frac{\partial(\Delta x_\mu)}{\partial x_\alpha} \tag{11}$$

$$\Delta g^{\mu\nu}_\sigma = \frac{\partial(\Delta g^{\mu\nu})}{\partial x_\alpha} - g^{\mu\nu}_\sigma \frac{\partial(\Delta x_\alpha)}{\partial x_\sigma}. \tag{12}$$

Puesto que $\mathfrak{G}^*$ depende solo de las $g^{\mu\nu}$ y $g^{\mu\nu}_\sigma$, es posible, con ayuda de (11) y (12), calcular $\Delta\mathfrak{G}^*$. Obtenemos así la ecuación

$$\sqrt{-g}\Delta\left(\frac{\mathfrak{G}^*}{\sqrt{-g}}\right) = S^\nu_\sigma \frac{\partial(\Delta x_\sigma)}{\partial x_\nu} + 2\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}, \tag{13}$$

donde por brevedad hemos hecho

$$S^\nu_\sigma = 2\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} + 2\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu}_\alpha + \mathfrak{G}^*\delta^\nu_\sigma - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\alpha}_\nu} g^{\mu\alpha}_\sigma. \tag{14}$$

De estas dos ecuaciones sacamos dos inferencias importantes para lo que sigue. Sabemos que $\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$ es un invariante con respecto a cualquier sustitución, pero no sabemos esto de $\frac{\mathfrak{G}^*}{\sqrt{-g}}$. Es fácil demostrar, no obstante, que la última cantidad es un invariante con respecto a cualquier sustitución *lineal* de las coordenadas. De aquí se sigue que el segundo miembro de (13) debe anularse siempre si todas las $\frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{dx_\nu dx_\alpha}$ se anulan. En consecuencia, $\mathfrak{G}^*$ debe satisfacer la identidad

$$S^\nu_\sigma \equiv 0 \tag{15}$$

Si, además, escogemos las Δx_ν de modo que difieran de cero sólo en el interior de un dominio dado, pero se anulan en una proximidad infinitesimal de la frontera, entonces, con la transformación en cuestión, el valor de la integral de contorno que aparece en la ecuación (2) no cambia. Por lo tanto $\Delta F = 0$, y, en consecuencia[1]

$$\Delta\int \mathfrak{G} d\tau = \Delta\int \mathfrak{G}^* d\tau.$$

Pero el primer miembro de la ecuación debe anularse, puesto que $\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$ y $\sqrt{-g}\, d\tau$ son invariantes. En consecuencia, el segundo miembro también se anula. Así pues, teniendo en cuenta (14), (15) y (16), obtenemos, en primer lugar, la ecuación

$$\int \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2(\Delta x_\sigma)}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} d\tau = 0. \tag{16}$$

1. Por la introducción de $\mathfrak{G}$ y $\mathfrak{G}^*$ en lugar de $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{H}^*$.

Transformando esta ecuación mediante dos integraciones parciales, y habiendo considerado la libertad de elección de las Δx_σ, obtenemos la identidad

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha}\right) \equiv 0. \tag{17}$$

Ahora tenemos que extraer conclusiones de las dos identidades (16) y (17) que resultan de la invariancia de $\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$ y, por consiguiente, del postulado de relatividad general.

Primero transformamos las ecuaciones de campo (7) de la gravitación por producto mixto por $g^{\mu\sigma}$. Luego obtenemos (intercambiando los índices σ y ν), como equivalentes de las ecuaciones de campo (7), las ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha}\right) = -(\mathfrak{T}^\nu_\sigma + t^\nu_\sigma). \tag{18}$$

donde hemos hecho

$$\mathfrak{T}^\nu_\sigma = -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} \tag{19}$$

$$t^\nu_\sigma = -\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu}_\alpha + \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{G}^*\delta^\nu_\sigma - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\nu} g^{\mu\alpha}_\sigma\right). \tag{20}$$

La última ecuación para t^ν_μ está justificada por (14) y (15). Diferenciando (18) con respecto a x_ν, y sumando para ν, se sigue, en vista de (17)

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathfrak{T}^\nu_\sigma + t^\nu_\sigma) = 0. \tag{21}$$

La ecuación (21) expresa la conservación de momento y energía. Llamamos $\mathfrak{T}^\nu_\sigma$ a las componentes de energía de la materia, t^ν_σ a las componentes de la energía del campo gravitatorio.

Habiendo considerado (20), se sigue de las ecuaciones de campo (7) de la gravitación, mediante producto por $g^{\mu\nu}_\sigma$ y suma con respecto a μ y ν,

$$\frac{\partial t^\nu_\sigma}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu}_\sigma \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} = 0,$$

o, en vista de (19) y (21)

$$\frac{\partial \mathfrak{T}^\nu_\sigma}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}_\sigma \mathfrak{T}_{\mu\nu} = 0. \tag{22}$$

donde $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ denota las cantidades $g_{\nu\sigma}\mathfrak{T}_{\mu\nu}$. Éstas son cuatro ecuaciones que las componentes de energía de la materia tienen que satisfacer.

Hay que resaltar que las leyes (generalmente covariantes) de conservación (21) y (22) están deducidas a partir de las ecuaciones de campo (7) de la gravitación, en combinación con el postulado de covariancia general (relatividad) *solamente*, sin utilizar las ecuaciones de campo (8) para fenómenos materiales.

CONSIDERACIONES COSMOLÓGICAS SOBRE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD GENERAL*

Es bien sabido que la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi K\rho \qquad (1)$$

en combinación con las ecuaciones de movimiento de un punto material no es por el momento un sustituto perfecto para la teoría de Newton de acción a distancia. Aún hay que tener en cuenta la condición de que en el infinito espacial el potencial ϕ tiende hacia un valor límite fijo. Existe un estados de cosas análogo en la teoría de la gravitación en relatividad general. También aquí debemos suplementar las ecuaciones diferenciales con condiciones límite en el infinito espacial, si realmente vamos a considerar que el universo tiene una extensión espacial infinita.

En mi tratamiento del problema planetario escogí dichas condiciones límite en forma de la siguiente hipótesis: es posible seleccionar un sistema de referencia de modo que en el infinito espacial todos los potenciales gravitatorios $g_{\mu\nu}$ se hagan constantes. Pero no es en absoluto evidente *a priori* que podamos establecer las mismas condiciones límite cuando queremos tomar en consideración porciones más grandes del universo físico. En las páginas siguientes se ofrecerán las reflexiones que, hasta el presente, he hecho sobre esta cuestión de fundamental importancia.

1. La teoría newtoniana

Es bien sabido que la condición límite de Newton del límite constante para ϕ en el infinito espacial lleva a la concepción de que la densidad de materia se hace cero en el infinito. Pues imaginemos que pueda haber un lugar en el espacio universal en el cual el campo gravitatorio de materia, visto a gran escala, posee simetría esférica. Se sigue entonces de la ecuación de Poisson que, para que ϕ pueda tender a un límite en el infinito, la densidad media ρ debe decrecer hacia cero más rápidamente que $1/r^2$ a medida que aumenta la distancia r al centro del universo.[1] En este sentido, por consiguiente, el universo según Newton es finito, aunque puede poseer una masa total infinitamente grande.

* «Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie», *Sitzunsberichte der Preussischen Akad. d. Wissenschaften*, 1917.

1. ρ es la densidad media de materia, calculada para una región que es grande comparada con la distancia entre estrellas fijas vecinas, pero pequeña en comparación con las dimensiones del sistema estelar completo.

De esto se sigue en primer lugar que la radiación emitida por los cuerpos celestes dejará, en parte, el sistema newtoniano del universo, saliendo radialmente hacia fuera, para hacerse inefectiva y perderse en el infinito. ¿Puede pasar lo mismo con los cuerpos celestes? Difícilmente es posible dar una respuesta negativa a esta pregunta. En efecto, se sigue de la hipótesis de un límite finito para ϕ en el infinito espacial que un cuerpo celeste con energía cinética finita puede llegar al infinito espacial superando las fuerzas de atracción newtonianas. Por la mecánica estadística este caso debe darse de vez en cuando, siempre que la energía total del sistema estelar —transferida a una única estrella— sea suficientemente grande para enviar la estrella en su viaje al infinito, de donde nunca puede volver.

Podríamos tratar de evitar esta dificultad peculiar suponiendo un valor muy alto para el potencial límite en el infinito. Ésa sería una forma posible, si el propio valor del potencial gravitatorio no estuviera necesariamente condicionado por los cuerpos celestes. Lo cierto es que nos vemos obligados a considerar la ocurrencia de cualesquiera grandes diferencias de potencial del campo gravitatorio como algo que contradice los hechos. Tales diferencias deben ser realmente de un orden de magnitud tan bajo que las velocidades estelares generadas por ellas no superen las velocidades realmente observadas.

Si aplicamos a las estrellas la ley de distribución de Boltzmann para moléculas, asimilando el sistema estelar a un gas en equilibrio térmico, encontramos que el sistema estelar newtoniano no puede existir en absoluto. En efecto, existe una razón finita de densidades correspondiente a la diferencia de potencial finita entre el centro y el infinito espacial. Una anulación de la densidad en el infinito implica así una anulación de la densidad en su centro.

Apenas parece posible superar estas dificultades sobre la base de la teoría newtoniana. Podemos preguntarnos si pueden eliminarse mediante una modificación de la teoría newtoniana. Antes de nada, indicaremos un método que no pretende ser tomado seriamente; meramente sirve como contrapunto para lo que sigue. En lugar de la ecuación de Poisson escribimos

$$\nabla^2\phi - \lambda\phi = 4\pi\kappa\rho. \tag{2}$$

donde λ denota una constante universal. Si ρ_0 es la densidad uniforme de distribución de masa, entonces

$$\phi = -\frac{4\pi\kappa}{\lambda}\rho_0 \tag{3}$$

es una solución de la ecuación (2). Esta solución correspondería al caso en el que la materia de las estrellas fijas estuviera distribuida uniformemente por el espacio, si se hace la densidad ρ_0 igual a la densidad media real de materia en el universo. La solución entonces corresponde a una extensión infinita del espacio central, llena uniformemente de materia. Si, sin realizar ningún cambio de densidad media, imaginamos que la materia no esté uniformemente distribuida localmente, habrá, además del ϕ con el valor constante de la ecuación (3), un ϕ adicional, que en la vecindad de masas más densas se parecerá tanto más al campo newtoniano cuanto menor sea $\lambda\phi$ en comparación con $4\pi\kappa\rho$.

Un universo así constituido no tendría centro, con respecto a su campo gravitatorio. No habría que suponer una disminución de densidad en el infinito espacial, sino que tanto el potencial medio como la densidad media quedarían constantes en el infinito. El

conflicto con la mecánica estadística que encontrábamos en el caso de la teoría newtoniana no se repite. Con una densidad definida pero extraordinariamente pequeña la materia está en equilibrio, sin que se requiera ninguna forma material interna (presiones) para mantener el equilibrio.

2. Las condiciones de contorno según la teoría de la relatividad general

En la presente sección llevaré al lector por el camino que yo mismo he recorrido, un camino más bien aspero y sinuoso, porque de otro modo no puedo esperar que se tome mucho interés en el resultado final del viaje. La conclusión a la que llegaré es que las ecuaciones de campo de la gravitación que he defendido hasta ahora necesitan todavía una ligera modificación, de modo que sobre la base de la teoría de la relatividad general pueden evitarse aquellas dificultades fundamentales que se han presentado en 1 como enfrentadas a la teoría newtoniana. Esta modificación corresponde perfectamente a la transición de la ecuación de Poisson (1) a la ecuación (2) de 1. Finalmente inferimos que las condiciones de contorno en el infinito espacial desaparecen por completo, porque el continuo universal con respecto a sus dimensiones espaciales debe verse como un continuo autocontenido de volumen (tridimensional) espacial finito.

La opinión que yo mantenía hasta hace poco tiempo, respecto a las condiciones límite a fijar en el infinito espacial, se basaban en las siguientes consideraciones. En una teoría de la relatividad consistente no puede haber inercia *relativa al «espacio»*, sino sólo una inercia de *unas masas con respecto a otras*. Si, por consiguiente, yo tengo una masa a distancia suficiente de todas las demás masas en el universo, su inercia debe reducirse a cero. Trataremos de formular matemáticamente esta condición.

Según la teoría de la relatividad general el momento negativo viene dado por las tres primeras componentes, y la energía por la última componente del tensor covariante multiplicado por $\sqrt{-g}$

$$m\sqrt{-g}\, g_{\mu\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds}, \tag{4}$$

donde, como siempre, hacemos

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu . \tag{5}$$

En el caso particularmente claro de la posibilidad de escoger el sistema de coordenadas de modo que el campo gravitatorio en cada punto sea espacialmente isótropo, tenemos de forma más simple

$$ds^2 = -\mathrm{A}\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) + \mathrm{B}dx_4^2 .$$

Si, además, al mismo tiempo

$$\sqrt{-g} = 1 = \sqrt{\mathrm{A}^3\mathrm{B}}$$

obtenemos de (4), en primera aproximación para velocidades pequeñas,

$$m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_1}{dx_4}, m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_2}{dx_4}, m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_3}{dx_4}$$

para las componentes del momento, y para la energía (en el caso estático)

$$m\sqrt{B}.$$

De las expresiones para el momento se sigue que $m\frac{A}{\sqrt{B}}$ desempeña el papel de la masa en reposo. Puesto que m es una constante intrínseca de la masa puntual, independientemente de su posición, esta expresión, si retenemos la condición $\sqrt{-g} = 1$ en el infinito espacial, sólo puede anularse cuando A disminuye hasta cero mientras que B aumenta hasta infinito. Parece, por lo tanto, que tal degeneración de los coeficientes $g_{\mu\nu}$ es exigida por el postulado de relatividad de toda la inercia. Este requisito implica que la energía potencial $m\sqrt{B}$ se hace infinitamente grande en el infinito. Así pues, una masa puntual nunca puede abandonar el sistema; y una investigación más detallada muestra que lo mismo se apiica a los rayos luminosos. Un sistema del universo con un comportamiento semejante de los potenciales gravitatorios en el infinito no correría así el riesgo de echar a perder lo que se ha propuesto hasta ahora en conexión con la teoría newtoniana.

Quiero señalar que las hipótesis simplificadoras acerca de los potenciales gravitatorios sobre las que se basa este razonamiento han sido introducidas meramente por razón de claridad. Es posible encontrar formulaciones generales para el comportamiento de las $g_{\mu\nu}$ en el infinito que expresan los puntos esenciales de la cuestión sin hipótesis restrictivas adicionales.

En este punto, con la amable asistencia del matemático J. Grommer, investigué campos gravitatorios estáticos, con simetría central, que degeneran en el infinito de la forma mencionada. Se aplicaban los potenciales gravitatorios $g_{\mu\nu}$ y a partir de ellos se calculaba el tensor-energía $T_{\mu\nu}$ de materia sobre la base de las ecuaciones de campo de la gravitación. Pero aquí se demostraba que para el sistema de las estrellas fijas no puede intervenir en absoluto ninguna condición de contorno de este tipo, como también ha remarcado recientemente el astrónomo de Sitter.

El tensor-energía contravariante $T^{\mu\nu}$ de la materia ponderable viene dado por

$$T^{\mu\nu} = \rho\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds},$$

donde ρ es la densidad de materia en la medida natural. Con una elección apropiada del sistema de coordenadas las velocidades estelares son muy pequeñas en comparación con la de la luz. Por lo tanto, podemos sustituir $\sqrt{g_{44}}\,dx_4$ por ds. Esto nos muestra que todas las componentes de $T^{\mu\nu}$ deben ser muy pequeñas en comparación con la última componente T^{44}. Pero fue completamente imposible reconciliar esta condición con las condiciones de contorno escogidas. Visto en retrospectiva, este resultado no parece sorprendente. El hecho de las pequeñas velocidades de las estrellas permite la conclusión de que donde quiera que haya estrellas fijas, los potenciales gravitatorios (en nuestro caso $\sqrt{B}$) nunca pueden ser mucho mayores que aquí en la Tierra. Esto se sigue de un

razonamiento estadístico, exactamente como en el caso de la teoría newtoniana. En cualquier caso, nuestros cálculos me han convencido de que no pueden postularse tales condiciones de degeneración para las $g_{\mu\nu}$ en el infinito espacial.

Tras el fracaso de este intento, se ofrecen dos posibilidades.

(*a*) Podemos exigir, como en el problema de los planetas, que, con una elección adecuada del sistema de referencia, las $g_{\mu\nu}$ en el infinito espacial se aproximen a los valores

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

(*b*) Podemos abstenernos por completo de fijar condiciones de contorno para el infinito espacial que reclamen validez general; pero en el límite espacial del dominio en consideración tenemos que dar las $g_{\mu\nu}$ por separado en cada caso individual, como hasta ahora estábamos habituados a dar por separado las condiciones iniciales para el tiempo.

La posibilidad (*b*) no ofrece ninguna esperanza de resolver el problema, sino que equivale a abandonarlo. Ésta es una posición irrebatible, que actualmente es asumida por de Sitter.[1] Pero debo confesar que semejante resignación total en esta cuestión fundamental es para mí algo difícil. Yo no la aceptaré hasta que se haya demostrado vano todo esfuerzo por avanzar hacia una visión satisfactoria.

La posibilidad (*a*) es insatisfactoria en más de un aspecto. En primer lugar, aquellas condiciones de contorno presuponen una elección definida del sistema de referencia, que es contraria al espíritu del principio de relatividad. En segundo lugar, si adoptamos esta idea, dejamos de satisfacer el requisito de la relatividad de la inercia. Pues la inercia de un punto de masa material m (en medida natural) depende de las $g_{\mu\nu}$; pero éstas difieren poco de sus valores postulados, dados antes, para el infinito espacial. Así pues, la inercia estaría *influida*, pero no estaría *condicionada* por la materia (presente en el espacio finito). Si sólo hubiera presente una masa puntual finita, según esta visión, poseería inercia, y de hecho una inercia casi tan grande como cuando está rodeado por las demás masas del universo real. Finalmente, frente a esta visión deben plantearse las objeciones estadísticas que se mencionaron con respecto a la teoría de Newton.

De lo que se ha dicho ahora se verá que no he tenido éxito en formular condiciones de contorno para el infinito espacial. De todas formas, hay todavía una posible salida, sin renunciar como se sugería en (*b*). En efecto, si fuera posible considerar el universo como un continuo que es *finito (cerrado) con respecto a sus dimensiones espaciales*, no necesitaríamos en absoluto ninguna de tales condiciones de contorno. Procederemos a demostrar que el postulado de relatividad general y el hecho de las pequeñas velocidades estelares son compatibles con la hipótesis de un universo espacialmente finito; aunque ciertamente, para llevar a cabo esta idea, necesitamos una modificación generalizadora de las ecuaciones de campo de la gravitación.

1. De Sitter, *Akad. van Wetensch. Te Amsterdam*, 8 Nov., 1916.

3. El universo espacialmente finito con una distribución uniforme de materia

Según la teoría de la relatividad general el carácter métrico (curvatura) del continuo espaciotemporal tetradimensional está definido en cada punto por la materia en dicho punto y el estado de dicha materia. Por lo tanto, debido a la falta de uniformidad en la distribución de la materia, la estructura métrica de este continuo debe ser por fuerza extraordinariamente complicada. Pero si estamos interesados sólo en la estructura a gran escala, podemos representarnos la materia como estando uniformemente distribuida sobre espacios enormes, de modo que su densidad de distribución es una función variable que varía de forma extraordinariamente lenta. Así pues, nuestro procedimiento recordará algo al de los geodestas que aproximan por un elipsoide la forma de la superficie terrestre, que a pequeña escala es extraordinariamente complicada.

El hecho más importante que extraemos de la experiencia acerca de la distribución de materia es que las velocidades relativas de las estrellas son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Por ello pienso que por el momento podemos basar nuestro razonamiento en la siguiente hipótesis aproximada. Existe un sistema de referencia con respecto al cual la materia puede considerarse permanentemente en reposo. Con respecto a este sistema, por consiguiente, el tensor-energía contravariante $T^{\mu\nu}$ de materia es, debido a (5), de la forma simple

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{matrix}\right\} \tag{6}$$

El escalar ρ de la densidad (media) de distribución puede ser *a priori* una función de las coordenadas espaciales. Pero si suponemos que el universo es espacialmente finito, nos vemos impulsados a la hipótesis de que ρ debe ser independiente de la localización. En esta hipótesis basamos las consideraciones que siguen.

En lo que concierne al campo gravitatorio, se sigue de la ecuación de movimiento del punto material

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2} + \{\alpha\beta, \nu\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0$$

que un punto material en un campo gravitatorio estático sólo puede permanecer en reposo cuando g_{44} es independiente de la localización. Puesto que, además, presuponemos independencia de la coordenada temporal x_4 para todas las magnitudes, podemos exigir para la solución requerida que, para toda x_ν,

$$g_{44} = 1. \tag{7}$$

Además, como sucede siempre con problemas estáticos, tendremos que hacer

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0. \tag{8}$$

Queda ahora por determinar aquellas componentes del potencial gravitatorio que definen las relaciones puramente geométrico-espaciales de nuestro continuo (g_{11}, g_{12}, ... g_{33}). De nuestra hipótesis sobre la uniformidad de distribución de las masas que generan el campo se sigue que la curvatura del espacio requerido debe ser constante. Con esta distribución de masa, por consiguiente, el requerido continuo finito de las x_1, x_2, x_3, con x_4 constante, será un espacio esférico.

Llegamos a un espacio semejante, por ejemplo, de la siguiente manera. Partimos de un espacio euclídeo de cuatro dimensiones ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 con un elemento de línea $d\sigma$; sea, por consiguiente

$$\delta\sigma^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2. \tag{9}$$

En este espacio consideramos la hipersuperficie

$$R^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2, \tag{10}$$

donde R denota una constante. Los puntos de esta hipersuperficie forman un continuo tridimensional, un espacio esférico de radio de curvatura R.

El espacio euclídeo tetradimensional del que partimos sirve sólo para una definición conveniente de nuestra hipersuperficie. Sólo nos interesan aquellos puntos de la hipersuperficie que tienen propiedades métricas en acuerdo con las del espacio físico con una distribución uniforme de materia. Para la descripción de este continuo tridimensional podemos emplear las coordenadas ξ_1, ξ_2, ξ_3 (la proyección sobre el hiperplano $\xi_4 = 0$), puesto que, debido a (10), ξ_4 puede expresarse en términos de ξ_1, ξ_2, ξ_3. Eliminando ξ_4 de (9) obtenemos para el elemento de línea del espacio esférico la expresión

$$\left.\begin{aligned} d\sigma^2 &= \gamma_{\mu\nu}\, d\xi_\mu\, d\xi_\nu \\ \gamma_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu} + \frac{\xi_\mu \xi_\nu}{R^2 - \rho^2} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

donde $\delta_{\mu\nu} = 1$, si $\mu = \nu$; $\delta_{\mu\nu} = 0$, si $\mu \neq \nu$, y $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$. Las coordenadas escogidas son convenientes cuando se trata de examinar el entorno de uno de los dos puntos $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$.

Ahora, el elemento de línea del universo espacio-temporal tetradimensional requerido también nos está dado. Para el potencial $g_{\mu\nu}$, cuyos dos índices difieren de 4, tenemos que hacer

$$g_{\mu\nu} = -\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}\right), \tag{12}$$

ecuación que, en combinación con (7) y (8), define perfectamente el comportamiento de reglas de medir, relojes y rayos luminosos.

4. Sobre un término adicional para las ecuaciones de campo de la gravitación

Mis ecuaciones de campo de la gravitación propuestas para cualquier sistema de coordenadas escogido son las siguientes

$$\left.\begin{aligned} &G_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right), \\ &G_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \{\mu\nu, \alpha\} + \{\mu\nu, \beta\} + \{\nu\beta, \alpha\} + \\ &+ \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \{\mu\nu, \alpha\} \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

El sistema de ecuaciones (13) no se satisface en absoluto cuando insertamos para las $g_{\mu\nu}$ los valores dados en (7), (8) y (12), y para el tensor-energía (contravariante) de materia los valores indicados en (6). Se demostrará en la siguiente sección cómo puede hacerse este cálculo convenientemente. De modo que, si fuese cierto que las ecuaciones de campo (13) que he utilizado hasta ahora fueran las únicas compatibles con el postulado de relatividad general, probablemente tendríamos que concluir que la teoría de la relatividad no admite la hipótesis de un universo espacialmente finito.

Sin embargo, el sistema de ecuaciones (14) permite una extensión fácilmente sugerida que es compatible con el postulado de relatividad, y es perfectamente análoga a la extensión de la ecuación de Poisson dada por la ecuación (2). En efecto, en el primer miembro de la ecuación de campo (13) podemos añadir el tensor fundamental $g_{\mu\nu}$, multiplicado por una constante universal, $-\lambda$, desconocida por el momento, sin destruir la covariancia general. En lugar de la ecuación de campo (13) escribimos

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right). \quad (13a)$$

La ecuación de campo, con λ suficientemente pequeña, es en cualquier caso compatible también con los hechos de experiencia derivados del sistema solar. También satisface leyes de conservación de momento y energía, porque llegamos a (13a) en lugar de (13) introduciendo en el principio de Hamilton, en lugar del escalar del tensor de Riemann, este escalar aumentado en una constante universal; y el principio de Hamilton, por supuesto, garantiza la validez de leyes de conservación. Se demostrará en 5 que la ecuación de campo (13a) es compatible con nuestras conjeturas sobre campo y materia.

5. Cálculos y resultado

Puesto que todos los puntos de nuestro continuo están en pie de igualdad, es suficiente efectuar el cálculo para un punto, e. g., para uno de los dos puntos con coordenadas

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

Entonces, para las $g_{\mu\nu}$ en (13a), tenemos que insertar los valores

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

dondequiera que aparecen derivados sólo una vez o ninguna. Obtenemos así en primer lugar

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1}[\mu\nu, 1] + \frac{\partial}{\partial x_2}\{\mu\nu, 2\} + \frac{\partial}{\partial x_3}\{\mu\nu, 3\} + \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha \partial x_\nu}.$$

A partir de esto descubrimos fácilmente, teniendo en cuenta (7), (8) y (13), que todas las ecuaciones (13a) se satisfacen si se cumplen las dos relaciones

$$-\frac{2}{R^2} + \lambda = -\frac{\kappa\rho}{2}, -\lambda = -\frac{\kappa\rho}{2},$$

o

$$\lambda = \frac{\kappa\rho}{2} = \frac{1}{R^2}. \tag{14}$$

Por lo tanto, la recién introducida constante universal λ define tanto la densidad media de distribución ρ que puede permanecer en equilibrio como el radio R y el volumen $2\pi^2R^3$ del espacio esférico. La masa total M del universo, según nuestra visión, es finita, y de hecho es

$$M = \rho \cdot 2\pi^2R^3 = 4\pi^2 \frac{R}{\kappa} = \pi^2 \sqrt{\frac{32}{\kappa^3\rho}}. \tag{15}$$

Así pues, la concepción teórica del universo real, si está en correspondencia con nuestro razonamiento, es la siguiente. La curvatura del espacio es variable en el tiempo y el lugar, según la distribución de materia, pero podemos aproximarla groseramente por medio de un espacio esférico. En cualquier caso, esta concepción es lógicamente consistente, y desde el punto de vista de la teoría de la relatividad general es la más accesible; si es sostenible desde el punto de vista del conocimiento astronómico presente no se discutirá aquí. Para llegar a esta concepción consistente, tuvimos por supuesto que introducir una extensión de las ecuaciones de campo de la gravitación que no está justificada por nuestro conocimiento real de la gravitación. Hay que resaltar, sin embargo, que nuestros resultados dan una curvatura positiva del espacio, incluso si no se introduce el término suplementario. Este término es necesario solamente con el objetivo de hacer posible una distribución cuasi estática de materia, como se requiere por el hecho de las velocidades pequeñas de las estrellas.

¿DESEMPEÑAN LOS CAMPOS GRAVITATORIOS UN PAPEL ESENCIAL EN LA ESTRUCTURA DE LAS PARTÍCULAS ELEMENTALES DE LA MATERIA?*

Ni la teoría newtoniana ni la teoría relativista de la gravitación han llevado hasta ahora a ningún avance en la teoría de la constitución de la materia. En vista de este hecho se demostrará en las páginas siguientes que existen razones para pensar que las formaciones elementales que van a constituir los átomos se mantienen unidas por fuerzas gravitatorias.

1. Defectos de la visión actual

Se han realizado grandes esfuerzos por desarrollar una teoría que diera cuenta del equilibrio de la electricidad que constituye el electrón. G. Mie, en particular, ha dedicado profundas investigaciones a esta cuestión. Su teoría, que ha encontrado un considerable apoyo entre los físicos teóricos, se basa principalmente en la introducción en el tensor-energía de términos suplementarios que dependen de las componentes del potencial electrodinámico, además de los términos de energía de la teoría de Maxwell-Lorentz. Estos nuevos términos, que en el espacio exterior no son importantes, son sin embargo efectivos en el interior de los electrones al mantener el equilibrio frente a la repulsión eléctrica. A pesar de la belleza de la estructura formal de esta teoría, erigida por Mie, Hilbert y Weyl, sus resultados físicos hasta ahora han sido insatisfactorios. Por una parte, la multiplicidad de posibilidades es desalentadora, y por otra parte dichos términos adicionales no han podido ser formulados de una manera tan simple que la solución pudiera ser satisfactoria.

Hasta ahora la teoría de la relatividad general no ha hecho ningún cambio en este estado de la cuestión. Si por el momento no consideramos el término cosmológico adicional, las ecuaciones de campo toman la forma

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = -\kappa T_{\mu\nu}, \qquad (1)$$

donde $G_{\mu\nu}$ denota el tensor de curvatura de Riemann contraído, G el escalar de curvatura formado por contracción repetida, y $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía de «materia». La hipótesis de que las $T_{\mu\nu}$ *no* dependen de las derivadas de las $g_{\mu\nu}$ está en consonancia con el desarrollo histórico de estas ecuaciones. Pues estas cantidades son, por supuesto, las componentes de energía en el sentido de la teoría de la relatividad especial, en donde no aparecen variables $g_{\mu\nu}$. El segundo término del primer miembro de la ecuación se escoge de modo que la divergencia del primer miembro de (1) se anule idénticamente, de modo que al tomar la divergencia de (1), obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu}^{\sigma}}{\partial x_{\sigma}} + \frac{1}{2} g_{\mu}^{\sigma\tau} \mathfrak{T}_{\sigma\tau} = 0, \qquad (2)$$

* «Spielen Gravitationsfelder im Aufber der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle?», *Sitzungsberichte der Preussischen Akad. d. Wissenschaften*, 1919.

que en el caso límite de la teoría de la relatividad especial da las ecuaciones completas de conservación

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0.$$

En ello reside el fundamento físico del segundo término del primer miembro de (1). No está en absoluto establecido *a priori* que un paso al límite de este tipo tenga algún posible significado. Pues si los campos gravitatorios desempeñan una parte esencial en la estructura de las partículas de materia, la transición al caso límite de $g_{\mu\nu}$ constante habría perdido, para ellas, su justificación, pues en realidad, con $g_{\mu\nu}$ constante, no podría haber partículas de materia. De modo que si deseamos contemplar la posibilidad de que la gravitación pueda tomar parte en la estructura de los campos que constituyen los corpúsculos, no podemos considerar confirmada la ecuación (1).

Colocando en (1) las componentes de energía de Maxwell-Lorentz del campo electromagnético $\phi_{\mu\nu}$,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \phi_{\sigma\tau} \phi^{\sigma\tau} - \phi_{\mu\sigma} \phi_{\nu\tau} g^{\sigma\tau} \tag{3}$$

obtenemos para (2), tomando la divergencia, y tras alguna reducción,[1]

$$\phi_{\mu\sigma} \mathfrak{T}^\sigma = 0, \tag{4}$$

donde, por brevedad, hemos hecho

$$\frac{\partial}{\partial x_\tau} \left(\sqrt{-g}\, \phi_{\mu\nu} g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} \right) = \frac{\partial^{\sigma\tau}}{\partial x_\tau} = \mathfrak{T}^\sigma. \tag{5}$$

En los cálculos hemos empleado el segundo sistema de ecuaciones de Maxwell

$$\frac{\partial \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial \phi_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \phi_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{6}$$

Vemos de (4) que la densidad de corriente $\mathfrak{J}^\sigma$ debe anularse en todas partes. Por lo tanto, por la ecuación (1), no podemos llegar a una teoría del electrón restringiéndonos a las componentes electromagnéticas de la teoría de Maxwell-Lorentz, como se ha sabido desde hace tiempo. Así, si mantenemos (1) nos vemos llevados al camino de la teoría de Mie.[2]

No sólo el problema de la materia, sino también el problema cosmológico, lleva a dudar de la ecuación (1). Como he demostrado en el artículo anterior, la teoría de la relatividad general requiere que el universo sea espacialmente finito. Pero esta visión del universo necesitaba una extensión de las ecuaciones (1), con la introducción de una nueva constante universal l, que está en una relación fija con la masa total del universo

1. Véase, por ejemplo, A. Einstein, *Sitzungsber d. Preuss. Akad. D. Wiss.*, 1916, pp. 187, 188.
2. Véase D. Hilbert, *Göttinger Nachr.*, 20 Nov., 1915.

(o, respectivamente, con la densidad de equilibrio de la materia). Esto va en grave detrimento de la belleza formal de la teoría.

2. Las ecuaciones de campo liberadas de escalares

Las dificultades planteadas más arriba se eliminan si en lugar de las ecuaciones de campo (1) establecemos las ecuaciones de campo

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} G = -\kappa T_{\mu\nu}, \tag{1a}$$

donde $T_{\mu\nu}$ denota el tensor de energía del campo electromagnético dado por (3).

La justificación formal para el factor $-1/4$ en el segundo término de esta ecuación reside en que hace que el escalar del primer miembro

$$g^{\mu\nu}\left(G_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} G\right),$$

se haga idénticamente nulo, como lo hace el escalar $g^{\nu\mu}T_{\mu\nu}$ del segundo miembro debido a (3). Si hubiésemos razonado sobre la base de las ecuaciones (1) en lugar de las (1a) hubiésemos obtenido, por el contrario, la condición $G = 0$, que hubiese sido válida en todas partes para las $g_{\mu\nu}$, independientemente del campo eléctrico. Es evidente que el sistema de ecuaciones [(1a),(3)] es una consecuencia del sistema [(1),(3)], pero no a la inversa.

A primera vista podríamos sentir dudas acerca de si (1a) junto con (6) son suficientes para definir todo el campo. En una teoría relativista general necesitamos $n - 4$ ecuaciones diferenciales, mutuamente independientes, para la definición de n variables independientes, puesto que, debido a la libertad de elección de las coordenadas, en la solución deben aparecer de forma natural cuatro funciones completamente arbitrarias de todas las coordenadas. Así, para determinar las dieciséis cantidades independientes $g_{\mu\nu}$ y $\phi_{\mu\nu}$ necesitamos doce ecuaciones, todas ellas mutuamente independientes. Pero resulta que nueve de las ecuaciones (1a) y tres de las ecuaciones (6) son mutuamente independientes.

Formando la divergencia de (1a) y teniendo en cuenta que la divergencia de $G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G$ se anula, obtenemos

$$\phi_{\mu\alpha} J^{\alpha} + \frac{1}{4\kappa} \frac{\partial G}{\partial x_{\sigma}} = 0. \tag{4a}$$

A partir de esto reconocemos antes de nada que el escalar de curvatura G es constante en los dominios tetradimensionaslesen donde se anula la densidad de electricidad. Si suponemos que todas estas partes del espacio están conectadas, y por consiguiente que la densidad de electricidad difiere de cero sólo en «líneas de universo» separadas, entonces el escalar de curvatura, en todo lugar fuera de dichas líneas de universo, posee un valor constante G_0. Pero la ecuación (4a) también permite una importante conclusión respecto al comportamiento de G dentro de los dominios que tienen una densidad de electricidad distinta de cero. Si, como es costumbre, consideramos la electricidad como una densidad de carga en movimiento, haciendo

$$J^{\sigma} = \frac{\mathfrak{T}^{\sigma}}{\sqrt{-g}} = \rho \frac{dx_{\sigma}}{ds}, \tag{7}$$

obtenemos de (4a) por un producto interno por J^{σ}, y debido a la antisimetría de $\phi_{\mu\nu}$, la relación

$$\frac{\partial G}{\partial x_{\sigma}} \frac{dx_{\sigma}}{ds} = 0. \tag{8}$$

Así pues, el escalar de curvatura es constante en toda línea de universo del movimiento de la electricidad. La ecuación (4a) puede interpretarse de una manera gráfica por el enunciado: El escalar de curvatura desempeña el papel de una presión negativa que, fuera de los corpúsculos eléctricos, tiene un valor constante G_0. En el interior de cada corpúsculo subsiste una presión negativa ($G - G_0$ positivo) cuya caída mantiene la fuerza electrodinámica en equilibrio. El mínimo de la presión o, respectivamente, el máximo del escalar de curvatura, no cambia con el tiempo en el interior del corpúsculo.

Ahora escribimos las ecuaciones de campo (1a) en la forma

$$\left(G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G\right) + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} G_0 = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{4\kappa} g_{\mu\nu} (G - G_0)\right). \tag{9}$$

Por otra parte, transformamos las ecuaciones completadas con el término cosmológico como ya se han dado

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{4\kappa} g_{\mu\nu} T\right).$$

Restando la ecuación escalar multiplicada por $^1/_2$, obtenemos a continuación

$$\left(G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G\right) + g_{\mu\nu} \lambda = -\kappa T.$$

Ahora, en las regiones donde sólo hay presentes campos eléctricos o gravitatorios el segundo miembro de esta ecuación se anula. Para tales regiones obtenemos, formando el escalar,

$$G + 4\lambda = 0.$$

En tales regiones, por lo tanto, el escalar de curvatura es constante, de modo que λ puede reemplazarse por $^1/_4 G_0$. Así, podemos escribir la ecuación de campo anterior (1) en la forma

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G + \frac{1}{4\kappa} g_{\mu\nu} G_0 = -\kappa T_{\mu\nu}. \tag{10}$$

Comparando (9) con (10) vemos que no hay diferencia entre las nuevas ecuaciones de campo y las anteriores, excepto que en lugar de $T_{\mu\nu}$ como tensor de «masa gravita-

toria» ahora aparece $T_{\mu\nu} + \frac{1}{4K} g_{\mu\nu}(G - G_0)$ que es independiente del escalar de curvatura. Pero la nueva formulación tiene esta gran ventaja, que la cantidad λ aparece en las ecuaciones fundamentales como una constante de integración, y ya no como una constante universal característica de la ley fundamental.

3. Sobre la cuestión cosmológica

El último resultado permite ya suponer que con nuestra nueva formulación el universo puede considerarse espacialmente finito, sin necesidad de ninguna hipótesis adicional. Como en el artículo precedente, demostraré una vez más que, con una distribución uniforme de materia, un mundo esférico es compatible con las ecuaciones.

En primer lugar hacemos

$$ds^2 = -\gamma_{ik}\, dx_i\, dx_k + dx_4^2 \ (i, k = 1, 2, 3). \tag{11}$$

Entonces si P_{ik} y P son, respectivamente, el tensor de curvatura de segundo rango y el escalar de curvatura en el espacio tridimensional, tenemos

$$G_{ik} = P_{ik} \ (i, k = 1, 2, 3)$$
$$G_4^i = G_{4i} = G_{44} = 0$$
$$G = -P$$
$$-g = \gamma.$$

Se sigue por lo tanto para nuestro caso que

$$G_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} G = P_{ik} - \frac{1}{2} \gamma_{ik} P \ (i, k = 1, 2, 3)$$

$$G_{44} - \frac{1}{2} g_{44} G = \frac{1}{2} P.$$

A partir de este momento continuamos nuestras reflexiones de dos maneras. En primer lugar, con el apoyo de la ecuación (1a). Aquí $T_{\mu\nu}$ denota el tensor-energía del campo electromagnético, que aparece por las partículas eléctricas que constituyen la materia. Para este campo tenemos en todo lugar

$$\mathfrak{T}_1^1 + \mathfrak{T}_2^2 + \mathfrak{T}_3^3 + \mathfrak{T}_4^4 = 0.$$

Las $\mathfrak{T}_\mu^\nu$ individuales son cantidades que varían rápidamente con la posición; pero para nuestro objetivo podemos reemplazarlas sin duda por sus valores medios. Por lo tanto tenemos que escoger

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{T}_1^1 = \mathfrak{T}_2^2 = \mathfrak{T}_3^3 = \frac{1}{3}\,\mathfrak{T}_4^4 = \text{const.} \\ &\mathfrak{T}_\mu^\nu = 0 \text{ (para } \mu \neq \nu\text{)}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

y por consiguiente

$$T_{ik} = \frac{1}{3}\,\frac{\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}\,\gamma_{ik},\ T_{44} = \frac{\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}.$$

Considerando lo que se ha mostrado hasta ahora, obtenemos en lugar de (1a)

$$P_{ik} - \frac{1}{4}\,\gamma_{ik}\,P = -\frac{1}{3}\,\gamma_{ik}\,\frac{\kappa\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}. \tag{13}$$

$$\frac{1}{4}\,P = -\frac{\kappa\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}. \tag{14}$$

El escalar de la ecuación (13) coincide con (14). Por esto es por lo que nuestras ecuaciones fundamentales permiten la idea de un universo esférico. Pues de (13) y (14) se sigue

$$P_{ik} + \frac{4}{3}\,\frac{\kappa\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}\,\gamma_{ik} = 0. \tag{15}$$

y es sabido[1] que este sistema es satisfecho por un universo esférico (tridimensional).

Pero también podemos basar nuestras reflexiones en las ecuaciones (9). En el segundo miembro de (9) están aquellos términos que, desde el punto de vista fenomenológico, deben ser sustituidos por el tensor-energía de materia; es decir, deben ser reemplazados por

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{matrix}$$

donde ρ denota la densidad media de materia que se supone en reposo. Obtenemos así las ecuaciones

$$P_{ik} + \frac{1}{2}\,\gamma_{ik}\,P - \frac{1}{4}\,\gamma_{ik}\,G_0 = 0 \tag{16}$$

$$\frac{1}{2}\,P + \frac{1}{4}\,G_0 = -k\rho \tag{17}$$

1. Véase H. Weyl, «Raum, Zeit, Materie», párrafo 33.

A partir del escalar de la ecuación (16) y de (17) obtenemos

$$G_0 = -\frac{2}{3} P = 2\kappa\rho, \tag{18}$$

y en consecuencia a partir de (16)

$$P_{ik} - \kappa\rho\gamma_{ik} = 0. \tag{19}$$

ecuación que, salvo la expresión para los coeficientes, coincide con (15). Por comparación obtenemos

$$\mathfrak{T}_4^4 = \frac{3}{4}\rho\sqrt{\gamma} \tag{20}$$

Esta ecuación significa que tres cuartos de la energía que constituye la materia deben atribuirse al campo electromagnético, y un cuarto al campo gravitatorio.

4. Comentarios finales

Las reflexiones anteriores muestran la posibilidad de una construcción teórica de la materia a partir del campo gravitatorio y el campo electromagnético solamente, sin la introducción de hipotéticos términos suplementarios en la línea de la teoría de Mie. Esta posibilidad se presenta particularmente prometedora en cuanto que nos libera de la necesidad de introducir una constante especial λ para la solución del problema cosmológico. Por otra parte, existe una dificultad peculiar. En efecto, si particularizamos (1) para el caso estático con simetría esférica obtenemos una ecuación menos de las necesarias para definir los $g_{\mu\nu}$ y $\phi_{\mu\nu}$, con el resultado de que *cualquier distribución esféricamente simétrica* de electricidad parece capaz de permanecer en equilibrio. Así, el problema de la constitución de los cuantos elementales no puede ser aún resuelto sobre la base inmediata de las ecuaciones de campo dadas.

ÍNDICE

Nota sobre los textos 7
Agradecimientos 8
Introducción 9

NICOLÁS COPÉRNICO (1473-1543)
Vida y obra 11

Sobre las revoluciones de los orbes celestes 17
Introducción 17
Prefacio y dedicatoria al papa Paulo III 18

LIBRO PRIMERO 23
1. El mundo es esférico 24
2. La Tierra también es esférica 24
3. De cómo la Tierra junto con el agua forma un globo 25
4. El movimiento de los cuerpos celestes es regular y circular, perpetuo o compuesto por movimientos circulares 26
5. Acerca de si el movimiento de la Tierra es circular y de su posición 28
6. De la inmensidad del cielo con respecto a la magnitud de la Tierra 29
7. Por qué los antiguos pensaron que la Tierra estaba inmóvil en medio del mundo como si fuera su centro 30
8. Solución de dichas razones y su insuficiencia 31
9. Si pueden atribuirse a la Tierra varios movimientos y acerca del centro del mundo 34
10. Sobre el orden de las órbitas celestes 34
11. Demostración del triple movimiento de la Tierra 42
12. De las líneas rectas que se subtienden en un círculo 45
13. Sobre los lados y ángulos de los triángulos planos rectilíneos . 58
14. Sobre los triángulos esféricos 60

LIBRO SEGUNDO 72
1. Sobre los círculos y sus nombres 72
2. Acerca de la oblicuidad de la eclíptica, de las distancias entre los trópicos y de cómo se determinan 73
3. Acerca de los arcos y ángulos en que se cortan los círculos del ecuador, de la eclíptica y del meridiano, a partir de los cuales hay una declinación y ascensión recta, y acerca de su cálculo 75
4. Cómo determinar la declinación y ascensión recta de cualquier astro exterior al círculo que pasa por la mitad de los signos [eclíptica], pero cuya latitud junto con la longitud ha sido establecida, y en qué grado de la eclíptica divide por la mitad al cielo 80
5. De las secciones del horizonte 81
6. Sobre cuáles pueden ser las diferencias de las sombras del mediodía 82
7. De cómo se pueden demostrar mutuamente el día más largo, la latitud de la salida del Sol y la inclinación de la esfera, y sobre las restantes diferencias de los días 83
8. Acerca de las horas y de las partes del día y de la noche 91
9. Sobre la ascensión oblicua de los grados de la eclíptica, y cómo el grado que está en medio de los cielos es determinado con respecto al grado de la salida del Sol 92
10. Del ángulo de sección de la eclíptica con el horizonte 93
11. Sobre el uso de estas tablas 98
12. Acerca de los ángulos y de los arcos de los círculos que se trazan desde los polos del horizonte al círculo de la eclíptica 98
13. Del orto y ocaso de los astros 99
14. Sobre la búsqueda de la posición de las estrellas y la descripción canónica de las estrellas fijas 100

LIBRO TERCERO 136
1. Sobre la precesión de los equinoccios y solsticios 136
2. Historia de las observaciones que confirman la irregular precesión de los equinoccios y los solsticios 137
3. Hipótesis con las que se demuestra la variación de los equinoccios y de la oblicuidad de la eclíptica y del ecuador 140
4. Cómo el movimiento recíproco, o movimiento de libración, se compone de movimientos circulares 142
5. Demostración de la irregularidad en la precesión de los equinoccios y en la oblicuidad 143
6. Acerca de los movimientos regulares de la precesión de los equinoccios y de la declinación del zodíaco 145
7. Cuál puede ser la máxima diferencia entre la precesión regular y la aparente de los equinoccios 152

8. Sobre las diferencias particulares de los mismos movimientos y su exposición canónica 153
9. Sobre el examen y corrección de lo que con respecto a la precesión de los equinoccios se expuso 156
10. Cuál puede ser la máxima diferencia entre las intersecciones del ecuador y del zodíaco [eclíptica] 157
11. Sobre la determinación de las posiciones de los movimientos regulares de los equinoccios y de la anomalía 158
12. Sobre el cálculo de la precesión del equinoccio de primavera y de la oblicuidad 159
13. Acerca de la magnitud y diferencia del año solar 161
14. Acerca de los movimientos regulares y medios de las revoluciones del centro de la Tierra 164
15. Principios para demostrar la irregularidad aparente del movimiento solar 172
16. De la aparente irregularidad del Sol 175
17. Demostración de la primera y anual irregularidad del Sol junto con sus particulares diferencias 178
18. Relativo al examen del movimiento regular según la longitud . 179
19. Sobre la determinación de las posiciones y de los principios [de los años] con respecto al movimiento regular del Sol 180
20. Sobre la segunda y doble irregularidad que acontece con respecto al Sol a causa del cambio de los ápsides 181
21. Sobre cuánta pueda ser la segunda diferencia en la irregularidad solar 184
22. De cómo el movimiento regular del apogeo solar se explicará conjuntamente con el irregular 185
23. Acerca de la corrección de la anomalía del Sol y de la determinación de sus posiciones 185
24. Exposición canónica de las diferencias entre el movimiento regular y el aparente [del Sol] 186
25. Sobre el cáculo de la apariencia solar 189
26. Sobre [las noches más los días], esto es, la variabilidad del día natural 190

LIBRO CUARTO 193
1. Las hipótesis sobre los círculos lunares según la opinión de los antiguos 193
2. Del defecto de estos supuestos 195
3. Otra opinión acerca del movimiento de la Luna 197
4. De las revoluciones de la Luna y de sus movimientos particulares 198
5. De la primera irregularidad que ocurre en la Luna nueva o llena. Demostración 206
6. Comprobación de lo que se expuso acerca de los movimientos regulares de la Luna en longitud y anomalía 212
7. De la posición en longitud y de la anomalía lunar 212

8. Acerca de la segunda irregularidad de la Luna y acerca de qué proporción pueda haber entre el epiciclo primero y el segundo 213
9. Acerca de la restante diferencia por la que la Luna parece moverse irregularmente desde el ápside superior del epiciclo . 214
10. De qué modo el movimiento aparente de la Luna se demuestra a partir de los datos de los movimientos regulares 215
11. Exposición canónica de las prostaféresis, o sea, de las «ecuaciones» lunares 217
12. Acerca del cálculo del curso lunar 220
13. Sobre el modo como se examina y se demuestra el movimiento de latitud lunar 221
14. De las posiciones de la anomalía lunar en latitud 223
15. Construcción de un instrumento paralláctico 224
16. De cómo se obtienen las conmutaciones de la Luna 225
17. Demostración de la distancia de la Luna a la Tierra y la medida que tenga en unidades, de las cuales una corresponde a la distancia del centro de la Tierra a su superficie [radio] ... 227
18. Acerca del diámetro de la Luna y de la sombra terrestre en el lugar de tránsito de la Luna 229
19. De cómo se demuestran al mismo tiempo la distancia del Sol y de la Luna desde la Tierra, sus diámetros y el de la sombra en la posición del tránsito de la Luna y el eje de la sombra ... 229
20. De la magnitud de estos tres astros, el Sol, la Luna y la Tierra y de su comparación mutua 231
21. Del diámetro aparente del Sol y de sus conmutaciones 232
22. Del diámetro desigualmente aparente de la Luna y de sus conmutaciones 233
23. Cómo se explica la diversidad de la sombra de la Tierra 233
24. Exposición canónica de las conmutaciones del Sol y de la Luna en el círculo que pasa por los polos del horizonte 234
25. Sobre el cálculo de la paralaje del Sol y de la Luna 239
26. De cómo se distinguen las paralajes de longitud y de latitud .. 240
27. Confirmación de lo que se ha expuesto respecto de las paralajes de la Luna 242
28. De las conjunciones y oposiciones medias del Sol y de la Luna 242
29. Sobre la indagación de las conjunciones y oposiciones reales del Sol y la Luna 244
30. De cómo se distinguen las conjunciones y oposiciones eclípticas del Sol y de la Luna de las otras 245
31. Cuán grande puede ser un eclipse de Sol o de Luna 245
32. Cómo conocer de antemano cuánto durará un eclipse 246

LIBRO QUINTO 249
1. Acerca de sus revoluciones y movimientos medios 249
2. Demostración de la regularidad y de la apariencia de estas estrellas, según la opinión de los antiguos 262

3. Demostración general de la irregularidad aparente a causa del movimiento de la Tierra 263
4. De qué modo aparecen como irregulares los movimientos propios de las estrellas errantes 264
5. Demostraciones del movimiento de Saturno 267
6. Acerca de otras tres posiciones acrónicas más recientes con respecto a Saturno 270
7. Sobre el examen del movimiento de Saturno 274
8. Acerca de la determinación de las posiciones de Saturno 274
9. Acerca de las conmutaciones de Saturno, que proceden anualmente de la órbita de la Tierra, y acerca de cuánta pueda ser las distancia de aquél 275
10. Demostraciones del movimiento de Júpiter 277
11. Sobre otras tres posiciones acrónicas de Júpiter recientemente observadas 279
12. Comprobación del movimiento regular de Júpiter 282
13. Posiciones que hay que asignar al movimento de Júpiter 283
14. Acerca de lo que se ha de investigar en las conmutaciones de Júpiter y de su altitud en relación con la órbita de la revolución terrestre 283
15. Sobre la estrella Marte 285
16. Acerca de otras tres oposiciones solares recientemente observadas con respecto a la estrella Marte 287
17. Comprobación del movimiento de Marte 289
18. Determinación de las posiciones de Marte 290
19. Sobre cuánto mediría la órbita de Marte si consideráramos la órbita anual de la Tierra como una unidad 290
20. Sobre la estrella Venus 292
21. Sobre cuál es la proporción entre los diámetros de la órbita de la Tierra y de Venus 293
22. Acerca del doble movimiento de Venus 294
23. Sobre el examen del movimiento de Venus 295
24. Acerca de las posiciones de la anomalía de Venus 298
25. Sobre Mercurio 298
26. Acerca de las posiciones de los ápsides superior e inferior de Mercurio 300
27. Sobre la magnitud de la excentricidad de Mercurio y de la simetría de sus órbitas 301
28. Por qué las digresiones de Mercurio parecen mayores alrededor de los lados del hexágono, que las que se producen en el perigeo 303
29. Examen del movimiento medio de Mercurio 304
30. Acerca de los movimientos de Mercurio observados más recientemente 306
31. Acerca de la determinación de las posiciones de Mercurio 310
32. Acerca de otra razón sobre la aproximación y el alejamiento 310

33. Acerca de las tablas de prostaféresis de las cinco estrellas errantes 311
34. Cómo se calculan las posiciones de estas cinco estrellas en longitud 322
35. Acerca de las detenciones y retrogradaciones de las cinco estrellas errantes 323
36. Cómo se diferencian los tiempos, posiciones y arcos de las regresiones 325

LIBRO SEXTO 328
1. Exposición general de la digresión en latitud de las cinco estrellas errantes 328
2. Hipótesis de los círculos en los que estas estrellas se mueven en latitud 330
3. Sobre cuál sea la inclinación de las órbitas de Saturno, Júpiter y Marte 333
4. Sobre la exposición de otras latitudes en particular y en general de estos tres astros 334
5. Sobre las latitudes de Venus y Mercurio 336
6. Acerca del segundo desplazamiento en latitud de Venus y Mercurio según la oblicuidad de sus órbitas en el apogeo y perigeo 338
7. Cuáles son los ángulos de oblicuidad de estas dos estrellas, Venus y Mercurio 339
8. Acerca del tercer aspecto de la latitud de Venus y Mercurio, al que llaman desviación 342
9. Acerca del cálculo de las latitudes de las cinco estrellas errantes 350

GALILEO GALILEI (1564-1642)
Vida y obra 351

Diálogo sobre dos nuevas ciencias 357

JORNADA PRIMERA 357

JORNADA SEGUNDA 425

JORNADA TERCERA 454
Sobre el movimiento local 454
Sobre el movimiento uniforme 455
Sobre el movimiento naturalmente acelerado 460

JORNADA CUARTA 518
Sobre el movimiento de los proyectiles 518

JOHANNES KEPLER (1571-1630)
Vida y obra 555

Las armonías del mundo 561

LIBRO QUINTO 561
Proemio 561
1. De las cinco figuras sólidas regulares 563
2. Del parentesco de las proporciones armónicas con las cinco figuras regulares 566
3. Suma de doctrina astronómica, necesaria a la contemplación de las armonías celestes 568
4. En qué cosas tocantes al movimiento de los planetas hállanse expresadas por el Creador las proporciones armónicas, y de qué modo 576
5. Cómo están expresadas en las proporciones de los movimientos planetarios las notas de la escala musical, o lugares del sistema, y los modos de armonía, mayor y menor 588
6. Cómo se hallan expresados cada uno de los tonos o modos musicales en los movimientos planetarios 593
7. Cómo pueden existir contrapuntos o armonías universales de todos los planetas, diferentes cada uno de las demás 594
8. Hállanse expresados en los planetas los cuatro contrapuntos naturales de las voces: soprano, contralto, tenor y bajo 603
9. Demostración de que para obtener tal disposición armónica debieron constituirse esas precisas excentricidades que cualquiera de los planetas tiene por sí, y no otras 604
10. Epílogo acerca del Sol, a modo de conjeturas fertilísimas 637

ISAAC NEWTON (1643-1727)
Vida y obra 643

Principios matemáticos de la filosofía natural 651
Definiciones 651
Axiomas o leyes del movimiento 659

LIBRO PRIMERO. Sobre el movimiento de los cuerpos 670
Sección I. Del método de las razones primeras y últimas por cuyo medio se demuestra lo que sigue 670
Sección II. Sobre el descubrimiento de las fuerzas centrípetas 678
Sección III. Del movimiento de los cuerpos en secciones cónicas excéntricas 689
Sección IV. De cómo hallar órbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas a partir de un foco dado 698
Sección V. La obtención de órbitas cuando no se da ninguno de los focos 704
Sección VI. Sobre cómo hallar los movimientos en órbitas dadas .. 723

Sección VII. Del ascenso y descenso rectilíneo de los cuerpos 728
Sección VIII. De cómo hallar órbitas en las cuales girasen cuerpos sujetos a fuerzas centrípetas cualesquiera 735
Sección IX. Del movimiento de cuerpos en órbitas móviles y del movimiento de ápsides 739
Sección X. Del movimiento de cuerpos en superficies dadas, y del movimiento de vaivén de los péndulos 748
Sección XI. Del movimiento de cuerpos que tienden unos a otros con fuerzas centrípetas 758
Sección XII. De las fuerzas atractivas de cuerpos esféricos 777
Sección XIII. Sobre las fuerzas atractivas de cuerpos no esféricos 791
Sección XIV. Sobre el movimiento de cuerpos mínimos que son sometidos a fuerzas centrípetas tendentes hacia cada parte de otro cuerpo muy grande 800

LIBRO SEGUNDO. Sobre el movimiento de los cuerpos 805
Sección I. Del movimiento de los cuerpos a los que se resiste en razón de la velocidad 805
Sección II. Del movimiento de los cuerpos a los que se resiste en razón del cuadrado de las velocidades 811
Sección III. Sobre el movimiento de los cuerpos a los que se resiste, parte en razón de las velocidades y parte en razón del cuadrado de dicha razón 829
Sección IV. Del movimiento circular de los cuerpos en medios resistentes 836
Sección V. Sobre la densidad y compresión de los fluidos, y sobre hidrostática 841
Sección VI. Del movimiento y resistencia de cuerpos pendulares 850
Sección VII. Sobre el movimiento de fluidos y la resistencia de proyectiles 867
Sección VIII. Sobre el movimiento que se propaga por los fluidos 895
Sección IX. Sobre el movimiento circular de los fluidos 907

LIBRO TERCERO. Sobre el sistema del mundo 915
Reglas para filosofar 915
Fenómenos 917
Proposiciones 921
Sobre el movimiento de los nodos de la Luna 961

ALBERT EINSTEIN (1879-1955)
Vida y obra 1021

El principio de la relatividad 1027

Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento 1027

¿Depende la inercia de un cuerpo de su contenido de energía? 1052

Sobre la influencia de la gravitación en la propagación de la luz .. 1055

El fundamento de la teoría de la relatividad general 1062

El principio de Hamilton y la teoría de la relatividad general 1106

Consideraciones cosmológicas sobre la teoría de la relatividad general 1111

¿Desempeñan los campos gravitatorios un papel esencial en la estructura de las partículas elementales de la materia? 1120

Stephen W. Hawking (Oxford, 1942) ocupó hasta 2009 la cátedra Lucasiana de Matemáticas que en otro tiempo ostentó Newton en la Universidad de Cambridge. Reconocido universalmente como uno de los más grandes físicos teóricos del mundo, el profesor Hawking ha escrito, pese a sus enormes limitaciones físicas, docenas de artículos que significan en conjunto una aportación a la ciencia que aún no somos capaces de evaluar adecuadamente. A sus primeras obras de divulgación, *Historia del tiempo. Del big bang a los agujeros negros* (Crítica, 1988), *El universo en una cáscara de nuez* (Crítica, 2002) y *El futuro del espaciotiempo* (junto a Kip S. Thorne y otros, Crítica, 2003), se añade ahora esta antología que, a buen seguro se convertirá en un texto canónico de la ciencia.

Este libro que el lector tiene en sus manos es una pieza única por su contenido y por quien lo ha compilado. En efecto, el gran científico Stephen Hawking ha reunido en él, por primera vez en la historia de la edición, las cinco obras que a su juicio representan el canon de la cultura universal en el campo de la Física y la Astronomía y ha escrito una introducción a cada una, explicando lo que han significado para la ciencia, vinculándolas entre sí y ofreciéndonos cinco soberbios retratos de los genios que las escribieron:

* Nicolás Copérnico, *Sobre las revoluciones de los orbes celestes*
* Galileo Galilei, *Diálogo sobre dos nuevas ciencias*
* Johannes Kepler, *Las armonías del mundo*
* Isaac Newton, *Principios matemáticos de la filosofía natural*
* Albert Einstein, *El principio de la relatividad*

En su conjunto, estas obras, escritas por los mayores pensadores de la historia de la Humanidad, constituyen un tesoro de conocimientos científicos que nadie puede ignorar. Son las piedras miliares de la ciencia moderna que nos enseñan cómo cada uno de los grandes hombres que las escribieron construyó sus teorías a partir de las contribuciones geniales de sus predecesores, en una cadena de gigantes de la inteligencia que llega hasta nuestros días con el propio Stephen Hawking, el gran físico teórico inglés autor de los best-sellers mundiales *Historia del tiempo* y *El universo en una cáscara de nuez*.

969048
9 788498 920949